UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO – UFPE
CENTRO DE EDUCAÇÃO – CE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

FERNANDO AUGUSTO DA SILVA SOUZA

A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS / NÚMEROS IRRACIONAIS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE CRÍTICA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Recife

2014

FERNANDO AUGUSTO DA SILVA SOUZA

A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS / NÚMEROS IRRACIONAIS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE CRÍTICA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador Prof.º Dr. Fernando Raul de Assis Neto.

Recife

2014

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S729i Souza, Fernando Augusto da Silva.
A introdução do conceito de grandezas incomensuráveis / números irracionais nos anos finais do ensino fundamental: uma análise crítica dos livros didáticos / Fernando Augusto da Silva Souza. – Recife: O autor, 2014.
150 f.; 30 cm.

Orientador: Fernando Raul de Assis Neto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2014.
Inclui Referências.
1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Incomensurabilidade. 3. Livro didático. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Assis Neto, Fernando Raul de. II. Título.

ALUNO:

FERNANDO AUGUSTO DA SILVA SOUZA

"A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS / NÚMEROS IRRACIONAIS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE CRÍTICA DOS LIVROS DIDÁTICOS"

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a conclusão do Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Aprovado em: 24/02/2014

Presidente e orientador
Prof. Dr. Fernando Raul de Assis Neto
UFPE

Examinador externo
Prof. Dr. Fernando Guedes Cury
UFRN

Examinador interno
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
UFPE

Recife, 24 de fevereiro de 2014.

AGRADECIMENTOS

Senhor Jesus, autor e consumador da minha fé, humildemente busco à tua presença para agradecer por todos os benefícios que o Senhor me tem concedido. A expressão da minha gratidão deve-se ao fato de que nada do que foi feito teria tido êxito se não fora o Senhor que estivesse ao meu lado durante esta jornada. Jornada esta na qual tive o privilégio de ter como orientador o professor Dr. Fernando Raul Neto que como um pai me disciplinava nas horas em que me afastava da rota e me encorajava nos momentos decisivos da pesquisa. Meu Jesus, obrigado! Lembro-me, Senhor, das professoras Doutoras Rosinalda Teles e Ruth Borba que foram instrumentos teus para me reanimarem num momento decisivo. Ao professor Dr. Marcelo Câmara pelas suas observações sempre bem humoradas que foram vitais a esta pesquisa, além da professora Paula Baltar, à frente da disciplina de seminários trazendo contribuições vitais sobre os números irracionais. Incluída está em minhas orações a vida de Clara, à frente da secretaria do EDUMATEC – UFPE, bem como todo o corpo docente e os amigos da turma 2012 e 2013 e, em particular, ao fiel amigo Tarcísio Rocha pela companhia nos estudos e críticas construtivas a este trabalho. Também te agradeço, ó Pai, pela vida do gestor da Gerência Regional de Educação Metropolitana Norte da Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, o professor Sinésio Monteiro de Melo Filho, pelo constante incentivo a esta pesquisa, bem como à professora Patrícia Dantas de Mesquita, chefe da Unidade de Desenvolvimento de Ensino da referida gerência pelo encorajamento. Não me esqueço dacompanhia de fé durante os intervalos bíblicos no porão daquela regional, a professora Maria das Dores Marcolino. Ah, Senhor, lembro também dos meus pais que sempre nos apoiaram em tudo. Ainda criança, quando pensava em ser cientista, o Sr. João Fernando, meu pai e amigo, sempre incentivando às novas descobertas e que, pacientemente, procurava responder a todos os milhares de porquês de seu curioso primogênito. A Sra. Severina Maria que aos quarenta anos de idade decide, contra tudo e todos, retomar os estudos básicos tendo que levar consigo, seus dois filhos pequenos, Nena e Guto. Ficava eu ali estudando também naqueles livros de papel jornal do Telecurso 1º e 2º graus, apesar de, ainda criança, e daquelas ilustrações monocromáticas. Agradeço a ti, Senhor, pelo

milagre da regeneração na vida do meu tio Paulo Sérgio, o mestre calculista, que foi a primeira pessoa a me indicar o caminho da Licenciatura em Matemática. Lembro-me de suas divertidas aulas que me levavam sempre a uma reflexão. Senhor, como agradecer também pela família que você me deu? A amada e linda esposa Nataly Pedrosa, sempre me encorajando nos momentos mais difíceis, além de nossos filhos Maria Fernanda e João Fernando Neto que, ao chegar cansado da jornada diária, se escondem, todos os dias, para que eu vá procurá-los. Nesse exercício, minhas forças se renovam! Apresento também ó pai, em minha oração, todos aqueles professores, que muitas vezes com lágrimas tentam dar o melhor de si durante suas aulas e, mesmo fatigados pela tripla jornada de trabalho adentram pela jornada da pesquisa. A estes, digo: avante! Não desistam! Assim eu te rogo e agradeço meu Deus. Em nome de Jesus, amém!

"Não temas, por que eu sou contigo; não te assombres, porque eu sou teu Deus; eu te fortaleço, e te ajudo, e te sustento com a destra da minha justiça".

Isaias 41: 10

RESUMO

Nesta pesquisa, buscou-se investigar como é realizada a introdução do conceito de número irracional nos Livros Didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (2014). A escolha do PNLD como fonte de investigação principal desta pesquisa se justifica pela influência pedagógica das publicações ali selecionadas. Por outro lado, o conteúdo dos números irracionais, presente no currículo de matemática das escolas brasileiras e abordado nos anos finais do Ensino Fundamental é de vital importância para a compreensão do conjunto dos números reais. Além disso, os números irracionais representam uma das temáticas de maior destaque na História da Matemática. Esta pesquisa adentrou numa revisão da literatura histórico-matemática, pesquisa nos documentos de orientações curriculares e estudos anteriores. O suporte teórico desta investigação foi fundamentado na História da Matemática como uma ferramenta de cunho exegético. Tal escolha foi motivada pela similaridade existente entre os filósofos gregos, no que se refere à descoberta das grandezas incomensuráveis e os estudantes do Ensino Fundamental, ao serem apresentados ao conteúdo dos números irracionais. No que diz respeito aos procedimentos metodológicos desta pesquisa, consideramos a mesma de abordagem qualitativa, de natureza básica e exploratória quanto aos seus objetivos. Já quanto aos procedimentos, bibliográfica. Pudemos observar, portanto, em nossa investigação que há certo avanço no cuidado ao introduzirem os números irracionais, porém ainda prevalecem algumas limitações quanto à abordagem inicial desta temática.

Palavras-chave: Número Irracional. Incomensurabilidade. Livro Didático. História da matemática.

ABSTRACT

In this study, we sought to investigate how it is performed by introducing the concept of irrational number in math textbooks the final years of elementary school approved by the National Textbook Program - PNLD (2014). The choice of PNLD as a source of primary research of this research is justified by the educational influence of the publications selected there. On the other hand, the content of irrational numbers, present in the mathematics curriculum of Brazilian schools and addressed in the final years of primary education is of vital importance for understanding the set of real numbers. In addition, irrational numbers represent one of the most prominent themes in the history of mathematics. This research entered a review of historical and mathematical literature, research in the curriculum guidelines documents and previous studies. The theoretical support for this research was based on the mathematics of history as an exegetical nature tool. This choice was motivated by the existing similarity between the Greek philosophers, with regard to the discovery of incommensurable magnitudes and students of elementary school, to be presented to the content of irrational numbers. With regard to the methodological procedures of this research, we consider the same qualitative approach, basic and exploratory nature and its objectives. As for the procedures, literature. We have seen, therefore, in our research that there is some progress in the care when introducing irrational numbers, but still prevail some limitations to the initial approach of this subject.

Keywords: Irrational Number. Incommensurability. Textbooks. History of Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> Podes dizer-me, Sócrates: a virtude é coisa que se ensina? Ou não é coisa que se ensina, mas que se adquire pelo exercício? Ou nem uma coisa que se adquire pelo exercício nem coisa que se aprende, mas algo que advém aos homens por natureza ou por alguma outra maneira? (Menon de Platão, 1ª proposição).

A descoberta das grandezas incomensuráveis por parte dos notáveis filósofos gregos tem lugar de destaque na História da Matemática. Durante muitos Séculos as questões ligadas aos números irracionais despertaram o interesse e motivaram pesquisas por parte de grandes nomes da Matemática desde os pitagóricos na Grécia do Século IV a.C., a Richard Dedekind na Europa do Século XIX da Era cristã. Na atualidade, os números irracionais são abordados inicialmente nos anos finais do Ensino Fundamental das escolas brasileiras de acordo com a Matriz de Referência de Matemática do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), o Guia de livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2014 (BRASIL, 2013)a Base Curricular Comum de Pernambuco – BCC (PERNAMBUCO, 2008) e os Parâmetros Curriculares da Educação Básica de Pernambuco – PCPE (PERNAMBUCO, 2012)no que dizem respeito à abordagem dos números irracionais nos livros didáticos, procuramos algumas justificativas da presença desta temática no currículo de matemática do quarto ciclo[1] do Ensino Fundamental de nosso país. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais é nesta fase da escolaridade que os estudantes se deparam com situações abstratas sobre a “infinitude de racionais entre dois naturais e a infinitude dos irracionais ou o impacto causado pela representação de π com um bilhão de casas decimais sem o surgimento de um período”. (BRASIL, 1998, p. 80).

Assim, não é surpresa que números do tipo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, entre outros irracionais já façam parte de inúmeros problemas contidos nos livros didáticos e, que os estudantes já tenham certa familiaridade com tais números, como por exemplo, problemas

[1] O quarto ciclo corresponde ao oitavo e nono ano do Ensino Fundamental, ou ainda, 7ª e 8ª série.

envolvendo a circunferência e o círculo, assim como os problemas com o lado e a diagonal do quadrado.

Os PCN (BRASIL, 1998) recomendam que os números irracionais sejam abordados de uma forma variada, lançando mão de outras estratégias através de construções geométricas com régua e compasso, bem como a sua localização na reta numérica. Também alertam sobre a impossibilidade de sua representação como uma razão de inteiros, além de ser um tipo de número cuja representação decimal é infinita e não periódica. Em particular, no Estado de Pernambuco, observamos nos PCPE (PERNAMBUCO, 2012), corroborando com os PCN que:

> É nessa etapa de escolaridade que tem início a construção do significado de **número irracional**, pela insuficiência dos números racionais para resolver determinados problemas de medição abstrata de grandezas no âmbito da matemática. Os irracionais devem ser vistos como números que não podem ser expressos por um quociente de inteiros. (PERNAMBUCO, 2012, p. 113, grifo dos autores).

Para Ávila (2006), a forma com que os números irracionais são introduzidos no Ensino Fundamental apresenta certas limitações. Para esse autor, os estudantes deste nível da escolaridade são apenas informados de algumas características gerais sobre os irracionais. Segundo o entendimento desse autor:

> O primeiro número Irracional com que nos familiarizamos ainda no Ensino Fundamental é o número π, razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. Mas, como a demonstração da irracionalidade desse número está fora do alcance da matemática do Ensino Fundamental e Médio, o aluno é apenas informado de que a expansão decimal desse número é infinita e não periódica. Um pouco mais tarde, ainda no Ensino Fundamental, o aluno trava conhecimento com os radicais; e, novamente, é apenas informado de que números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., são números irracionais (embora esteja perfeitamente ao seu alcance entender a demonstração de irracionalidade de $\sqrt{2}$, que fizemos atrás, bem como outras demonstrações dadas nos exercícios). (ÁVILA, 2006, p. 35).

Ainda para o autor anteriormente citado, há um perigo de que os estudantes possam deduzir que o conjunto dos números Irracionais seja formado apenas por π e alguns outros radicais. Na opinião de Souto (2010), quanto à abordagem inicial dos números Irracionais no ensino básico não são levadas em consideração as “implicações cognitivas das extensões de cada conjunto numérico” (SOUTO, 2011, p. 17), em específico quando a introdução dos números reais se dá a partir dos números racionais.

Outra observação desse autor diz respeito aos estudantes dos cursos de licenciatura em matemática ao se depararem com as disciplinas introdutórias de cálculo, tendo em vista que tais estudantes do Ensino Superior, supostamente, já tenham o conhecimento suficiente e necessário com relação a estes conteúdos. Segundo ele, uma abordagem inadequada desta temática pode ser prejudicial para os futuros professores. “[...] estes saltos podem acarretar em deficiências na preparação do professor para o ensino de números reais – o que pode acarretar em ciclo vicioso [...]”. (SOUTO, 2011, p. 18). É bem verdade que o foco desta investigação não é a formação dos professores de matemática, contudo, entendemos que há uma aproximação importante entre estes e o livro didático.

As pesquisas de Cobianchi (2001) e Fichbein *et. al.* (1995) Apud Pereira (2005) apontam que tanto estudantes quanto professores da Educação Básica apresentam dificuldades para distinguir números racionais dos números irracionais. Indicam ainda que o termo “irracional” equivale a “não inteiro” entre outros termos, além da dificuldade em aceitar que duas grandezas possam ser incomensuráveis.

O fato de os números irracionais apresentarem certa dificuldade de introdução e compreensão não é motivo de perplexidade uma vez que tais números representam uma temática sobremaneira difícil. Basta lembrarmo-nos da crise vivida pela escola pitagórica ainda na antiga Grécia e das várias tentativas da obtenção de um período para o número π como exemplos clássicos. Quanto às dificuldades de compreensão dos números irracionais os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que:

> Do ponto de vista de sua evolução histórica, a existência e a caracterização dos números irracionais foram questões bastante complicadas. Apesar de ser antiga a convivência do homem com os números irracionais, somente há pouco mais de cem anos é que estes números foram sistematizados. Possivelmente contribui para as dificuldades na aprendizagem dos números irracionais a inexistência de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais. Além disso, quando se estuda a reta numérica racional e se constrói o conhecimento da densidade dos números racionais – entre dois racionais há uma

> infinidade de racionais – parece não haver mais lugar na reta para nenhum tipo de número além dos racionais. (BRASIL, 1998, p. 106).

Tal como vimos na citação acima, e na ótica de Ávila (2006) foi apenas em meados do Século XIX que os matemáticos sentiram a necessidade de um tratamento mais minucioso dos diversos sistemas numéricos. Caraça (1951) também afirma que os estudos rigorosos sobre os números irracionais são datados de 1872,por parte do matemático alemão Richard Dedekind em sua obra *Continuidade e números irracionais.* Nesta obra, Dedekind aprofunda as discussões sobre o preenchimento de toda a reta numérica.

Além destas considerações anteriores, também sentimos falta, no que diz respeito à abordagem inicial dos números irracionais nos Livros Didáticos de um relacionamento entre as concepções numéricas e geométricas como constatado na afirmação abaixo:

> [...] a interface entre a representação decimal de um número irracional e sua representação geométrica não é realizada em momento algum no ensino da matemática. Ao contrário, pode-se dizer que no processo didático coexistem duas definições de número irracional. (REZENDE, W.,2003, p. 331, apud, POMMER, 2012).

Sendo assim, entendemos que o tratamento dispensado aos números irracionais ainda carece de cuidados e análises mais minuciosas sugerindo algumas indagações: Como ocorre essa introdução? Há clareza e objetividade? Os livros cumprem as recomendações dos documentos de orientações curriculares? Por que introdução dos números irracionais segue, tradicionalmente, uma linha metodológica pautada no eixo temático Números e Operações ao serem abordados nos anos finais do Ensino Fundamental nos Livros Didáticos de matemática? Quais os benefícios de uma articulação entre a geometria e a aritmética para a introdução de tal conceito numa perspectiva histórica?

Os PCN (BRASIL, 1998) destacam a importância da abordagem histórica com o propósito de analisar como o conhecimento matemático foi sendo desenvolvido ao longo do tempo, como segue:

> A História da Matemática pode ser também uma fonte de interesse para os jovens na medida em que permite reflexões sobre acasos, coincidências e convergências do espírito humano na construção do conhecimento acumulado pela humanidade. Não obstante os casos de rivalidade, ocultamentos e até mesquinharias, o conhecimento se constitui soberanamente. Uma história que pode levar à reflexões sobre as relações entre os homens e sobre indeléveis teias que conspiram a favor do avanço do conhecimento humano – quem sabe a favor dos próprios homens. (BRASIL, 1998, p. 80).

As indagações anteriores refletem nossa inquietação com relação aos Livros Didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental devido a sua relevância. Para Gérard & Roegiers (1998) o livro didático, dentre outros vários aspectos positivos, deve ir além das fronteiras da transmissão de conhecimentos. Deve levar em consideração os reais anseios dos alunos. É bem verdade que antes de existirem livros didáticos, o que prevalecia era a transmissão oral, forma pela qual os ensinamentos eram repassados às gerações posteriores. A transmissão oral tem o seu lugar de destaque nas mais diferentes culturas. Ao abordar esta temática, Schubring (2003, p. 20) afirma que "O primado da oralidade dominou todas as culturas até os tempos modernos, e a arte da memorização caiu em descrédito há apenas uma ou duas gerações". Em particular, na Grécia antiga, por volta do Século IV a.C., a transmissão oral fazia parte da metodologia de propagação de saberes de muitos sábios daquela época como Aristóteles ao ensinar enquanto caminhava. Esta forma de ensino ficou conhecida como Escola Peripatética.

Segundo Silva Júnior (2005) numa análise histórica, anterior à invenção do papel, as dificuldades de cada indivíduo possuir seu próprio exemplar eram devidas a escassez, raridade, alto custo e difícil manuseio de materiais para escrita como pergaminhos na Europa, papiros no Egito, tabletes de argila na Mesopotâmia e folha seca de palmeira na Índia. Como exemplos de documentos históricos que tinham uma finalidade didática quanto ao ensino de matemática por parte de civilizações antigas (op. cit.) destaca o papiro de *Rhind*[2] e o papiro de *Moscou*[3]. Em sua pesquisa, o referido autor, também destaca que a China, por volta do Século VI d.C., já possuía um

[2] O papiro de *Rhind* foi escrito por volta de 1650 a.C., no Egito, pelo escriba Ahmes e descoberto no Século XIX pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind. (GARBI, 2007, p.13).

[3] O papiro de *Moscou* foi escrito por volta de 1850 a.C., no Egito, de autoria desconhecida e comprado no Egito em 1893 pelo egiptólogo russo V. S. Golenishchev. (EVES, 2004, p.69).

currículo e livros textos para a matemática e outras disciplinas. Também destaca a importância do livro "Os elementos de Euclides", na Grécia do Século III a.C. como sendo o mais importante livro de ensino da matemática em toda a história da matemática. O fato dos *Elementos de Euclides* se destacar dos demais documentos históricos deve-se ao fato deste inaugurar o uso do método axiomático, de acordo com Silva Júnior (2005). Método este que serve de paradigma para as demais ciências até os dias atuais.

O panorama anteriormente descrito despertou o interesse pela temática, a qual veio a eclodir, inicialmente, de questionamentos advindos de nossa própria prática pedagógica tanto na Educação Básica como no Ensino Superior relacionada à utilização do livro didático de matemática. Por outro lado, os questionamentos que surgiram durante as aulas da disciplina Tópicos em História da Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (PPG - EDUMATEC – UFPE), no segundo semestre de 2011 ministradas pelo Professor Dr. Fernando Raul de Assis Neto[4] culminaram na elaboração de um projeto de pesquisa, célula mater desta dissertação. As aulas da referida disciplina representaram uma imersão no universo da História da Matemática. Tal imersão nos conduziu a uma forma de olhar os números irracionais sob um prisma exegético, investigativo com base em suas origens históricas. A cada momento iam surgindo novas evidências de que um tratamento geométrico, natural aos procedimentos utilizados pelos antigos filósofos gregos, poderia auxiliar nas exposições atuais, contidas nos Livros Didáticos.

Esta, portanto, foi a pedra fundamental, o ponto de partida, a gênese de nossa investigação. Fato que potencializou nosso desejo inicial sobre um aprofundamento na temática da incomensurabilidade, o que nos levou a duas pesquisas anteriores (SOUTO, 2010) e (ARAÚJO, 2011). Na primeira é feita uma investigação em nove coleções de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental aprovados pelo PNLD 2007 e cinco coleções de livros didáticos de matemática do Ensino Médio do

---

[4]Professor do departamento de filosofia da Universidade Federal de Pernambuco, participando como membro permanente do mestrado em filosofia e do doutorado em filosofia (este um programa integrado das instituições UFPE, UFPB E UFRN). Participa também, como professor colaborador, do EDUMATEC – UFPE, (mestrado em educação matemática e tecnológica).

Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM - 2008), sobre como o conceito de número irracional é organizado; que registros de representação são empregados e como essa organização se propõe a promover a aquisição do conhecimento de número irracional. Na segunda pesquisa é apresentada uma proposta didática, na qual consta uma série de atividades para serem aplicadas em processos de formação continuada com a finalidade de introduzir o conceito de número irracional com base na História da Matemática.

Encontramos convergência de opinião em (PEREIRA, 2005; PASQUINI, 2007; NAKAMURA, 2008; SOUTO, 2010; ARAÚJO, 2011) os quais são unânimes na afirmação de que esta temática, presente nos Livros Didáticos, tem grande relevância e serve de alicerce para a matemática do Ensino Superior e que a gama de dificuldades tradicionalmente apresentadas na literatura deve-se, em grande parte, à falta de habilidade com os números irracionais.

Quanto à abordagem inicial dos números irracionais por parte do livro didático de matemática, Gratuliano (2006) observou que “A definição de número irracional é abordada na 7ª série, mas geralmente, o assunto é apresentado em termos práticos através de regras para operar com radicais, o que se verifica na 8ª série”. (GRATULIANO, 2006, p. 11). Fato que, segundo esse autor, não possibilita ao estudante a percepção da utilidade deste conteúdo. Ainda na observação de Gratuliano (2006), os estudantes do Ensino Médio “não conseguem entender que o conjunto dos números irracionais é parte dos números reais, ficando sua aplicação restrita a racionalização de denominadores”. (GRATULIANO, 2006, p. 11).

Na ótica de Baroni e Nascimento (2005) o fundamento da Análise Real depende de um entendimento sólido dos números irracionais. Partindo do pressuposto anteriormente citado sobre a importância deste conjunto numérico, Souto (2010) afirma que, em geral, a abordagem dos Livros Didáticos não privilegia um aprofundamento conceitual tendo em vista que as atividades são tratadas, em sua maioria, de forma mecânica. De acordo com Miguel (1993), os números irracionais são tratados nos Livros Didáticos de matemática como “um amontoado de regras” com uma finalidade operatória sem uma “justificativa convincente” o que resulta em uma falta de interesse por parte dos estudantes. Não ficam claras, na ótica deste autor, a utilidade, o desafio e as aplicações deste conteúdo havendo ainda, uma desconexão com os demais temas do programa de matemática.

Neste aspecto, de articulação com outros eixos temáticos da matemática, (PASQUINI, 2007) apresenta uma proposta de introdução dos números irracionais através de medições e comparações de segmentos. Ou seja, uma abordagem geométrica e não apenas aritmética como hora está evidenciada nos Livros Didáticos. Nos chama bastante atenção os dados da pesquisa de (PEREIRA, 2005) que analisou livros didáticos do final do Século XIX e do século XX verificando que, com o passar do tempo, houve uma ausência da noção de medida como fator de introdução para os números irracionais. Na pesquisa acima citada, verificou-se que apenas um dos sete livros analisados tratava sobre o tema das grandezas incomensuráveis com exemplos e demonstrações geométricas.

O fato de os números irracionais serem tratados, na maioria dos casos, apenas no eixo temático números e operações e não em outros eixos como grandezas e medidas, conforme a pesquisa de (PEREIRA, 2005), trouxe-nos uma inquietação que nos leva, inevitavelmente, a uma investigação com vistas à reconstrução histórica do conceito de número irracional.

A hipótese da presente pesquisa sugere que a forma com que a temática dos números irracionais é introduzida nos Livros Didáticos de matemática não é, do ponto de vista didático, satisfatório. Em nossa análise crítica, presente nesta pesquisa, fica claro que o problema em tela não é de ordem matemática, mas sim, de ordem didática. Ou seja, o conjunto dos números irracionais é plenamente conhecido da comunidade dos matemáticos, Contudo, é imprescindível que seja apresentado aos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental que ainda não o conhecem.

Tal fato nos conduziu a uma analogia: os estudantes deste nível de escolaridade se encontram em um momento filosófico semelhante aos sábios gregos do Século IV A.C. no estágio histórico da descoberta das grandezas incomensuráveis segundo (Souza. F. A. S.& Assis Neto, 2013).

O objetivo geral deste trabalho é, portanto, investigar como é realizada a introdução do conceito de número irracional nos livros didáticos de matemática no oitavo e nono ano dos anos finais do Ensino Fundamental das coleções aprovadas pelo

Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2014). Os específicos estão elencados a seguir:

- Relatar, por meio de uma análise crítica, a forma com que são introduzidos os números irracionais nos Livros Didáticos de matemática do PNLD - 2014;

- Investigar se a introdução do conceito de número irracional é realizada através de uma dupla abordagem contemplando a aritmética e a geometria;

- Analisar se as coleções atendem as recomendações propostas nos documentos de orientações curriculares referentes aos números irracionais.

Logo após a introdução, apresentamos no segundo capítulo a construção histórica dos números irracionais. Trata-se de um breve panorama histórico com o objetivo de situar o leitor acerca do cenário que estava por trás da descoberta da incomensurabilidade, as fontes históricas, os matemáticos e suas contribuições para o tema. Investigaremos também o problema da interface entre a aritmética e a geometria relativa aos números irracionais. Ainda neste capítulo, adentramos no conceito de antifairese, bem como suas técnicas e procedimentos com o objetivo de explorar o conceito de número irracional de formas variadas. No terceiro, investigamos os números irracionais na educação básica, a partir de estudos realizados anteriormente, bem como os documentos de orientações curriculares com respeito aos números irracionais.

No quarto capítulo apresentamos o PNLD e sua relevância em nosso país. Já no capítulo quinto, encontram-se os procedimentos metodológicos desta investigação, assim como nosso referencial teórico.

O capítulo seis é o mais extenso desta pesquisa e é dedicado à análise crítica dos Livros Didáticos de matemática aprovados pelo PNLD – 2014.

No capítulo sete, finalmente, apresentamos as considerações finais, bem como as possibilidades de estudos posteriores oriundos desta investigação.

2 A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Antes de argumentarmos sobre o processo de construção do conceito de número irracional, gostaríamos de dedicar algumas linhas sobre a História da Matemática como área do conhecimento matemático. Ela tem se consolidado ano após ano, tanto no contexto nacional como no contexto internacional. Segundo Miguel e Miorim (2011) foi no início da Década de 80 do Século XX, mais precisamente no ano de 1983 durante a realização do Workshop *História na Educação Matemática* em Toronto, Canadá, com a criação do *International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) filiado à Comissão Internacional de Ensino de Matemática (ICMI) que se constituiu um marco da retomada do interesse das pesquisas em História da Matemática no âmbito internacional.

No Brasil, os pesquisadores em História da Matemática tem se organizado desde meados da Década de 80. Miguel e Miorim (1999) afirmam que a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) foi criada em 1999 durante o III Seminário Nacional de História da Matemática na cidade de Vitória (ES). Em particular, o Estado de Pernambuco também traz sua contribuição para História da Matemática no Brasil, ao sediar o I Seminário Nacional de História da Matemática na Universidade Federal de Pernambuco, no ano de 1995[5].

Com o passar dos anos, o termo História da Matemática foi adquirindo sentidos múltiplos. Cada um desses sentidos possui uma especificidade própria na Educação Matemática interconectadas às questões históricas como constatamos a seguir:

> Entretanto, o movimento em torno da História da Matemática já é tão amplo e diversificado que poderíamos acusar a constituição, em seu interior, de vários campos de pesquisa autônomos, que, no entanto, mantém, em comum, a preocupação de natureza histórica incidindo em uma das múltiplas relações que poderiam ser estabelecidas entre a História, a Matemática, a Educação. Dentre tais campos de investigação, três deles se destacam: o da História da Matemática propriamente dita, o da História da Educação Matemática e o da História na Educação Matemática. (Miguel e Miorim, 2011, p. 11).

[5]Anais do I Seminário Nacional de História da Matemática. Editor: Fernando Raul Neto. Recife – PE, Brasil, 1995.

Todos os três campos de investigação em História da Matemática – História da Matemática, História da Educação Matemática e História na Educação Matemática - tem sua importância e relevância. No caso específico desta investigação, nos debruçamos no campo da História da Matemática propriamente dita.

Groenwald (2004) ressalta a importância da abordagem histórica como fonte de elucidação para os conceitos matemáticos:

> O enfoque histórico é uma proposta metodológica que permite ao aluno descobrir a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula. Em outras palavras este enfoque permitirá ao aluno fazer relação das ideias matemáticas desenvolvidas em sala de aula com suas origens. O conhecimento da história da matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução dessa disciplina, buscando as ideias originais em toda sua essência. GROENWALD ET al. (2004, p.47).

Os PCN também indicam que a História da Matemática pode ser uma fonte de despertamento do interesse dos estudantes como segue:

> A História da Matemática pode ser também uma fonte de interesse para os jovens na medida em que permite reflexões sobre acasos, coincidências e convergências do espirito humano na construção do conhecimento acumulado pela humanidade. (BRASIL, 1998, p. 80)

Baroni e Nobre (1999) ressaltam a crescente quantidade de publicações e do interesse nesta área do conhecimento. Para estes autores "a História da Matemática, assim como a análise, a álgebra, a topologia, etc., é uma área do conhecimento matemático, um campo de investigação científica, por isso é ingênuo considerá-la como um simples instrumento metodológico". (BARONI e NOBRE, 1999, p 130). Para eles é de grande importância que o professor de matemática, além de conhecer o conteúdo matemático, conheça também a história do conteúdo matemático. Nesta perspectiva, entendemos ser muito esclarecedor revisitar os conteúdos matemáticos com um olhar histórico. Isto possibilita ao pesquisador, quer seja aluno quer seja professor, ter uma visão clara da trajetória do conteúdo matemático através do tempo e das circunstâncias, como já visto anteriormente.

Nesta pesquisa em particular, além das fontes anteriormente citadas, debruçamo-nos sobre os estudos dos renomados historiadores matemáticos Wilbur Richard Knorr (1975) e David Hilbert Fowler (1999), os quais se aprofundaram, em suas pesquisas, na história da matemática relativa à Grécia.

2.1 A Grécia

Nesta pesquisa, temos como inspiração o contexto histórico da cultura grega dos tempos antigos tendo em vista sua incontestável sistematização dos conceitos lógico-matemáticos e sua influência posterior a qual perdura até os dias atuais. Segundo Eves (2004), a Grécia dos últimos séculos do segundo Milênio a.C., proporcionou ao mundo uma experiência de mudanças significativas e transformadoras nos cenários da política e da economia. Nesta época, de grande avanço comercial e, sobretudo, intelectual, com o surgimento de escolas de pensadores denominadas *academias*, começam a lançar os primeiros fundamentos da matemática da forma como a conhecemos atualmente. Nas praças ou *ágoras* onde era praticado o comércio, também eram encontrados vários pensadores, os quais discursavam e ensinavam regularmente propagando suas ideias. Naturalmente, nas *ágoras* transitavam povos de muitos outros lugares, fato que potencializou a propagação dos saberes filosóficos daqueles sábios gregos como podemos constatar a seguir:

> A despeito da desunião política, da escassez de alimentos, da superpopulação e do quase permanente estado de guerra, o período helênico grego (800 – 336 a.C.) testemunhou realizações intelectuais extraordinárias. Nas “*ágoras”* de Atenas e de outras Cidades-estados, os filósofos ensinavam seus discípulos e lançavam novas ideias. Foi nessa época que se escreveram histórias reais pela primeira vez: a descrição otimista das gloriosas vitórias gregas sobre os invasores persas feitas por Heródoto (484? – 424? a.C.) e o relato angustiado da luta fraticida entre esparta e Atenas foi feita por Tucídides (460? – 400? a.c.). Foi também nesse período que se assistiu pela primeira vez ao emprego do raciocínio dedutivo em matemática – o que se deve a tales de mileto (640? – 564? a.C.) e Pitágoras (586? – 500 a.c.). (EVES, 2004, p. 92).

Na opinião de Eves (2004) a fase final dos dois últimos milênios a.C. foi marcada pelo declínio dos impérios egípcio e babilônio. Para este autor, o mundo de então começara a experimentar mudanças radicais em todos os seguimentos da sociedade, sobretudo, na forma de pensar.

> O aparecimento dessa nova civilização se deu nas cidades comerciais espalhadas ao longo das costas da Ásia Menor e, mais tarde, na parte continental da Grécia, na Sicília e no litoral da Itália. A visão estática do Oriente antigo sobre as coisas tornou-se insustentável e, numa atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar *como e por quê.* (EVES, 2004, p. 94).

Naturalmente os gregos não deram contribuição filosófica apenas para a matemática, mas para os mais diversos ramos do saber. Com relação a afirmações diretamente ligadas ao mundo da matemática Eves (2004) afirma que:

> Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como *“Por que* os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?” e *“Por que* o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?”. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por quê.* (EVES, 2004, p. 94).

Tais mudanças foram decisivas para um novo modo de pensamento, tendo a lógica como fundamento, ou seja, a forma dedutiva de pensar. É nesta fase que testemunhamos a criação de um novo paradigma: a matemática demonstrativa.

Acreditamos que cada civilização “herda” saberes de uma ou de outras anteriores. Segundo Barbosa (2012), Heródoto, historiador grego, tendo vivido por volta do Século V a.C. analisa, de forma empírica, a influência da matemática egípcia sobre a matemática grega, corroborando com nossa assertiva em relação à influência de culturas anteriores como segue:

> O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia. (HERÓDOTO, 1970, p. 116).

Segundo Bicudo (1999), a matemática grega, descende diretamente da matemática egípcia (geometria) e babilônia, sendo Tales de Mileto seu introdutor. Em sua opinião, o que distingue o pensamento matemático grego das demais culturas, contemporâneas ou anteriores a esta, deve-se ao fato desta ter tido duas preocupações: "definir os conceitos de uma certa teoria e demonstrar as propriedades desses conceitos" (BICUDO, 1999, p. 117). No que diz respeito à caracterização da matemática grega, Bicudo (1999) afirma:

> Sem nos reportarmos à China ou a Índia, sabemos do apreciável conhecimento dos egípcios e do substancial conhecimento matemático dos babilônios em épocas que precederam os séculos acima assinalados. No entanto, no que pese o enorme volume dos achados arqueológicos provenientes dessas civilizações, não conseguimos encontrar, em seus textos matemáticos, nada que lembre, o mais remotamente possível, a ideia de uma demonstração. Suas obras são coletâneas de problemas mais ou menos interessantes, cujas soluções são encaminhadas por meio de passos recomendados, como instruções para as etapas de um ritual, sem qualquer explicação. (BICUDO, 1999, p. 118).

Ainda segundo Bicudo (1999), numa visão panorâmica sobre a arquitetura da matemática grega dos Séculos V e IV a.C., sistematizada por Euclides em sua obra Elementos (stoicheia) está baseada em: conceitos primitivos e derivados, axiomas e teoremas[6]. O autor acima citado, também destaca o nível de abstração da matemática babilônia com relação à egípcia fazendo referência ao Plimpton 322[7], contudo incomparável ao nível de abstração da matemática grega.

Dois nomes são emblemáticos no que diz respeito ao início da matemática Grega: Tales de Mileto, como visto acima, e Pitágoras de Samos. Segundo Boyer (1974), Tanto Tales quanto Pitágoras, representam "figuras imprecisas historicamente". Ele afirma que não há registros de suas obras e, até mesmo, as suas existências são envoltas de mistérios e informações sem exatidão alertando que os relatos acerca destes matemáticos não são baseados em documentos históricos, mas em "tradições

[6]Sugerimos, segundo o desejo do leitor, à consulta ao dicionário Abbagnano de filosofia para uma visão mais abrangente dos conceitos aqui elencados.

[7]Placa cuneiforme de argila, adquirida por G. A. Plimpton em 1922e analisada pelo historiador matemático Otto Neugebauer, em que estão gravadas ternas de números positivos x, y, z tais que $x^2 + y^2 = z^2$.

persistentes”. Ou seja, “uma tradição não muito digna de confiança.” (BOYER, 1974, p.34). Como pudemos verificar nas afirmações anteriores, incontestavelmente, inúmeros povos e culturas deram grande contribuição para o avanço da matemática, bem como, foram palco de grandes acontecimentos. Reconhecemos nitidamente este fato, contudo, em nosso recorte histórico, focalizamos justamente a contribuição dos gregos por alguns motivos específicos de interesse desta investigação, ou seja, a descoberta das grandezas incomensuráveis. Verificamos, portanto, que o pensamento grego alcançou um alto nível de abstração, argumentação e demonstração, fatos que inevitavelmente causaram destaque e influência entre as demais civilizações tornando-se uma cultura de referência. Percebemos que por diversos motivos, a matemática grega é sem sombra de dúvida, a maior fonte de contribuição e, sobretudo, de influência sobre os matemáticos das gerações subsequentes espalhados por todo o mundo até os dias atuais.

2.2 O sumário Eudemiano

Partindo para o contexto especifico da matemática grega da fase final do segundo milênio a.C., na ótica de Araújo (2011), o que sabemos sobre a matemática grega procede dos escritos de Platão e Aristóteles, assim como dos *Elementos* de Euclides, que segundo o autor acima citado, os *Elementos,* trata-se, na verdade de uma compilação de saberes matemáticos anteriores ao próprio Euclides. Para Knorr (1993), renomado historiador matemático, apud Araújo (2011),as fontes históricas são muito fragmentadas. “A limitação causada pela escassez de fontes dessa época faz com que o trabalho do historiador da ciência pareça, até certo ponto, especulativo. De certo modo, seu trabalho é preencher as lacunas a partir dos fragmentos aos quais tem acesso”. (ARAÚJO, 2011, p. 15).

Segundo Eves (2004) a principal fonte de informações com relação ao início da matemática grega é o *sumário Eudemiano,* de autoria de Proclo Lício, um filósofo neoplatônico do Século V d.C., nascido na região da Lícia tendo, posteriormente, ido para Atenas tendo ali permanecido até o fim de seus dias. O *sumário Eudemiano* é, portanto, um resumo de como a matemática grega se desenvolveu desde o seu início com Tales, no Século V a.C. até a época de Euclides, no Século III a.C. Ainda segundo Eves (2004), ainda que Proclo tenha vivido após o intervalo de aproximadamente mil anos de distância dos mais importantes acontecimentos da matemática grega do Século V, ele teria tido ainda acesso a muitos trabalhos históricos, hoje perdidos. O título de tal obra, o *sumário Eudemiano* deve-se exatamente ao matemático grego Eudemo, discípulo de Aristóteles. Ainda no *sumário Eudemiano*, encontramos os relatos das obras de Tales de Mileto bem como os relatos sobre a obra do matemático cuja vida é cercada de mistérios e superstições: Pitágoras de Samos.

De acordo com Boyer (1974), algumas frases-chaves são devidas a esses filósofos como "Conhece a ti mesmo", atribuída a Tales e "Tudo é número", atribuída a Pitágoras. Além das frases anteriormente mencionadas são atribuídas a Tales de Mileto as afirmações abaixo, segundo Eves (2004):

- Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado;
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
- Ângulos opostos pelos vértices são iguais;
- Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais;
- Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.

Como sabemos, não há exatidão sobre a autoria dos ensinamentos deste matemático, se dele próprio ou se de seus discípulos não sendo nossa intenção adentrar por tal investigação nesta pesquisa.

2.3 As grandezas incomensuráveis

Para os pitagóricos, segundo Boyer (1974), todo o universo poderia ser compreendido através de números inteiros e suas razões. Por outro lado, de acordo com esse autor, outros filósofos também procuravam identificar um princípio fundamental para todas as coisas, um elemento que fosse o fundamento, o átomo, a menor partícula. Eram os filósofos jônios da Ásia menor como Tales de Mileto, o qual acreditava que a água seria, portanto, esse elemento. Além de opiniões de que o fogo ou o ar seriam os elementos básicos, respectivamente, segundo outros pensadores.

A afirmação de que tudo é número é atribuída, como se sabe, aos pitagóricos. Para estes, a essência de todas as coisas. No que diz respeito ao grau de importância dos números para os pitagóricos, Boyer (1974) afirma que:

> Era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem pode ser explicado em termos de *arithmos,* ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões. (BOYER, 1974, p. 53).

Eves (2004), também expressa, a seguir, tal importância dada aos números, o que veio a se tornar uma característica marcante dos pitagóricos, bem como algumas implicações, pois:

> A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido da teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico. Esse grupo de matérias tornou-se conhecido na Idade Média como *quadrivium*, ao qual se acrescentava o *trivium,* formado de gramática, lógica e retórica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa educada. (EVES, 2004, p.97).

Quanto à noção de número por parte dos gregos, Ávila (2006) nos chama à atenção que:

> [...] na Grécia antiga, os únicos números reconhecidos como tais eram os números 2, 3, 4, etc. O próprio 1 não era considerado número, mas a "unidade", a partir da qual se formavam os números. As frações só apareciam indiretamente na forma de razão de duas grandezas, como, por exemplo, quando dizemos que o volume de uma esfera está para o volume do cilindro reto que a circunscreve assim como 2 está para 3. Os números que hoje chamamos de "irracionais" também não existiam na Matemática grega. (ÁVILA, 2006, p. 46).

Pode até parecer-nos tão óbvio a concepção atual do número um e da própria representação do numeral um, contudo, para os gregos, assim como visto na citação anterior, eles não possuíam o mesmo entendimento da unidade como atualmente concebemos, não sendo nossa intenção adentrar na simbologia e misticismos que envolvia o conceito de número para os gregos, em particular, para os pitagóricos, contudo, a unidade é um conceito de fundamental importância para a medição de segmentos, como também a ideia de razão, que veremos mais adiante.

Segundo Boyer (1974), apoiado nos escritos de Platão, os pitagóricos foram abalados com a constatação de que os números inteiros e suas razões não eram capazes de descrever situações comuns vividas pelos matemáticos da época:

> Os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo propriedades básicas. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado. Os segmentos são incomensuráveis, não importa quão pequena se torne a unidade de medida. (BOYER, 1974, p. 53).

De acordo com Boyer (1974), os gregos começaram a perceberam que os números inteiros e suas razões eram insuficientes para demostrar propriedades básicas como a relação entre o lado e a diagonal de um quadrado, bem como, lado e diagonal de um pentágono, pois tais segmentos são incomensuráveis. Por menor que seja a unidade adotada, ainda assim, nunca haverá uma medida comum entre estes segmentos anteriormente citados.

São conhecidos muitos contos sobre a descoberta da incomensurabilidade, contudo, segundo Boyer (1974), não se sabe exatamente quando ou como isto aconteceu. Sendo assim esse autor afirma:

> Quando ou como foi feita a descoberta não se sabe, mas muita tinta se gastou em apoio de uma ou de outra hipótese. Argumentos antigos a favor de uma origem hindu da descoberta não tem base e parece improvável que o próprio Pitágoras conhecesse o problema da incomensurabilidade. A sugestão mais plausível é que a descoberta fosse feita por pitagóricos em algum momento antes de 410 a.C. Alguns a atribuem especificamente a Hipasus de Metapontum durante a primeira parte do último quarto do quinto Século a. C. enquanto que outros a colocam meio século mais tarde. (BOYER, 1974, p. 53 – 54).

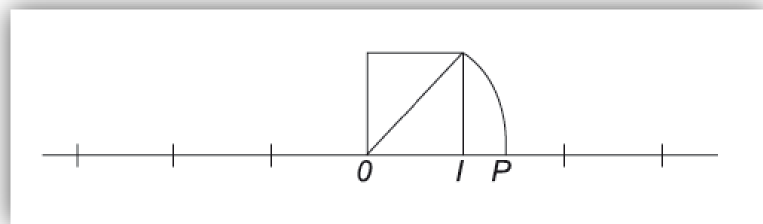
Na opinião de Fowler (1999), uma análise mais sensata, sugere que esta descoberta não tenha sido motivo para escândalos ou conflitos, mas que, de fato mereça lugar de destaque na história da matemática e na própria história do desenvolvimento intelectual humano.

Já na ótica de Ávila (2006), a descoberta das grandezas incomensuráveis representa a “gênese” dos números irracionais. Segundo ele, os números irracionais, após sua descoberta foram utilizados durante séculos, mas apenas, no Século XIX foram logicamente construídos. Em sua obra, intitulada *Análise matemática para Licenciatura,* Ávila (2006) evoca a história da matemática em todos os capítulos objetivando facilitar o entendimento dos conteúdos apresentados. Também lança mão de vários exemplos e demonstrações com um texto cuidadosamente explicativo. Em nossa opinião, a estrutura de sua obra torna a leitura bastante agradável aguçando a curiosidade em cada capítulo lido, em particular, no que se refere à descoberta das grandezas incomensuráveis.

Para Ávila (2006), assim como a unidade, os números irracionais também não eram conhecidos pelos gregos sendo conhecidas muitas hipóteses com respeito ao primeiro número irracional. Algumas dessas hipóteses referem-se exatamente a $\sqrt{2}$, como sendo o primeiro número irracional com demonstração já conhecida pelo matemático grego Aristóteles (384 – 322 a.C.), de acordo com Eves (2004).

Tal demonstração consiste em provar por absurdo a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado, com lado medindo uma unidade de comprimento qualquer, ou seja, um quadrado unitário. Na opinião de Ávila (2006) é fácil a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, utilizando-se de um raciocínio por absurdo. Esta demonstração, segundo (FIGUEIREDO, 1996; EVES, 2004; ÁVILA, 2006) parte da premissa que a diagonal do referido quadrado seja um racional da forma p/q, com p e q inteiros, com q ≠ 0. Antes da demonstração, vejamos a ilustração abaixo:

Figura 01 – Representação de número irracional na reta.



Fonte: Eves, 2004, p. 105.

Na ilustração acima, temos um quadrado, cujo lado, é o segmento de uma reta *R* com extremidade zero e um. O segmento *OP* é a diagonal do referido quadrado. Segundo Eves (2004) os pitagóricos sabiam que o ponto *P* não correspondia a um racional. Retomemos, portanto, à comprovação de que a diagonal e o lado do quadrado são segmentos incomensuráveis, ou seja, comprovar a irracionalidade da diagonal.

Segundo Ávila (2006), se considerarmos, contraditoriamente, que a $\sqrt{2}$ é racional, certamente haveria dois inteiros positivos *p* e *q*, tais que $\sqrt{2} = p/q$, sendo *p/q* uma fração irredutível, ou seja, *p* e *q* primos entre si. Vejamos:

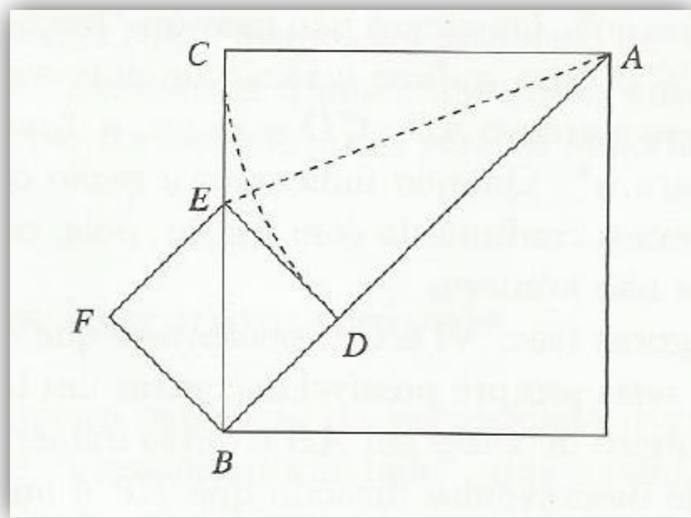
I. Seja $\sqrt{\mathbf{2}} = {}^{\boldsymbol{p}}/_{\boldsymbol{q}}$
II. Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{\mathbf{2}}\right)^2 = \left({}^{\boldsymbol{p}}/_{\boldsymbol{q}}\right)^2 \leftrightarrow \mathbf{2} = {}^{\boldsymbol{p}^2}/_{\boldsymbol{q}^2}$$

III. Em que: $\boldsymbol{p}^2 = 2\boldsymbol{q}^2$

Na conclusão de (FIGUEIREDO, 1996, p. 5): “Logo p^2 é um inteiro par, o que implica que p é par, isto é, $p = 2r$. Portanto, $4r^2 = 2q^2$, ou seja, $q^2 = 2r^2$, de onde se segue que q é par. Ora, p e q sendo números pares, não podem ser primos entre si. Essa é a contradição”. Porém para Ávila (2006), a afirmação de que $\sqrt{2}$ seja irracional, tendo como método de comprovação o descrito anteriormente, só seria possível mediante o conhecimento prévio dos números irracionais, opinião que divide os historiadores matemáticos.Segundo esse autor, foram os próprios pitagóricos que descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis (ÁVILA, 2006, p. 48). Segundo a figura abaixo, ele descreve com um argumento geométrico tal fato.

Figura 02 – Representação de grandezas incomensuráveis.



Fonte: Ávila, 2006, p. 48.

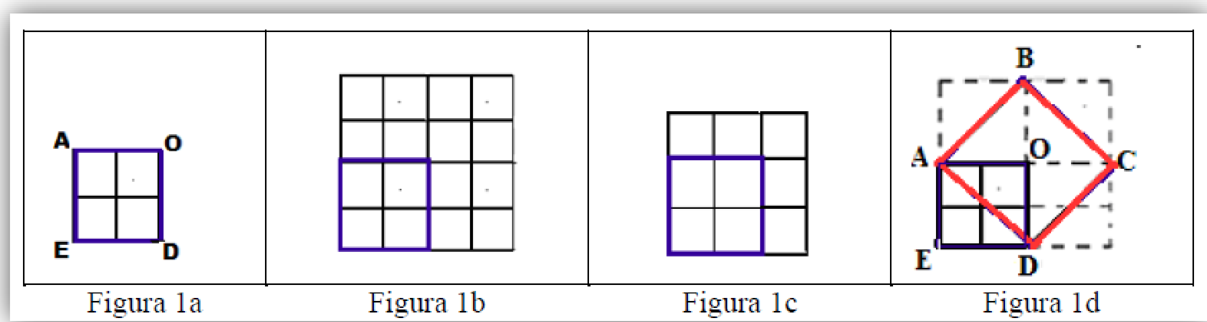
Da mesma forma que há, do ponto de vista algébrico, a redução por absurdo, é apresentado acima uma redução por absurdo, porém com uma argumentação geométrica, pois:

> A figura **acima** ilustra um quadrado com diagonalδ = *AB* e lado λ = *AC.* Suponhamos, por absurdo, que δ e λ sejam comensuráveis. Então existirá um terceiro segmento σ, submúltiplo comum de δ e λ. Com centro em *A* e raio *AC* tracemos um arco de circunferência *CD*, o qual corta a diagonal *AB* em *D.* Seja *ED* a tangente a esse

> arco em *D*. Como *AD* = *AC*, os triângulos retângulos *ACE* e *ADE* são congruentes, de sorte que os catetos *CE* e *ED* são congruentes. Como o triângulo *BDE* é retângulo isósceles, concluímos que também são congruentes os segmentos *BD* e *DE*. Portanto, $\delta = AB = AD + BD = \lambda + BD, \lambda = BC = BE + EC = BE + BD$, ou seja, $\delta = \lambda + BD$, $\lambda = BE + BD$. [...] Dessa maneira, provamos que o segmento σ deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos, o que é absurdo. (ÁVILA, 2006, p. 48 – 49).

No Mênon de Platão, encontramos o diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon em que Sócrates inquire o jovem escravo sobre a possibilidade de duplicação da área de um quadrado. Segundo Fowler (1999) este trecho do diálogo é o primeiro texto direto que se tem conhecimento sobre a matemática grega datada de aproximadamente 385 a.C. Neste referido diálogo, conforme Pommer (2012), Sócrates desenha um quadrado cujo lado media “dois pés”, de acordo com a figura 1a, abaixo. Logo em seguida, pede ao jovem escravo que desenhe um quadrado com o dobro da área do quadrado anterior. O jovem escravo indica que um quadrado com o dobro da área do quadrado anterior deveria ter “quatro pés” como medida de seu respectivo lado conforme ilustrado na figura 2b, abaixo. Para surpresa do jovem escravo a área, ao invés de duplicar, quadruplica! Imediatamente, sugere uma correção: que o lado do referido quadrado deveria ter então “três pés” conforme a figura 1c. Fato que ainda assim, não atendia a resolução da questão proposta por Sócrates. Finalmente, Sócrates apresenta a solução da questão conforme a figura 1d. Vajamos:

Fig. 03 – Duplicação da área do quadrado.



Fonte: Bekken,1994, p. 34 – 35, apud. Pommer, 2012, p.19.

2.4 A antifairese

Vários autores (PEREIRA, 2005; PASQUINI, 2005; NAKAMURA, 2012) tem se debruçado sobre a temática dos números irracionais numa perspectiva histórica ressaltando sua importância na trajetória dos estudantes do Ensino Fundamental na transição para o Ensino Médio e Superior. Dentre os quais, gostaríamos de destacar Pereira (2005) ao afirmar que:

> A questão dos números irracionais percorre, dentro da história da matemática, um caminho bastante longo, que remonta aos gregos, na busca de encontrar solução para o problema da incomensurabilidade. Destruiu-se todo o ideal pitagórico, que reduzia tudo a número, causando-se a primeira crise dos fundamentos matemáticos. O problema não foi resolvido até a descoberta da teoria das proporções de Eudoxo (408 a.C. – 355 a.C.), que utiliza apenas argumentos geométricos, colocando a geometria como centro do conhecimento matemático. Somente no Século XIX, como parte do Movimento da Aritmetização da Análise, matemáticos, como os alemães Dedekind (1831 – 1916) e Cantor (1845 – 1918), formalizaram o conceito de número real. (PEREIRA, 2005, p. 5).

Na ótica de Araújo (2011), os *elementos* de Euclides apresentam duas formas distintas para a teoria das proporções: uma versão contida no Livro VII relacionada à razão de números inteiros e atribuída aos pitagóricos. A segunda, relacionada às grandezas incomensuráveis, presente no Livro V, atribuída ao matemático platônico, Eudoxo. O autor acima citado comenta sobre o um método que poderia articular grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

> Entendemos, então, que a reconstrução de Fowler, baseada no trabalho de Knorr, propõe a existência de uma teoria das razões baseada no método das subtrações recíprocas que era capaz de tratar satisfatoriamente grandezas e números. A essa noção de razão Fowler dá o nome de *razão antifairética*, com referência ao método de antifairese, que significa, literalmente, subtrações recíprocas. (ARAÚJO, 2011, p. 17).

Segundo Fowler (1999), a palavra de origem grega *antifairesis* advém do verbo *antufairein* (ανθυφαιρειν) encontrado nos Livros VII e X dos *elementos de* Euclides.

Significa literalmente “subtrações recíprocas”, ou ainda “subtrações mútuas”. Sendo assim, o processo que realiza subtrações mútuas, recíprocas ou repetidas é chamado, portanto, de “antifairese”, enquanto que o resultado deste processo é chamado de “razão antifairética”. O termo pode ser fragmentado para um melhor entendimento do leitor como segue: *anto* = recíproco; *hypo* = sub; *hairesis* = tração. Conforme verificado nos *elementos* por Fowler (1999) este processo era utilizado por Euclides para encontrar a maior medida comum entre duas grandezas como também critério para a verificação da incomensurabilidade. O autor acima citado afirma que o processo da antifairese não se dá através da divisão, mas sim, através da subtração. Sendo assim, Fowler (1999), evita nomenclaturas modernas tais como “algoritmo de Euclides” e “frações contínuas”. Por um lado, o algoritmo de Euclides é baseado no processo de divisão enquanto que as frações contínuas são concebidas através dos números reais com processos atuais e sofisticadas de generalização de frações. A proposta do autor acima citado se baseia numa abordagem diferente, ou seja, uma abordagem heurística. Uma abordagem que consiste em reconstruir os passos adotados pelos gregos apoiados na aritmética e nas demonstrações geométricas.

> Uma das hipóteses mais confiáveis, defendida por historiadores como Freudenthal, Knorr e Fowler, é a de que o método da antifairese estava na base de uma teoria das razões e proporções que era praticada, pelo menos, durante o Século IV a.C. e que teria sido desenvolvida por Teeteto, matemático contemporâneo de Platão e pertencente ao seu círculo. (ARAÚJO, 2011, p. 16).

3 OS NÚMEROS IRRACIONAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Diversas pesquisas no âmbito internacional (FISCHBEIN, JEHIAN e COHEN, 1995; BERGÉ e SESSA, 2003; SIROTIC e ZAZKIS, 2004) como também pesquisas nacionais, a saber, (MIGUEL, 1993; SOARES, FERREIRA e MOREIRA, 1999; COBIANCHI, 2002; BARONI e NASCIMENTO, 2005) investigaram esta temática. Tais pesquisas apontam que tanto estudantes quanto professores apresentam dificuldades no entendimento dos números irracionais. Outras pesquisas também apontam sobre a forma como os números irracionais são abordados nos Livros Didáticos de matemática tendo como suporte a história da matemática (PASQUINI, 2007; NAKAMURA, 2008; SOUTO 2010, ARAÚJO, 2011). Na ótica de Pasquini (2007) a maioria dos livros utilizados nos cursos de licenciatura em matemática no Brasil não trata, de forma específica, a construção dos números reais. Apenas apresentam esse conjunto como um Corpo Ordenado Completo. Fato este, que na opinião da autora anteriormente citada, é insuficiente tendo em vista que a "discussão da ideia de número real é fundamental para a formação de um professor de matemática". Esta autora também salienta que este tema "é inspiração para grande parte da matemática" destacando a necessidade de uma abordagem específica tendo como alvo a formação dos futuros professores.

Uma fundamentação inadequada dos conceitos sobre os números irracionais reflete negativamente nos futuros estudantes dos cursos de ciências exatas e de licenciatura em matemática, sobretudo, nas disciplinas de cálculo diferencial e integral e análise real. É o que conclui Baroni, Teixeira e Nobre (2011).

Na opinião de Souto (2010), as dificuldades no entendimento dos números irracionais podem influenciar negativamente na aprendizagem de conceitos mais avançados. Ele ainda aponta em sua investigação algumas concepções errôneas entre os números racionais e os irracionais. Segundo Miguel (1993), o ensino dos números irracionais se reduz apenas a técnicas e procedimentos sem uma reflexão mais abrangente do tema como veremos a seguir:

> A razão de nossa escolha ter recaído sobre esse tema deve-se ao fato de, tradicionalmente, as passagens dos textos didáticos de matemática

> para a escola secundária a ele reduzem-se, invariavelmente, a um amontoado de regras de operar com os radicais para as quais, na maioria das vezes, não se apresentam justificativas convincentes e que acabam por constituir-se, aos olhos dos estudantes, em conhecimentos pouco úteis, pouco desafiadores e desligados dos demais temas presentes nos programas de matemática. (MIGUEL, 1993, p.168).

Em seu trabalho de investigação histórica sobre os números irracionais, Miguel (1993), destaca o contraste entre um modelo clássico, estéril e nunca questionado sobre a forma como esta temática é transposta didaticamente e a “elevada dosagem de imaginação, sutileza e ousadia que impregnaram sua produção histórica”. No que diz respeito à imaginação, sutileza e ousadia, inevitavelmente, lembramo-nos dos grandes feitos realizados pelos estudiosos da matemática do passado desprovidos do arsenal tecnológico que hoje dispomos. Quanto a estas questões históricas, veremos uma abordagem mais aprofundada em capítulo posterior deste trabalho.

3.1 Estudos realizados

Segundo Souto (2010), muitos estudantes chegam ao fim do Ensino Fundamental e Médio sem um conhecimento adequado sobre os números irracionais. Ele sugere que a raiz do problema esteja na formação inicial dos futuros professores e na forma como os números irracionais são apresentados como podemos constatar:

> É demasiada a limitação ao apresentar, na educação básica, apenas o cálculo com radicais como, por exemplo, de operação $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π como únicos exemplos de irracionais. Acreditamos que esse fato aconteça devido à má formação em nível superior dos futuros professores e à maneira pela qual tais conceitos são apresentados nos livros didáticos. Ou seja, os futuros professores ministrarão em sala de aula aquilo que encontram nos livros didáticos, pois o que é tratado nos cursos de licenciatura é de certa forma distante e desconectado das problemáticas que envolvem o ensino desses conceitos na Educação Básica. (SOUTO, 2010, p. 20).

Em sua pesquisa, Souto (2010) analisou 09 (nove) dos 16 (dezesseis) Livros Didáticos de matemática do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD – 2008) bem como 05 (cinco) coleções das 08 (oito) aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM – 2008). A pesquisa acima citada buscou investigar e registar como a história da matemática foi utilizada nos livros analisados. Para isso, o autor, criou categorias específicas de avaliação sob a influência da análise preliminar de OZAMIR e PEREZ (1993) apud Souto (2010) os quais afirmam que a história da matemática visa atingir os seguintes objetivos:

- Mostrar que o processo do descobrimento matemático é algo vivo e em desenvolvimento;
- Aceitar o significado dos objetos matemáticos em seu triplo significado: institucional, pessoal e temporal;
- Estabelecer distinções entre uma prova, uma argumentação e uma demonstração dos conceitos matemáticos, bem como saber dosá-las de maneira equilibrada no currículo escolar.

Diante das análises preliminares conforme visto anteriormente, a pesquisa de Souto (2010) objetivou responder se a abordagem histórica, relativa aos números irracionais, contida nos Livros Didáticos possuía as características: 1) Informação geral; 2) Informação adicional e 3) Estratégia didática. Tal pesquisa teve como aporte teórico a Teoria de Registros de Representação Semióticas de Durval (2003) como também a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999).

A conclusão da pesquisa anteriormente citada aponta que as abordagens históricas da maioria dos livros analisados apresentam dados isolados e informações desprovidas de problemática, geralmente dispostos, no decorrer e no final dos textos na forma de informações adicionais. Conclui também que, quanto à praxeologia, referente às atividades envolvendo os números irracionais é incompleta valorizando apenas procedimentos relativos ao saber-fazer em contraposição às atividades propostas pela pesquisa anteriormente citada. Ficam igualmente evidenciadas na pesquisa de Souto (2011) as limitações, no que diz respeito ao conceito de incomensurabilidade, tal conceito é citado, em apenas dois, do total de quatorze livros analisados.

Já a pesquisa de Pereira (2005), nos chama atenção por ter buscado explorar os aspectos algébricos e geométricos dos números reais no Ensino Fundamental. Para isso, escolheu o teorema de Tales tendo em vista a relevância deste conteúdo nessa fase da escolarização. Nesta pesquisa são investigados os casos relativos à comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos no teorema de Tales. Segundo Niven (1984) apud Pereira (2005), muitos livros de Ensino Fundamental e Médio, ao trabalhar o teorema de Tales, apresentam demonstrações incompletas no que se refere aos números irracionais. A pesquisa de (PEREIRA, 2005), adentra tanto no universo da história da matemática, quanto do livro didático de matemática, corroborando com os estudos de Niven (1984), verificando que o teorema de Tales é tratado, na maioria dos caos, “de forma superficial sem estabelecer a diferença entre o racional e o irracional”. (PEREIRA, 2005, p. 12).

A pesquisa acima citada analisou sete Livros Didáticos brasileiros de matemática editados no período da segunda metade do Século XIX ao final do Século XX, como segue: Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilínea (C.B. Ottoni, 1904), Elementos de Geometria (F.I.C, 1923)[8], Curso de Mathemática (E. Roxo, C. Thiré e J. C. Mello e Souza, 1940-42), Matemática – Curso Moderno (A. Quintella, 1960-63), Matemática – Curso Ginasial (O. Sangiorgi, 1968-70), A Conquista da Matemática (J.R. Giovanni e J.B. Castrucci, 1985) e Matemática (L. M. P. Imenes e M. Lellis, 1999).

> Nessa análise percebeu-se que a maioria dos livros didáticos selecionados na pesquisa apresentou o teorema de Thales remetendo a demonstração para o caso em que os segmentos eram comensuráveis. Porém, o primeiro livro analisado, faz uma discussão na demonstração, tanto para o caso em que os segmentos eram comensuráveis, quanto incomensuráveis. Foi possível perceber que, nesse período, o assunto foi perdendo a precisão nos manuais escolares analisados. (PEREIRA, 2005, p. 10).

As observações contidas na pesquisa anteriormente citada, em específico, sobre a obra de Otonni (1904) são motivo de destaque, tendo em vista seu tratamento e

[8]A sigla F.I.C. indica uma série de publicações com origem, em 1660, nas escolas francesas da congregação *Frères de l'Instruction Chrétienne.*(ALMEIDA, 2011, p.01).

cuidado tanto com os segmentos comensuráveis quanto incomensuráveis relativos à abordagem do teorema de Tales. Para Silva (2000) apud Pereira (2005), O estilo de Otonni (1904) segue uma linha Euclidiana com grande influência de autores como Legendre e Lacroix, segundo a afirmação a seguir:

> O estilo do autor é ainda euclidiano – colocando uma ênfase forte no método dedutivo, sem qualquer apelo à intuição, nem mostrando a relação da geometria com o cotidiano, sem exercícios propostos ou resolvidos, sem ilustrações. Basicamente, em cada capítulo começa por definições e axiomas, seguindo-se os teoremas e suas demonstrações. Este livro texto, que segue o estilo de Legendre, serviu de modelo para outros autores que foram surgindo no decorrer do Século. (SILVA, 2000, p. 148, apud PEREIRA, 2005, p. 63).

Ainda sob a ótica de Pereira (2005), em sua conclusão, com o passar dos tempos, os livros didáticos de matemática foram se distanciando cada vez mais das demonstrações ligadas à incomensurabilidade de segmentos.

No que diz respeito aos estudos realizados sobre o livro didático, parece-nos razoável a suposição de que este seja, para muitos docentes, o único referencial teórico. A fonte, a base de suas pesquisas e, consequentemente, de seu planejamento. Santos (2012) ressalta o grau de importância que alguns professores atribuem ao livro didático chegando a considerá-lo uma “bíblia”. (SANTOS, 2012, p. 16). Acreditamos na importância do professor levar em consideração também outras fontes de pesquisa. Principalmente pelo fato do momento, ora vivido, em que as distâncias estão cada vez menores, sobretudo, no que diz respeito ao acesso à informação. Percebemos, contudo um grande perigo: de acordo com Freitag (1993) Apud Santos (2012) “professores e alunos tornam-se escravos do livro didático”. Esta afirmação parece ainda perdurar mesmo nos dias atuais como observado na pesquisa anteriormente citada.

Dante (1996), afirma, em consonância com nossa assertiva no início desta seção, que o livro didático de matemática é de fato, em muitos casos, “o único instrumento de apoio ao trabalho docente”. (DANTE, 1996, p. 01). Segundo ele, o livro didático, chega a determinar o ritmo, a amplitude e a sequencia dos conteúdos de matemática a serem trabalhados em sala de aula.

É muito comum a suposição de que os estudantes dos cursos de licenciatura em matemática, ou seja, futuros professores tenham um bom conhecimento ou familiaridade no que diz respeito aos números reais. Nem sempre isto é verdade. Segundo a pesquisa de (MELO, 1999), a qual investigou alunos dos cursos de ciências exatas de quatro importantes universidades do Estado de Pernambuco verificou graves dificuldades no entendimento do conceito de número irracional bem como o desconhecimento de sua trajetória histórica.

No trabalho de (SOARES, 1999) apud (PEREIRA, 2005) no qual apresenta os resultados de uma investigação com 84 sujeitos, estudantes do curso de matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) com o objetivo de analisar as concepções acerca do conjunto dos números reais para os estudantes, revelou que as causas principais da má compreensão deste conjunto numérico se dão pela falta de entendimento sobre a incomensurabilidade entre dois segmentos, bem como a falta de clareza sobre o sentido e a necessidade dos irracionais. Segundo Pereira (2005) uma maneira interessante de introduzir os números irracionais é através de uma abordagem geométrica com medições de segmentos como segue:

> Dentro dos diversos motivos mencionados acima, acreditamos que o conceito de número irracional é um assunto ainda muito confuso para estudantes e que esse assunto é intuitivamente difícil, principalmente se for excluída do ensino a relação entre os números irracionais e a incomensurabilidade, daí a importância de se trabalhar com esse tema. Acreditamos que o trabalho com os números reais, com enfoque geométrico pode promover um maior entendimento do conceito, uma vez que trabalhar com entes pode favorecer ao aluno uma visão significativa da questão. (PEREIRA, 2005, p. 17).

Como vimos anteriormente, esta temática carece de uma exploração didática mais cuidadosa por apresentar uma epistemologia diferente da dos números racionais. Os fenômenos que dão origem aos números irracionais são diferentes dos que geram os números racionais. Todavia, muitos Livros Didáticos não fazem adequadamente esta distinção como observado por Ávila (2006). Uma das consequências inevitáveis, em nossa opinião, das dificuldades enfrentadas na formação inicial dos professores de matemática, deve-se exatamente ao fato destes estarem fortemente apoiados no livro didático, como dito anteriormente.

Na pesquisa de SIROTIC e ZAZKIS (2004) a qual investigou quarenta e seis sujeitos (professores de matemática do ensino básico) diagnosticando que:

- Mais de 40% dos sujeitos não conseguiram identificar a representação decimal infinita e não periódica como um número irracional;
- Mais de 30% dos sujeitos falharam em reconhecer a representação de um número racional como uma fração de dois inteiros, ou apresentaram justificativas incorretas;
- Dificuldade em reconhecer o número 0,12122122212... como irracional;
- Dificuldade em reconhecer o número 0,012222... como racional.
- A classificação do quociente da fração 53/83 como sendo um número irracional.

3.2 Os documentos de orientações curriculares

Atualmente, no Brasil, não há uma normatização curricular para as disciplinas a serem trabalhadas nas escolas de nosso país. O que existem são parâmetros, recomendações e propostas curriculares que visam nortear a elaboração de materiais didáticos a serem disponibilizados aos Sistemas de Ensino.

Para esta pesquisa nos debruçamos, sobretudo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN – 1998), na Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (BCCPE – 2008) e nos Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco (PCPE – 2012).

No que diz respeito à abordagem dos números irracionais no Ensino Fundamental, pudemos observar nos PCN ainda alguns obstáculos ao entendimento do seu conceito, pois:

> De modo geral, as formas utilizadas no estudo dos números irracionais têm se limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais. Apesar de tradicionalmente ocupar um razoável espaço no currículo do quarto ciclo, o trabalho com radicais pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito. (BRASIL, 1998, p. 106).

Como já dissemos, os números irracionais estão presentes no currículo de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental das escolas brasileiras como podemos constatar em consulta aos (PCN, 1998; BCCPE, 2008; PCPE, 2012). A presença deste conteúdo se justifica tendo em vista que, segundo os PCN, nesta fase da escolarização o conjunto dos números racionais não dá conta da resolução certos problemas matemáticos. Também encontramos nos PCN as recomendações de que forma os números irracionais sejam inicialmente abordados:

> Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional como um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como acontece tradicionalmente. (BRASIL, 1998, p. 83).

Dentre os vários objetivos dos PCN para o ensino da matemática com vistas ao desenvolvimento específico do pensamento numérico, através de situações de aprendizagem, para o quarto ciclo, encontramos:

> ▪ Ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais;
>
> ▪ Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação.
>
> ▪ Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo como números naturais, inteiros, racionais e irracionais. (BRASIL, 1998, p. 87).

Nos chama a atenção às observações feitas pelos PCN quanto a alguns critérios importantes que devem ser considerados quanto ao tratamento dos números irracionais e que os estudantes sejam capazes de:

> I. Identificar o número irracional como um número de infinitas “casas” decimais não periódicas;

> II. Identifique esse número com um ponto na reta situado entre dois racionais apropriados;
>
> III. Reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros;
>
> IV. Conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números. (BRASIL, 1998, p. 83).

Além dos critérios acima elencados, também verificamos a necessidade de que o aluno seja capaz de constatar que existem situações-problemas relacionadas à geometria e medição de segmentos em que as soluções obtidas não são números racionais como π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ entre outros. Os PCN ressaltam também o cuidado das aproximações tanto por parte dos números racionais quanto por parte dos números irracionais. Naturalmente, em ambos os casos, surge à necessidade de realizar aproximações. Estas aproximações devem obedecer a critérios adequados a cada caso específico como apontam os PCN.

4 PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD)

Foge ao escopo deste trabalho uma imersão histórica sobre o Programa Nacional do Livro Didático, contudo, achamos importante apresentar uma visão panorâmica cabendo, entretanto, à sugestão de um aprofundamento maior, dependendo do interesse do leitor, sobre a temática segundo as referências bibliográficas presentes nesta pesquisa.

A criação do Programa Nacional do Livro Didático remonta ao ano de 1929 com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL) com a finalidade de dar maior legitimação ao livro didático como também o aumento de sua produção e distribuição em nosso país. No ano 1938 através do Decreto-Lei nº 1.006, de 30/12/1938 em que o Estado institui a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) sendo assim o marco inicial para a política de legislação, controle, produção e circulação do livro didático no Brasil.

Atualmente o programa é mantido pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) com a finalidade de assegurar a chegada do livro didático a todos os estudantes da educação básica com exceção da Educação Infantil, servido como grande aliado do professor que tem a garantia que todos os seus alunos receberão este importante instrumento pedagógico.

O PNLD do segmento anos finais do Ensino Fundamental tem periodicidade trienal devendo os livros ser reaproveitados pelos estudantes das séries subsequentes durante a vigência do triênio. Cabe ao estudante, portanto a boa conservação do livro que estará em seu poder durante o ano letivo cujo mesmo deverá chegar às mãos de um novo estudante a até o fim do ciclo previsto.

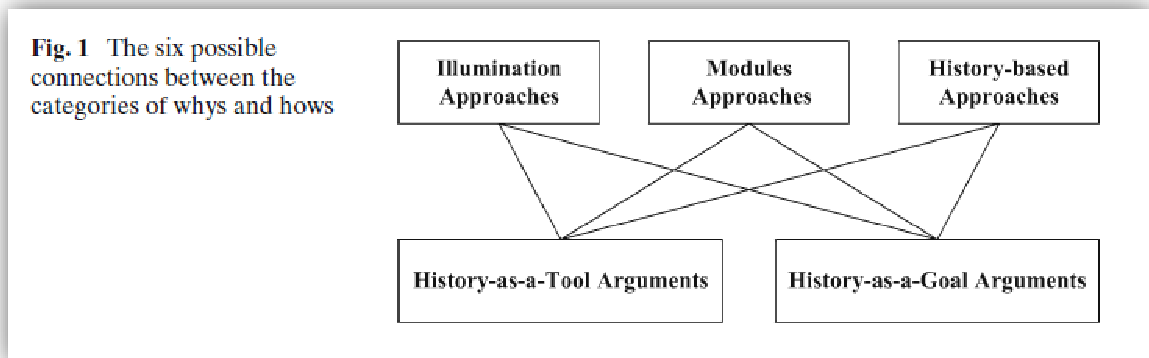
Para o processo da escolha das obras são designadas Instituições de Ensino Superior, a Secretaria de Educação Básica, bem como especialistas de várias áreas. Cabem as editoras a inscrição das obras tendo em vista que as mesmas são as detentoras dos direitos autorais devendo assim obedecer às normas publicadas no edital público para o PNLD. No caso específico dos livros de matemática, a Instituição de Ensino Superior (IES) que atualmente os avalia é a Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

Para surpresa nossa, nesta edição do PNLD, verificamos que algumas obras de autores consagrados e sempre presentes nas últimas edições ficaram de fora, a saber: Matemática e realidade; A conquista da matemática e Tudo é matemática. Além de outras como: Aplicando a matemática; Projeto Radix – matemática, perfazendo um total de cinco obras. As novidades são: Descobrindo e aplicando a matemática; Praticando matemática; Projeto araribá; Projeto teláris e Projeto velear conforme a tabela 01 desta pesquisa.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Segundo Jankvist (2009), a História da Matemática é dividida em duas concepções ou classes, a saber: História da Matemática como ferramenta e História da Matemática como meta. A primeira diz respeito ao fato da história da matemática ser encarada como um instrumento didático, enquanto que a segunda concepção ou classe se refere a sua utilização como um fim em si mesma, um objetivo, uma meta. Jankvist (2009, p.16).

Fig. 04 – As seis possibilidades de conexão entre categorias.



Fonte: Jankvist, U. T. (2009).

Ainda sob as lentes de Jankvist (2009), independentemente do modo com que a História da Matemática seja encarada há três categorias que sempre estarão presentes como já vimos acima e trataremos delas a partir de então: abordagem de iluminação, abordagem modular e abordagem histórica.

A abordagem de iluminação consiste em informações históricas pontuais ou suplementares que segundo Tzanakis e Arcavi (2000) apud Jankvist (2009, p. 247) são “informações factuais isoladas” ou “trechos históricos”, os quais podem ser nomes, datas, obras famosas e eventos, gráficos de tempo, biografias e problemas famosos. Há também questões como anedotas e contos entre outros semelhantes se enquadram nesta categoria. Este tipo de abordagem é muito frequente nos livros didáticos e, geralmente aparecem nas introduções ou nas partes finais dos capítulos dos referidos livros.

Já a abordagem modular se refere a “unidades de ensino dedicadas à história e, muitas vezes, elas se baseiam em casos”. (JANKVIST, 2009, p. 12). Segundo este autor o termo “módulo” é devido a Katz e Michalowicz (2004). Estes módulos possuem fortes laços com o currículo, mas não necessariamente o seguem a risca. Ocupam dois ou três períodos de aula e geralmente já devem estar e planejados e prontos para a sua utilização em sala de aula.

A abordagem histórica, por sua vez, é uma categoria que propõe uma imersão no contexto histórico também chamado de abordagem genética. Neste tipo de abordagem há uma investigação mais acurada, exegética, do cenário e das circunstâncias que estavam por trás do fato em si, possibilitando assim uma reconstrução ou reconstituição do momento vivido pelos atores em suas situações numa tentativa de uma aproximação cada vez maior com o objeto de investigação possibilitando ao estudante ou pesquisador o entendimento ou a redescoberta do conceito. É, portanto, a abordagem histórica, que mais se enquadra como pressuposto teórico-metodológico desta pesquisa.

Neste capítulo apresentaremos as considerações acerca do percurso metodológico no qual está pautada nossa dissertação. Naturalmente, como pode ser comum em outras tantas investigações a indagação: qual o percurso metodológico será trilhado em nossa pesquisa? Quais os óculos de nossa investigação? Quais as categorias de análise?

Nossa investigação trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, de natureza básica, quanto aos seus objetivos: exploratória e, quanto aos procedimentos, bibliográfica de acordo com a classificação proposta por (Gerhardt e Silveira, 2009).

Segundo (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 01) para a realização de uma pesquisa deve-se: “promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto, mais o conhecimento teórico acumulado a respeito do assunto escolhido”. Nesta perspectiva entendemos que os dados referem-se ao conteúdo por nós investigado – os números irracionais – presentes nos Livros Didáticos, as evidências que vêm junto com as informações coletadas em pesquisas anteriores às quais revelam dificuldades deste tema tanto para alunos quanto para professores. Já o conhecimento teórico advém da bibliografia existente sobre esta temática.

> [...] isso se faz a partir do estudo de um problema, que ao mesmo tempo desperta o interesse do pesquisador e limita sua atividade de pesquisa a uma determinada porção do saber, a qual ele se compromete a construir naquele momento. Trata-se, assim, de uma ocasião privilegiada, reunindo o pensamento e a ação de uma pessoa, ou de um grupo, no esforço de elaborar o conhecimento de aspectos da realidade que deverão servir para a composição de soluções propostas aos seus problemas. Esse conhecimento é, portanto, fruto da curiosidade, da inquietação, da inteligência e da atividade investigativa dos indivíduos, a partir e em continuação do que já foi elaborado e sistematizado pelos que trabalharam o assunto anteriormente. Tanto pode ser confirmado como negado pela pesquisa o que se acumulou a respeito desse assunto, **mas o que não pode ser é ignorado**. (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 02, grifo nosso.).

O tipo de pesquisa classificada como bibliográfica (GIL, 2006) ou também denominada como fonte secundária (MARCONI e LAKATOS, 2007) como esta, deve ter como base o "material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". (GIL, op. cit., p. 44). "Esse tipo de pesquisa é desenvolvido a partir de material já elaborado didaticamente". (FIGUEIREDO, 2010, p. 88). Entendemos, portanto, que os pressupostos metodológicos da pesquisa bibliográfica atendem aos anseios desta pesquisa. Para Figueiredo (2010), o levantamento bibliográfico é a primeira etapa da pesquisa, uma vez que:

> A bibliografia pertinente "oferece meios para definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também explorar novas áreas onde os problemas não se cristalizaram suficientemente" e tem por objetivo permitir ao cientista "o reforço paralelo na análise de suas pesquisas ou manipulação de suas informações". (Manzo, 1971, p. 32 apud Lakatos, 2007, p. 185).

Mesmo se tratando de uma pesquisa qualitativa, não temos aqui a intensão de realizar um tratamento estatístico dos dados como em algumas pesquisas de mesma natureza, tão pouco uma categorização rigorosa como é comum.

A proposta deste trabalho é bem mais modesta, consta de uma análise investigativa da introdução do conceito de número irracional nos Livros Didáticos de matemática com o propósito de que os resultados desta pesquisa possam contribuir para pesquisas posteriores bem como para a continuidade de nossa jornada acadêmica no doutorado.

Para isto seguimos as recomendações de (MARCONI e LAKATOS, 2007) no que diz respeito à forma de organização da pesquisa bibliográfica que tanto pode ser vista como uma etapa da pesquisa, quanto como a própria pesquisa. Decidimos então, organizar a análise do material coletado em fichas bibliográficas analíticas ou de comentário que consiste:

> [...] na explicitação ou interpretação crítica pessoal das ideias expressas pelo autor, ao longo de seu trabalho ou parte dele. Pode apresentar:
> a) **Comentário sobre a forma** pela qual o autor desenvolve seu trabalho, no que se refere aos aspectos metodológicos;
> b) **Análise crítica do conteúdo**, tomando como referencial a própria obra;
> c) **Interpretação de um texto obscuro** para torná-lo mais claro;
> d) **Comparação da obra com outros trabalhos sobre o mesmo tema**;
> e) **Explicitação da importância da obra para o estudo em pauta**. (Idem, p. 59, grifo das autoras).

Segundo (Idem, 2007), chegamos ao entendimento que deveríamos também criar tópicos de análise que pudessem nos auxiliar na classificação dos dados coletados. Estes tópicos representam os nossos óculos investigativos, a saber:

1. Forma de Introdução do conceito de número irracional;
2. Clareza e coerência;
3. Atenção aos documentos de orientações curriculares.

Os três tópicos acima são precedidos por outros três tópicos mais abrangentes que visam dar ao leitor uma visão panorâmica de cada uma das obras analisadas. São eles: Identificação da obra; Características gerais da coleção; Descrição.

O item Identificação da obra se refere aos dados bibliográficos da coleção. O item Características gerais relata de forma mais abrangente sobre os aspectos gerais da coleção. Já o item descrição tem por finalidade investigar como os números irracionais são introduzidos na obra. Após esta etapa inicial e geral, segue-se a análise crítica.

5.1 Breve histórico da pesquisa

Na elaboração do projeto desta pesquisa, no segundo semestre de 2011, já fixado o objeto de estudo, pensávamos inicialmente em investigar o conceito de número irracional nos Livros Didáticos de matemática referentes ao PNLD 2011 que estava em curso. No segundo semestre de 2012 fomos à procura das editoras munidos de ofício expedido pela secretaria do EDUMETEC – UFPE solicitando que as editoras gentilmente ofertassem os exemplares para a análise. Fato que foi correspondido pelas editoras, porém alguns títulos já não mais estavam disponíveis, pois já no ano de 2012, estávamos na metade da vigência do PNLD 2011. Mesmo assim, uma análise preliminar foi feita com os exemplares disponíveis.

Desta análise preliminar foram submetidos e aceitos duas publicações em dois grandes eventos da Educação Matemática: o XI CIEM - Congresso Internacional de Educação Matemática em Canoas - RS e o XVII EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática na cidade de Vitória - ES. As contribuições advindas destes eventos puderam ampliar nossa visão tanto sobre o objeto de pesquisa, como sobre o cenário da Educação Matemática no Brasil e no mundo.

Porém, antes ainda das submissões aos eventos acima descritos, durante as apresentações dos seminários e exame de qualificação foi apontado o PNLD 2014 para a análise das coleções, pois a data da publicação deste coincidiria exatamente com a possível data da publicação desta pesquisa. Decidimos então, nos debruçar sobre as coleções do PNLD mais atual. Esta decisão nos conduziu, a princípio, a uma análise das coleções do PNLD mais antigo tendo em vista que os livros do PNLD 2014 ainda não estavam disponíveis. Assim que o resultado do PNLD 2014 foi divulgado, no segundo semestre de 2013, fomos mais uma vez às editoras pleitear os livros das referidas coleções. O pleito foi plenamente atendido por todas as editoras. Vale salientar que dentre todas as editoras, as editoras Dimensão, Ática e Scipione disponibilizaram os arquivos digitais das obras solicitadas. Ao passo que as obras iam sendo analisadas passavam a ser digitalizadas. Em seguida, também digitalmente, foram feitos os recortes concernentes à investigação dos números irracionais.

Tais recortes estão distribuídos ao longo da análise crítica deste trabalho em forma de figuras que visam dar clareza ao leitor sobre cada um dos tópicos aqui investigados.

6 ANÁLISE CRÍTICA DOS LÍVROS DIDÁTICOS

Esta pesquisa buscou analisar a introdução do conceito de número irracional nas dez coleções de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental aprovadas pelo PNLD 2014, abaixo relacionadas:

Tabela 01 – Títulos das dez coleções aprovadas pelo PLND 2014 com os seus respectivos autores e editoras:

Continua.

TÍTULO DA OBRA	AUTORES	EDITORA
01. DESCOBRINDO E APLICANDO A MATEMÁTICA	Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio F. Machado	Editora Dimensão 1ª Edição 2012
02. MATEMÁTICA – BIANCHINI	Edwaldo Roque Bianchini	Ed. Moderna 7ª Edição 2011
03. MATEMÁTICA – IDEIAS E DESAFIOS	Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori	Saraiva Livreiros Ed. 17ª Edição 2012
04. MATEMÁTICA – IMENES & LELLIS	Luiz Marcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Terra Lellis	Ed. Moderna. 2ª Edição 2012
05. MATEMÁTICA: TEORIA E CONTEXTO	Marília Ramos Centuríon e José Jakubovik	Saraiva Livreiros Ed. 1ª Edição 2012
06. PRATICANDO MATEMÁTICA – Edição Renovada	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos	Editora do Brasil 3ª Edição 2012 Renovada
07. PROJETO ARARIBÁ MATEMÁTICA	Fábio Martins de Leonardo	Ed. Moderna. 3ª Edição 2010

FONTE: Pesquisa Bibliográfica PNLD 2014 – Produção própria (2014)

Tabela 01 – Títulos das dez coleções aprovadas pelo PLND 2014 com os seus respectivos autores e editoras:

Conclusão.

TÍTULO DA OBRA	AUTORES	EDITORA
08. PROJETO TELÁRIS – MATEMÁTICA	Luiz Roberto Dante	Editora Atica 1ª Edição 2012
09. PROJETO VELEAR – MATEMÁTICA	Antonio José Lopes	Editora Scipione 1ª Edição 2012
10. VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	Patrícia Rosana M. Pataro e Joamir Roberto de Souza	Ed. FTD. 2ª Edição 2012

FONTE: Pesquisa Bibliográfica PNLD 2014 – Produção própria (2014)

6.1 Identificação da obra

DESCOBRINDO E APLICANDO A MATEMÁTICA
MAZZIEIRO, Alceu dos Santos. **Descobrindo e aplicando a matemática**; 9º ano / texto de Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio Fonseca Machado; — Belo Horizonte: Dimensão, 2012.304 p. il. – (6º ao 9º ano do ensino fundamental – Matemática).

Figura 05 – Capas da coleção Descobrindo e aplicando a MATEMÁTICA.

Fonte: Mazzieiro, 2012.

6.1.1Características gerais da coleção

Esta obra ocupou a 9ª colocação entre as coleções mais distribuídas por componente curricular no PNLD – 2014 com 319.998 de exemplares distribuídos no Brasil, considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental segundo os dados estatísticos atualizados do FNDE.

Obra estreante no PNLD é assinada por dois autores: Alceu dos Santos Mazzieiro[9] e Paulo Antônio Fonseca Machado[10]. Segundo o Guia do livro didático do

---

[9]Bacharel, licenciado e especialista em Matemática pela UFMG. Atuou como: chefe dos Departamentos de Matemática do Centro Pedagógico, do Colégio Universitário e do Instituto de Ciências Exatas da UFMG; coordenador da área de Matemática do Projeto de Inovação Curricular e Capacitação de docentes do Ensino Fundamental da Secretaria Estadual de Educação do Estado de Minas Gerais; coordenador da área de Matemática do Projeto de Correção do Fluxo Escolar para o Ensino Fundamental da Secretaria Estadual de Ensino do Estado da Bahia; e membro da equipe de consultores do Projeto de Capacitação de Professores de Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino de Minas Gerais.

[10]Possui graduação em Matemática, modalidade bacharelado, pela Universidade Federal de Minas Gerais (1985), mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (1989) e doutorado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas/ Universidade Federal da Bahia (1997). Atualmente é professor associado da Universidade Federal de Minas Gerais. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra Comutativa e computacional, e na produção de livros e coleções didáticas para disciplinas de ensino superior e ensino fundamental.

PNLD – 2014, os volumes da coleção estão estruturados em capítulos. Por sua vez, cada capítulo é subdivido itens. Nestes itens estão contidas as seções:

> Explorando o que você já sabe; Aprendendo em sala de aula; Aprendendo em casa. Os capítulos iniciam-se descrevendo os objetivos de aprendizagem visados e terminam nas seções: Explorando o que você aprendeu e aprendendo mais, com exercícios de revisão e de aplicação; Verifique se você aprendeu, que orienta o aluno para uma autoavaliação. O penúltimo capítulo de cada volume, denominado Revendo e aprendendo mais, revisa os assuntos estudados anteriormente, e o ultimo contem Atividades complementares. Ao final de cada livro, encontra-se um Glossário e a seção intitulada Sugestões de leituras e sites para os alunos. (BRASIL, 2013, p. 25 – 26).

Em nossa análise, pudemos observar em particular, nesta obra, a ausência de textos auxiliares, situações problemas, ilustrações diretamente relacionadas aos conteúdos e notas históricas. No que diz respeito à contextualização, o referido Guia afirma que “Na sua maioria, as contextualizações são relacionadas a práticas sociais. São escassas aquelas que envolvem outras áreas do conhecimento ou a história da matemática”. (BRASIL, 2013, p. 25).

No livro do professor há excessiva quantidade de notas auxiliares nas bordas de cada página. Talvez, devido à escassez de textos e ilustrações como anteriormente citados, obrigue ao professor à compensação dessa ausência de materiais auxiliares.

6.1.2Descrição

Nesta obra, os números irracionais não são abordados no 8º ano como tradicionalmente são na maioria das coleções analisadas.

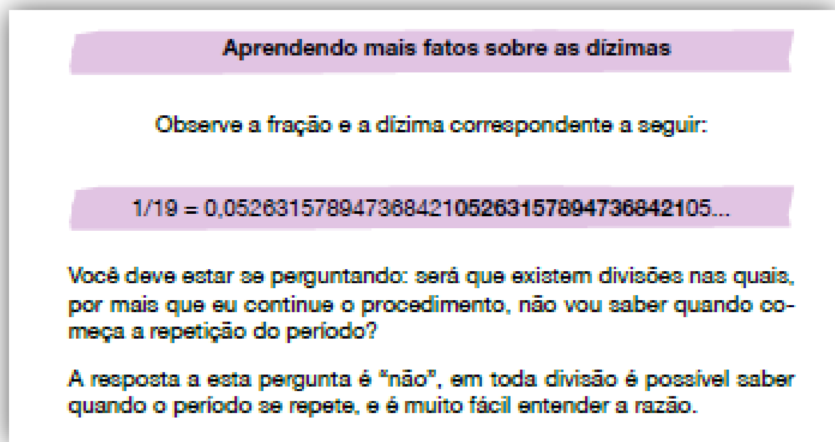
No volume referente ao 9º ano, os autores dão início à abordagem dos números irracionais a partir do capítulo 01, o qual é dedicado ao estudo dos números reais.

A página de abertura do capítulo, exibe o número irracional π (Pi) de forma artística, porém é possível que o mesmo passe despercebido ao leitor menos atento. Em seguida, na página 10, há uma relação em forma de tópicos sobre os conteúdos a serem abordados no capítulo. Destacamos apenas alguns, segundo o interesse desta análise, como segue:

- Identificar números naturais, inteiros, racionais e irracionais;
- Identificar números reais como racionais ou irracionais;
- Representar números racionais como dízimas periódicas;
- Escrever dízimas periódicas como frações;
- Representar números reais na reta numerada;
- Calcular raízes aproximadas de números reais.

A introdução dos números irracionais acontece através de uma pergunta feita no próprio texto da página 17 sobre a possibilidade de haver uma divisão que pudesse gerar um número decimal infinito e não periódico.

Figura 06 – Dízimas periódicas.


Aprendendo mais fatos sobre as dízimas

Observe a fração e a dízima correspondente a seguir:

1/19 = 0,052631578947368421**052631578947368421**05...

Você deve estar se perguntando: será que existem divisões nas quais, por mais que eu continue o procedimento, não vou saber quando começa a repetição do período?

A resposta a esta pergunta é "não", em toda divisão é possível saber quando o período se repete, e é muito fácil entender a razão.

Fonte: Mazzieiro, 2012, p. 17, 9º ano.

Em seguida, após o estudo das dízimas periódicas e suas respectivas frações geratrizes, na página 19, os autores introduzem os números irracionais mencionando a existência de segmentos que não são comensuráveis. Os autores fazem menção à comensurabilidade na página 13. Agora, na página 19, falam dos segmentos incomensuráveis, contudo não exploram a medição de segmentos, trazendo apenas um tratamento algébrico, através da redução por absurdo, com o intuito de provar, algebricamente, que o número $\sqrt{2}$ é irracional, assim como descrito na figura abaixo:

Figura 07 – Segmentos incomensuráveis.

Os segmentos incomensuráveis e os números irracionais

Você já viu o que são segmentos comensuráveis. Mas o que provavelmente você ainda não sabe é que existem segmentos que não são comensuráveis.

Vamos provar, por exemplo, que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles e um dos catetos não são segmentos comensuráveis, isto é, a medida da hipotenusa considerando o cateto como unidade de medida não é um número racional.

Fonte: Mazzieiro, 2012, p. 19, 9º ano.

Ao nos depararmos com o termo incomensurabilidade, fomos à procura do termo comensurabilidade. Na página 13, os autores procuram explicar o conceito de comensurabilidade.

Figura 08 – Segmentos comensuráveis.

Medidas, números racionais e os segmentos comensuráveis

Dizer que a medida de um segmento em relação a um segmento unidade é 2,5 significa que o comprimento do segmento medido equivale a duas vezes o comprimento do segmento unidade, mais a metade deste (lembre que $0,5 = \frac{1}{2}$).

Pense! Como interpretar medidas como $4\frac{3}{4}$ ou, também, $\frac{19}{4}$?

Tanto para os segmentos dos exemplos anteriores, quanto para todos os casos em que é possível obter como medida números racionais, dizemos que o segmento unitário e o segmento medido são segmentos comensuráveis.

página, como representar as medidas ou valores da segunda coluna usando números negativos, e, da quarta coluna, usando números positivos.

Explique ainda aos alunos que o nome "comensurável" quer dizer, na verdade, que os dois segmentos – o que vai ser medido, e o que serve como unidade, podem ser subdivididos em segmentos menores de mesmo tamanho. Por exemplo, no caso do primeiro exemplo citado, em que um segmento é 2,5 vezes maior que o escolhido como unitário, podemos tomar um terceiro segmento v que seja a metade do unitário (ou seja, que mede ½),

Fonte: Mazzieiro, 2012, p.13, 9º ano.

Na página 20, os autores apresentam alguns exemplos de números irracionais afirmando que para a composição de tais números "basta criar leis de formação para a parte decimal que mostrem, claramente, que são decimais infinitos e não periódicos". (MAZIEIRO, 2012, p. 20, 9º ano). Nos exemplos abaixo, os autores ressaltam que o propósito é mostrar alguns irracionais no intervalo de zero a um, na reta numérica apontando para questão de que o conjunto dos números irracionais é infinito.

Figura 09 – Leis de formação dos números irracionais.

1º.) 0,01001000100001... (a quantidade de zeros aumenta gradativamente)

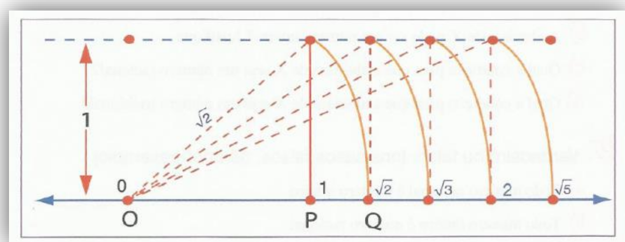
2º.) 0,151617181920... (na sequência, viriam 21222324 2526 etc.)

3º.) 0,41442444144442... (a quantidade de algarismos 4 aumenta gradativamente e os algarismos 1 e 2 alternam sucessivamente)

Fonte: Mazzieiro, 2012, p. 20,9º ano.

Mais adiante, na página 21, encontra-se uma atividade que visa relacionar alguns números irracionais à reta numérica com o auxílio de régua e compasso:

Figura 10 – Números irracionais na reta numérica.



Fonte: Mazzieiro, 2012, p. 21, 9º ano.

Segundo Mazieiro (2012, p. 22), "O conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, ou seja, seus elementos são números racionais ou irracionais". Logo após essa afirmação, seguem alguns exercícios. Após, os autores dão início ao cálculo com números reais e suas aproximações.

Mais adiante, na página 29, são introduzidas as raízes aproximadas. Nas atividades relativas aos cálculos das raízes aproximadas, os autores recomendam a utilização da calculadora.

Figura 11 – Raiz quadrada aproximada.

A raiz quadrada aproximada de 6 a menos de um décimo, por falta, é 2,4. E podemos escrever:

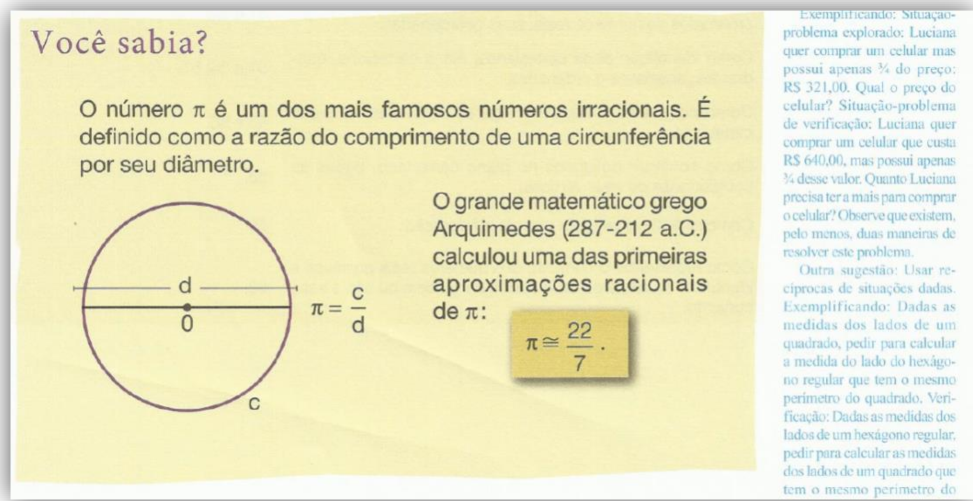
$$\sqrt{6} \cong 2,4$$

(lê-se: raiz quadrada de 6 é aproximadamente igual a 2,4).

Fonte: Mazzieiro, 2012, p. 30, 9º ano.

Na página, 39 o conteúdo relativo aos números reais é finalizado com uma brevíssima nota histórica sobre o número irracional π (pi).

Figura 12 – Definição do número pi.



Fonte: Mazzieiro, 2012, p. 39, 9º ano.

6.1.3Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

Nesta coleção pudemos observar que a introdução do conceito de número irracional acontece logo após o estudo das dízimas periódicas numa abordagem inicial bastante ligada à aritmética. Porém, logo em seguida, pudemos constatar que os autores procuram mencionar a existência de segmentos que são incomensuráveis.

Como sabemos, a incomensurabilidade está ligada ao processo de medição e comparação de segmentos. Contudo, nesta obra, não foram verificados nenhuma atividade ou exemplo elucidativo sobre a incomensurabilidade.

Logo em seguida, após mencionarem a incomensurabilidade, os autores apresentam uma prova de que o número irracional $\sqrt{2}$ não é racional através da redução por absurdo. Obviamente, uma metodologia algébrica, válida, porém desvinculada da proposta inicial dos autores.

Mais adiante, de acordo com a figura 09, observamos uma estratégia geométrica, com a utilização de régua e compasso, para relacionar os números irracionais à reta numérica. Mais uma vez, os autores fazem menção à incomensurabilidade, mas não comparam os segmentos obtidos nessa atividade para que haja a possibilidade de julgar se os segmentos são, ou não, incomensuráveis.

b) Clareza e coerência

A pesar dos autores falarem anteriormente sobre os segmentos comensuráveis, a abordagem encontrada na obra não apresenta exemplo algum via medição de segmentos. No livro do professor, pudemos observar na figura 07, que na borda da página, há uma explicação complementar dirigida apenas ao professor. Segundo nossa análise, no item denominado características gerais da coleção, já fora observado e relatado sobre a escassez de ilustrações e exemplos, o que priva o aluno da possibilidade em realizar suas inferências sobre o conteúdo. Neste caso, a questão da incomensurabilidade não é tratada com o devido cuidado.

No que diz respeito à criação de leis para a obtenção de números irracionais, os autores não deixam claro que leis são essas, apenas procuram explicar cada caso em particular dos exemplos mostrados conforme a figura 08.

Chamou-nos atenção o modo como o capítulo é finalizado. Existe uma tabela que elenca alguns possíveis questionamentos sobre o assunto. Nela, é recomendado que o aluno revisitasse as páginas referentes ao conteúdo que ainda restasse dúvida. Nesse sentido, sentimos a falta de indicações de pesquisas ou textos externos à obra reforçando as dificuldades quanto à clareza na apresentação dos números irracionais.

c) Atenção às recomendações curriculares

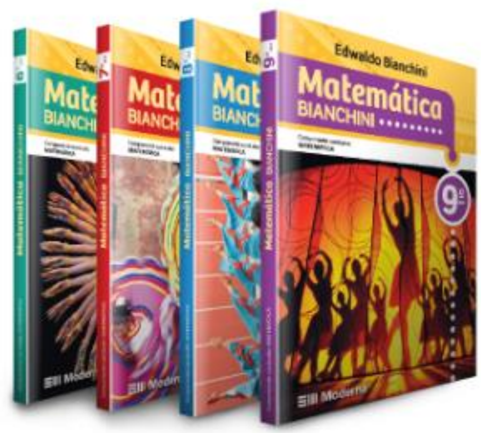
Segundo os PCN (BRASIL, 1998), os números irracionais devem ser abordados no quarto ciclo do Ensino Fundamental, ou seja, no 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de nove anos. Não observamos, nos PCN (BRASIL, 1998), nenhuma recomendação para que os números irracionais sejam abordados inicialmente apenas no 8º ano. Entendemos que a opção dos autores em realizar a abordagem inicial dos números irracionais no 9º ano, não vai de encontro nem às recomendações dos PCN (BRASIL, 1998) nem tão pouco as do PCPE (PERNAMBUCO, 2012).

Já quanto ao estudo do número π(pi), constatamos uma grande limitação, pois não encontramos atividades experimentais com o referido número. Segundo os PCN "É possível, no entanto, propor situações que permitam aos alunos várias aproximações sucessivas de π. Ao trabalhar com essas aproximações, é interessante usar diferentes calculadoras". (PCN - BRASIL, 1998, p. 107).Os autores apresentam apenas uma pequena nota história conforme a figura 11, afirmando que "O número π é um dos mais famosos números irracionais. É definido como a razão do comprimento de uma circunferência por seu diâmetro". (MAZZIEIRO, 2012, p. 39, 9º ano).

6.2Identificação da obra

MATEMÁTICA – BIANCHINI
BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática: Bianchini** / Edwaldo – 7. ed. – São Paulo: Moderna, 2011.Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9 º ano.

Figura 13 – Capas da coleção Matemática, BIANCHINI.



Fonte: Bianchini, 2011.

6.2.1 Características gerais da coleção

Esta coleção ocupou a 4ª colocação no PNLD - 2014 com 1.345.301de exemplares distribuídos, considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Obra presente no PNLD anterior e tem assinatura do professor Edwaldo Bianchini[11]. Esta coleção apresenta um aplicativo digital que pode ser acessado pela *internet* cuja versão, idêntica a versão física, porém não pode ser baixada, apenas visualizada de um aplicativo digital.

A obra está estruturada em capítulos, os quais apresentam as subdivisões: Página de abertura que visa introduzir o tema do capítulo por meio de recursos variados como, "situações do dia a dia, imagens do cotidiano, História da Matemática, etc."

[11]Licenciado em Ciências pela Universidade da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP). Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo, no Ensino Fundamental e Médio, por 25 anos.

(BIANCHINI, 2011, p.04); Página de conteúdo, em que a teoria é explicada. Para isso, o autor procura utilizar uma linguagem menos erudita, visando buscar uma aproximação maior com os estudantes, além de utilizar várias ilustrações; Exercícios os quais estão organizados em exercícios de aplicação, exploração e sistematização; Trabalhando com a informação que se refere ao trabalho interdisciplinar lançando mão de outras linguagens; Para saber mais é uma seção que traz elementos da história da Matemática e da geometria com propósito de enriquecer e aprofundar os conteúdos e, por fim, a seção Atividades Especiais que, por sua vez, está subdividida na subseção Pense mais um pouco que propõe atividades desafiadoras e a subseção Diversificando que direciona o estudante a atividades com temas variados. Além dos capítulos, a obra também apresenta, no final de cada volume, uma relação com sugestões de leituras para os estudantes. O Guia do livro didático do PNLD – 2014 afirma que:

> A obra destaca-se pela evolução gradual no estudo dos diversos campos da Matemática e pelas contextualizações que são associadas a praticas sociais diversas, a história da Matemática, a própria Matemática e a outras áreas do conhecimento. Os conteúdos são abordados por meio de explanação da teoria, acompanhada de exemplos e da seção *Exercícios Propostos*, que traz problemas de aplicação do que foi ensinado. Em geral, essa metodologia não dá muita oportunidade para que o aluno elabore de modo mais autônomo, o conhecimento a ser adquirido. A despeito disso, são propostas situações em que a capacidade de argumentação do estudante e mobilizada para a justificativa de suas estratégias de resoluções e de suas respostas. Alguns problemas mais instigantes são outras oportunidades para que o aluno exerça sua criatividade. (BRASIL, 2013, p. 31).

A obra também se destaca pelas ilustrações de boa qualidade, uso de fotografias, além de gráficos e tabelas bem apresentados. Pudemos observar que é uma obra que procurou dar atenção aos elementos didáticos e estéticos. Quanto à qualidade do material, não podemos emitir juízo de valor, tendo em vista que a versão utilizada para esta análise foi a versão digital. Porém, a versão analisada pode atender aos objetivos investigativos desta pesquisa.

6.2.2Descrição

Os números irracionais são estudados inicialmente no capítulo 02 do volume referente ao 8º ano onde é abordado o conjunto dos números reais. Na página de abertura do capítulo, encontra-se uma nota histórica ilustrativa sobre a origem dos sistemas de numeração.

Figura 14 – Tablete de argila babilônico.

Os babilônios, por exemplo, muitos séculos antes de Cristo, empregavam símbolos em forma de cunha para representar números.

Uma cunha "em pé", 𒁹, indicava o número 1, e podia ser repetida até nove vezes.

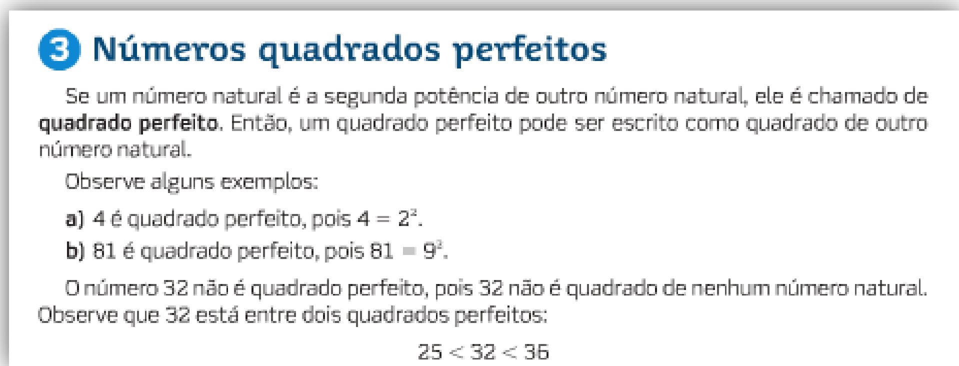
Uma cunha "deitada", 𒌋, indicava o número 10, e podia ser repetida até cinco vezes.

Esses símbolos eram impressos em tábuas de argila, como a da foto abaixo (datada entre 1800 a.C. e 1600 a.C.), que está no Museu do Louvre, em Paris, capital da França.

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 36, 8º ano.

Logo após a nota histórica de cunho ilustrativo, o autor introduz uma revisão dos conjuntos numéricos desde os números naturais até chegar aos números reais. Porém, antes de chegar aos números reais, trata dos números racionais em sua forma periódica infinita e fracionária. O autor começa a introduzir os números irracionais a partir da página 44 ao abordar os números quadrados perfeitos. Durante esta abordagem, é inserido um número que não é quadrado perfeito, no caso em tela, o número 32.

Figura 15 – Raiz quadrada aproximada.



3 Números quadrados perfeitos

Se um número natural é a segunda potência de outro número natural, ele é chamado de **quadrado perfeito**. Então, um quadrado perfeito pode ser escrito como quadrado de outro número natural.

Observe alguns exemplos:

a) 4 é quadrado perfeito, pois $4 = 2^2$.

b) 81 é quadrado perfeito, pois $81 = 9^2$.

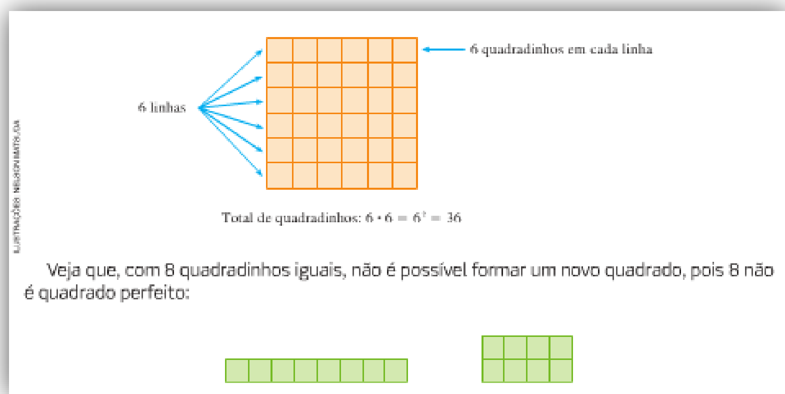
O número 32 não é quadrado perfeito, pois 32 não é quadrado de nenhum número natural. Observe que 32 está entre dois quadrados perfeitos:

$$25 < 32 < 36$$

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 36, 8º ano.

Para a verificação de que um determinado número seja quadrado perfeito ou não, o autor utiliza, na página 45, a estratégia da decomposição em fatores primos. Em seguida, na página 46, o autor apresenta a representação geométrica distinta entre os números quadrados perfeitos (o número 36) e os que não são (o número 8).

Figura 16 – Números quadrados perfeito.



Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 46, 8º ano.

Logo em seguida, na página 47, o autor aborda as raízes quadradas de números racionais não negativos, lançando mão das estratégias abordadas anteriormente como a própria decomposição em fatores primos.

Mais adiante, na página 49, um número que não é quadrado perfeito é introduzido na forma de raiz quadrada aproximada de um número natural através da aproximação entre dois números naturais consecutivos. Observa-se que não há, por hora, a preocupação com a extração da raiz quadrada de um número que não seja quadrado perfeito, apenas com a sua localização.

Figura 17 – Raiz quadrada aproximada.

Raiz quadrada aproximada

Os números quadrados perfeitos têm como raiz quadrada um número natural que, elevado ao quadrado, reproduz o número dado.

Veja o que acontece quando queremos extrair a raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito. Por exemplo, vamos calcular a raiz quadrada do número 31.

O número 31 está compreendido entre os números quadrados perfeitos 25 e 36.

$$25 < 31 < 36$$

Então, $\sqrt{31}$ deve estar compreendida entre $\sqrt{25}$ e $\sqrt{36}$.

$$\sqrt{25} < \sqrt{31} < \sqrt{36}$$

Como $\sqrt{25} = 5$ e $\sqrt{36} = 6$, temos:

$$5 < \sqrt{31} < 6$$

Dizemos então que:

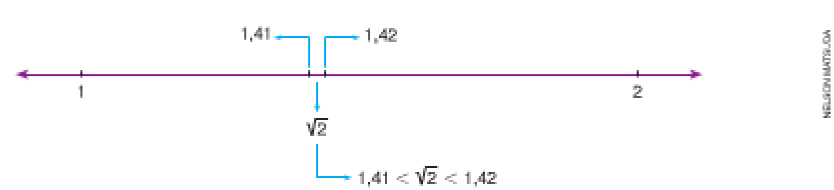
- **5** é a raiz quadrada **aproximada por falta**, **a menos de uma unidade**, do número 31.
- **6** é a raiz quadrada **aproximada por excesso**, **a menos de uma unidade**, do número 31.

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 49, 8º ano.

Na página 50, o autor vai mais adiante introduzindo números que não são quadrados perfeitos (o número $\sqrt{2}$) como uma aproximação entre dois números racionais consecutivos.

Figura 18 – Raiz quadrada com aproximação decimal.

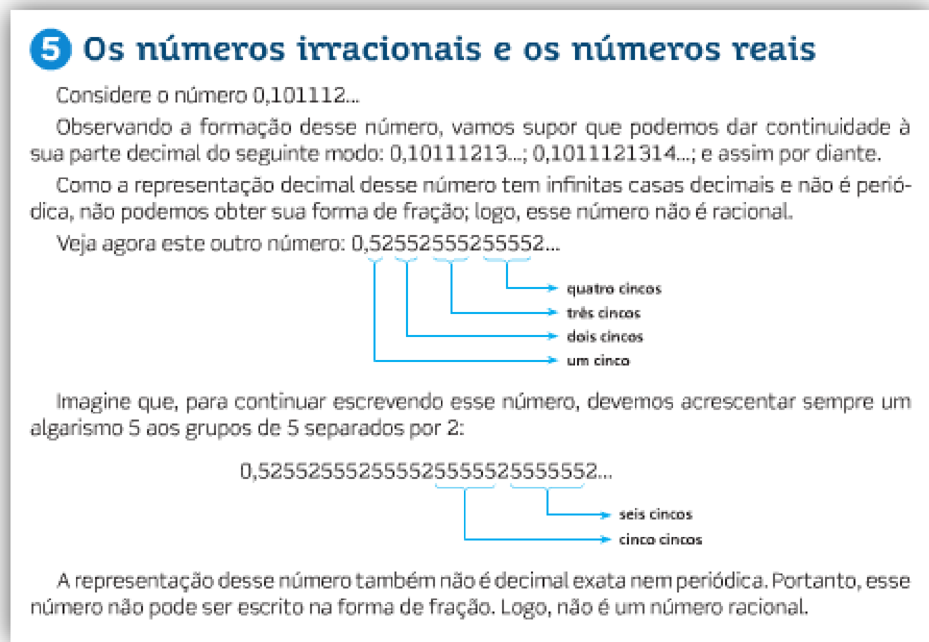
Logo, $\sqrt{2}$ é um número compreendido entre 1,41 e 1,42:



Fonte: BIANCHINI, 2011, p.51, 8º ano.

A partir da página 52, o autor apresenta os números irracionais como números cuja representação decimal é infinita e não periódica. Segundo o autor, não podendo, portanto, ser escritos na forma de fração por não se tratar de um número racional.

Figura 19 – Introdução dos números irracionais.



5 Os números irracionais e os números reais

Considere o número 0,101112...

Observando a formação desse número, vamos supor que podemos dar continuidade à sua parte decimal do seguinte modo: 0,10111213...; 0,1011121314...; e assim por diante.

Como a representação decimal desse número tem infinitas casas decimais e não é periódica, não podemos obter sua forma de fração; logo, esse número não é racional.

Veja agora este outro número: 0,52552555255552...

Imagine que, para continuar escrevendo esse número, devemos acrescentar sempre um algarismo 5 aos grupos de 5 separados por 2:

0,5255255525555255555255555552...

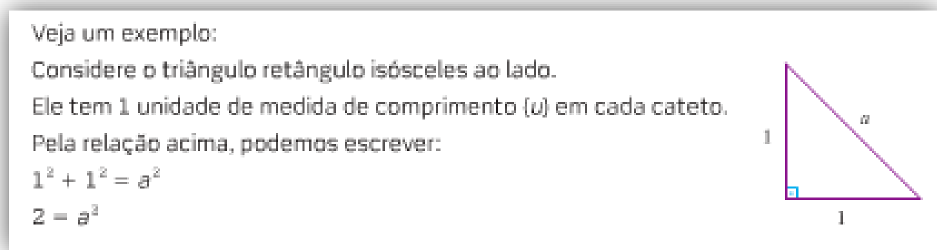
A representação desse número também não é decimal exata nem periódica. Portanto, esse número não pode ser escrito na forma de fração. Logo, não é um número racional.

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 52, 8º ano.

Após definir os números irracionais, o autor começa a introduzir uma relação entre os números irracionais e a geometria através do triangulo retângulo e a relação entre os seus elementos, catetos e a hipotenusa. E na seção para saber mais, encontra-se uma atividade que consta de um quebra-cabeça cujo objetivo de sua montagem é provar que a soma dos quadrados dos catetos de um quadrado é igual ao quadrado de sua respectiva hipotenusa.

Logo em seguida, o autor apresenta um triângulo retângulo isósceles destacando que sua hipotenusa é um número irracional.

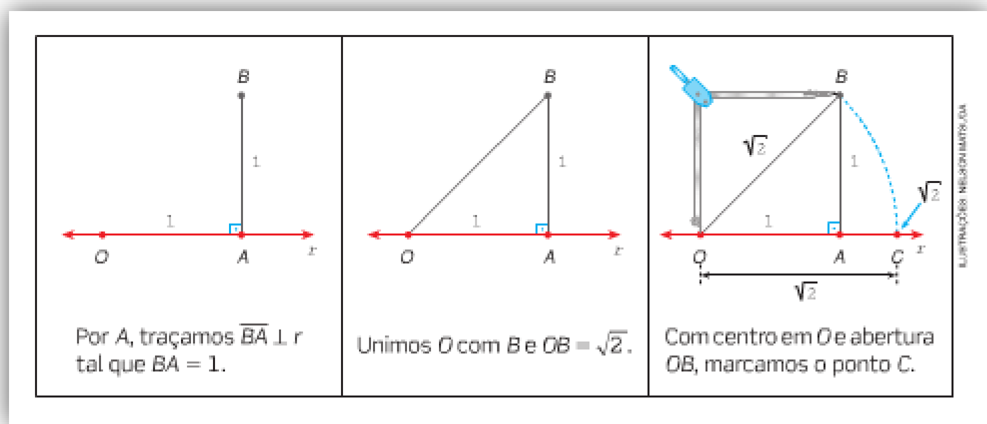
Figura 20 – Diagonal de um triangulo isósceles.



Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 54, 8º ano.

Na figura acima, o autor conclui que o valor da hipotenusa de medida “a” corresponde ao número irracional $\sqrt{2}$. Mais adiante, na página 56, encontra-se uma comparação entre a medida da diagonal de um quadrado e a sua localização na reta numérica. Para isso, o autor utiliza na sua demonstração, régua e compasso.

Figura 21 – Localização de um número irracional na reta.



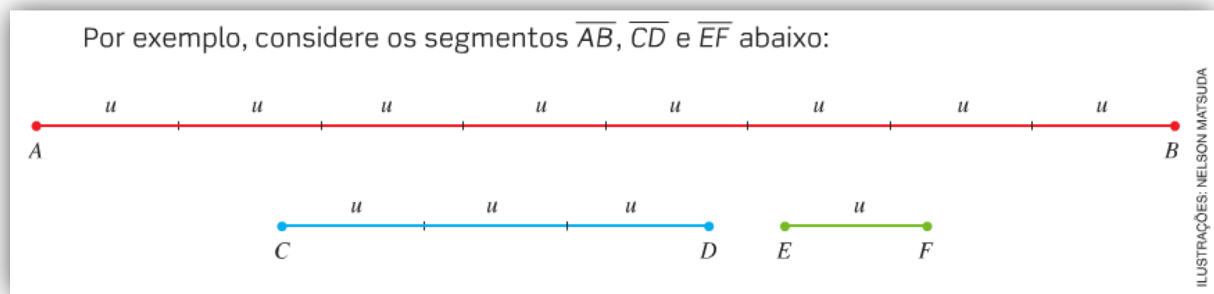
Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 56, 8º ano.

Na seção para saber mais da página 58, encontra-se uma nota histórica de cunho informativo na qual o autor, de forma resumida, relata a origem dos números irracionais. Segundo (BIANCHINI, 2011, p. 59) “Essa ideia teve origem, provavelmente, em contextos geométricos na Grécia antiga. Para os pitagóricos, o conceito de número era o que para nós são os números naturais” [...].

Nessa nota histórica, o autor informa sobre a descoberta dos números irracionais através da comprovação de que a diagonal de um quadrado trata-se do número irracional $\sqrt{2}$. Ainda informa sobre uma prova atribuída ao matemático grego Aristóteles (384 – 322 a.C.) sobre a comprovação da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Contudo não apresenta tal prova, que como sabemos, trata-se da redução por absurdo supondo que o lado e a diagonal do quadrado são segmentos comensuráveis.

Ainda nesta nota, o autor traz um exemplo em que uma razão só poderá ser representada por um número racional se dados dois segmentos quaisquer, houver um terceiro segmento menor que os anteriores, cuja medida caiba exatamente um número inteiro de vezes tanto em um quanto no outro. Observe que o segmento $\overline{EF}$ de medida "u" cabe um determinado número inteiro de vezes de forma a se encaixar perfeitamente tanto em $\overline{AB}$quanto em $\overline{CD}$. A figura abaixo ilustra o que acabamos de descrever:

Figura 22 – Comparação de segmentos.

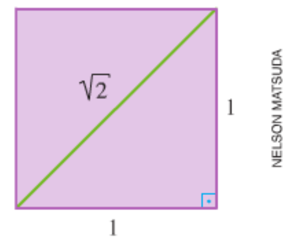


Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 59, 8º ano.

Ou seja, a razão entre os segmentos$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é o número racional 8/3. Logo em seguida, na figura abaixo, o autor informa através de uma evocação a elementos históricos, sobre a descoberta dos números irracionais por parte dos estudiosos gregos que ainda não conheciam os números irracionais.

Figura 23 – Diagonal e lado de um quadrado.

Inicialmente, os gregos não concebiam a existência de segmentos para os quais tal medida não existisse, o que resultaria numericamente em números irracionais, como, por exemplo, no quadrado ao lado, em que a razão entre a diagonal e seu lado é $\sqrt{2}$.



Essas razões irracionais foram descobertas provavelmente por algum pitagórico, entre 500 a.C. e 375 a.C. Uma vez que na escola pitagórica os números naturais e suas razões formavam a essência de todas as coisas, uma descoberta dessa natureza deve ter gerado uma grande crise.

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 59, 8º ano.

Na seção Diversificando, na página 61, encontra-se uma atividade intitulada de “jogo do enfileirado”, cuja proposta consiste em ordenar os números reais dados tanto em ordem crescente quanto decrescente. Trata-se de um jogo matemático de simples confecção para ser aplicado com os estudantes.

Figura 24 – Jogo matemático sobre números reais.

• Responda às questões em seu caderno.

1 Observe a ilustração ao lado e responda à questão. Quem ganhou esta rodada? Justifique.

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 61, 8º ano.

6.2.3 Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

A introdução é precedida pelo estudo das dízimas periódicas, porém o autor procura explorar inicialmente os números quadrados perfeitos e os números que não são quadrados perfeitos. Destacamos o cuidado do autor em representar graficamente ambos os caos relatados anteriormente. Além disso, os tópicos são abordados de forma gradativa. São abordadas também as aproximações decimais para os números irracionais e sua representação na reta numérica.

Nos chama atenção, como já dissemos, a forma como o autor tenta explorar o conceito de número irracional tanto de uma forma aritmética quanto geométrica. Mesmo trazendo uma nota histórica interessante tratando sobre a origem dos números irracionais, acreditamos que a mesma poderia ser mais bem explorada através de um contra exemplo sobre a incomensurabilidade. Observa-se, nas figuras 21 e 22 que é apresentado uma ilustração sobre segmentos comensuráveis, mas não dos incomensuráveis contidos na mesma nota histórica que são a diagonal e o lado do quadrado.

A finalização do capítulo é feita com o jogo do enfileirado que possibilita a localização e o ordenamento dos números reais, porém não contribui para o entendimento do conceito de número irracional.

b) Clareza e coerência

Como se pode observar na figura 18, há indicações explicativas sobre a composição da parte decimal dos números irracionais que são apresentados como exemplos. Merece destaque favorável a afirmação feita pelo autor sobre o número 0,525525552555525555525555555... Sobre a impossibilidade de o referido número ser representado na forma de fração, o que consideramos positivo, porém não há nenhuma explicação indicando como foram concebidos os números utilizados como exemplo de números irracionais.

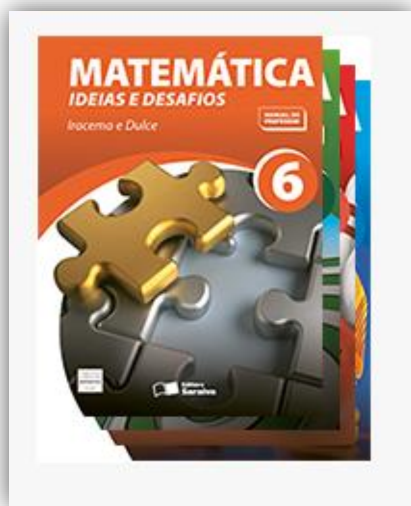
c) Atenção às recomendações curriculares

Observamos que a obra atende às recomendações contidas nos documentos de orientações curriculares. Como já fora dito, trata-se de uma coleção que fez parte dos programas de livros didáticos anteriores sendo perceptível o cuidado em estar alinhada com as recomendações curriculares oficiais. Destacamos o trabalho com a história da matemática, a localização geométrica de um número irracional, assim como a sua localização na reta numérica.

6.3Identificação da obra:

MATEMÁTICA – IDEIAS E DESAFIOS
MORI, Iracema. **Matemática: Ideias e desafios**, 6º ao 9º / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. — 17. ed. – São Paulo: Saraiva, 2012.

Figura 25 – Capas da coleção Matemática - Ideias e desafios.



Fonte: MORI, 2012.

6.3.1 Características gerais da coleção

Esta coleção ocupou a 7ª colocação no PNLD – 2014 com 468.034de exemplares distribuídos no Brasil, considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Obra presente no PNLD anterior tem dupla autoria das professoras Iracema Mori[12] e Dulce Satiko Onaga[13]. Segundo o Guia do PNLD – 2014, nesta obra,

> Os conteúdos, em geral, são apresentados com base em situações interessantes, embora a sistematização seja conduzida de modo muito rápido. As atividades propostas são diversificadas e motivadoras, e a interação entre alunos e incentivada. Há boa articulação entre conteúdos dos diferentes campos da Matemática. Os tópicos matemáticos

[12]Bacharel e licenciada em Matemática pela USP. Professora e assessora de Matemática.
[13]Licenciada em Matemática pela USP. Professora e assessora de Matemática. Membro do Centro de Educação Matemática.

> selecionados incluem todos os que usualmente são estudados nessa fase da escolaridade. Contudo, ha excessos tanto na extensão quanto no detalhamento desses tópicos. Os temas sociais tratados na coleção são pertinentes, no entanto, a problematização deles e pouco solicitada, o que limita seus efeitos para a formação da cidadania. (BRASIL, 2013, p. 37).

A estrutura da obra está baseada em unidades subdividida em capítulos. No caso específico do volume referente ao 8º ano, são 12 unidades com variação de três a cinco capítulos por unidade. Há também as seções especiais:

> Explore o texto; Fazer e aprender; Exercício resolvido; Problema resolvido; Troquem ideias e experimentem; Troquem ideias e resolvam; Usando a calculadora; Aprender+; Seção+. Todas as unidades são encerradas com as seções Leitura+, e Revisão cumulativa e testes. Ao final de cada volume, são apresentadas mais duas seções: Respostas, nas quais são resolvidos todos os exercícios das seções Fazer e aprender; Aprender+; e Indicações de leituras complementares para os alunos. (BRASIL, 2013, p. 37).

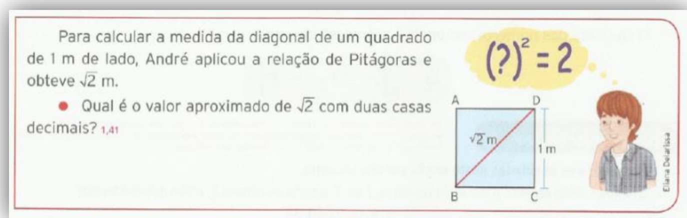
Chamou-nos atenção à forma como os conteúdos são apresentados. As autoras procuram sempre incluir situações problemas, construções geométricas e oficinas pedagógicas. Também segue uma linha adotada por outros autores de inserir personagens no texto. Estes personagens dialogam entre si, simulando a relação entre professor e aluno e também entre os próprios alunos.

6.3.2 Descrição

O conceito de número irracional é abordado, nesta coleção, no volume referente ao 8º ano, na primeira unidade. No início da unidade, há uma abordagem geométrica em que o teorema de Pitágoras é estudado através de construções geométricas.

O capítulo dois da unidade um é iniciado com o título: Números não racionais onde são apresentados, inicialmente, os conjuntos numéricos dos números naturais até os racionais. Neste capítulo, as autoras não deram ênfase ao estudo das dízimas periódicas, como comumente ocorre em outras obras. Ao introduzir os números irracionais, na página 16, as autoras iniciam a abordagem relatando que “Necessidades humanas, como a prática da medição, apontam a inexistência de números que representassem com exatidão a medida de alguns comprimentos". (MORI, 2012, p. 16, 8º ano). Completam ainda que o matemático grego Pitágoras e seus discípulos haviam descoberto um tipo de número fora do comum. Então, através do teorema de Pitágoras é calculado que o valor da diagonal de um quadrado é o número irracional $\sqrt{2}$.

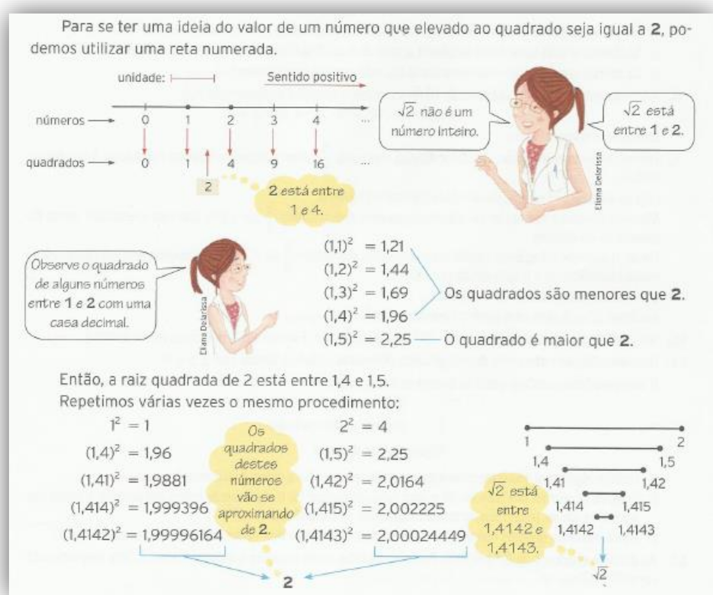
Figura 26 – Diagonal de um quadrado.



Fonte: Mori, 2012, p. 16, 8º ano.

Em seguida, ainda referente à figura acima, as autoras propõem a obtenção do valor aproximado da $\sqrt{2}$. Com isso, é dado início a uma atividade que consiste em obter um número que, elevado ao quadrado, seja igual ao número dois. Vejamos:

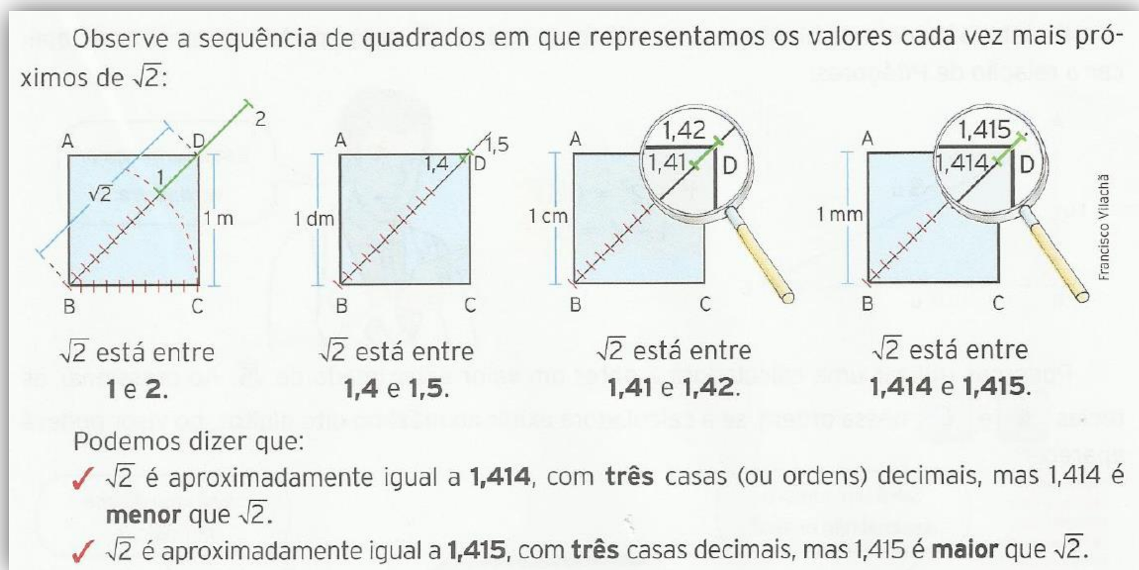
Figura 27 – Aproximação decimal de números irracionais.



Fonte: Mori, 2012, p. 16, 8º ano.

Na página seguinte, é apresentada uma curiosa sequência de quadrados para representar os valores cada vez mais próximos do número $\sqrt{2}$. Até aqui, as autoras não fizeram menção sobre os números irracionais, apenas que tais números não são racionais.

Figura 28 – Aproximação decimal de números irracionais.

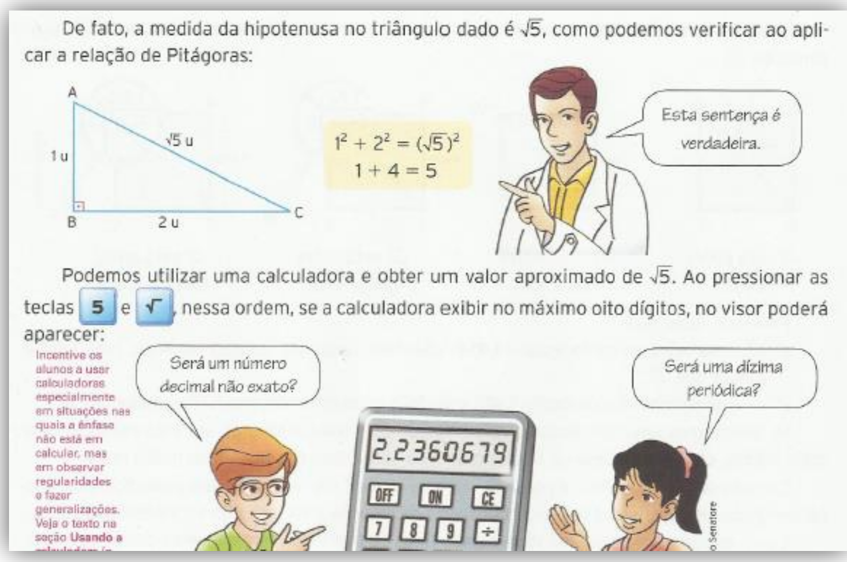


Fonte: Mori, 2012, p. 17, 8º ano.

As autoras dão continuidade à atividade afirmando que mesmo utilizando uma máquina de calcular há certa dificuldade em discernir se o número $\sqrt{2}$ seria ou não uma dízima periódica. Contudo, Segundo elas, apesar da dificuldade é possível à verificação de que o número anteriormente descrito não se trata de uma dízima periódica por não apresentar período, mas que isso não seria justificado nesse momento. Ainda afirmam que “Como podemos observar, existem outros tipos de números além daqueles que já conhecemos: o número $\sqrt{2}$ não é um número racional”. (MORI, 2012, p. 17, 8º ano).

As autoras vão adiante apresentando mais uma atividade que consiste em obter o valor da hipotenusa de um triângulo retângulo. Para isso, recorrem ao teorema de Pitágoras novamente. O número obtido na resolução dessa atividade é o número $\sqrt{5}$. Além da obtenção do número anteriormente citado, as autoras apresentam sua aproximação decimal obtida com a utilização da calculadora.

Figura 29 – Aproximação decimal com uso da calculadora.


De fato, a medida da hipotenusa no triângulo dado é $\sqrt{5}$, como podemos verificar ao aplicar a relação de Pitágoras:

Podemos utilizar uma calculadora e obter um valor aproximado de $\sqrt{5}$. Ao pressionar as teclas 5 e $\sqrt{\ }$, nessa ordem, se a calculadora exibir no máximo oito dígitos, no visor poderá aparecer:

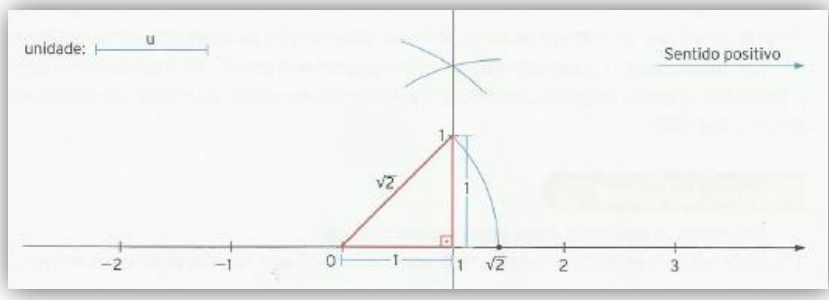
Incentive os alunos a usar calculadoras especialmente em situações nas quais a ênfase não está em calcular, mas em observar regularidades e fazer generalizações. Veja o texto na seção **Usando a**

Fonte: Mori, 2012, p. 17, 8º ano.

Dando continuidade a atividade, nessa mesma página, há uma tabela que exibe os resultados das aproximações do número $\sqrt{5}$ com uma aproximação de até 31 casas decimais. Segundo as autoras, “Ao longo da história, os matemáticos chegaram a conclusão que, por melhor que seja a aproximação de $\sqrt{5}$ por um número racional, ao elevar esse número ao quadrado, nunca obteremos 5”. Alertam que se o resultado for o número cinco, significa que a máquina realizou um arredondamento.

Na página 19, encontram-se os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ que ainda não são denominados como irracionais. A esta altura, as autoras afirmam que mesmo não se tratando de números racionais, tais números podem ser representados na reta numérica.

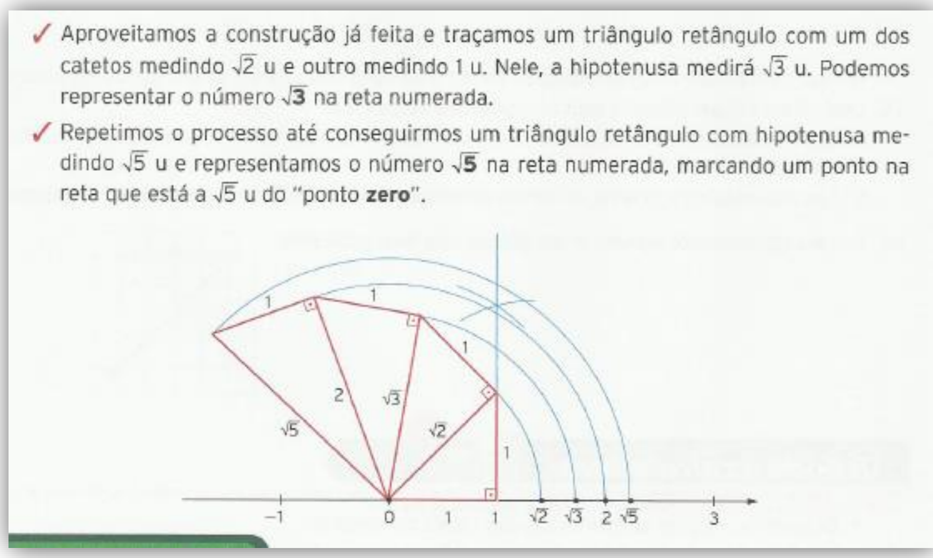
Figura 30 – Representação de um número irracional na reta.



Fonte: Mori, 2012, p. 20, 8º ano.

Logo em seguida, encontra-se a continuação da atividade anteriormente descrita em que é mostrado como os números $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ também são representados na reta numérica através da repetição do mesmo processo do início da atividade.

Figura 31 – Representação de números irracionais na reta.

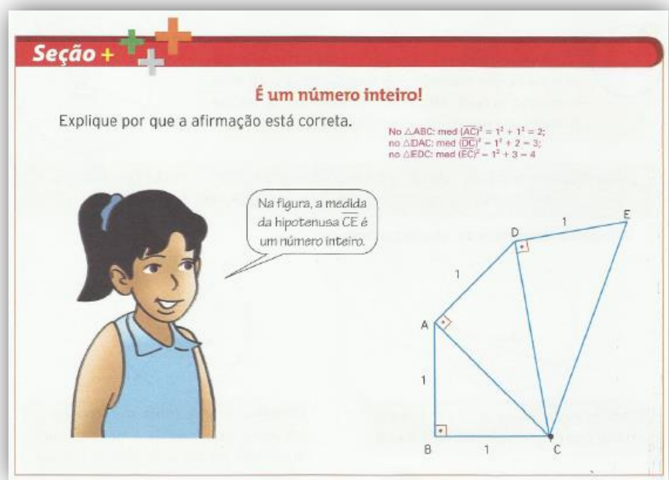

✓ Aproveitamos a construção já feita e traçamos um triângulo retângulo com um dos catetos medindo $\sqrt{2}$ u e outro medindo 1 u. Nele, a hipotenusa medirá $\sqrt{3}$ u. Podemos representar o número $\sqrt{\mathbf{3}}$ na reta numerada.

✓ Repetimos o processo até conseguirmos um triângulo retângulo com hipotenusa medindo $\sqrt{5}$ u e representamos o número $\sqrt{\mathbf{5}}$ na reta numerada, marcando um ponto na reta que está a $\sqrt{5}$ u do "ponto **zero**".

Fonte: Mori, 2012, p. 20, 8º ano.

O capítulo dois da primeira unidade do volume referente ao 8º ano termina com uma atividade que resgata a atividade acima descrita sem, contudo, mencionar que os números, expressos como radicais trabalhados nessa unidade seriam irracionais.

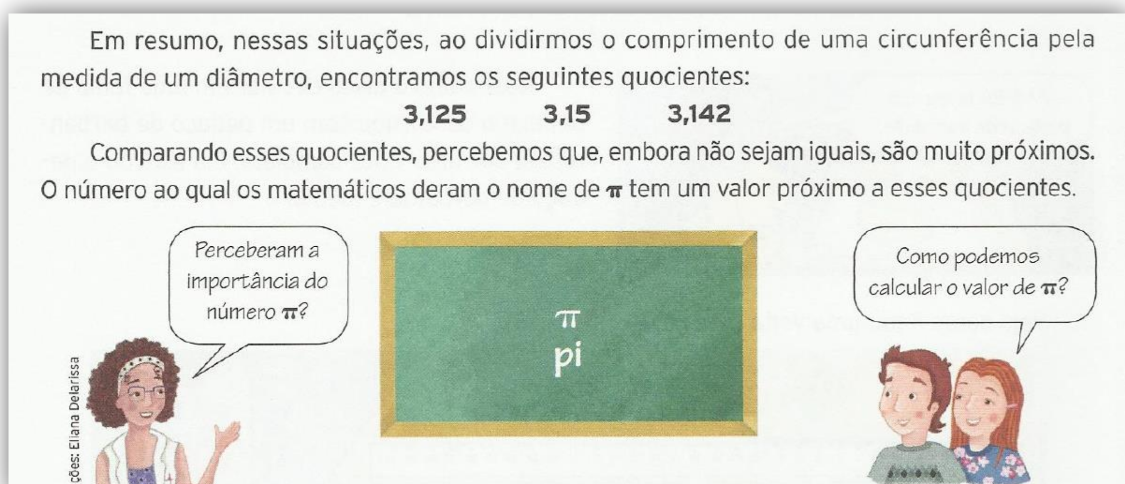
Figura 32 – Atividade com números reais.



Fonte: Mori, 2012, p. 21, 8º ano.

O capítulo três da primeira unidade é totalmente dedicado ao estudo da circunferência dos arcos e círculo. As autoras seguem a mesma linha pautada nas atividades experimentais, como é o caso para o estudo do número π (Pi). Nesta atividade são realizadas medições em três objetos circulares diferentes com a finalidade de comparar os resultados obtidos pelos quocientes de comprimento pelo respectivo diâmetro.

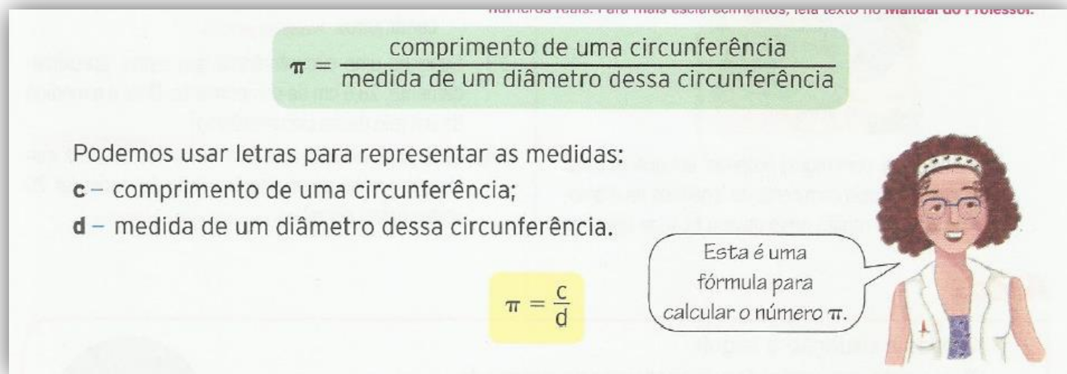
Figura 33 – Aproximações racionais de pi.



Fonte: Mori, 2012, p. 26, 8º ano.

Segundo as autoras, “π é o **quociente** obtido na divisão ou **comprimento** de uma circunferência pela medida de um **diâmetro**. É um número com infinitas casas decimais em sua representação decimal e não é uma dízima periódica”. (MORI, 2012, p. 27, grifo das autoras). Adiante apresentam uma fórmula para calcular o número π, como segue:

Figura 34 – Fórmula do cálculo de pi.



$$\pi = \frac{\text{comprimento de uma circunferência}}{\text{medida de um diâmetro dessa circunferência}}$$

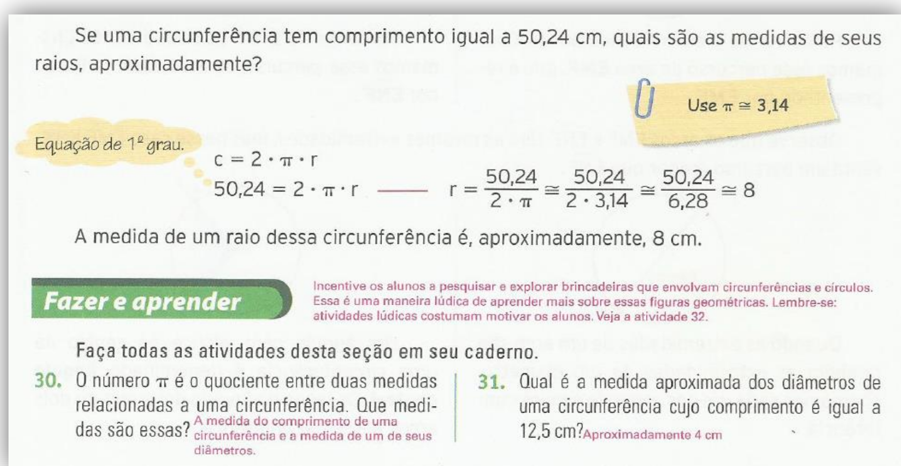
Podemos usar letras para representar as medidas:
c – comprimento de uma circunferência;
d – medida de um diâmetro dessa circunferência.

$$\pi = \frac{c}{d}$$

Fonte: Mori, 2012, p. 26, 8º ano.

No exemplo contido na página 27, as autoras afirmam que é costume usar aproximações para o número π com duas ou quatro ordens decimais. Sendo assim, observamos que as autoras expressam o resultado da aplicação da fórmula do comprimento da circunferência sempre como um resultado aproximado nos exemplos e exercícios.

Figura 35 – Valor aproximado da circunferência.



Se uma circunferência tem comprimento igual a 50,24 cm, quais são as medidas de seus raios, aproximadamente?

Use $\pi \cong 3{,}14$

Equação de 1º grau.

$$c = 2 \cdot \pi \cdot r$$
$$50{,}24 = 2 \cdot \pi \cdot r \quad r = \frac{50{,}24}{2 \cdot \pi} \cong \frac{50{,}24}{2 \cdot 3{,}14} \cong \frac{50{,}24}{6{,}28} \cong 8$$

A medida de um raio dessa circunferência é, aproximadamente, 8 cm.

Fazer e aprender

Incentive os alunos a pesquisar e explorar brincadeiras que envolvam circunferências e círculos. Essa é uma maneira lúdica de aprender mais sobre essas figuras geométricas. Lembre-se: atividades lúdicas costumam motivar os alunos. Veja a atividade 32.

Faça todas as atividades desta seção em seu caderno.

30. O número π é o quociente entre duas medidas relacionadas a uma circunferência. Que medidas são essas? A medida do comprimento de uma circunferência e a medida de um de seus diâmetros.

31. Qual é a medida aproximada dos diâmetros de uma circunferência cujo comprimento é igual a 12,5 cm? Aproximadamente 4 cm

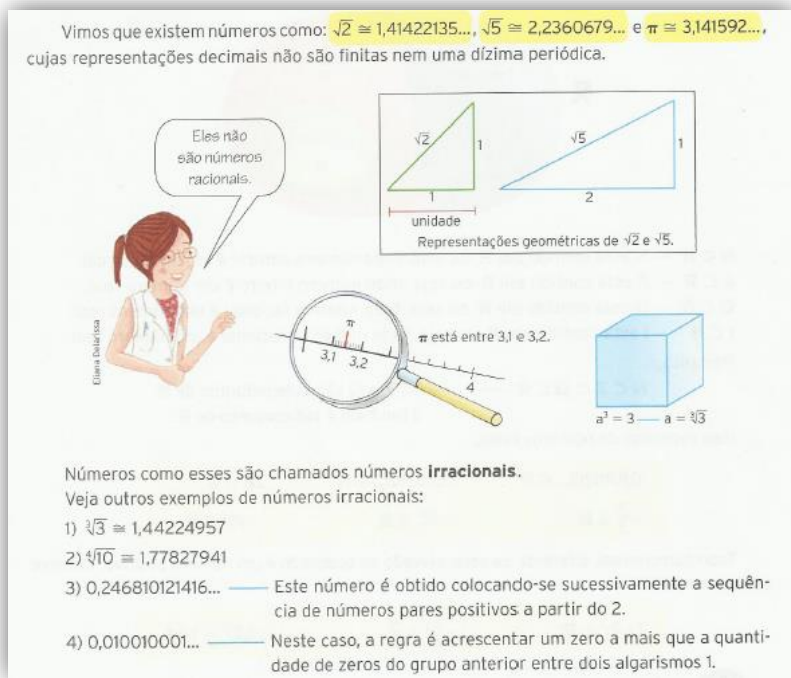
Fonte: Mori, 2012, p. 27, 8º ano.

A unidade é finalizada na página 38 com uma revisão cumulativa e testes que são precedidos pela seção Leitura que trata do contexto histórico do número π. Nesta seção, a abordagem do referido número é feita de maneira pontual onde são evocadas curiosidades, valores adotados em épocas mais antigas e descobertas mais recentes.

A unidade dois, na página 39, onde são estudados os números reais, tem como conteúdo do primeiro capítulo as dízimas periódicas. No segundo capítulo, são estudados os números quadrados perfeitos e as raízes quadradas.

Finalmente, no capítulo três ainda na unidade dois, registramos a primeira aparição do termo número irracional. Segundo as autoras "Os números irracionais não podem ser representados na forma fracionária, pois não são representações decimais exatas nem dízimas periódicas". (MORI, 2012, p. 49, 8º ano). Nesta mesma página, também observamos uma curta nota histórica sobre o tratamento rigoroso dispensado aos números irracionais no Século XIX, além de alguns exemplos de números irracionais. Na figura abaixo também verificamos dois triângulos que foram estudados na unidade anterior para a representação geométrica dos números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$.

Figura 36 – Atividade experimental com números irracionais.



Fonte: Mori, 2012, p. 27, 8º ano.

Também é nessa mesma página que se encontra a definição das autoras para os números irracionais que aparece logo após os exemplos acima descritos.

Figura 37 – Definição de número irracional.

Todo número que tem uma representação decimal não periódica com infinitas ordens decimais é um **número irracional**.

Fonte: Mori, 2012, p. 27, 8º ano.

Na página 52, encontra-se uma nota histórica a qual informa sobre o número áureo. Nessa nota, as autoras relatam a importância desse número para os estudiosos da antiga Grécia. Também apresentam sua representação numérica sem, contudo, fazer demonstrações sobre o mesmo. Mais à frente, na página 61, na seção Leitura, há um texto cujo título é "Números reais: dos gregos aos matemáticos modernos" de cunho histórico que relata, de forma panorâmica, sobre a descoberta das grandezas incomensuráveis. O texto é finalizado com o breve relato sobre a formalização dos números irracionais realizada pelo matemático alemão Richard Dedekind.

Figura 38 – Nota histórica sobre número irracional.

Passaram-se mais de dois mil anos até a formalização da teoria geral sobre os números reais, resultado da reunião dos números racionais com os irracionais.

Em 1872, o matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916) escreveu uma obra intitulada *Continuidade e números irracionais*, na qual menciona:

> A linha reta é infinitamente mais rica em pontos que o domínio dos números racionais o é em números [...]
>
> Torna-se absolutamente necessário aperfeiçoar este instrumento pela criação de novos números, se pretendermos que o domínio dos números seja tão completo ou, como podemos agora dizer, tenha a mesma continuidade que a linha reta. [...]

Heinrich Koenigsdorf/Akg/Latinstock

Dedekind.

Fonte: Mori, 2012, p. 61, 8º ano.

6.3.3 Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

Merece destaque a forma com que as autoras introduzem os números irracionais. Em nossa análise, pudemos constatar que, a princípio, o termo número irracional não aparece. Acreditamos se tratar de um ato intencional que conduz o aluno a uma culminância.

Como já fora dito em nossa análise, o início aos estudos dos números irracionais, nessa obra não são precedidos pelas abordagens sistemáticas das dízimas periódicas. As autoras optam por um percurso metodológico mais voltado à geometria,bem diferente da maioria das demais obras analisadas chegando a causar-nos surpresa.Conforme as figuras 26 e 27, de nossa análise, são possíveis observar a preocupação das autoras em introduzir os números irracionais alertando sobre o fato de que a medida de alguns comprimentos não pode ser representada com exatidão através de números.Durante essa abordagem inicial, também mostram, de forma bem ilustrada, a aproximação decimal para o número irracional $\sqrt{2}$.

Em seguida, mais uma atividade mostrando a inexistência de um segmento, que por menor que seja, caiba precisamente na diagonal do quadrado, de acordo com a figura 27. Essa foi uma das atividades que despertou a nossa atenção, porém as autoras, não abordam a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado. Fato que, igualmente nos surpreendeu, contudo, negativamente.

Observamos que, infelizmente, o foco das autoras foi à impossibilidade da medição do segmento relativo à diagonal. Acreditamos que esta rica atividade poderia ser estendida também ao lado do quadrado. Certamente, o fato da ausência de uma medida comum, menor que fosse também seria verificado aplicando-se ao lado do quadrado.

Gostaríamos de destacar as atividades experimentais via aproximações decimais, com o uso da calculadora que mostra a aproximação decimal para o número irracional $\sqrt{5}$ até a 31ª casa decimal e a atividade que mostra a localização na reta dos números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ com o uso da régua e compasso.

b) Clareza e coerência

Inspira cuidados à afirmação das autoras sobre a fórmula para calcular o número irracional π (pi), segundo a figura 34, “esta é uma fórmula para calcular o número π”. (MORI, 2012, p. 26, 8º ano). Os PCN afirmam que “Nenhuma verificação empírica, nenhuma medição de grandezas, por mais precisa que seja, provará que uma medida tem valor irracional”. (BRASIL, 1998, p. 106).

A nota histórica contida na página 61 trata da descoberta da incomensurabilidade, cita vários estudiosos ligados a essa temática, desde Pitágoras até Dedekind, porém não deixa claro o conceito de incomensurabilidade, citado pelas autoras.

c) Atenção às recomendações curriculares

Observamos o cuidado em apresentar os exemplos relativos ao comprimento da circunferência, sempre com um resultado aproximado segundo a figura 35, nas atividades experimentais para o cálculo aproximado do valor de pi. O estudo do número pi é complementado por uma nota histórica informativa na página 36.

Observamos, portanto que, esta coleção atende às recomendações contidas nos documentos de orientações curriculares.

Verificamos também que esta obra se destaca por dedicar a maior quantidade de páginas a temática dos números irracionais entre todas as demais coleções analisadas, num total de 35 páginas distribuídas em três capítulos.

6.4Identificação da obra

MATEMÁTICA – IMENES & LELLIS
IMENES, Luiz Márcio. **Matemática: Imenes & Lellis** / Luiz Márcio Imenes, Marcelo Lellis. – 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2012. Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano. “Componente curricular: matemática.”

Figura 39 – Capas da coleção Matemática, Imenes & Lellis.

Fonte: IMENES, 2012.

6.4.1 Características gerais da coleção

Esta coleção ocupou a 10ª colocação em distribuição no PNLD - 2014 com 270.860de exemplares distribuídos, considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Coleção presente no PNLD anterior sendo esta obra assinada pelos professores Luiz Márcio Imenes[14] e Marcelo Lellis[15]. A estrutura da obra esta organizada em

[14]Engenheiro civil pela escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Licenciado em matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Professor em cursos para professores do Ensino Fundamental e Médio. Autor de obras didáticas e paradidáticas de matemática.
[15]Bacharel em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor em cursos para professores do Ensino Fundamental e Médio. Autor de obras didáticas e paradidáticas de matemática.

capítulos que por sua vez estão subdivididos em itens e cada item possui uma estrutura própria. São estes os itens: Texto de abertura que tem por finalidade apresentar o tema do item de modo significativo; Conversar para aprender tem a finalidade de provocar reflexões através do diálogo entre o aluno e o professor que acontece através de personagens que aparecem nesse item; Ação que propõe jogos e atividades lúdicas, além da seção Ação/Investigação para pesquisas específicas da matemática; Problemas e exercícios que visa direcionar os estudantes ao trabalho cooperativo sob a supervisão do professor; Problemas e exercícios para casa propõe o trabalho individual com atividades de reforço e desafios. Além dos itens anteriormente descritos existem três seções importantes: Para começar bem que retoma os conhecimentos outrora adquiridos pelos alunos; Para não esquecer que fica situada no final de cada capítulo que apresenta uma síntese dos conhecimentos trabalhados no capítulo e a seção Supertestes que consta de uma bateria de questões baseadas nos exames nacionais de avaliação.

Além dos capítulos, a obra possui em cada volume o Dicionário que procura explicar de maneira ilustrada, os termos e expressões usadas no estudo da matemática; Conferindo as respostas que apresenta as respostas de alguns exercícios com os respectivos comentários; Sugestões de leitura para o aluno e, finalmente, as Referências bibliográficas destacando as obras que possam servir ao interesse dos alunos e professores.

6.4.2 Descrição

Nesta obra, os números irracionais são abordados inicialmente no 8º ano, a partir do capítulo 07 na página 155. A operação radiciação é apresentada inicialmente como a operação inversa da potenciação. Os autores sempre utilizam uma estratégia ilustrativa semelhante a uma história em quadrinhos em que os personagens vão relatando suas descobertas, indagações e dúvidas. Os personagens também dialogam entre si com o propósito de aproximar mais os leitores do texto. Esse tipo de estratégia é utilizado amplamente nessa obra.

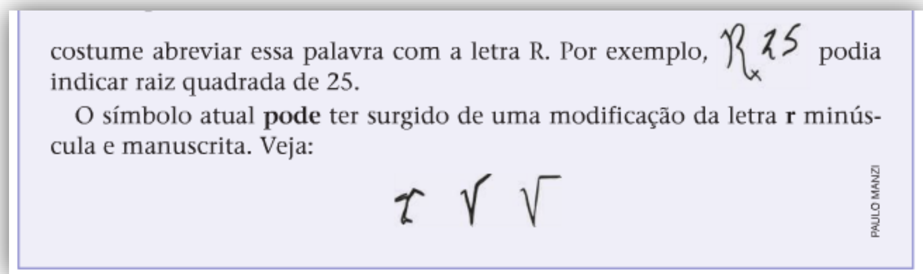
No caso específico dos números irracionais, seguindo a estratégia ilustrativa, uma personagem é retratada em uma situação desafiadora em que a mesma necessita descobrir a área de um quadrado a partir da medida do respectivo lado. Em seguida, a mesma personagem realiza o caminho inverso tendo como ponto de partida a área para, em seguida, descobrir a medida do lado do respectivo quadrado.

Figura 40 – Radiciação.

Fonte: Imenes, 2012, p. 155, 8º ano.

Mais adiante, os autores abordam as raízes quadradas negativas e as raízes cúbicas, quartas e quintas. Na página 157 deste volume, encontra-se uma nota histórica de cunho informativo sobre a origem do termo e do símbolo de radical.

Figura 41 – Origem do símbolo de radical.


costume abreviar essa palavra com a letra R. Por exemplo, R 25 podia indicar raiz quadrada de 25.

O símbolo atual **pode** ter surgido de uma modificação da letra **r** minúscula e manuscrita. Veja:

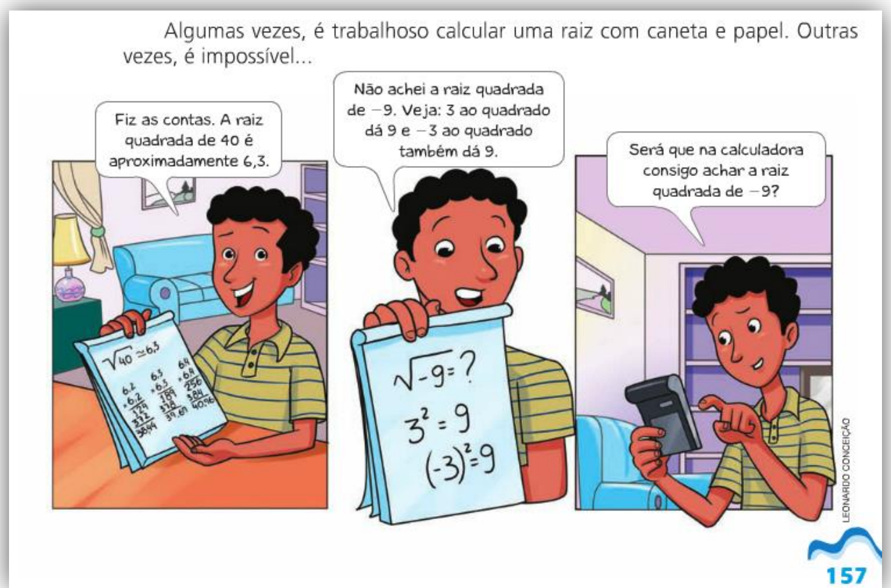
PAULO MANZI

Fonte: Imenes, 2012, p. 155, 8º ano.

Na nota histórica acima descrita, os autores também informam que o termo raiz remonta ao Século IX que, segundo os matemáticos árabes, tem seu significado ligado à origem ou, de onde surge, o valor da área de um determinado quadrado. Ainda relatam que quando os escritos Árabes se tornaram conhecidos na Europa, o termo *origem* teria sido traduzido para o latim como *radix* cujo significado é raiz, sendo costume, no Século XV, a letra r, inicial da palavra *radix,* ser utilizada como símbolo de radical, como descrito na figura acima.

Ainda na página 157, encontra-se um personagem que se depara com a dificuldade ou até mesmo a impossibilidade de calcular raízes quaisquer utilizando apenas papel e caneta. Nesta ilustração encontra-se a primeira menção a um número irracional que, neste caso é o número $\sqrt{40}$.

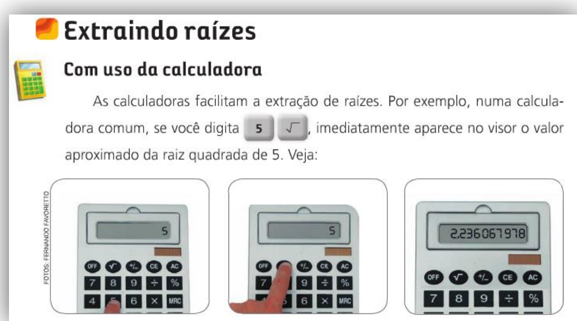
Figura 42 – Uso da calculadora para o cálculo de radicais.



Fonte: Imenes, 2012, p. 157, 8º ano.

Na página 163, encontra-se um tratamento para os números irracionais via calculadora. Os autores afirmam que a calculadora facilita a extração de raízes alertando que não se trata da obtenção do valor exato da raiz procurada, mas trata-se de uma aproximação do número, neste caso o número 5, do qual se está procurando extrair sua raiz quadrada. Ainda informam que o valor obtido através da calculadora é uma aproximação, pois este número é infinito e não periódico não sendo possível escrevê-lo completamente.

Figura 43 – Uso da calculadora para o cálculo de radicais.


Extraindo raízes

Com uso da calculadora

As calculadoras facilitam a extração de raízes. Por exemplo, numa calculadora comum, se você digita 5 √, imediatamente aparece no visor o valor aproximado da raiz quadrada de 5. Veja:

Fonte: Imenes, 2012, p. 163, 8º ano.

Ainda quanto ao uso da calculadora, os autores informam da impossibilidade da extração de outros tipos de raízes e sugerem a estratégia de aproximação decimal para encontrar os números procurados, neste caso, o número $\sqrt[3]{20}$ (raiz cúbica de vinte) cujo resultado aproximado é aproximadamente 2,7 (aproximação com apenas uma casa decimal).

Por fim, os autores finalizam a abordagem inicial sobre os radicais com a decomposição em fatores primos de um determinado número inteiro positivo trazendo dois exemplos. O primeiro deles refere-se ao cálculo da raiz cúbica de 216 que em sua decomposição em fatores primos apresenta os fatores 2^3 e 3^3, sendo, portanto o seu resultado, o número inteiro seis. No segundo exemplo é solicitada a extração da raiz quadrada do número 44 cuja decomposição em fatores primos apresenta o seguinte resultado: $2^2 \times 11$. Segundo os autores, o procedimento da decomposição em fatores primos deve ser aplicado com vistas à facilitação dos cálculos cujo resultado não seja um número natural.

6.4.3 Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

A abordagem inicial sobre os números irracionais é precedida pelo estudo das propriedades das potências em um capítulo anterior.

Os autores introduzem os números irracionais de uma forma numérica, utilizando uma metodologia pautada no uso da calculadora. A primeira atividade relacionada aos números irracionais está contida na página 163, onde os autores afirmam que "As calculadoras facilitam a extração de raízes. Por exemplo, numa calculadora comum, se você digita 5 $\sqrt{\ }$, imediatamente aparece no visor o valor aproximado da raiz quadrada de 5". (IMENES, 2012, p. 163).

Observamos uma grande limitação na introdução do conceito de número irracional, pois não há atividades exploratórias, entre outras atividades relacionadas à introdução desse conceito. Além disso, encontramos apenas uma nota histórica sobre os radicais.

b) Clareza e coerência

A referida nota histórica encontra-se na página 155, conforme a figura 41, apesar de informar sobre a possível origem do símbolo de radical, não contribui para o entendimento desse conceito.

c) Atenção às recomendações curriculares

Devido à grande limitação observada no estudo dos números irracionais, entendemos que a obra se distancia das recomendações contidas nos documentos de orientações curriculares.

Verificamos que os autores não exploram a localização dos números irracionais nem geometricamente nem na reta numérica. O tratamento da história da matemática é limitado no que diz respeito à introdução do conceito de número irracional. Não foram observados contra exemplos para ampliar a compreensão dos números, conforme (BRASIL, 1998, p. 83).

6.5 Identificação da obra

MATEMÁTICA: TEORIA E CONTEXTO
CENTURIÓN, Marília. **Matemática**: teoria e contexto; 6º ao 9º ano / Marília Centurión, José Jakubovic. — 1. ed. – São Paulo: Saraiva, 2012.

Figura 44 – Capas da coleção Matemática, teoria e contexto.

Fonte: CENTURIÓN, 2012.

6.5.1 Características gerais da coleção

Esta coleção ocupou a 6ª colocação no PNLD – 2014 com 1.026.549de exemplares distribuídos no Brasil, considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Coleção estreante no PNLD, porém os autores Marília Ramos Centuríon[16] e José Jakubovik[17] já tiveram outras obras aprovadas no PNLD anterior.

---

[16]Licenciada e bacharel em Matemática (FFCLM – São Paulo – SP). Professora e assessora de ensino de Matemática em diversas escolas. Autora de várias obras na área de Matemática.
[17]Licenciado em Matemática (FFCLM – São Paulo – SP). Foi professor e assessor de ensino de Matemática em diversas escolas. Autor de várias obras de Matemática direcionadas ao Ensino Fundamental e Médio.

O Guia do livro didático do PNLD – 2014 apresenta uma visão panorâmica da obra como segue:

> Na obra, os processos de generalização, de argumentação e de sistematização são trabalhados de forma satisfatória, seja na explanação teórica, seja nos exemplos resolvidos ou nas atividades propostas. Destacam-se as atividades de interação entre alunos e, nos dois primeiros volumes da coleção, os estímulos ao calculo mental. Contudo, nota-se que ha excesso de atividades de fixação dos conteúdos ensinados. No geral, os campos da matemática escolar recebem um tratamento adequado. Ha boas escolhas de tópicos, em especial no campo da geometria, das grandezas e medidas e da estatística e probabilidade. No entanto, a extensão e o detalhamento dos conteúdos estudados na coleção requerem planejamento cuidadoso, para adequação ao tempo escolar. A coleção apresenta três objetos educacionais digitais, um no 6o ano e dois no 7º, que são complementos uteis ao trabalho pedagógico. (BRASIL, 2013, p. 53).

Esta obra está estruturada em capítulos que, por sua vez, apresentam subdivisões em tópicos ou seções, como segue: o tópico Teoria trata-se de uma leitura que poderá ser realizada individualmente ou em grupo e está relacionada ao conteúdo a ser tratado em forma de definições e conceitos de uma forma contextualizada. A seção Você sabia? Visa completar as informações contidas nos textos didáticos de cada capítulo. Geralmente essas informações são advindas de revistas e jornais. Pense e responda é uma seção que apresenta atividades exigindo a mobilização de várias habilidades dos alunos como leitura, interpretação de informações e tomada de decisões. A seção Pensando em casa propõe atividades para serem realizadas em casa sem, contudo, repetir aquilo que já foi feito em sala de aula. As atividades dessa seção podem ser retomadas em sala a critério do professor. Desafios e surpresas é uma seção que apresenta alguns problemas com um grau de dificuldade maior ou um tipo de solução não trivial, mais criativa, como afirmam os autores. Ação é uma seção que sugere jogos, atividades, experimentos, trabalhos em grupo. O ícone Calculadora aparecerá sempre que for necessária a sua utilização. E por fim, a seção Respostas das atividades, presente apenas no final de cada volume da obra tem a finalidade de dar suporte aos alunos na conferência dos resultados obtidos em cada exercício.

6.5.2 Descrição

Nesta obra, o conceito de número irracional é abordado a partir do capítulo 03, do 8º ano, onde são apresentados os números reais. Na página 38, os autores apresentam as dízimas periódicas e, na página seguinte, a fração geratriz de uma dízima periódica seguidos de alguns exercícios que vão até a página 41. Nas páginas 42 e 43, já na seção que aborda os números irracionais, os autores optam por resgatar a representação decimal dos números racionais. Contudo, também apresentam um exemplo de número irracional.

Figura 45 – Introdução aos números irracionais.

O número $4,\overline{76}$ tem infinitas casas decimais, mas tem um período que se repete: 76.

Por isso, dizemos que sua representação decimal é **infinita e periódica.**

Agora, vamos apresentar um número com infinitas casas decimais, mas sem um período:

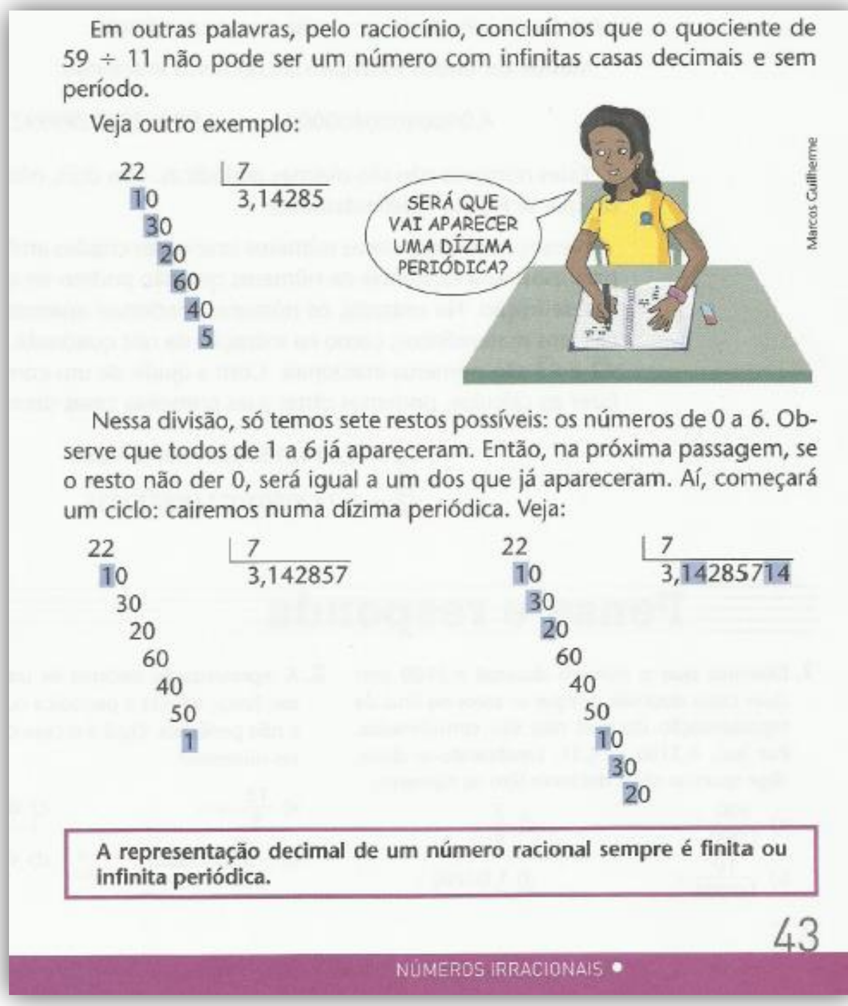
4,767778798081 82...

Percebeu como são as casas decimais seguintes? Na parte decimal escrevemos 76, depois 77, depois 78, etc. Continuando assim, indefinidamente, jamais teremos um período que se repete.

Fonte:Centurión, 2012, p. 42, 8º ano.

Os autores continuam apresentando uma divisão exata de 9 por 4, cujo resultado é o número 2,25 que é um racional exato. Em seguida apresentam a divisão de 59 por 11, que tem como resultado $5,\overline{36}$, um número racional infinito e periódico. Mais adiante, apresentam a divisão 22 por 7, cujo resultado é $3,\overline{142857}$ e que também é um número racional periódico infinito.

Figura 46 – Representação decimal de nº racional.



Em outras palavras, pelo raciocínio, concluímos que o quociente de 59 ÷ 11 não pode ser um número com infinitas casas decimais e sem período.

Veja outro exemplo:

22 | 7
10 3,14285
30
20
60
40
5

Nessa divisão, só temos sete restos possíveis: os números de 0 a 6. Observe que todos de 1 a 6 já apareceram. Então, na próxima passagem, se o resto não der 0, será igual a um dos que já apareceram. Aí, começará um ciclo: cairemos numa dízima periódica. Veja:

22 | 7
10 3,142857
30
20
60
40
50
1

22 | 7
10 3,14285714
30
20
60
40
50
10
30
20

A representação decimal de um número racional sempre é finita ou infinita periódica.

43

NÚMEROS IRRACIONAIS

Fonte:Centurión, 2012, p. 43, 8º ano.

Ainda na página anteriormente descrita, os autores alertam que na divisão de 59 por 11 é possível concluir com antecedência que o quociente entre esses dois números é apenas um número racional periódico ou exato.

Em seguida, na página 44, os autores apresentam o conceito de número irracional como sendo um número cuja representação decimal é infinita e não periódica. Eles também alertam que um número irracional não é resultado de nenhuma divisão entre dois números inteiros não sendo possível, segundo os autores, sua escrita em forma de fração.

Figura 47 – Introdução aos números irracionais.

E o número 4,76777879808182...?

Ele **não** é um **número racional**, porque sua representação decimal é infinita, sem ser periódica. Números desse tipo são chamados de **números irracionais**.

Números racionais ⇨ representação decimal finita ou dízima periódica
podem ser escritos na forma de fração

Números irracionais ⇨ infinitas casas decimais, sem período
não podem ser escritos na forma de fração

Fonte: Centurión, 2012, p. 44, 8º ano.

No recorte acima descrito, os autores criaram um diagrama com o propósito de mostrar a diferença entre os números racionais e os números irracionais destacando que os números irracionais além de terem infinitas casas decimais sem período, também não poder ser escritos na forma de fração como já fora dito anteriormente.

Mais adiante, na seção Ação da página 49 é proposta uma atividade que consistem em encontrar o valor aproximado do número irracional π (Pi) através da medição de vários objetos circulares para, posteriormente, os alunos executarem a divisão entre o comprimento da circunferência pelo seu respectivo diâmetro. Ainda nessa seção, fazem uma breve menção de como a letra grega π (Pi) veio a se tornar o símbolo do comprimento para qualquer circunferência.

Figura 48 – O número irracional pi.

π, que número é esse?

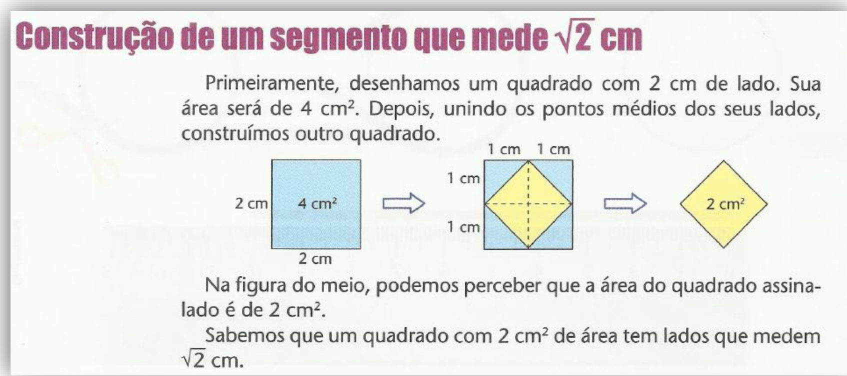
A letra grega π (lê-se pi) é também o nome dado a um número especial. Ela é a inicial de πε∂|γε'∂ε|α (*periphéreia*), palavra grega que significava tanto *circunferência* como *periferia*.

O prefixo πε∂| (*peri*) significa *em volta de*.

Fonte: Centurión, 2012, p. 49, 8º ano.

A partir da página 51, encontra-se um tópico específico que trata dos números irracionais na geometria. Neste os autores apresentam um quadrado cuja área mede $2cm^2$, perguntando quantos centímetros mediria o respectivo lado. A conclusão é que o referido quadrado possui como medidas de seus lados $\sqrt{2}\ cm$. Para provar a afirmação feita anteriormente, os autores propõe uma atividade geométrica como veremos no recorte abaixo:

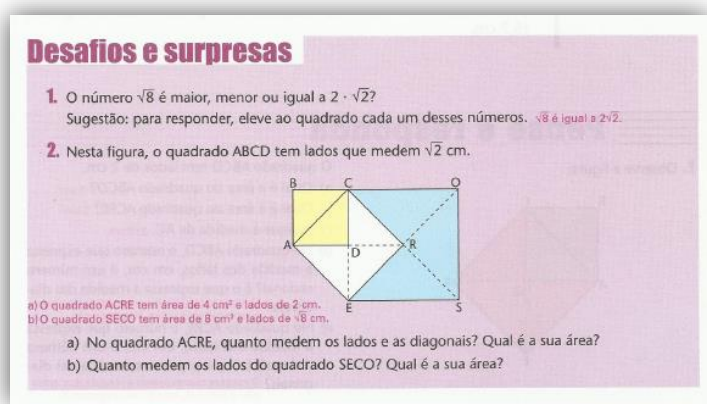
Figura 49 – Representação geométrica de nº irracional.



Fonte: Centurión, 2012, p. 52, 8º ano.

Na seção Desafios e surpresas, presente à página 54, encontra-se uma atividade que nos chama atenção por avançar um pouco mais na atividade acima descrita levantando a possibilidade de ampliação nas discussões sobre lado, diagonal do quadrado e número irracional.

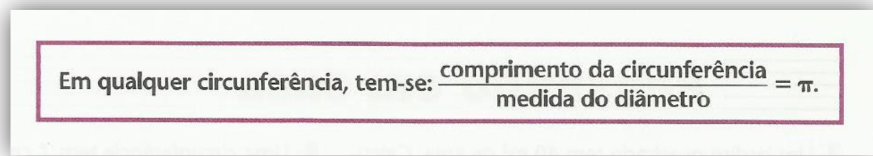
Figura 50 – Representação geométrica de nº irracional.



Fonte: Centurión, 2012, p. 54, 8º ano.

Na página 52 e 53, os autores retomam o número irracional π (Pi) fazendo uma alusão à atividade proposta na seção Ação contida na página 49 do volume referente ao 8º ano. Segundo os autores, os matemáticos provaram que, independentemente das dimensões de uma circunferência, o quociente entre a medida do comprimento pelo respectivo diâmetro é sempre o mesmo valor, ou seja, π (Pi). Ainda alertam que esta divisão não pode ser realizada com números inteiros. Afirmam também que o valor 3,14 atribuído a π (Pi) trata-se de um valor aproximado.

Figura 51 – Atividade exploratória do nº pi.

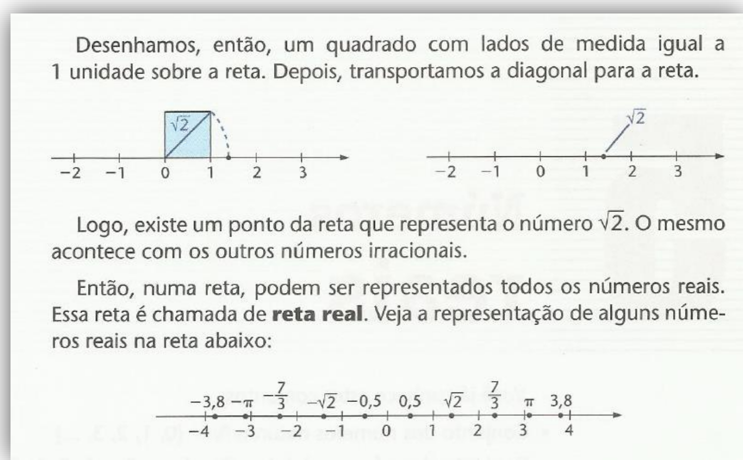


Em qualquer circunferência, tem-se: $\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi$.

Fonte: Centurión, 2012, p. 53, 8º ano.

No tópico de número 05, ainda no capítulo 03 do volume do 8º ano desta obra, os autores apresentam a representação do número irracional $\sqrt{2}$ na reta numérica. Além da representação do referido número, ainda apresentam outros números localizados na reta, assim como descrito a seguir:

Figura 52 – Representação do nº irracional na reta.



Desenhamos, então, um quadrado com lados de medida igual a 1 unidade sobre a reta. Depois, transportamos a diagonal para a reta.

Logo, existe um ponto da reta que representa o número $\sqrt{2}$. O mesmo acontece com os outros números irracionais.

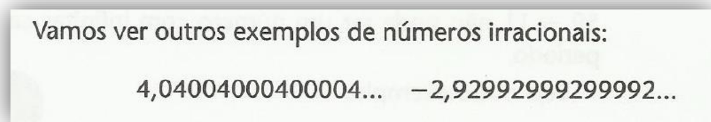
Então, numa reta, podem ser representados todos os números reais. Essa reta é chamada de **reta real**. Veja a representação de alguns números reais na reta abaixo:

Fonte: Centurión, 2012, p. 56, 8º ano.

Logo após esta etapa de introdução do conceito de número irracional, os autores dão início às operações com radicais, que são as propriedades operatórias algébricas que são abordadas de forma introdutória no 8º ano e retomadas, nesta obra, no 9º ano.

Gostaríamos ainda de destacar uma afirmação feita pelos autores na página 44 no que diz respeito a certos números irracionais serem criados artificialmente, fato que retomaremos na análise referente ao material descrito.

Figura 53 – Números irracionais artificiais.

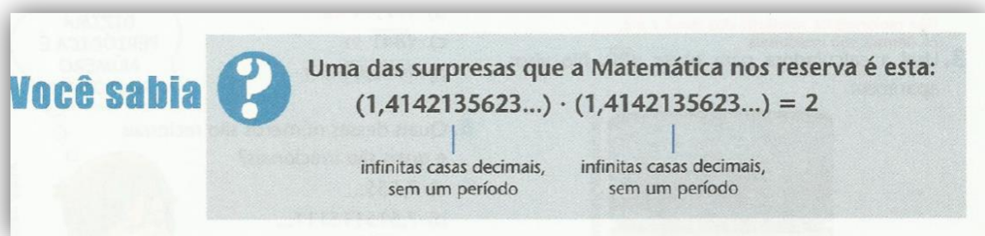

Vamos ver outros exemplos de números irracionais:

4,04004000400004... −2,92992999299992...

Fonte: Centurión, 2012, p. 44, 8º ano.

Mais adiante, na página 47, encontra-se na seção Você sabia, uma curiosidade. Os autores dão destaque a esta curiosidade, destacando que se trata de uma surpresa que a matemática nos reserva:

Figura 54 – Curiosidade sobre o Número pi.


Você sabia

Uma das surpresas que a Matemática nos reserva é esta:

$$\underbrace{(1{,}4142135623...)}_{\text{infinitas casas decimais, sem um período}} \cdot \underbrace{(1{,}4142135623...)}_{\text{infinitas casas decimais, sem um período}} = 2$$

Fonte: Centurión, 2012, p. 47, 8º ano.

6.5.3 Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

Os números irracionais são introduzidos a partir do estudo sistemático das dízimas periódicas, sendo o tratamento inicial é essencialmente numérico. A figura 45 ilustra a visão dos autores ao apresentarem um diagrama comparando os números irracionais com os racionais, ou seja, há uma preocupação inicial, apenas com as características numéricas do número irracional.

b) Clareza e coerência

Quando os autores afirmam que “Nesses exemplos, vimos números irracionais criados artificialmente, só para mostrar que não podem ser escritos na forma de fração”. (CENTURIÓN, 2012, p. 44), não deixam claro o que vem a ser essa artificialidade.

Na seção Você sabia da página 47 não fica clara de que forma deve-se efetuar a multiplicação para obter o resultado descrito na figura 53.

Na seção Ação da página 50, encontra-se a afirmação “A seguir, usando uma calculadora, deve-se efetuar a divisão entre as medidas obtidas: a da circunferência pela do diâmetro. O número π é o resultado dessa divisão”. (CENTURIÓN, 2012, p. 50). Porém, no capítulo 04, ao abordarem os números irracionais na geometria, os autores ressaltam que o valor 3,14 é uma aproximação para o número pi.

c) Atenção às recomendações curriculares

Em nossa análise, pudemos verificar que esta obra atende as recomendações propostas nos documentos de orientações curriculares.

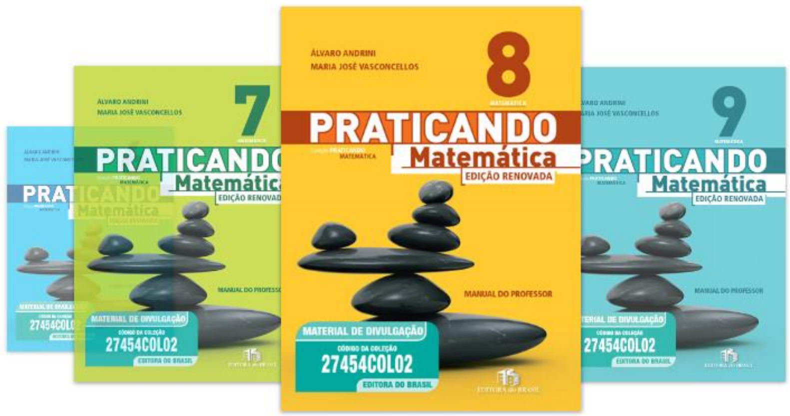
Destacamos o cuidado dos autores em deixar claro que os números irracionais não podem ser expressos por um razão de inteiros, conforme (BRASIL, 1998, p. 83).

Um dos pontos fortes desta obra é o cuidado em apresentar construções geométricas, além localizar um número irracional tanto geometricamente quanto na reta numérica lançando mão de contra exemplos e atividades exploratórias.

6.6 Identificação da obra

PRATICANDO MATEMÁTICA – Edição renovada
ANDRINI, Álvaro. **PRATICANDO Matemática**, 8 / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 3. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012. – (Coleção praticando matemática)

Figura 55 – Capas da coleção PRATICANDO Matemática.



Fonte: ANDRINI, 2012.

6.6.1 Características gerais da coleção

Esta foi a 1ª coleção mais distribuída no PNLD – 2014 com 2.831.411de exemplares distribuídos no Brasil, considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Coleção que não esteve presente no PNLD anterior tem a assinatura dos professores Álvaro Andrini[18] e Maria José Vasconcelos[19]. Achamos oportuno fazer uma rápida observação quanto à autoria desta obra: no Guia de Livros Didáticos do PNLD – 2014 constam como autores Miguel Assis Name e Maria José C. de V. Zampirolo. Naturalmente, acreditamos se tratar de um descuido, tendo em vista que, na ficha

18 Licenciado em Matemática. Pós-graduado em Álgebra Linear e Equações Diferenciais. Foi professor efetivo de Matemática da rede estadual durante trinta anos. Autor de diversos livros didáticos.
19 Licenciada em Matemática. Coordenadora e professora de Matemática em escola da rede particular. Coautora de coleção de Matemática para o Ensino Médio.

bibliográfica da referida obra constam como autores Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos.

Esta obra está estruturada em unidades subdivididas em seções. No caso específico do volume referente ao 8º ano são 14 unidades. Segundo o Guia de Livros Didáticos do PNLD – 2014, as seções:

> *Revisando* e *Autoavaliação* finalizam cada unidade com testes sobre o conteúdo estudado. Permeiam as unidades as seções especiais: *Desafios; Vale a pena ler*, com textos de caráter histórico ou de ampliação do conteúdo; *Seção Livre*, com curiosidades, situações do cotidiano ou questões interdisciplinares. Ao final de cada volume, são apresentadas, ainda, outras quatro seções: *Sugestões de leitura* e de *Sites para o aluno*; *Referências bibliográficas; Moldes ou malhas para as atividades e Respostas dos exercícios* e das atividades propostas nas unidades. (BRASIL, 2013, p. 59 – 60).

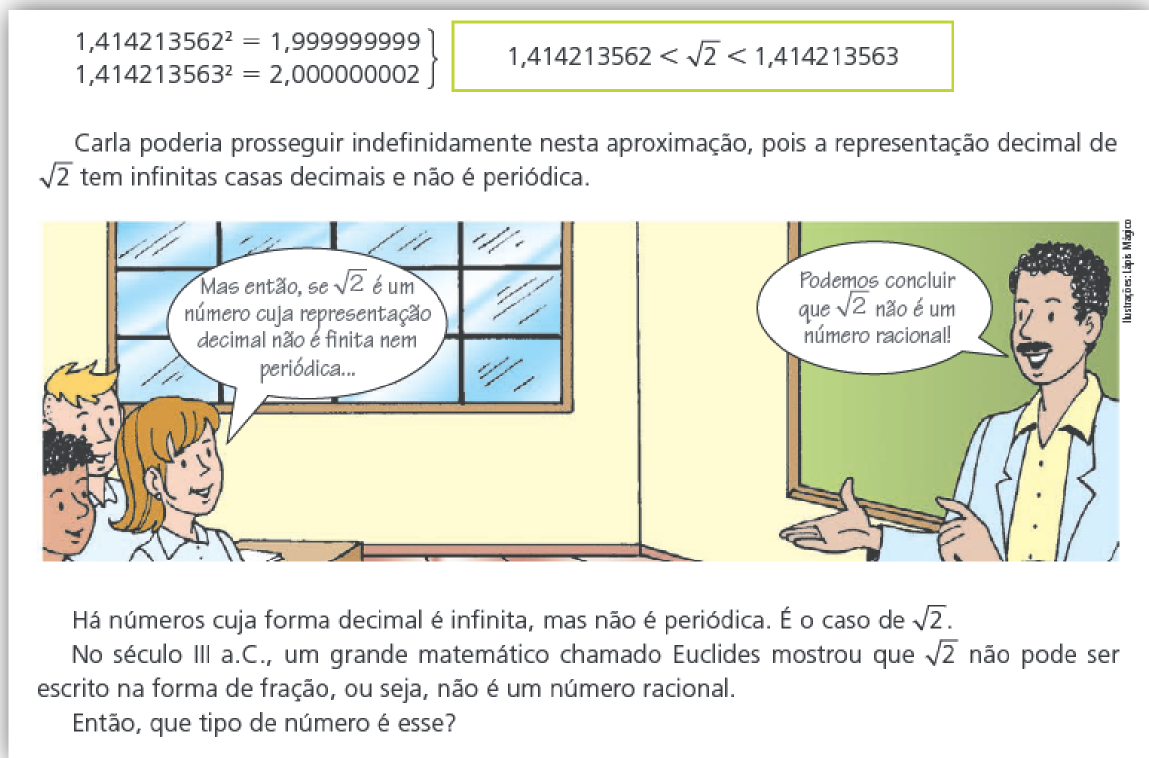
Ainda de acordo com a análise do já referido Guia do livro didático, na seção Visão geral, esta obra apresenta boas ilustrações, textos interessantes, narrativas históricas, exercícios e atividades de forma equilibrada, além de apresentar um bom desenvolvimento no campo de conteúdos relativos a Números e operações. Contudo, limitadas, quanto à sistematização dos conceitos na Geometria, a pesar de, apresentar atividades exploratórias de modo adequado nesse campo de conteúdo.

6.6.2 Descrição

Os números irracionais são abordados nesta obra no 8º ano logo na primeira unidade, na qual é dedicada ao estudo dos conjuntos numéricos. Nesta unidade são vistos também os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais. Os números irracionais são precedidos pela abordagem dos números racionais em sua representação periódica e infinita, bem como sua respectiva representação fracionária.

Na página 19, os autores apresentam o que eles chamam de um novo tipo de número. Eles optam por introduzir o conceito de número irracional através de aproximações decimais cada vez mais refinadas. Tal atividade tem a recomendação do uso auxiliar da calculadora, além de utilizarem um recurso de ilustrações em que os personagens dialogam entre si discutindo sobre os resultados obtidos nos cálculos realizados com a ajuda da calculadora, bem como conversam sobre os aspectos históricos relativos à descoberta de um tipo de número que não era racional.

Figura 56 – Introdução dos números irracionais.



$$\left.\begin{array}{l}1{,}414213562^2 = 1{,}999999999 \\ 1{,}414213563^2 = 2{,}000000002\end{array}\right\} \quad \boxed{1{,}414213562 < \sqrt{2} < 1{,}414213563}$$

Carla poderia prosseguir indefinidamente nesta aproximação, pois a representação decimal de $\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais e não é periódica.

Há números cuja forma decimal é infinita, mas não é periódica. É o caso de $\sqrt{2}$.

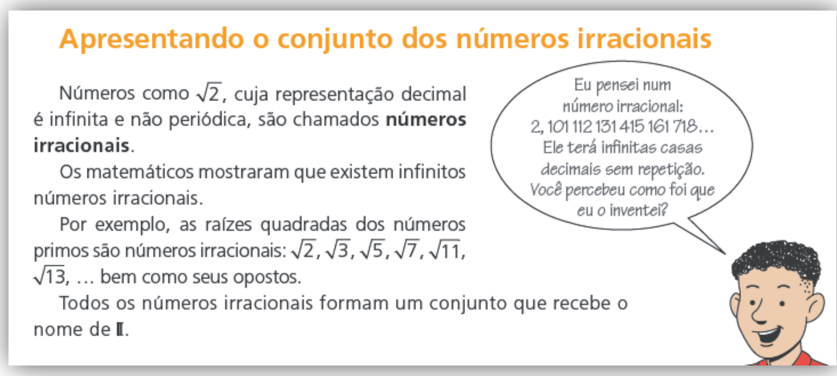
No século III a.C., um grande matemático chamado Euclides mostrou que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma de fração, ou seja, não é um número racional.

Então, que tipo de número é esse?

Fonte: Andrini, 2012, p. 19, 8º ano.

Na página seguinte, na seção Apresentando os números irracionais, os autores vão mais adiante afirmando que tais números apresentam representação decimal infinita e não periódica.

Figura 57 – Introdução dos números irracionais.



Apresentando o conjunto dos números irracionais

Números como $\sqrt{2}$, cuja representação decimal é infinita e não periódica, são chamados **números irracionais**.

Os matemáticos mostraram que existem infinitos números irracionais.

Por exemplo, as raízes quadradas dos números primos são números irracionais: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, … bem como seus opostos.

Todos os números irracionais formam um conjunto que recebe o nome de $\mathbb{I}$.

Fonte: Andrini, 2012, p. 20, 8º ano.

Também dizem que já fora provado por matemáticos que o conjunto dos números irracionais é infinito e que estes números têm sua representação decimal infinita e não periódica. Outro cuidado que os autores tiveram foi em apresentar os números irracionais como uma aproximação racional conveniente, utilizando-se para isso a calculadora, mostrando que a mesma faz uma aproximação de nove casas decimais. Porém também indicam que em muitos casos os números irracionais podem ser trabalhados na própria forma de radical.

Na página 22, é apresentada a atividade que consiste em dividir o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Nesta seção dedicada ao número irracional π (Pi), também encontra-se uma nota histórica informando que este número já era conhecido pelos antigos povos da Babilônia, além de ser também encontrado em textos bíblicos para o cálculo de objetos circulares. Os autores fazem uma afirmação que nos chama a atenção sobre um quociente constante que é um número irracional:

Figura 58 – O número irracional pi.

Dizemos *aproximadamente igual* porque no século XVII provou-se que este quociente constante é um número irracional.

Ele é denotado pela letra grega π (lê-se “pi”), que é a inicial da palavra “contorno” em grego.

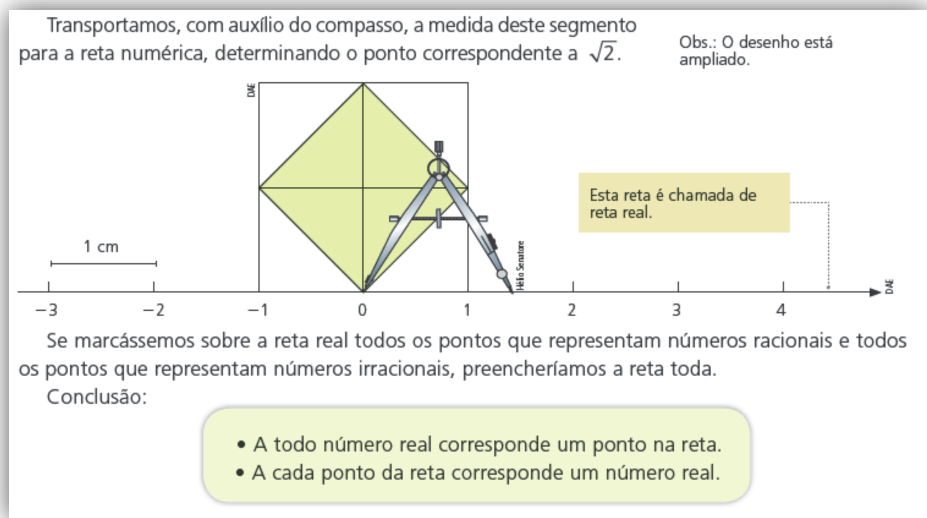
- π tem infinitas casas decimais e não apresenta período.
  $\pi = 3{,}141\,592\,65\ldots$

$$\text{Se } \frac{C}{d} = \pi, \text{ então } C = \pi \cdot d.$$

Fonte: Andrini, 2012, p. 22, 8º ano.

Ao abordarem o conjunto dos números reais, os autores tem a preocupação de afirmar que todo número real pode ser representado como um ponto na reta numérica. Para provar tal afirmação eles recorrem ao procedimento de localizar na reta numérica o ponto correspondente ao número irracional $\sqrt{2}$ através de uma construção geométrica bem conhecida. Os autores afirmam que do ponto de vista decimal, este número pode ser representado como uma aproximação, contudo, do ponto de vista geométrico, pode-se encontrar a localização exata deste número na reta.

Figura 59 – Representação de número irracional na reta.



Fonte: Andrini, 2012, p. 24, 8º ano.

Logo em seguida, na página 25 encontram-se vários exercícios sobre os números reais que são seguidos na página posterior pelas propriedades dos números reais em que os autores apresentam uma tabela contendo as referidas propriedades.

Na seção Vale a pena ler contida na página 28, encontra-se uma nota histórica de cunho informativo cujo título é “Os números inexprimíveis”. Nesta, os autores resgatam a descoberta dos números irracionais por parte dos sábios gregos por volta do ano 400 a.C. Ainda informam que o matemático alemão Richard Dedekind introduziu formalmente, na aritmética, o conceito de número irracional no ano de 1872. Também abordam o número irracional π (Pi) no que diz respeito a sua importância para a matemática falando ainda um pouco a título de curiosidade , na referida nota histórica, sobre a relação entre a primeira letra da palavra perímetro (a letra grega pi) e o número irracional anteriormente mencionado, além de citarem algumas aplicações no teste de computadores sobre a sua capacidade de realização de cálculos complexos, utilizando-se o número pi para tais testes. Os autores finalizam a nota histórica relatando que a primeira demonstração da irracionalidade de pi foi feita pelo matemático francês radicado na Alemanha J. H. Lambert no ano de 1761. A introdução do conceito de número irracional é encerrada logo após a seção histórica descrita acima.

6.6.3 Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

A abordagem dos números irracionais, nesta obra, é pautada essencialmente na aritmética. São dedicadas duas páginas para a introdução dos números irracionais,em que a argumentação inicial é feita a partir de exemplos com aproximações decimais sucessivas. Não é abordado, nessa obra, o conceito de incomensurabilidade, porém há uma preocupação em representar o número irracional $\sqrt{2}$ na reta numérica, no entanto, na atividade da figura 59 desta análise, poderia ser mais explorada, no que diz respeito ao problema da duplicação da área do quadrado, tendo em vista que, nesta atividade estão presentes todos os elementos necessários para tal feito.

Com relação ao número pi, há uma abordagem experimental que poderia ter maior destaque.

b) Clareza e coerência

Na apresentação dos números irracionais, segundo a figura 57 desta pesquisa, inspiram cuidados algumas afirmações feitas pelos autores. Uma dessas afirmações se refere a um dos personagens quanto à criação de números irracionais. Trata-se de uma estratégia muito comum em que os autores de livros didáticos criam números irracionais para ressaltar a característica de serem infinitos e não periódicos. Contudo há uma grande limitação quanto ao conceito de incomensurabilidade, em contraposição aos filósofos gregos ao se depararem com grandezas que não apresentavam uma unidade comum entre dois segmentos dados.

Outro aspecto por nós observado que merece cuidado foi exemplificar como número irracional as raízes quadradas dos números primos. Como sabemos, existem infinitos números irracionais obtidos através da extração da raiz quadrada de números compostos. Como exemplo, citamos: $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{12}$, etc.

c) Atenção às recomendações curriculares

Verificamos que, nesta obra, a atenção às recomendações contidas nos documentos de orientações curriculares poderia ter avançado mais. Certamente, o caráter resumido da abordagem do conceito de número irracional, nesta obra, influenciou neste fato.

Fica clara a ausência de contra exemplos, atividades exploratórias concernentes aos números irracionais conforme orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Apesar de o volume descrito conter notas de história da matemática, estas são mais de cunho informativo do que investigativo.

Percebemos também que os autores se preocuparam mais com a quantidade de exercícios do que a exploração do conceito de número irracional.

6.7 Identificação da obra

PROJETO ARARIBÁ MATEMÁTICA
Projeto Araribá: **Matemática** / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fábio Martins de Leonardo. – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2010. Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano. “Componente curricular: matemática.”

Figura 60 – Capas da coleção Projeto Araribá - Matemática.

Fonte: LEONARDO, 2010.

6.7.1 Características gerais da coleção

Esta coleção ocupou a 5ª colocação em distribuição no PNLD - 2014 com 1.091.645de exemplares distribuídos, considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Coleção presente no PNLD anterior trata-se de um projeto mais amplo que engloba todas as componentes curriculares dos anos finais do Ensino Fundamental da editora ática. No caso da componente curricular matemática, possui assinatura de Fábio Martins de Leonardo[20]. A obra está estruturada em unidades as quais são distribuídas em partes, diferentemente da maioria das coleções que estão estruturadas em

[20]Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo.

capítulos. Cada parte por sua vez é subdividida em seções. No caso específico do volume referente ao 8º ano são 14 unidades distribuídas em seis partes.

A seção Página de abertura apresenta uma ilustração com texto que visa motivar os alunos contendo também questionamentos sobre os conhecimentos prévios dos mesmos. A seção Apresentação dos conteúdos visa apresentar o conteúdo de forma bastante ilustrada, clara e organizada e é subdividida nas seções Vamos fazer e Vamos aplicar. Há também alguns ícones que indicam as atividades Desafio, Calculadora, Cálculo mental que podem ser feitas individualmente ou em grupo. A seção Trabalhando com a informação tem por objetivo o trabalho com a estatística. A seção Atividades integradas tem por objetivo dar mais solidez aos conhecimentos estudados até então. A seção Compreendendo um texto está pautada na leitura e interpretação de um texto ligado à temática do conteúdo em pauta. A seção Problemas apresenta problemas para serem resolvidos de maneira diferenciada, experimental, com a finalidade de uma análise mais específica posteriormente. A seção denominada Trabalho em equipe tem por finalidade integração, estímulo à pesquisa. O fechamento se dá com a seção Para finalizar que é subdividida em duas partes. A primeira é Organize suas ideias na qual o aluno tem a oportunidade de realizar uma auto avaliação referente aos conteúdos abordados na parte que foi estudada e a segunda é Para conhecer mais em que o aluno se depara com sugestões bibliográficas. O Guia do livro didático do PNLD – 2014, no que diz respeito aos conteúdos abordados, firma que:

> Os conteúdos abordados formam uma lista demasiado extensa de tópicos, muitos deles dispensáveis nessa fase da escolaridade. Em contrapartida, conteúdos relevantes recebem atenção insuficiente, a exemplo das noções básicas do campo de estatística e probabilidade. A distribuição dos campos da matemática escolar ao longo dos livros também e insatisfatória, pois os números e operações recebem atenção acima da recomendável no livro do 6º ano e a álgebra ocupa um lugar excessivo nos dois últimos volumes. A despeito disso, os conteúdos de geometria são bem distribuídos nos livros da coleção. (BRASIL, 2013, p. 66).

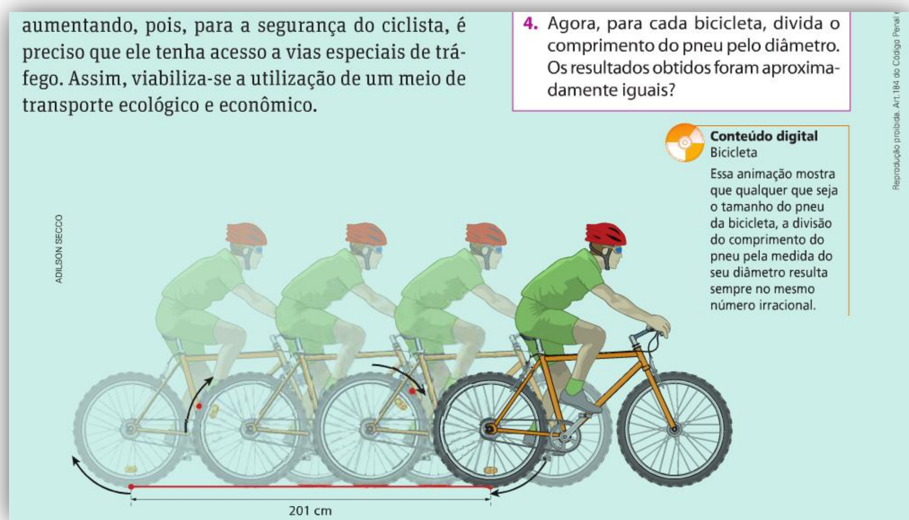
Contudo, o próprio guia acima citado também afirma que com relação às práticas sociais e as questões de contextualização, a obra apresenta uma boa variedade de atividades.

6.7.2Descrição

Nesta obra os números irracionais são abordados inicialmente a partir da parte 01 que retoma todos os conjuntos numéricos abordados anteriormente até o fechamento com os números reais.

Na página de abertura da referida parte encontram-se uma atividade com várias figuras de bicicletas de variados tamanhos e modelos. Ao lado das figuras existe uma caixa de texto com perguntas dentre as quais destacamos a que se refere à divisão entre o comprimento da circunferência de cada pneu das referidas bicicletas pelos seus respectivos diâmetros. Nessa proposta de atividade, encontra-se disponível um material de apoio digital no qual mostra que independentemente da variação do tamanho da bicicleta, a referida divisão sempre resultará no mesmo número irracional, segundo outra caixinha de texto situada logo abaixo a primeira caixa de texto.

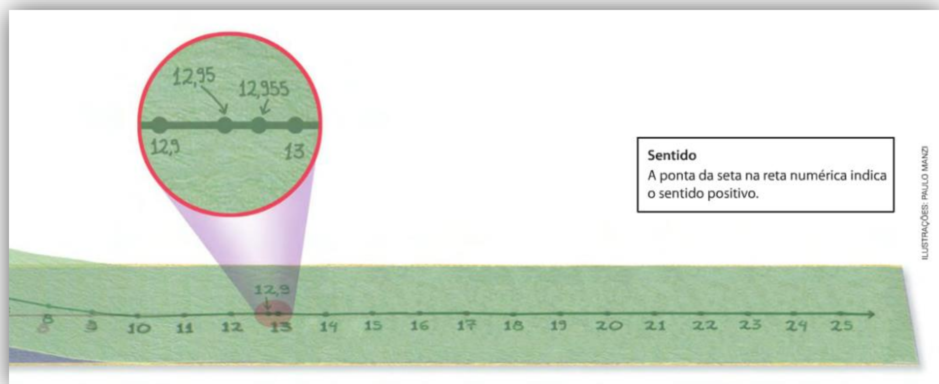
Figura 61 – Atividade exploratória sobre o nº pi.



Fonte: Leonardo, 2010 p.10, 8º ano.

A abordagem dos números irracionais é precedida pelo estudo dos números racionais. Na parte final desse estudo, o autor adentra no conceito de densidade dos conjuntos numéricos, mesmo não fazendo menção desta propriedade. Isso acontece de modo experimental e bem ilustrado com o intuito de deixar claro sobre a representação dos números na reta numérica. A culminância destas abordagens ocorre com os números racionais com alguns exemplos de sua representação na reta numérica assim como abaixo descrito:

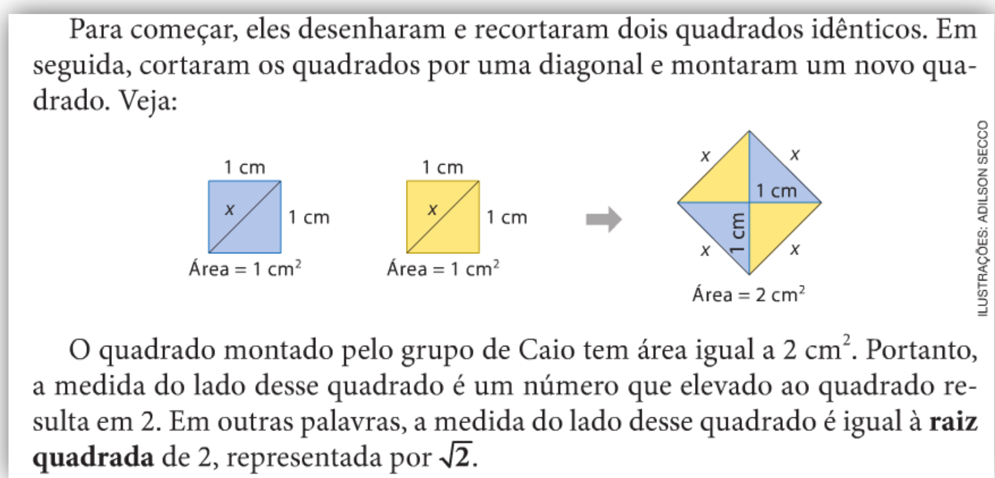
Figura 62 – Representação de nº racional na reta.



Fonte: Leonardo, 2010, p. 23, 8º ano.

Mais adiante, na página 25, os números irracionais são introduzidos através de duas atividades. A primeira consiste em obter um novo quadrado a partir de dois quadrados anteriores idênticos. Neste novo quadrado, a medida do seu lado é igual à medida da diagonal dos quadrados anteriores.

Figura 63 – Representação geométrica de nº irracional.

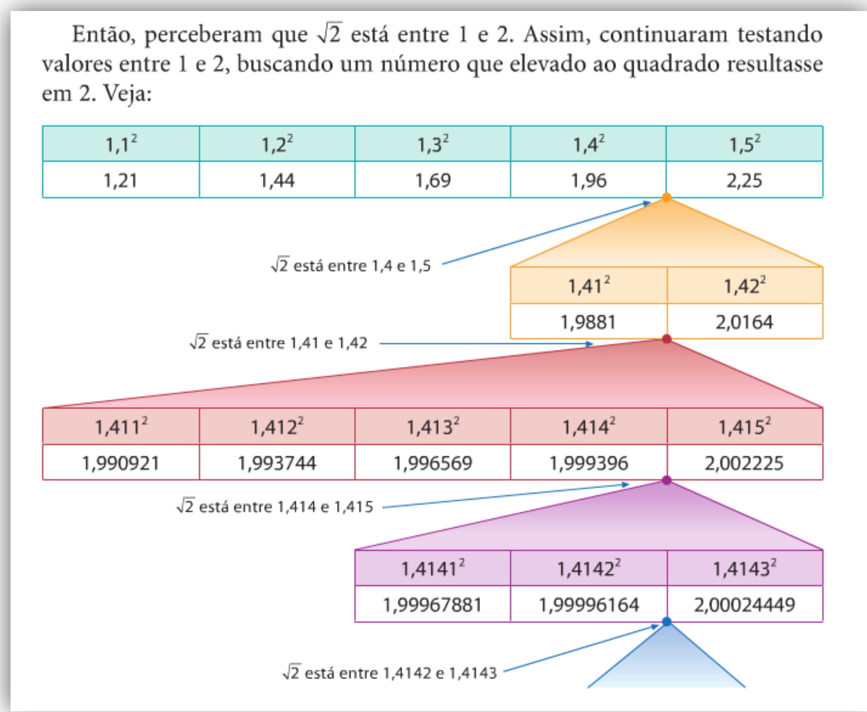

Para começar, eles desenharam e recortaram dois quadrados idênticos. Em seguida, cortaram os quadrados por uma diagonal e montaram um novo quadrado. Veja:

O quadrado montado pelo grupo de Caio tem área igual a 2 cm^2. Portanto, a medida do lado desse quadrado é um número que elevado ao quadrado resulta em 2. Em outras palavras, a medida do lado desse quadrado é igual à **raiz quadrada** de 2, representada por $\sqrt{2}$.

Fonte: Leonardo, 2010, p. 25, 8º ano.

A segunda atividade, presente nessa mesma página, trata-se de uma atividade que visa encontrar o valor do número $\sqrt{2}$ através de aproximações sucessivas. Nessa atividade, o autor conclui que não há um número racional, que elevado ao quadrado resulte no número dois.

Figura 64 – Aproximação decimal para nº irracional.



Então, perceberam que $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2. Assim, continuaram testando valores entre 1 e 2, buscando um número que elevado ao quadrado resultasse em 2. Veja:

$1{,}1^2$	$1{,}2^2$	$1{,}3^2$	$1{,}4^2$	$1{,}5^2$
1,21	1,44	1,69	1,96	2,25

$\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5

$1{,}41^2$	$1{,}42^2$
1,9881	2,0164

$\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42

$1{,}411^2$	$1{,}412^2$	$1{,}413^2$	$1{,}414^2$	$1{,}415^2$
1,990921	1,993744	1,996569	1,999396	2,002225

$\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415

$1{,}4141^2$	$1{,}4142^2$	$1{,}4143^2$
1,99967881	1,99996164	2,00024449

$\sqrt{2}$ está entre 1,4142 e 1,4143

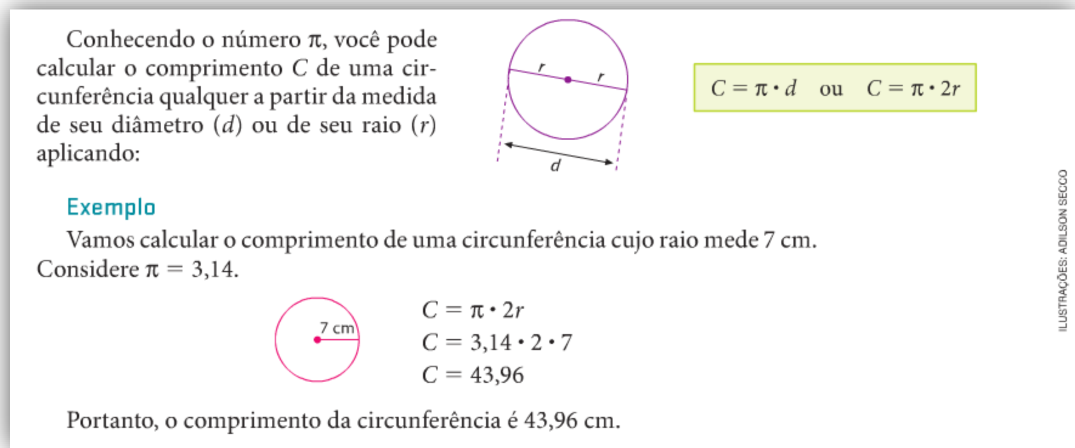
Fonte: Leonardo, 2010, p. 23, 8º ano.

Na finalização da atividade acima descrita, o autor afirma que “Os matemáticos provaram que o número $\sqrt{2}$ não é racional, isto é, não pode ser escrito como um quociente de números inteiros e, por isso, não pode ser expresso como decimal exato ou dízima periódica”. (LEONARDO, 2010, p. 26, 8º ano).

Na sequência dos estudos iniciais dos números irracionais, encontra-se ainda na página 26, uma abordagem sobre o número irracional π (Pi) na qual o autor apresenta uma atividade que consta de três circunferências com raios distintos. Nessa atividade é proposto que seja calculado o quociente aproximado entre o comprimento de cada circunferência polo seu respectivo diâmetro.

O autor conclui a atividade afirmando que “Como é possível perceber, os valores obtidos nesses quocientes estão próximos de 3,14. Para qualquer circunferência, essa razão é de aproximadamente 3,14”. (LEONARDO, 2010, p. 26, 8º ano). O autor ainda ressalta que o número π (Pi) é irracional e, para o cálculo do comprimento da circunferência, estabelece o valor aproximado de 3,14.

Figura 65 – Comprimento da circunferência.



Conhecendo o número π, você pode calcular o comprimento C de uma circunferência qualquer a partir da medida de seu diâmetro (d) ou de seu raio (r) aplicando:

$C = \pi \cdot d$ ou $C = \pi \cdot 2r$

Exemplo

Vamos calcular o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 7 cm. Considere $\pi = 3{,}14$.

$C = \pi \cdot 2r$
$C = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 7$
$C = 43{,}96$

Portanto, o comprimento da circunferência é 43,96 cm.

Fonte: Leonardo, 2010, p. 26, 8º ano.

6.7.3 Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

Nesta obra, a primeira atividade da parte 01 refere-se ao número irracional pi. Trata-se de uma atividade que aborda experimentalmente o número irracional pi através da obtenção do quociente entre o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. Porém o conceito de número irracional é de fato introduzido, a partir da página 25, de forma geométrica e aritmética, conforme as figuras 63 e 64 desta análise.

Na atividade geométrica, o autor explora o número irracional como a medida do lado do novo quadrado formado pela soma dos quadrados anteriores conforme a figura 62. Esta atividade se assemelha com a descrita no Mênon de Platão, já citada nesta pesquisa, porém o autor, não avança no que diz respeito à incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado.

Contudo, fica claro que a abordagem dos números irracionais, dessa obra procura contemplar os enfoques aritmético e geométrico, apesar de se dedicar mais ao enfoque aritmético.

b) Clareza e coerência

Apesar da boa apresentação dos conteúdos e da clareza das ilustrações, verificamos que a obra tende a abordar os conteúdos de forma um pouco mais resumida. Em particular, quanto aos números irracionais não é diferente, pois mesmo trazendo propostas de atividades experimentais bem interessantes, parece deixar a cargo do professor o restante da tarefa.

c) Atenção às recomendações curriculares

Entendemos que esta obra atende às recomendações contidas nos documentos de orientações curriculares.

Porém, se por um lado apresenta atividades exploratórias interessantes, por outro lado, apresenta limitações dado o caráter resumido da obra, pois não foram encontrados registros de notas históricas ou recomendações sobre a impossibilidade de representação dos números irracionais como uma razão de números inteiros segundo as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

6.8 Identificação da obra

PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA
DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática** / Luiz Roberto Dante. — 1. ed. – São Paulo: Ática, 2012. – (Projeto Teláris: Matemática). Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano. 1. Matemática (Ensino Fundamental) I. Título. II. Série.

FIGURA 66 – Capas da coleção projeto Teláris - Matemática.

Fonte: DANTE, 2012.

6.8.1 Características gerais da coleção

Esta foi a 3ª coleção mais adotada no PNLD – 2014 com 2.274.623de exemplares distribuídos considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental.

O termo Teláris tem inspiração na forma latina de *telarium*, cujo significado é tecelão. Segundo informações contidas na própria obra, este termo evoca "o entrelaçamento dos saberes na construção do conhecimento". (Dante, 2012, p. 01).

O projeto Teláris reúne todas as disciplinas dos anos finais do Ensino Fundamental. A editora Ática também disponibiliza um portal digital em que os professores e estudantes tem acesso a conteúdos digitais, planos de aula entre outros recursos. Em particular, nesta versão do PNLD, o projeto Teláris de matemática inaugura sua participação com a assinatura do professor Luiz Roberto Dante[21] que também possui outras obras conhecidas no cenário do ensino da matemática.

[21]Luiz Roberto Dante é livre-docente em Educação Matemática pela UNESP – Rio Claro, SP; doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática, pela PUC-SP; Mestre em Matemática pela USP.

A obra está estruturada em vários itens com vistas à organização dos conteúdos. Estes itens são: Abertura da unidade; Ícones amarelos; Ponto de partida; Introdução dos capítulos; Seções; Tratamento da informação; Praticando um pouco mais; Revisão cumulativa; Outros contextos; Ponto de chegada; Selo sustentabilidade e Objeto educacional digital. Segundo o Guia do PNLD – 2014 cada volume da obra:

> [...] é organizado em unidades e capítulos. As unidades iniciam-se com uma pequena lista de questões, denominadas Ponto de partida, e terminam na seção Ponto de chegada, composta pelas subseções Matemática nos textos, Verifique o que estudou e Autoavaliação. Ao final de cada capitulo, encontram-se as seções Tratamento da informação, Outros contextos e Revisão cumulativa. Outras seções permeiam os capítulos: Exercícios e problemas; Desafios; Bate-papo; Você sabia?; Oficina de matemática – fazendo a gente aprende; Curiosidade matemática; e Raciocínio lógico. Para ajudar na localização das unidades e dos seus conteúdos, há ícones nas margens das paginas impares dos livros. No final dos volumes, encontram-se um glossário, as respostas dos exercícios propostos, sugestões de leituras complementares e de site+s, além da Bibliografia. (BRASIL, 2013, p. 74 - 75).

Um elemento que julgamos importante é a interatividade proposta por alguns personagens que aparecem ao longo de todo o texto da obra os quais dialogam tanto entre si como com o próprio leitor fazendo perguntas, lembretes e recomendações. Com relação à metodologia, segundo o Guia do livro didático do PNLD – 2014, os conceitos são precedidos por problemas, contudo “os conceitos e procedimentos são apresentados sem muitas oportunidades para o aluno tirar conclusões, estabelecer relações e fazer generalizações”. (BRASIL, 2013, p. 74).

6.8.2 Descrição

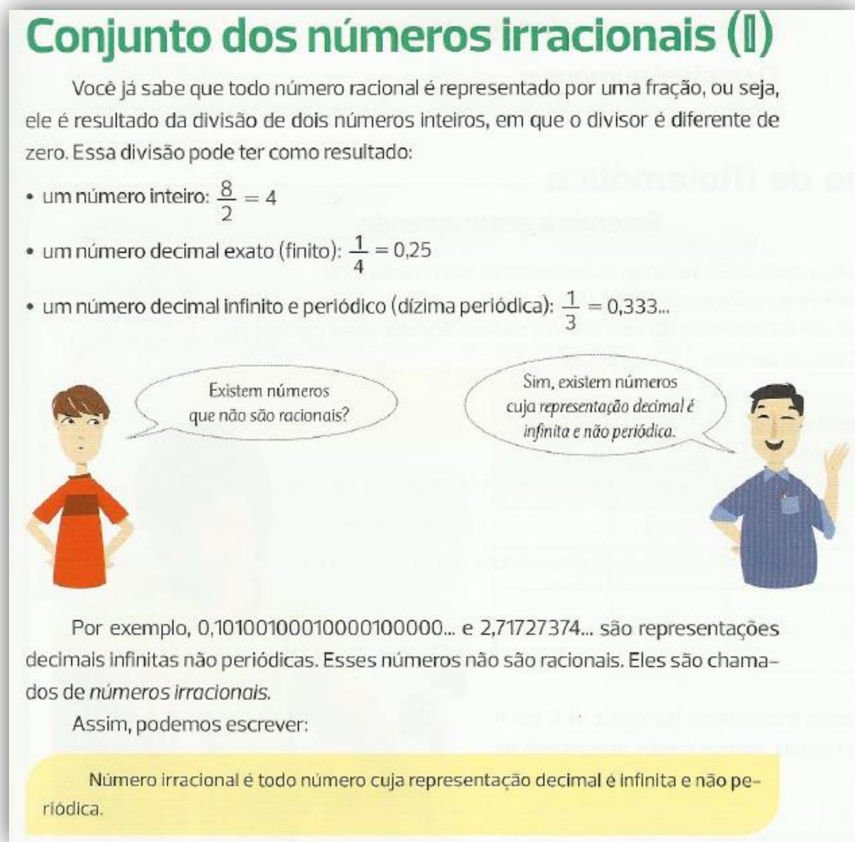
A primeira aparição, nesta coleção, do conteúdo dos números irracionais acontece no 8º ano logo no capítulo 01. O autor retoma os estudos sobre conjuntos numéricos a partir dos números naturais finalizando com a introdução dos números reais.

Atualmente ministra cursos e palestras sobre aprendizagem e ensino da Matemática para professores do Ensino Fundamental e Médio e escreve livros didáticos e paradidáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio pela Editora Ática.

Antes da abordagem dos números irracionais, o autor trata dos números racionais destacando as dízimas periódicas, os racionais na reta numerada, abordando também o conceito de densidade dos números racionais. Logo após, na página 25 do 8º ano é introduzido o conjunto dos números irracionais recordando que todo número racional pode ser representado por uma fração ou quociente de dois números inteiros com divisor diferente de zero e que os resultados possíveis desta divisão de inteiros podem ser um número natural, um número decimal exato ou um número decimal periódico infinito.

Para isto, o autor propõe um diálogo em que os personagens conversam sobre a possibilidade da existência de outros números que não sejam racionais trazendo imediatamente dois exemplos de números irracionais seguido de uma definição, assim como podemos ver no recorte abaixo:

Figura 67 – Conceito de número irracional.



Conjunto dos números irracionais (I)

Você já sabe que todo número racional é representado por uma fração, ou seja, ele é resultado da divisão de dois números inteiros, em que o divisor é diferente de zero. Essa divisão pode ter como resultado:

- um número inteiro: $\frac{8}{2} = 4$
- um número decimal exato (finito): $\frac{1}{4} = 0{,}25$
- um número decimal infinito e periódico (dízima periódica): $\frac{1}{3} = 0{,}333...$

Por exemplo, 0,10100100010000100000... e 2,71727374... são representações decimais infinitas não periódicas. Esses números não são racionais. Eles são chamados de *números irracionais*.

Assim, podemos escrever:

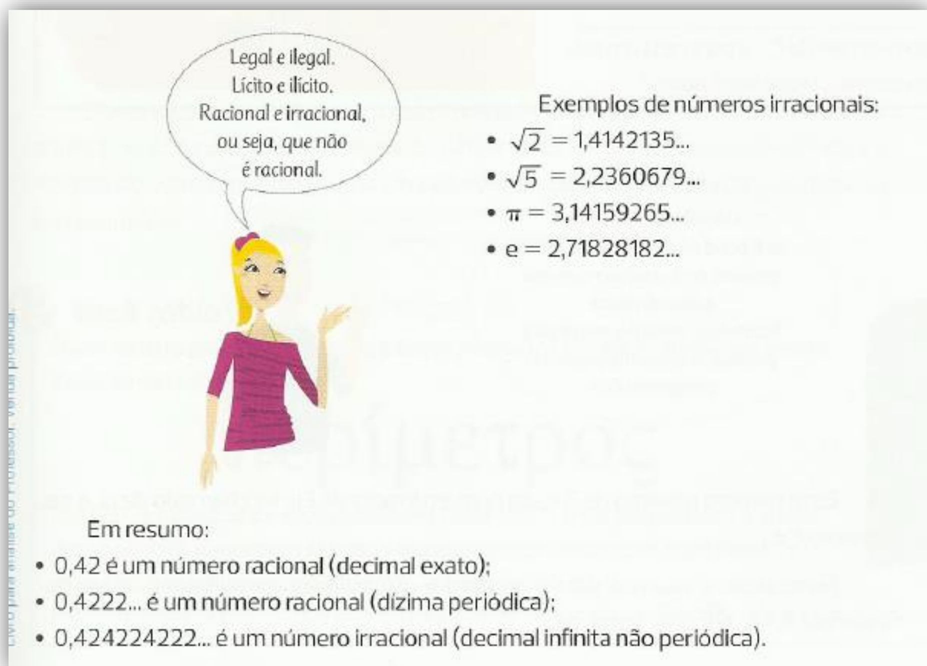
Número irracional é todo número cuja representação decimal é infinita e não periódica.

Fonte: Dante, 2012, p. 25, 8ºano.

Logo em seguida, ainda na mesma página, surge outra personagem evocando alguns exemplos de números irracionais, tanto como radicais como em sua forma decimal correspondente. São os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π (Pi), e o número irracional "e" .

Observemos que à incursão dos personagens acontece de forma estratégica, sendo, portanto, algo relevante na obra, pois tais aparições parecem nortear as discussões sobre a temática. Tal como veremos no recorte a seguir, um fato despertou a nossa atenção quando a personagem reflete, de forma antagônica, sobre os termos: legal e ilegal; lícito e ilícito; racional e irracional. Vejamos:

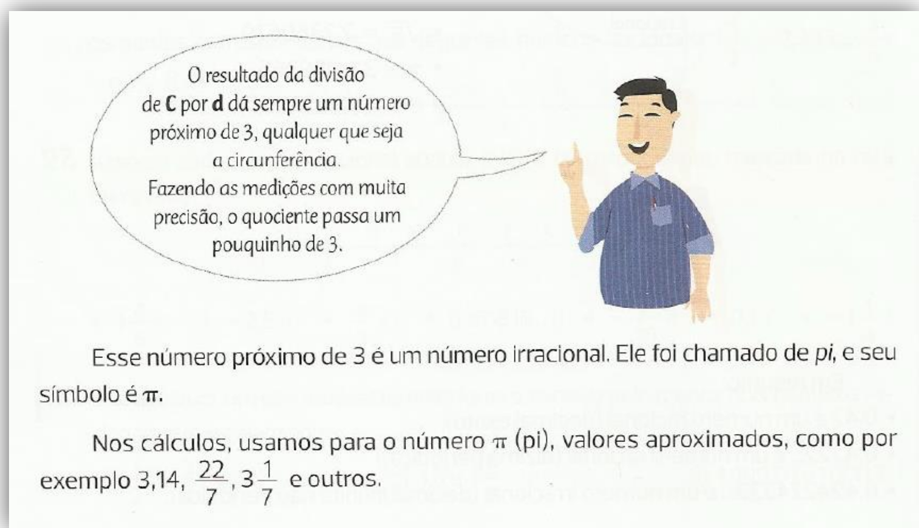
Figura 68 – Exemplos de números irracionais.



Fonte: Dante, 2012, p. 25, 8ºano.

Logo em seguida, na página 26, o autor faz menção a outros números irracionais, os quais chama de números irracionais notáveis indicando como tais os números π (Pi), Φ (Fi) e $\sqrt{2}$. Descreveremos na sequência a seguir os três números anteriormente citados. O número irracionalπ (pi) é introduzido através do experimento que consiste em dividir a medida do comprimento da circunferência pela medida do diâmetro na seção Oficina de Matemática, assim como podemos constatar mais adiante:

Figura 69 – O número irracional pi.



Esse número próximo de 3 é um número irracional. Ele foi chamado de *pi*, e seu símbolo é π.

Nos cálculos, usamos para o número π (pi), valores aproximados, como por exemplo 3,14, $\frac{22}{7}$, $3\frac{1}{7}$ e outros.

Fonte: Dante, 2012, p. 26, 8ºano.

Após os experimentos e os esclarecimentos sobre a necessidade de fazer aproximações do número π, encontra-se na página 27, a dedução da fórmula do comprimento da circunferência:

Figura 70 – Simbologia do número irracional pi.

Usando apenas símbolos, temos:

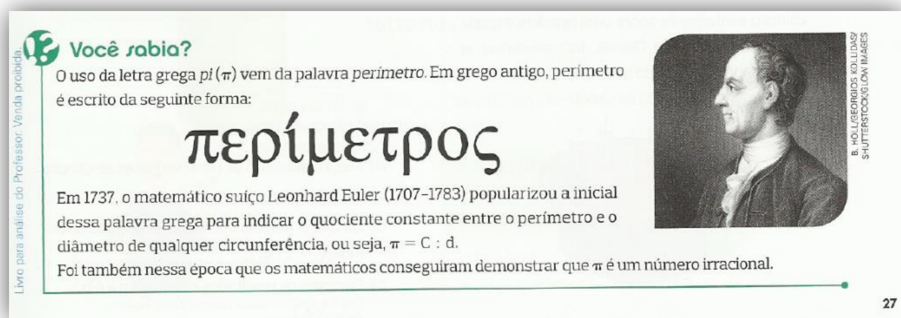
$\frac{C}{d} = \pi$ ou $C = \pi \cdot d$

Como a medida do diâmetro (**d**) é o dobro da medida do raio (**r**), isto é, $d = 2r$, podemos escrever $C = \pi \cdot 2 \cdot r$, ou ainda: $C = 2\pi r$.

Fonte: Dante, 2012, p. 27, 8ºano.

Encontra-se na página 27, na seção Você sabia? uma pequena nota histórica de rodapé com o objetivo de informar sobre o motivo pelo qual a letra grega “pi” foi empregada como símbolo matemático relativo à circunferência, que segundo o autor, tem sua origem derivada da palavra perímetro e que o responsável por tal feito foi o matemático suíço Leonhard Euler no Século XVIII como podemos observar abaixo:

Figura 71 – Nota histórica sobre o número irracional pi.



Você sabia?

O uso da letra grega *pi* (π) vem da palavra *perímetro*. Em grego antigo, perímetro é escrito da seguinte forma:

περίμετρος

Em 1737, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) popularizou a inicial dessa palavra grega para indicar o quociente constante entre o perímetro e o diâmetro de qualquer circunferência, ou seja, $\pi = C : d$.

Foi também nessa época que os matemáticos conseguiram demonstrar que π é um número irracional.

B. HOLL/GEORGIOS KOLLIDAS/ SHUTTERSTOCK/GLOW IMAGES

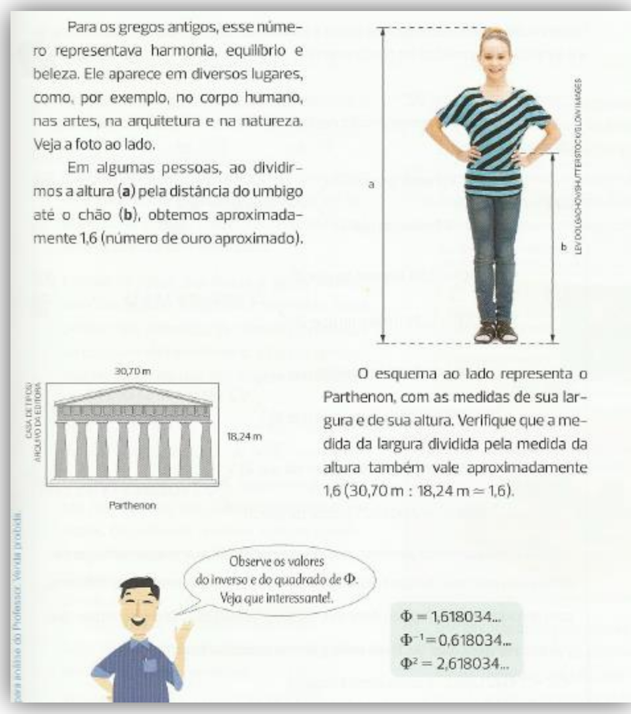
Livro para análise do Professor. Venda proibida.

27

Fonte: Dante, 2012, p. 27, 8ºano.

Na página 29, o autor trata do número irracional Φ (Fi) esclarecendo que essa letra do alfabeto grego é atribuída ao escultor, também grego, Fídias (490 – 432 a.C.). Nesta página dedicada ao número irracional Φ (Fi), o autor relata que tal número é de grande importância para as artes e arquitetura. Para os gregos, segundo o autor, “esse número representava harmonia, equilíbrio e beleza. Ele aparece em diversos lugares como, por exemplo, no corpo humano, nas artes, na arquitetura e na natureza”. (DANTE, 2012, p. 29, 8º ano).

Figura 72 – O número irracional fi.



Para os gregos antigos, esse número representava harmonia, equilíbrio e beleza. Ele aparece em diversos lugares, como, por exemplo, no corpo humano, nas artes, na arquitetura e na natureza. Veja a foto ao lado.

Em algumas pessoas, ao dividirmos a altura (**a**) pela distância do umbigo até o chão (**b**), obtemos aproximadamente 1,6 (número de ouro aproximado).

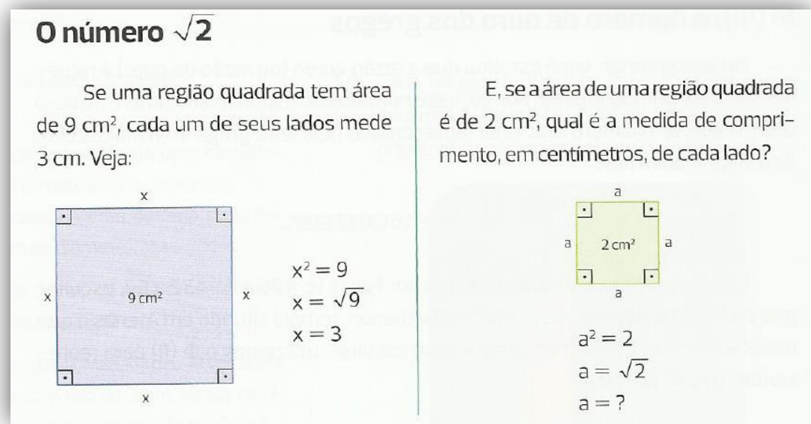
O esquema ao lado representa o Parthenon, com as medidas de sua largura e de sua altura. Verifique que a medida da largura dividida pela medida da altura também vale aproximadamente 1,6 (30,70 m : 18,24 m $\simeq$ 1,6).

$\Phi = 1{,}618034...$
$\Phi^{-1} = 0{,}618034...$
$\Phi^2 = 2{,}618034...$

Fonte: DANTE, 2012, p. 29, 8º ano.

Com relação ao número $\sqrt{2}$, na página 30, o autor realiza duas abordagens. Uma algébrica e outra aritmética. A abordagem algébrica consiste em obter o valor do lado do quadrado através da operação inversa da radiciação. Já a abordagem aritmética ocorre através de uma atividade que consiste em obter a representação decimal do número $\sqrt{2}$ através de aproximações sucessivas, tantas quantas forem necessárias, a fim de provar que este número anteriormente citado, possui representação decimal infinita e não periódica.

Figura 73 – O Número Irracional$\sqrt{2}$.



O número $\sqrt{2}$

Se uma região quadrada tem área de 9 cm², cada um de seus lados mede 3 cm. Veja:

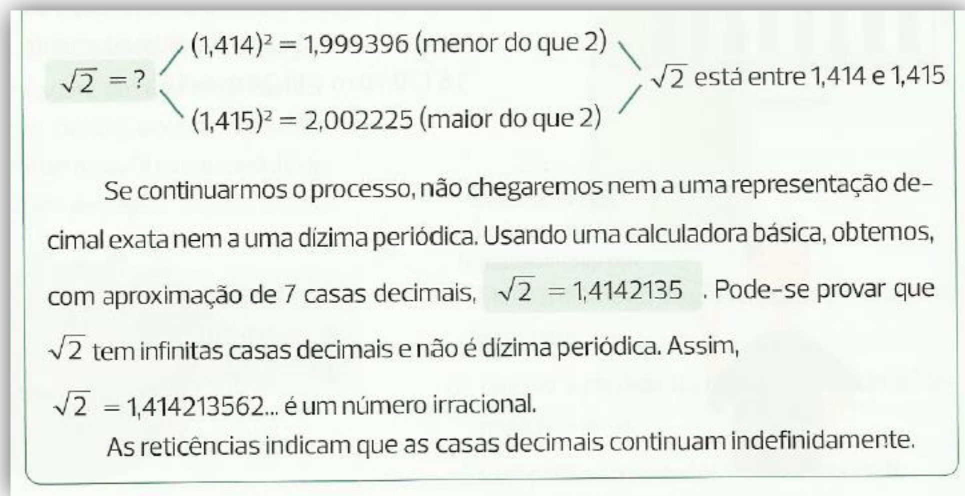
$x^2 = 9$
$x = \sqrt{9}$
$x = 3$

E, se a área de uma região quadrada é de 2 cm², qual é a medida de comprimento, em centímetros, de cada lado?

$a^2 = 2$
$a = \sqrt{2}$
$a = ?$

Fonte: Dante, 2012, p. 30, 8º ano.

Figura 74 – Aproximações decimais para números irracionais.



$\sqrt{2} = ?$ $(1{,}414)^2 = 1{,}999396$ (menor do que 2); $(1{,}415)^2 = 2{,}002225$ (maior do que 2) — $\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415

Se continuarmos o processo, não chegaremos nem a uma representação decimal exata nem a uma dízima periódica. Usando uma calculadora básica, obtemos, com aproximação de 7 casas decimais, $\sqrt{2} = 1{,}4142135$. Pode-se provar que $\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais e não é dízima periódica. Assim,

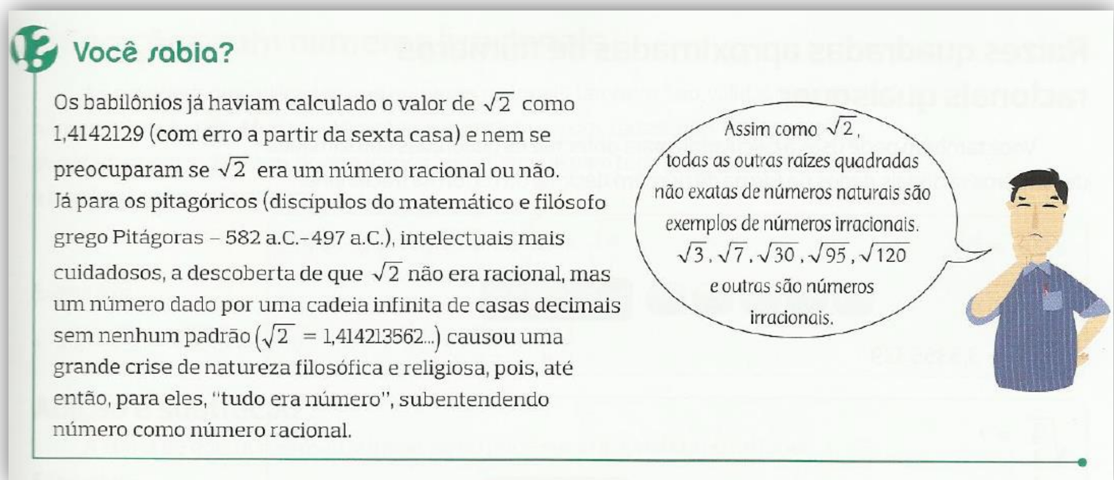
$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ é um número irracional.

As reticências indicam que as casas decimais continuam indefinidamente.

Fonte: Dante, 2012, p. 30, 8º ano.

Em seguida, na página 31, há mais uma nota histórica na seção Você sabia? A nota histórica abaixo descrita faz menção a uma crise de ordem filosófica e religiosa envolvendo o número $\sqrt{2}$, sem, contudo, adentrar nas questões que verdadeiramente estaríam por trás deste conflito.

Figura 75 – Nota histórica sobre os números irracionais.



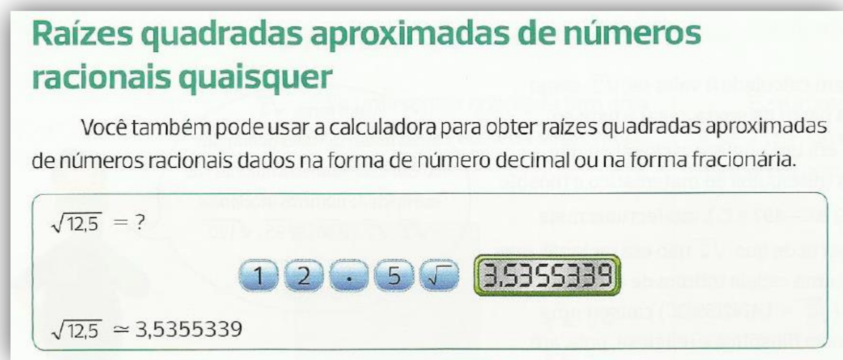
Você sabia?

Os babilônios já haviam calculado o valor de $\sqrt{2}$ como 1,4142129 (com erro a partir da sexta casa) e nem se preocuparam se $\sqrt{2}$ era um número racional ou não. Já para os pitagóricos (discípulos do matemático e filósofo grego Pitágoras – 582 a.C.-497 a.C.), intelectuais mais cuidadosos, a descoberta de que $\sqrt{2}$ não era racional, mas um número dado por uma cadeia infinita de casas decimais sem nenhum padrão ($\sqrt{2} = 1{,}414213562...$) causou uma grande crise de natureza filosófica e religiosa, pois, até então, para eles, "tudo era número", subentendendo número como número racional.

Fonte: Dante, 2012, p. 31, 8º ano.

Na página 32, o autor retoma o uso da calculadora para o cálculo de raízes de um número racional qualquer.

Figura 76 – Aproximações decimais com a calculadora.



Raízes quadradas aproximadas de números racionais quaisquer

Você também pode usar a calculadora para obter raízes quadradas aproximadas de números racionais dados na forma de número decimal ou na forma fracionária.

$\sqrt{12{,}5} = ?$

$\sqrt{12{,}5} \simeq 3{,}5355339$

Fonte: Dante, 2012, p. 32, 8º ano.

Mais adiante, na página 33, o autor aborda as operações com os números irracionais introduzindo as propriedades operatórias da adição, subtração, multiplicação e divisão com números irracionais salientando que as demais propriedades serão estudadas no ano seguinte.

Figura 77 – Propriedades dos números irracionais.

Adição e subtração

A soma de dois números irracionais tanto pode ser irracional como racional.

Exemplos:

- $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ é um número irracional e $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$ é racional;
- $5\sqrt{7}-3\sqrt{7}=(5-3)\cdot\sqrt{7}=2\sqrt{7}$ é irracional;
- $3\sqrt{5}-4\sqrt{7}-3(\sqrt{5}-\sqrt{7})+\sqrt{7}=3\sqrt{5}-4\sqrt{7}-3\sqrt{5}+3\sqrt{7}+\sqrt{7}=$ $=(3-3)\sqrt{5}+(-4+3+1)\sqrt{7}=0\sqrt{5}+0\sqrt{7}=0+0=0$, é racional.

Multiplicação e divisão

O produto e o quociente de dois números irracionais tanto pode ser irracional como racional.

Exemplos:

- $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{3\cdot 7}=\sqrt{21}$, é irracional;
- $2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}=10\cdot 3=30$, é racional;
- $\dfrac{15\sqrt{13}}{5\sqrt{17}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{17}}=\sqrt{\dfrac{13}{17}}$, é irracional;
- $\dfrac{12\sqrt{21}}{4\sqrt{21}}=3$, é racional.

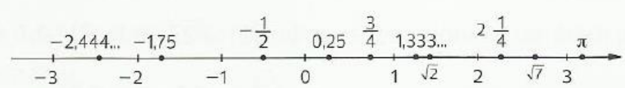
Observação: Quando o resultado de uma operação é um número irracional, ele pode ser dado com aproximação. Por exemplo, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{21}$ ou, aproximadamente, 4,28, pois $\sqrt{21}\simeq 4{,}28$.

Fonte: Dante, 2012, p. 32, 8º ano.

A partir da página 34 o autor introduz o conjunto dos números reais e na página seguinte apresenta alguns exemplos de números reais localizados na reta numérica. Ele afirma que para os números irracionais escritos na reta foram considerados apenas valores aproximados destacando que os números reais ocupam todos os pontos da reta.

Figura 78 – Localização de números irracionais na reta.

Observe a reta numerada. Os números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ e π foram considerados com seus valores aproximados ($\sqrt{2}\simeq 1{,}4$; $\sqrt{7}\simeq 2{,}6$; $\pi\simeq 3{,}1$).



Observação: Considerando a correspondência um a um citada acima, os números reais ocupam todos os pontos da reta. Por isso, ela é chamada de *reta real*.

Fonte: Dante, 2012, p. 32, 8º ano.

Adiante, o autor aborda a comparação e operações com números reais sempre procurando aproximar os valores dos números irracionais para números racionais com aproximação de duas casas decimais. Também aborda as desigualdades dos números reais.

6.8.3 Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

A abordagem inicial dos números irracionais nesta obra é voltada para aritmética, sendo encontrados registros de exemplos geométricos, porém bem limitados. A questão da incomensurabilidade não é citada nessa obra. Há apenas uma pequena nota histórica na página 31, conforme a figura 75 desta pesquisa que relata resumidamente sobre uma crise entre os pitagóricos, sem, entretanto, adentrar nas questões que, de fato estavam por trás dessa crise.

b) Clareza e coerência

Carece de cuidado à afirmação contida na página 25, segundo a figura 68 de nossa investigação, pois na aparição da personagem, não há clareza sobre o real significado do número irracional. A personagem afirma “legal e ilegal, lícito e ilícito. Racional e irracional, ou seja, que não é racional”. (DANTE, 2012, p. 25, 8º ano).

Entendemos que a afirmação anterior é perigosa, pois induz ao pensamento que os números irracionais sejam fruto de alguma transgressão ou operação matemática não permitida.

c) Atenção às recomendações curriculares

Verificamos que esta obra atende às recomendações contidas nos documentos de orientações curriculares no que diz respeito à introdução do conceito de números irracionais. Contudo, não foram verificadas atividades exploratórias sobre o conceito de número irracional, ou contra exemplos entre a geometria e a aritmética.

6.9. Identificação da obra

PROJETO VELEAR – MATEMÁTICA
LOPES, Antônio José. **Projeto Velear: Matemática** / Antônio José Lopes. — 1. ed. – São Paulo: Ática, 2012. – (Projeto Velear: Matemática). Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano. 1. Matemática (Ensino Fundamental) I. Título. II. Série.

Figura 79 – Capas da coleção Projeto Velear - Matemática.

Fonte: LOPES, 2012.

6.9.1 Características gerais da obra

Esta coleção ocupou a 8ª colocação no PNLD – 2014 com 324.709de exemplares distribuídos considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental segundo os dados estatísticos atualizados do FNDE.

A coleção que inaugura sua participação no PNLD é assinada pelo professor Antonio José Lopes[22] que também utiliza o pseudônimo de “Bigode” o qual possui várias obras didáticas dedicadas ao ensino da matemática.

Cada livro desta coleção, segundo o Guia do livro didático do PNLD – 2014, está organizado em unidades permeadas por capítulos. Cada capítulo:

> Traz uma situação inicial sobre o conteúdo a ser trabalhado e inclui as seções:*Atividades*; *Trocando ideias*, para promover o debate entre os

22 Antonio José Lopes – Bigode – é graduado pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP; é mestre em Didática da Matemática pela Universidade Autônoma de Barcelona, Espanha. É também professor – pesquisador do Centro de Educação Matemática (CEM), cuja equipe presta serviços de assessoria e consultoria especializada em Educação Matemática a escolas, Delegacias de Ensino e Secretarias de Educação e instituições especializadas.

> alunos; *Para conhecer mais*, que informa sobre fatos de natureza histórica, cultural, social e, também, recorre a curiosidades; *Vamos pesquisar*, com propostas de investigações; *Lendo*, que traz informações complementares; *Revise o que aprendeu*, com atividades adicionais as do capitulo; *Para concluir*, uma síntese dos conteúdos trabalhados na unidade, acrescida de indicações de leituras, filmes e *sites*. No fim de cada volume, são apresentadas as respostas das atividades e a bibliografia. (BRASIL, 2013, p. 81).

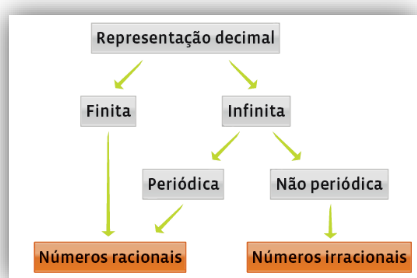
A coleção também apresenta exercícios que são frutos de situações problemas, contextualizações, boa ilustração, uso da História da Matemática de forma ilustrativa. No entanto, segundo (Op. cit. p. 81) "na distribuição dos campos da matemática escolar, verifica-se excesso de atenção aos números e operações, nos dois primeiros volumes, e ao de álgebra, nos dois últimos". A obra ainda apresenta uma série de objetos educacionais digitais que se encontram em anexo em um *DVD ROM* contidos em cada volume.

6.9.2 Descrição

A introdução do conceito de número irracional nesta obra é realizada no 9º ano, a partir do capítulo 01, onde são abordados os conjuntos numéricos desde os números naturais até os números reais.

Antes da abordagem dos números irracionais, os autores finalizam a abordagem dos números racionais com o estudo das dízimas periódicas. Logo após, na página 23, encontra-se o diagrama abaixo para ilustrar a diferença entre os números racionais e irracionais.

Figura 80 – Introdução aos números irracionais.



Fonte: Lopes, 2012, p. 23, 8º ano.

Ainda nesse mesma página, um pouco antes de apresentar o diagrama acima descrito, ele relata brevemente sobre o contexto histórico dos números irracionais e traz como exemplo o número $\sqrt{2}$, afirmando que os filósofos gregos do Século IV aceitavam apenas os números inteiros positivos e suas razões. Afirma ainda que uma crise fora gerada entre os matemáticos daquela época pelo fato da constatação de que o lado de um quadrado e sua diagonal não possuía uma unidade de medida comum.

Neste relato inicial, o autor define que os números irracionais são números que possuem uma representação decimal infinita e não periódica e, que também, não podem ser representados como uma razão de números inteiros, pois não é um número racional, além de afirmar que sua representação é dada pela letra "I".

Nos chama atenção à forma com que o autor levanta alguns questionamentos sobre os números irracionais, tais como: a quantidade de elementos do conjunto dos números irracionais; Como são representados. Logo em seguida, ele já responde aos questionamentos afirmando que tal conjunto é infinito, que sua expansão decimal é infinita e não periódica e que cada número irracional possui uma correspondência com um ponto da reta numérica. Contudo, também chama-nos atenção quando o autor afirma que $\sqrt{p}$ é irracional sempre que "p" for um número primo, formando assim, um subconjunto infinito dos números irracionais. Contudo, o autor não cita que há uma infinidade de números compostos que também são irracionais.

Figura 81 – Introdução aos números irracionais.

$\sqrt{p}$ é um número irracional sempre que **p** for um número primo. São irracionais, por exemplo:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \ldots$$

Como o conjunto de números primos é infinito, temos aqui um subconjunto infinito de números irracionais.

Fonte: Lopes, 2012, p. 24, 8º ano.

Pelo fato da impossibilidade da representação total de um número irracional em sua forma decimal, o autor sugere que para isso seja utilizada a calculadora. Para isso, ele utiliza uma estratégia bem ilustrada com a presença de personagens que dialogam sobre o uso da calculadora. Nesse diálogo, os personagens abordam a aproximação do número irracional $\sqrt{2}$ com sete casas decimais. Também exploram a operação inversa verificando que o valor obtido não é exato, porém, bem próximo por falta ou por excesso dependendo do tipo de aproximação. E com respeito ao número irracional π (Pi), o autor deixa claro que tal número só pode ser escrito de forma aproximada dando um exemplo como veremos a seguir:

Figura 82 – Aproximação decimal de números irracionais.


Quando teclamos × = nessa última operação, calculamos $(1,4142135)^2$. Isso prova que $(1,4142135)^2 < 2$, ou seja, 1,4142135 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ **por falta**.

Então, $(1,4142136)^2 > 2$, ou seja, 1,4142136 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ **por excesso**.
Portanto:

$(1,4142135)^2 < 2 < (1,4142136)^2$ $\quad\quad$ $1,4142135 < \sqrt{2} < 1,4142136$

Um número irracional famoso é o **pi**, cujo símbolo é π, que representa a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Só é possível escrever valores aproximados desse número.

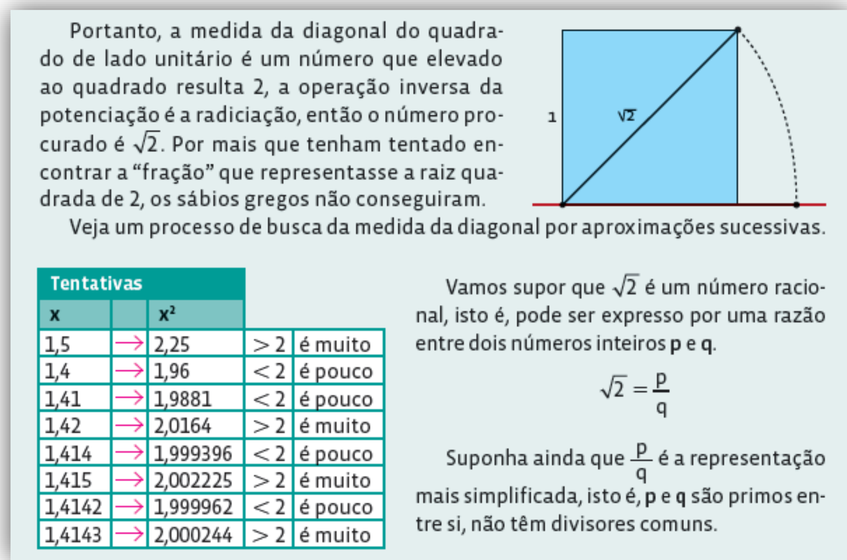
Veja uma aproximação racional de π com 14 casas decimais:

3,14159265358979

Fonte: Lopes, 2012, p. 24, 8º ano.

Na seção Para conhecer mais, na página 25, encontra-se uma nota histórica que consta de uma retomada sobre a descoberta dos números irracionais, acrescentando a demonstração por redução ao absurdo para provar que o número irracional $\sqrt{2}$ é de fato irracional. Nesta própria seção há uma atividade que busca encontrar a medida da diagonal por aproximações sucessivas. Uma recomendação que aparece somente no manual do professor é que os alunos realizem esta atividade de encontrar valores cada vez mais próximos da raiz de dois utilizando a calculadora sem o uso da tecla correspondente ao símbolo de raiz quadrada. Segundo o autor, esta atividade tem por objetivo provar que por mais que sejam feitas aproximações, jamais será encontra do um valor que elevado ao quadrado resultará no número dois.

Figura 83 – Representação geométrica de nº irracional.



Portanto, a medida da diagonal do quadrado de lado unitário é um número que elevado ao quadrado resulta 2, a operação inversa da potenciação é a radiciação, então o número procurado é $\sqrt{2}$. Por mais que tenham tentado encontrar a “fração” que representasse a raiz quadrada de 2, os sábios gregos não conseguiram.

Veja um processo de busca da medida da diagonal por aproximações sucessivas.

Tentativas				
x		x^2		
1,5	→	2,25	> 2	é muito
1,4	→	1,96	< 2	é pouco
1,41	→	1,9881	< 2	é pouco
1,42	→	2,0164	> 2	é muito
1,414	→	1,999396	< 2	é pouco
1,415	→	2,002225	> 2	é muito
1,4142	→	1,999962	< 2	é pouco
1,4143	→	2,000244	> 2	é muito

Vamos supor que $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é, pode ser expresso por uma razão entre dois números inteiros **p** e **q**.

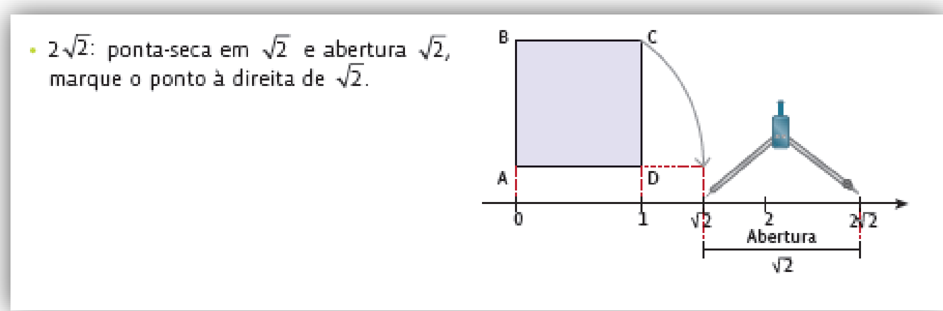
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Suponha ainda que $\frac{p}{q}$ é a representação mais simplificada, isto é, **p** e **q** são primos entre si, não têm divisores comuns.

Fonte: Lopes, 2012, p. 24, 8º ano.

Além da demonstração acima, encontra-se, a partir da página 28, uma atividade experimental que tem por objetivo a construção de números racionais e irracionais na reta numérica com a utilização de régua e compasso. Abaixo, um exemplo destas atividades:

Figura 84 – Representação geométrica de nº irracional na reta.



- $2\sqrt{2}$: ponta-seca em $\sqrt{2}$ e abertura $\sqrt{2}$, marque o ponto à direita de $\sqrt{2}$.

Fonte: Lopes, 2012, p. 31, 8º ano.

6.9.3 Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

Como já dissemos anteriormente, o autor desta obra dá certa atenção quanto à origem dos números irracionais em conformidade com os filósofos gregos afirmando que "o lado do quadrado e sua diagonal não admitiam uma unidade de medida comum, ou seja, não existia uma unidade de medida que coubesse um número exato de vezes no lado do quadrado e em sua diagonal". (LOPES, 2012, p. 23). Porém, inicialmente, em sua obra não são apresentados exemplos ilustrados. Há apenas um curto exemplo no qual ele cita: "considerando um quadrado cujo lado mede 1, pelo teorema de Pitágoras, sabemos que a diagonal desse quadrado mede 2 , e este número não pode ser expresso como uma razão entre segmentos com medidas inteiras". (op. cit. 2012, p. 23).

Mais adiante, na página 28, ao abordar o conjunto dos números reais, verificamos um detalhamento ao representar os números racionais e irracionais na reta numérica, conforme a figura 84 desta análise.

No manual do professor, o autor esclarece que um estudo mais aprofundado dos números irracionais apresenta uma série de obstáculos de ordem epistemológica, sendo difícil, inclusive para estudantes do ensino superior. Sendo assim, ele apresenta um diagrama, conforme a figura 80 desta análise buscando estabelecer uma comparação dos racionais com os irracionais.

b) Clareza e coerência

Na seção Para conhecer mais, na nota histórica, parece não estar em harmonia com a introdução feita pelo próprio autor na página 23 do volume referente ao 9º ano, ao relatar brevemente sobre as causas que levaram a descoberta dos números irracionais.Apesar de apresentar a prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$ através da redução ao absurdo, não deixa claro o conceito de número irracional, mas procura provar algebricamente que o referido número não é racional.

c) Atenção às recomendações curriculares

Entendemos que esta obra atende às orientações contidas nos documentos de orientações curriculares.

Destacamos as atividades exploratórias e contra exemplos contidos nesta obra. Os autores procuram abordar os números irracionais tanto no aspecto geométrico quanto numérico usando a calculadora, reta numérica e compasso segundo as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Além disso, avança nas abordagens referentes à história da matemática adentrando numa proposta investigativa do conceito de número irracional.

6.10 Identificação da obra

VONTADE DE SABER MATEMÁTICA
SOUZA. Joamir Roberto de. **Vontade de saber matemática, 6º ao 9º** / Joamir Roberto de Souza, Patrícia Rosana Moreno Pataro. — 2. ed. – São Paulo: FTD, 2012.

Figura 85 – Capas da coleção Vontade de saber MATEMÁTICA.

Fonte: Souza, 2012.

6.10.1 Características gerais da coleção

Esta coleção foi a 2ª mais adotada na distribuição do PNLD – 2014 com 2.694.730de exemplares distribuídos no Brasil, considerando-se todos os anos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Obra presente no PNLD anterior possui a assinatura dos professores Joamir Roberto de Souza[23]Patrícia Rosana Moreno Pataro[24].

Cada volume desta coleção está organizado em capítulos os quais, por sua vez, estão subdivididos em tópicos e subtópicos. Os autores afirmam que os conteúdos obedecem a uma estrutura curricular em forma de espiral, o que significa que os conteúdos já vistos são retomados em outros momentos no decurso do ano letivo.

[23]Professor graduado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor de Matemática da rede pública de ensino.
[24]Professora graduada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora de Matemática da rede particular de ensino.

Segundo o Guia do livro didático do PNLD – 2014, no que diz respeito à metodologia adotada pelos autores:

> A metodologia adotada segue o modelo em que os conteúdos são apresentadospor explanação teórica, seguida de exercícios de aplicação. De modo geral, os conteúdos são retomados e ampliados, com variação de contextos, utilização de diferentes recursos didáticos e de diferentes tipos de linguagem. No estudo da geometria, merece especial atenção o uso de instrumentos de desenho, de *software* de geometria dinâmica e de materiais concretos, na exploração de conceitos e de propriedades das figuras geométricas. Em todos os volumes ha sugestões de atividades interessantes com o uso de softwares gratuitos. Além disso, a obra apresenta oito objetos educacionais digitais.(BRASIL, 2013, p. 88).

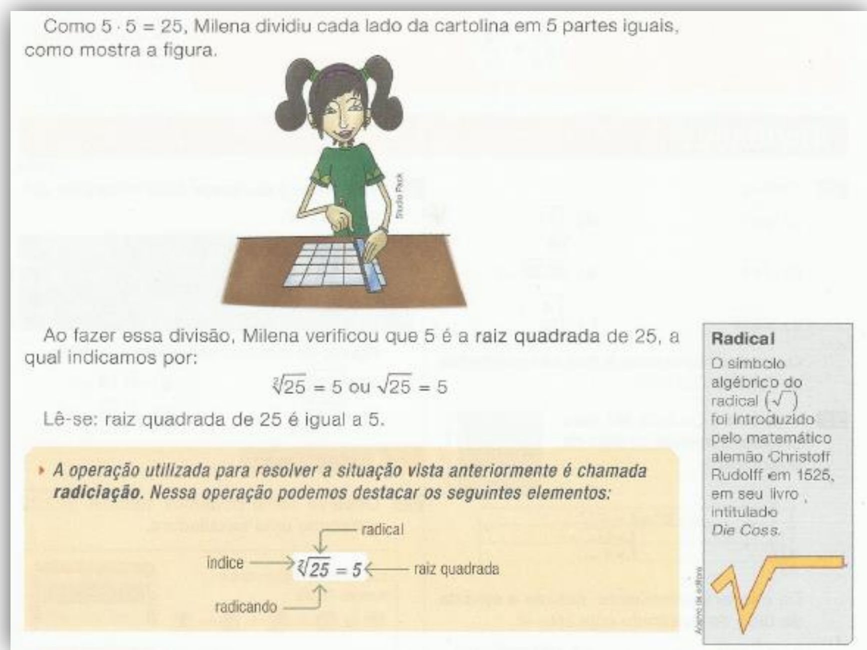
Com respeito às seções, tem as seguintes características: a seção Página de abertura do capítulo tem por objetivo apresentar os conteúdos daquele capítulo. Isto é feito por meio de duas páginas que trazem informações de outras áreas do conhecimento de forma textual e bem ilustrada. Ainda nesta seção, encontram-se dois quadros, o primeiro chamado de Conversando sobre o assunto e, o segundo, Orientações para o professor. O primeiro sugere ao aluno alguns questionamentos com a finalidade de resgatar seus conhecimentos anteriores. Já o segundo apresenta comentários e sugestões dirigidos ao professor. A seção Atividade tem por objetivo apresentar uma série de exercícios organizados em grau de dificuldade crescente. Dentre as atividades contidas nessa seção, algumas delas podem ser selecionadas para serem resolvidas em casa, porém devem ser imediatamente retomadas para correção e discussão em sala de aula. A seção Revisão esta presente ao final de cada capítulo, antes da seção Testes que, por sua vez, são questões de múltipla escolha oriundas de vestibulares e exames curriculares nacionais. A seção Refletindo sobre o capítulo tem por finalidade realizar uma auto avalição do capítulo estudado. A seção Explorando o tema traz textos extraídos de jornais e revistas com o propósito de incentivar o aluno à leitura e à interpretação de textos.Nesta seção também é abordada a História da Matemática, além da relação da matemática com outras áreas do conhecimento. Acessando tecnologias é uma seção que aparece na ausência da seção

Explorando o tema e tem por objetivo desenvolver atividades que vão além do livro didático explorando *sites* e programas computacionais.

6.10.2 Descrição

Os números irracionais são abordados, nesta obra, a partir do capítulo 02 e do capítulo 03 do volume referente ao 8º ano. Curiosamente, os autores optam por dedicar dois capítulos que abordam esta temática. No primeiro deles, encontra-se o estudo sobre potências e raízes. O estudo das raízes quadradas e cúbicas antecede a abordagem sobre os números que não tem raiz exata, assim como veremos mais adiante.

Figura 86 – Operação inversa da potenciação.

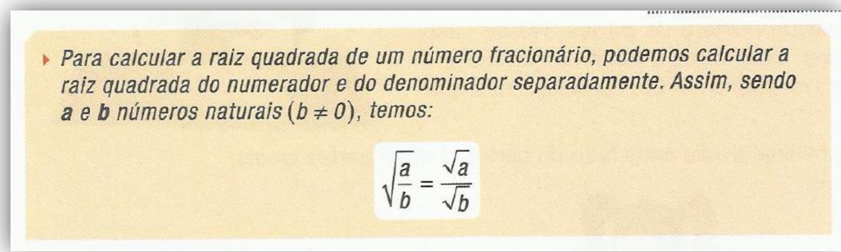


Fonte: Souza, 2012, p. 39, 8º ano.

Para isso, os autores apresentam, na página acima descrita, uma situação problema em que uma personagem necessita recortar 25 fichas em forma de quadradinhos dispondo, para isso, de uma cartolina no formato de um quadrado. Também se encontra nesta mesma página uma pequena nota histórica sobre a origem do símbolo algébrico de radical, além de detalharem sobre os elementos constituintes da simbologia do radical.

Logo em seguida, já na página 40, os autores introduzem o cálculo de radicais de números decimais e apresentam a propriedade de divisão de radicais assim como mostrado na figura seguinte:

Figura 87 – Propriedade dos radicais.



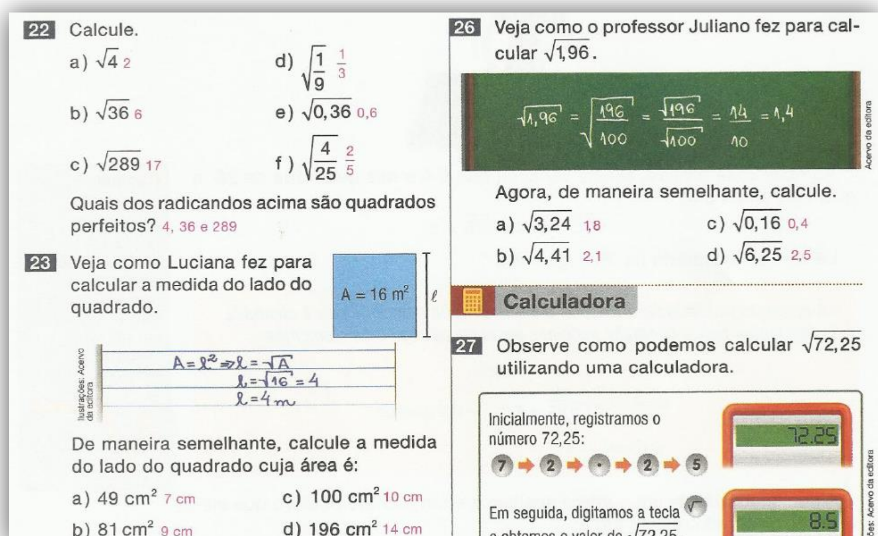
*Para calcular a raiz quadrada de um número fracionário, podemos calcular a raiz quadrada do numerador e do denominador separadamente. Assim, sendo **a** e **b** números naturais ($b \neq 0$), temos:*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Fonte: Souza, 2012, p. 40, 8º ano.

Após essa exibição da propriedade sobre a divisão de radicais, seguem-se vários exercícios sobre a extração de raízes quadradas de números quadrados perfeitos, em forma de fração e de números decimais. Ainda nos exercícios dessa página exploram o uso da calculadora para a obtenção dos resultados.

Figura 88 – Uso da calculadora.



22 Calcule.

a) $\sqrt{4}$ 2
b) $\sqrt{36}$ 6
c) $\sqrt{289}$ 17
d) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ $\frac{1}{3}$
e) $\sqrt{0,36}$ 0,6
f) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ $\frac{2}{5}$

Quais dos radicandos acima são quadrados perfeitos? 4, 36 e 289

23 Veja como Luciana fez para calcular a medida do lado do quadrado.

A = 16 m²

$A = \ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{A}$
$\ell = \sqrt{16} = 4$
$\ell = 4\,m$

De maneira semelhante, calcule a medida do lado do quadrado cuja área é:

a) 49 cm² 7 cm
b) 81 cm² 9 cm
c) 100 cm² 10 cm
d) 196 cm² 14 cm

26 Veja como o professor Juliano fez para calcular $\sqrt{1,96}$.

$\sqrt{1,96} = \sqrt{\frac{196}{100}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{100}} = \frac{14}{10} = 1,4$

Agora, de maneira semelhante, calcule.

a) $\sqrt{3,24}$ 1,8
b) $\sqrt{4,41}$ 2,1
c) $\sqrt{0,16}$ 0,4
d) $\sqrt{6,25}$ 2,5

Calculadora

27 Observe como podemos calcular $\sqrt{72,25}$ utilizando uma calculadora.

Inicialmente, registramos o número 72,25:

7 → 2 → . → 2 → 5

72.25

Em seguida, digitamos a tecla √ e obtemos o valor de $\sqrt{72,25}$.

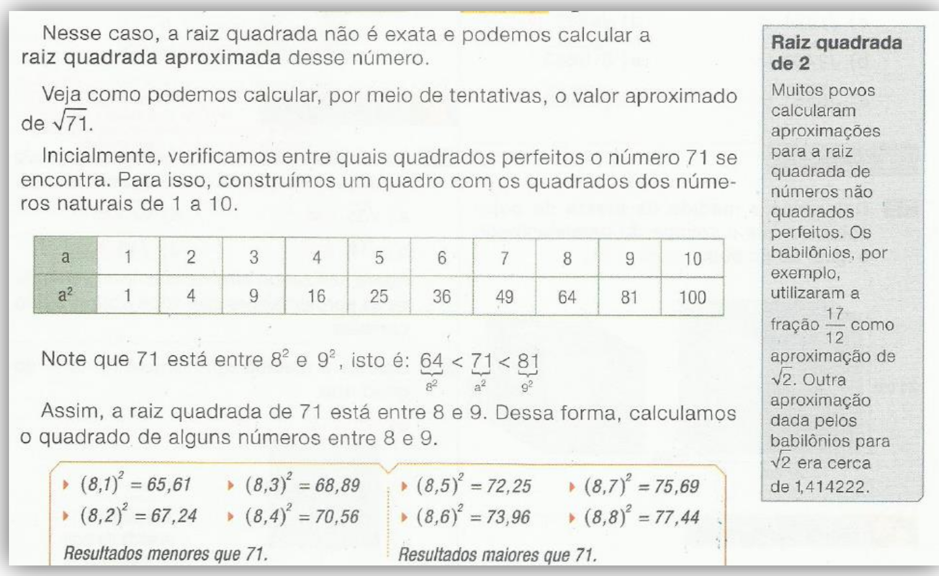
8.5

Fonte: Souza, 2012, p. 40, 8º ano.

Posteriormente, são abordadas as raízes cúbicas, na página 41, seguindo uma abordagem análoga das raízes quadradas e cúbicas. Na sequência, abordam o cálculo das raízes exatas de um determinado número inteiro por tentativas.

Na página 43, os autores propõem o cálculo de raízes aproximadas. Como exemplo, trazem o cálculo da raiz quadrada do número 71 que, por sua vez, fica situado entre as raízes quadradas dos números 64 e 81. Ainda nessa página, encontra-se uma pequena nota histórica que informa sobre o valor que os babilônios adotavam para o número $\sqrt{2}$, como segue:

Figura 89 – Aproximação decimal de números irracionais.



Nesse caso, a raiz quadrada não é exata e podemos calcular a **raiz quadrada aproximada** desse número.

Veja como podemos calcular, por meio de tentativas, o valor aproximado de $\sqrt{71}$.

Inicialmente, verificamos entre quais quadrados perfeitos o número 71 se encontra. Para isso, construímos um quadro com os quadrados dos números naturais de 1 a 10.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Note que 71 está entre 8^2 e 9^2, isto é: $\underbrace{64}_{8^2} < \underbrace{71}_{a^2} < \underbrace{81}_{9^2}$

Assim, a raiz quadrada de 71 está entre 8 e 9. Dessa forma, calculamos o quadrado de alguns números entre 8 e 9.

- $(8,1)^2 = 65,61$
- $(8,2)^2 = 67,24$
- $(8,3)^2 = 68,89$
- $(8,4)^2 = 70,56$

Resultados menores que 71.

- $(8,5)^2 = 72,25$
- $(8,6)^2 = 73,96$
- $(8,7)^2 = 75,69$
- $(8,8)^2 = 77,44$

Resultados maiores que 71.

Raiz quadrada de 2

Muitos povos calcularam aproximações para a raiz quadrada de números não quadrados perfeitos. Os babilônios, por exemplo, utilizaram a fração $\frac{17}{12}$ como aproximação de $\sqrt{2}$. Outra aproximação dada pelos babilônios para $\sqrt{2}$ era cerca de 1,414222.

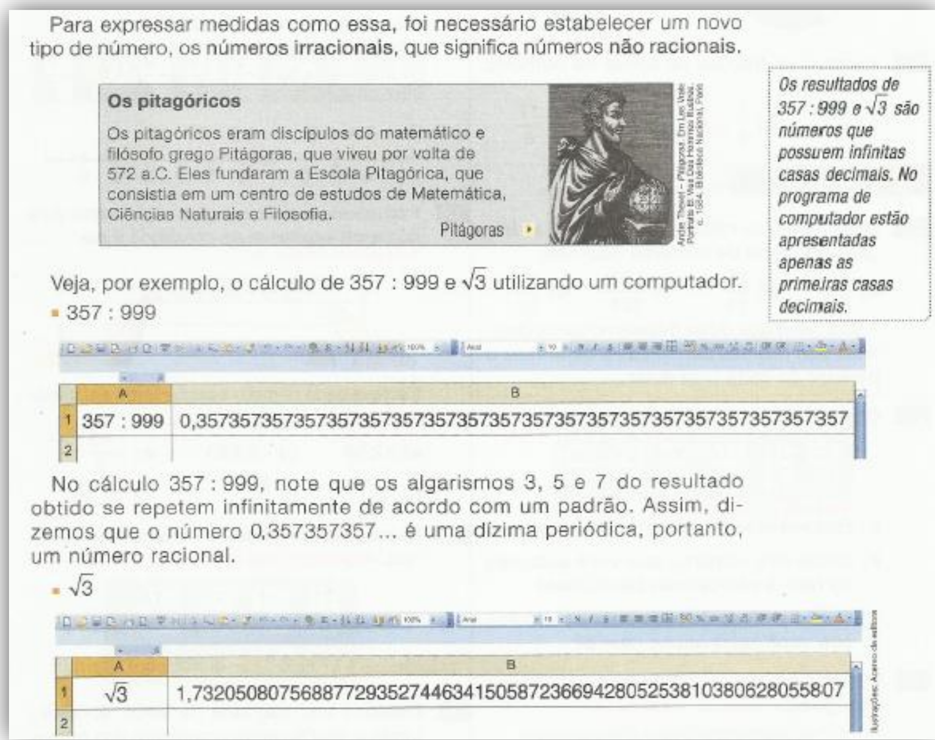
Fonte: Souza, 2012, p. 43, 8º ano.

Percebe-se que há uma preocupação dos autores de irem paulatinamente aumentando o grau de dificuldade dos conteúdos. Desta forma, o capítulo 02, finaliza a temática com vários exercícios sobre o cálculo de raízes quadradas aproximadas e o cálculo de raízes cúbicas.

No capítulo seguinte que é dedicado aos conjuntos numéricos, mais precisamente na página 64 é apresentado o conjunto dos números irracionais através de um relato histórico que visa informar sobre o processo de descoberta de medidas que não poderiam ser expressas como uma razão de números inteiros. Os autores afirmam, neste relato histórico, que a descoberta de que a diagonal e o lado de um quadrado não poderem ser expressos como uma razão de inteiros teria causado grande espanto entre os estudiosos daquela época, pois, segundo eles, tudo dependia apenas dos números inteiros.

Nesse contexto de introdução aos números irracionais, também encontramos, na mesma página, a proposta de utilização de recursos computacionais para verificar a diferença entre números racionais e números irracionais no que diz respeito à expansão decimal de cada um dos números anteriormente descritos. Vejamos:

Figura 90 – Recursos computacionais.



Para expressar medidas como essa, foi necessário estabelecer um novo tipo de número, os **números irracionais**, que significa números **não racionais**.

Os pitagóricos

Os pitagóricos eram discípulos do matemático e filósofo grego Pitágoras, que viveu por volta de 572 a.C. Eles fundaram a Escola Pitagórica, que consistia em um centro de estudos de Matemática, Ciências Naturais e Filosofia.

Pitágoras

Os resultados de 357 : 999 e $\sqrt{3}$ são números que possuem infinitas casas decimais. No programa de computador estão apresentadas apenas as primeiras casas decimais.

Veja, por exemplo, o cálculo de 357 : 999 e $\sqrt{3}$ utilizando um computador.

- 357 : 999

	A	B
1	357 : 999	0,357357357357357357357357357357357357357357357357357357357
2		

No cálculo 357 : 999, note que os algarismos 3, 5 e 7 do resultado obtido se repetem infinitamente de acordo com um padrão. Assim, dizemos que o número 0,357357357... é uma dízima periódica, portanto, um número racional.

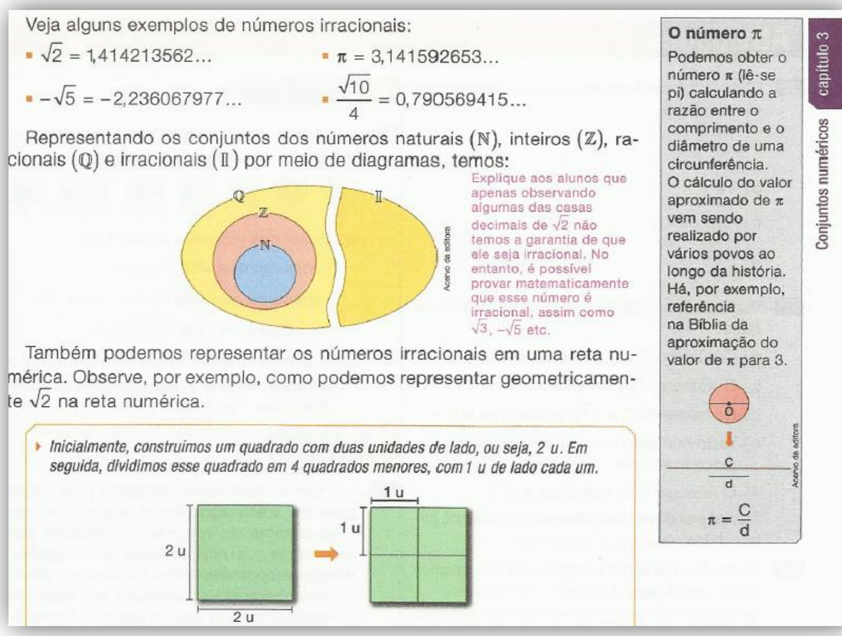
- $\sqrt{3}$

	A	B
1	$\sqrt{3}$	1,732050807568877293527446341505872366942805253810380628055807
2		

Fonte: Souza, 2012, p. 64, 8º ano.

Mais adiante, na página seguinte, os autores afirmam que é possível representar os números irracionais na reta numérica. Para isso, eles apresentam a atividade envolvendo a geometria, na qual a medida da diagonal do quadrado é sobreposta na reta numérica. Além disso, nessa mesma página, há uma pequena nota histórica informando sobre certas características do número irracional π (Pi), bem como sua aparição na bíblia tendo como valor aproximado o número 3. Logo mais adiante veremos os recortes que se referem ao nosso comentário:

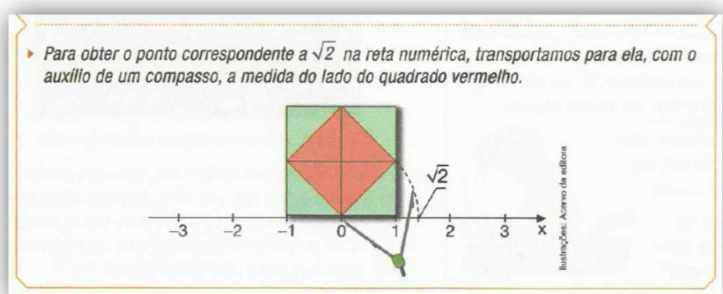
Figura 91 – Representação geométrica de número irracional.



Fonte: Souza, 2012, p. 65, 8º ano.

Observa-se também, recorte acima descrito que os autores apresentam um exemplo de número irracional em um formato fracionário. Abaixo, a representação da localização de $\sqrt{2}$ na reta numérica:

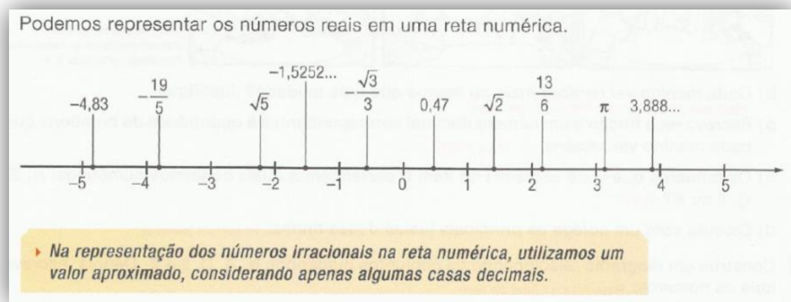
Figura 92 – Representação geométrica de número irracional.



Fonte: Souza, 2012, p. 65, 8º ano.

Mais adiante, quando os autores abordam o conjunto dos números reais, há uma preocupação em deixar claro que a reta numérica pode ser totalmente preenchida como os números reais. Os autores também apresentam, em forma de tópicos, algumas propriedades dos números reais.

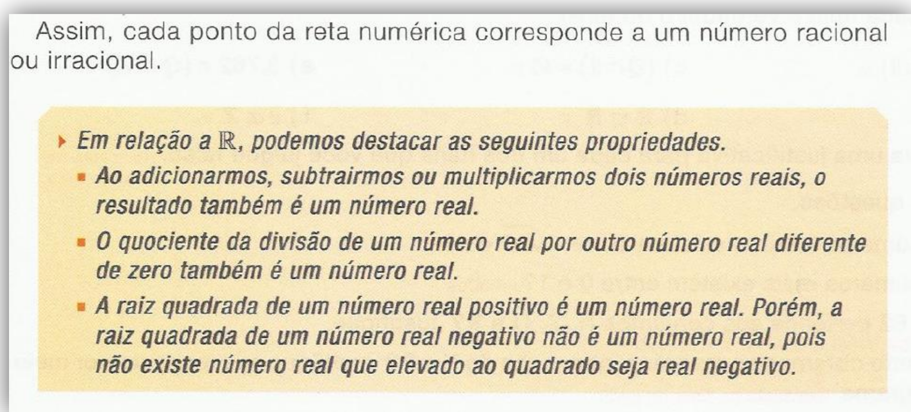
Figura 93 – Representação na reta numérica de número irracional.



Fonte: Souza, 2012, p. 67, 8º ano.

Acima, a reta numérica representada com os números reais. Destaque para os números irracionais quando os autores afirmam que se deve apenas utilizar valores próximos para a representação dos mesmos. Abaixo, o recorte com as propriedades dos números reais.

Figura 94 – Propriedades dos números reais.



Assim, cada ponto da reta numérica corresponde a um número racional ou irracional.

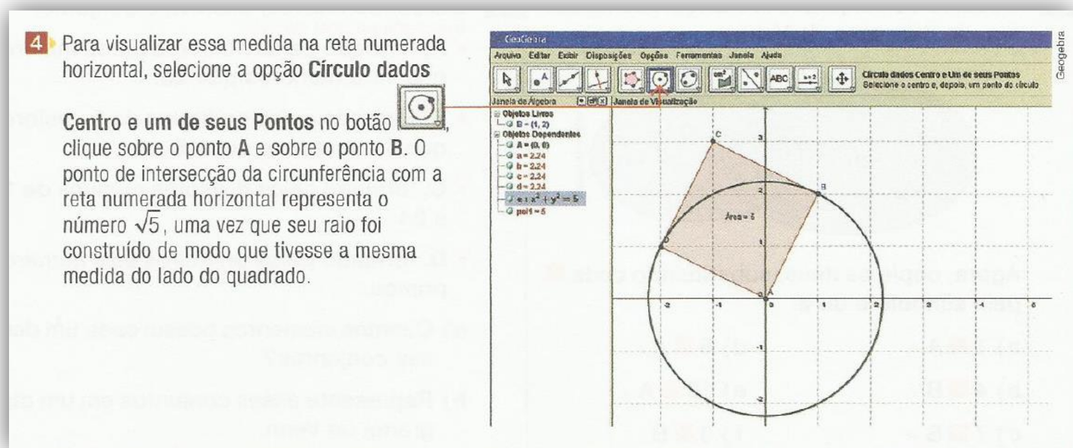
Em relação a $\mathbb{R}$, podemos destacar as seguintes propriedades.

- *Ao adicionarmos, subtrairmos ou multiplicarmos dois números reais, o resultado também é um número real.*
- *O quociente da divisão de um número real por outro número real diferente de zero também é um número real.*
- *A raiz quadrada de um número real positivo é um número real. Porém, a raiz quadrada de um número real negativo não é um número real, pois não existe número real que elevado ao quadrado seja real negativo.*

Fonte: Souza, 2012, p. 67, 8º ano.

Na seção Acessando tecnologias, encontra-se uma atividade cujo objetivo é a representação geométrica de números irracionais. Para isso, os autores utilizam o programa computacional gratuito chamado Geogebra. Com este programa, os autores mostram passo a passo como pode ser feito a representação do número irracional $\sqrt{5}$ na reta numerada. Também propõem uma atividade envolvendo a construção de um triângulo equilátero com lados cujas medidas são $\sqrt{2}$. Segue abaixo o recorte referente à primeira atividade citada:

Figura 95 – Recursos computacionais.



Fonte: Souza, 2012, p. 71, 8º ano.

6.10.3 Análise crítica do material descrito

a) Forma de introdução

Os autores introduziram o conceito de número irracional através de uma abordagem aritmética e geométrica. Para isso, iniciam o estudo dos números irracionais através de aproximações decimais lançando mão, inclusive de recursos computacionais.

Entendemos que a utilização de tais recursos é um ponto forte nessa obra, pois são propostas atividades de cunho exploratório que permitem ao aluno ter uma visão mais ampla dos números irracionais. Porém não verificamos atividade que pudessem explorar a incomensurabilidade entre dois segmentos dados, apenas atividades que estavam focadas na representação geométrica do número irracional.

b) Clareza e coerência

Não foram observadas atividades que não estivessem claras ou que houvesse alguma incoerência.

c) Atenção às recomendações curriculares

Obra que merece destaque quanto à abordagem inicial dos números irracionais. Os autores lançam mão de atividades exploratórias inovadoras com o auxílio de programas computacionais como o *Geogebra* que permitem aos estudantes uma visão dinâmica das construções geométricas. As abordagens históricas dialogam com a utilização dos recursos computacionais favorecendo contra exemplos. A reta numérica é utilizada para representar os números irracionais.

Verificamos, portanto, que os autores seguem às recomendações contidas nos documentos de orientações curriculares.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este instrumento de pesquisa investigou a introdução do conceito de número irracional nos Livros Didáticos de matemática do Ensino Fundamental aprovados pelo PNLD 2014.

Há uma grande expectativa que o presente estudo possa contribuir para uma reflexão no que diz respeito à forma com que os números irracionais são introduzidos nos anos finais do Ensino Fundamental por meio dos Livros Didáticos de matemática. É bem verdade que a existência ou, a permanência dos números irracionais no currículo de matemática do Ensino Fundamental é posto em xeque por alguns pesquisadores. Contudo, em nossa investigação, optamos pela observância ao currículo vigente, presente na matriz curricular do SAEB que serve como referência às propostas curriculares dos demais estados brasileiros na atualidade. Também entendemos que a temática abordada por esta pesquisa apresenta uma relevância bastante significativa no contexto histórico-matemático. Como já dissemos anteriormente, há uma singularidade entre os estudantes dos anos finais do ensino fundamental ao se depararem com o estudo dos números irracionais e os filósofos gregos do Século IV a.C. ao perceberem a existência de segmentos incomensuráveis.

Acreditamos também que esta dissertação poderá servir de apoio e instrumento reflexivo aos professores de matemática do Ensino Fundamental. Motivo pelo qual nos debruçamos sobre alguns estudos anteriores voltados à formação inicial do professor de matemática, que em sua prática pedagógica, tem como instrumento didático, além de outros elementos, o livro didático. É possível que este instrumento possa, inclusive, auxiliar o professor no processo de escolha do livro didático que mais se encaixe dentro de sua proposta didática, a qual depende, naturalmente, de outras muitas variáveis não abordadas neste estudo.

Quanto a História da Matemática, percebemos de forma nítida como ela se apresenta como um leque de possibilidades pedagógicas tanto para o trabalho didático em sala de aula como um instrumento investigativo, um óculos metodológico, como foi opção nossa neste trabalho.

Fato que pudemos observar também nos livros analisados em que todosse preocupam de alguma maneira,em recorrer às questões históricas ligadas a descoberta das grandezas incomensuráveis e dos números irracionais.Em contrapartida, nem sempre avançam na exploração de atividades práticas relacionadas à medição e comparação de segmentos como, por exemplo, a diagonal e o lado do quadrado.

Neste aspecto, surge o desafio docente, aliado ao livro didático, de apresentar o conceito de número irracional numa perspectiva plural, multifacetada, lançando mão dos mais variados recursos para tal feito. Em nosso caso, acreditamos que uma abordagem histórica que realize uma interface entre a geometria e a aritmética seja interessante, tendo em vista que esta abordagem conduz o estudante à gênese dos fatos que verdadeiramente estavam ligadas aos primórdios dos números irracionais.

Uma das grandes inquietações para a realização deste trabalho deveu-se ao fato de que os números naturais, inteiros e racionais têm maior privilégio em detrimento aos números irracionais nas coleções analisadas. Percebemos também em nossa análise que os autores de Livros Didáticos de Matemática ainda tem dedicado pouca atenção ao conceito de número irracional, havendo uma preocupação em regras e exercícios.

Acreditamos que esta pesquisa seja, de fato, muito modesta, mas que poderá fomentar um despertamento sobre a temática dos números irracionais. Sentimo-nos, portanto, desafiados a uma análise mais aprofundada sobre este tema, tendo em vista que existem algumas afirmações que, por não serem devidamente explicadas, ainda merece atenção, tais como:

- “O número π é um dos mais famosos números irracionais. É definido como a razão do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro”. (MAZZIEIRO, 2012, p. 39, 9º ano);

- “Esta é uma fórmula para calcular o número π”. (MORI, 2012, p. 26, 8º ano);

- “Nesses exemplos, vimos números irracionais criados artificialmente, só para mostrar que não podem ser escritos na forma de fração”. (CENTURIÓN, 2012, p. 44, 8º ano);

- “A seguir, usando uma calculadora, deve-se efetuar a divisão entre as medidas obtidas: a da circunferência pela do diâmetro. O número π é o resultado dessa divisão”. (CENTURIÓN, 2012, p. 50, 8º ano);

- “Eu pensei num número irracional: 2,101 112 131 415 161 718… ele terá infinitas casas decimais sem repetição. Você percebeu como foi que eu o inventei”? (ANDRINI, 2012, p. 20, 8º ano);

- “Legal e ilegal, lícito e ilícito. Racional e irracional, ou seja, que não é racional”. (DANTE, 2012, p. 25, 8º ano).

Ou seja, as afirmações acima podem causar confusão aos estudantes se não forem apresentadas as devidas justificativas. Observe que os estudantes podem ser induzidos a acreditar que os números irracionais são fruto de alguma transgressão ou da irracionalidade humana e não numérica. Ora, a irracionalidade humana e numérica são fenômenos de naturezas completamente distintas. Também, segundo uma das afirmações acima, os irracionais são números que não podem ser escritos na forma de fração. Note que os estudantes, fatalmente irão se deparar com grafias matemáticas presentes no livro didático envolvendo frações e números irracionais, como no exemplo de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Note que a questão inicial deste trabalho partiu da seguinte indagação: Se os números irracionais estão presentes no Ensino Fundamental, segundo as recomendações dos documentos de orientações curriculares, então como é realizada a introdução deste conceito nos Livros Didáticos de matemática?Ou seja, entendemos que a questão inicial contempla os objetivos deste trabalho, inclusive abrindo espaço para a ampliação, aprofundamento, bem como novas investigações.

É natural que todo pesquisador, sobretudo os iniciantes, vislumbrem grandes transformações, descobertas, superação de paradigmas, o que conosco não foi diferente. Obviamente, entendemos que isso é exatamente o combustível da pesquisa e que bom que esses sentimentos continuam pulsando em nosso ser! Porém, é bem verdade que, a temática que fora a força motriz deste trabalho acabou não sendo tão explorada como era o nosso desejo inicial. Estamos nos referindo à *antifairese*, o método desenvolvido pelos filósofos gregos de subtrações recíprocas, abordado no primeiro capítulo desta pesquisa. Na verdade, não entendemos como uma limitação, mas, sobretudo, como uma escolha metodológica não desvinculada da proposta inicial.

As publicações em eventos científicos e as apresentações internas na disciplina de seminários foram decisivas no processo de maturação desta investigação o que nos conduziu a analise dos livros didáticos tendo a própria *antifairese* sempre presente como uma de nossas lentes investigativas. Certamente, nas próximas etapas acadêmicas pretendemos avançar e aprofundar os estudos sobre esta temática.

Finalmente, esperamos que este trabalho, ainda que pontual, sirva como um instrumento útil e reflexivo para professor de matemática no que se refere à introdução do conceito de número irracional no Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro. **PRATICANDO matemática**, 9 / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 3. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012. – (Coleção praticando matemática).

ÁVILA, G. S. S. **Análise matemática para licenciatura / Geraldo de Souza Ávila** – 3ª ed. rev. e ampl. – São Paulo: Blucher, 2006.

ARAÚJO, M. P. F. de. **Introdução ao conceito de números Reais:** uma proposta didática baseada na história da matemática. Dissertação (Mestrado em Ensino da matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ/IM. Programa de pós-graduação em ensino da matemática, 2011.

BARONI. R. L. S. & NASCIMENTO, V. **Um Tratamento via medição, para os Números Reais.** Rio Claro: SBHMat, 2005.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática:** Bianchini / Edwaldo – 7. ed. – São Paulo: Moderna, 2011.Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9 º ano.

BICUDO, I. **Os elementos / Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas/ organizadora Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BOYER, C. B. **História da matemática:** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Guia de livros didáticos:**PNLD 2014: Matemática.– Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013. 104 p.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:**Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1998. 148 p.

CARAÇA, B. J. **CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA.** Lisboa, Biblioteca Cosmos, 1951.

CENTURIÓN, Marília. **Matemática**: teoria e contexto; 6º ao 9º ano / Marília Centurión, José Jakubovic. — 1. ed. – São Paulo: Saraiva, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris:** Matemática / Luiz Roberto Dante. — 1. ed. – São Paulo: Ática, 2012. – (Projeto Teláris: Matemática). Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano. 1. Matemática (Ensino Fundamental) I. Título. II. Série.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Etnomatemática e educação. In: KNIJINIK, Gelsa; WANDERER, Fernanda; OLIVEIRA, Cláudio José de. **Etnomatemática, currículo e formação de professores**. Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2004.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FOWLER, D. H. **The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction.** Oxford and New York: Claredon Press, 1999.

GERÁRD, F. M., & ROEGIERS, X. **Conhecer e avaliar manuais escolares.** Porto: Porto Editora, 1998.

GRATULIANO, Erigoi Alves da Silva. **Um estudo sobre a aprendizagem de números irracionais no Ensino Médio.** Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, 2006.

IMENES, Luiz Márcio. **Matemática:** imenes & lellis / Luiz Márcio Imenes, Marcelo Lellis. – 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2012. Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano. "Componente curricular: matemática."

JANKVIST, U. T. **A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education.** Educational studies in mathematics, v. 71, p. 235-261, 2009.

KATZ, V. J., & MILACHOWICZ, K. D. (Eds.) (2004). **Historicalmodules for the teaching and learning of mathematics.** Washington, DC: The Mathematical Association of America.

LOPES, Antônio José. **Projeto Velear: Matemática** / Antônio José Lopes. — 1. ed. – São Paulo: Ática, 2012. – (Projeto Velear: Matemática). Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano. 1. Matemática (Ensino Fundamental) I. Título. II. Série.

MAZZIEIRO, Alceu dos Santos. **Descobrindo e aplicando a matemática**; 9º ano / texto de Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio Fonseca Machado; — Belo Horizonte: Dimensão, 2012.304 p. il. – (6º ao 9º ano do ensino fundamental – Matemática).

MIGUEL, A. **Três Estudos Sobre História.**Tese de doutorado. Campinas: Unicamp, 1993.

MORI, Iracema. **Matemática: Ideias e desafios**, 6º ao 9º / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. — 17. ed. – São Paulo: Saraiva, 2012.

NAKAMURA, Keiji. **Conjunto dos números irracionais:** a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares.Dissertação (Mestrado profissional em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, 2008.

PASQUINI, R. C. G. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos:** uma proposta, uma investigação. Tese (Doutorado em Ensino da matemática). Universidade Estadual Paulista – UNESP, 2007.

PEREIRA, A. C. C. **Teorema de Thales:** uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros de matemática.Dissertação (Mestrado em Ensino da matemática). Universidade Estadual Paulista – UNESP, 2005.

PERNAMBUCO. Secretaria Estadual de Educação, **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco:** Matemática, Recife, 2008.

____________.Secretaria Estadual de Educação, **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**, Recife, 2012.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico:** uma proposta de abordagem envolvendo eixos constituintes dos números reais.Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. USP, 2012.

PROJETO ARARIBÁ: **Matemática** / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fábio Martins de Leonardo. – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2010. Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano. “Componente curricular: matemática.”

SOUTO, A. M. **Análise dos conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica.** Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto de Matemática – IM, 2010.

SOUZA, Fernando Augusto da Silva & ASSIS NETO, Fernando Raul. **Incomensurabilidade e Número Irracional:** a antifairese como interface entre o geométrico e o aritmético. Artigo Científico. 2013.

SOUZA. Joamir Roberto de. **Vontade de saber matemática, 6º ao 9º** / Joamir Roberto de Souza, Patrícia Rosana Moreno Pataro. — 2. ed. – São Paulo: FTD, 2012.