



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

SAULO DOS SANTOS CUNHA

**ESTUDO COMPUTACIONAL DA DINÂMICA DAS MOTOCICLETAS NAS
ACELERAÇÕES, FRENAGENS E CURVAS: O EFEITO DA TÉCNICA
DO PILOTO E DAS CONDIÇÕES DA ESTRADA**

RECIFE

2016

SAULO DOS SANTOS CUNHA

**ESTUDO COMPUTACIONAL DA DINÂMICA DAS MOTOCICLETAS NAS
ACELERAÇÕES, FRENAGENS E CURVAS: O EFEITO DA TÉCNICA DO PILOTO
E DAS CONDIÇÕES DA ESTRADA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, para obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Processo e Sistemas Térmicos;

Orientador: Prof. Fábio Santana Magnani

RECIFE

2016

Catálogo na fonte

Bibliotecária Valdicéa Alves, CRB-4 / 1260

C972e Cunha, Saulo dos Santos.

Estudo computacional da dinâmica das motocicletas nas acelerações, frenagens e curvas: o efeito da técnica do piloto e das condições da estrada / Saulo dos Santos Cunha - Recife: O Autor, 2016.

108folhas, Il.; Sigl. e Simb..

Orientador: Profº Dº. Fábio Santana Magnani.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação de Engenharia Mecânica, 2016.

Inclui Referências e Apêndices.

1. Engenharia Mecânica. 2. Motocicleta. 3. Frenagem. 4. Dinâmica na curva. I. Magnani, Fábio Santana. (Orientador). II. Título.

UFPE

621 CDD (22. ed.)

BCTG/2017-13

16 de dezembro de 2016

“ESTUDO COMPUTACIONAL DA DINÂMICA DAS MOTOCICLETAS NAS ACELERAÇÕES, FRENAGENS E CURVAS: O EFEITO DA TÉCNICA DO PILOTO E DAS CONDIÇÕES DA ESTRADA”

SAULO DOS SANTOS CUNHA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROCESSOS E SISTEMAS TÉRMICOS

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA/CTG/EEP/UFPE

Prof. Dr. FÁBIO SANTANA MAGNANI
ORIENTADOR/PRESIDENTE

Prof. Dr. CEZAR HENRIQUE GONZALEZ
COORDENADOR DO PROGRAMA

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. FÁBIO SANTANA MAGNANI (UFPE)

Prof. Dr. DARLAN KARLO ELISIÁRIO DE CARVALHO (UFPE)

Prof. Dr. RAMIRO BRITO WILLMERSDORF (UFPE)

A minha esposa Renata, pelo tempo que deixamos de estar juntos...
A minha mãe, Luciene e Zezita (in memoriam), a elas todos os créditos...

Dedico

AGRADECIMENTOS

Ao Laboratório de Otimização de Sistemas Térmicos, pois tornou meu trabalho possível.

Ao Prof. Dr. Fábio Santana Magnani, pela dedicação nas correções e orientações neste período de aprendizado.

A Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf, pelo tempo disponível para solucionar algumas dúvidas.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado e a Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) pela infraestrutura.

Aos meus colegas de pós-graduação, Alcides, Fernando, Gabriela, Guilherme e Paulo pelas boas conversas.

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará a seu tamanho original.”

Albert Einstein.

RESUMO

Existe uma velocidade máxima na qual as motocicletas podem fazer curvas, dependendo do raio de curvatura, do coeficiente de atrito e da configuração do veículo. Essa velocidade em geral deve ser alcançada antes do início da curva, já que durante a trajetória curvilínea boa parte do atrito é usado pela força centrípeta, sendo indisponível para a frenagem. Neste trabalho, modelamos a dinâmica das motocicletas em linha reta e em curva, considerando as forças inerciais, as forças resistivas, e as forças controladas pelo piloto (propulsão e frenagem). Os modelos matemáticos são então usados para estudar a capacidade do motor em vencer as resistências, as diferenças entre os modelos com aplicação da força de frenagem, apenas, na roda traseira e aplicação da força de frenagem nas duas rodas, a velocidade máxima em curva e a distância na qual a frenagem deve ser iniciada na reta que antecede tal curva, considerando limites de adesão e a possibilidade de perda de contato de uma das rodas. Como resultado, concluímos que, o motor deve aplicar uma força maior ou igual as forças de resistência e de inércia para movimentar a motocicleta, a influência da geometria em aplicar as manobras de *whellie* e *stoppie*. Do ponto de vista da segurança, é importante a consideração das forças resistivas no modelo da velocidade máxima em curva, mas não no cálculo da distância mínima de frenagem. Outro resultado importante é que a técnica ótima de frenagem (proporção do freio dianteiro e traseiro) é função do coeficiente de atrito, não sendo interessante recomendar aos pilotos uma proporção universal.

Palavras-chaves: motocicleta. frenagem. dinâmica na curva.

ABSTRACT

There is a maximum speed in which a motorcycle can make turns, depending on the radius of curvature, on the friction coefficient, and on the vehicle configuration. This speed generally must be achieved before the curve, since during the curved path much of the available friction is used by the centripetal force, being unavailable to braking. In this dissertation, we model the dynamics of motorcycles on straight and curved paths, considering the inertial forces, resistive forces and the forces controlled by the rider. Mathematical models are then used to study the engine's ability to overcome resistances, the difference between the models with application of braking force only in the rear wheel and applying braking force on both wheels, the maximum cornering speed and the distance at which the braking must start on the straight stretch that precedes such a curve, considering the limits of adhesion and the possibility of loss of contact of one of the wheels. As a result, we conclude that the engine should apply a force greater or equal to resistive forces and inertia forces to move the motorcycle, the influence of the geometry in applying wheelie and stoppie. From a safety point of view, that it is important to consider the resistive forces on the model of maximum cornering speed but not in calculating the minimum braking distance. Another important result is that the optimum braking technique (ratio of front and rear braking) is a function of the friction coefficient, so it is not interesting to recommend to the riders a universal proportion.

Keywords: motorcycle. braking. curve dynamics.

LISTA DE FIGURAS

1: Emplacamentos de carros e motocicletas entre 2006 e 2015.....	20
2: Diferenças de potência entre motores distintos de motocicletas	26
3: Curvas características do torque, potência e consumo para um motor de combustão interna	27
4: Relação da força de tração e resistência com a marcha e velocidade	28
5: Diagrama de forças em uma roda propulsora.....	30
6: Variação do coeficiente de rolamento em função da velocidade e pressão	31
7: Variação da força de arrasto aerodinâmico em função da velocidade para cada tipo de motocicleta.....	33
8: Área frontal composta por motocicleta e piloto	33
9: Influência da carenagem no arrasto aerodinâmico	34
10: Aplicação da força peso na motocicleta em um plano inclinado	35
11: Movimento conhecido como <i>stoppie</i> , ou <i>babalu</i> feito em motocicleta	36
12: Movimento conhecido como <i>wheelie</i> , ou <i>empinamento</i> feito em motocicleta	37
13: Sensibilidade para fricção longitudinal	40
14: Freios traseiro e dianteiro sendo aplicados em função da distância da curva	41
15: Velocidade da curva ótima a direita e a esquerda em comparação com a velocidade feita pelos motociclistas sem experiência em dia claro	42
16: Comparação das forças de frenagem na motocicleta	42
17: Forças aplicadas no centro de pressão (CP), centro de gravidade (CG) e na roda traseira (T).....	44
18: Modelo geral da dinâmica da motocicleta.....	46
19: Termos do modelo geral do comportamento do piloto, do motor e do freio	48
20: Comparação entre a velocidade desejada e a velocidade real em função da posição pelo método computacional	52
21: Forças existentes na aceleração e frenagem da motocicleta.....	56
22: Aumento de velocidade de 50 km/h no trecho 1 para 100 km/h no trecho 2.....	60

23: Comparação da velocidade desejada e velocidade real no percurso para o modelo com resistência variável (RV).....	61
24: Comparação da potência máxima do motor com a potência na roda traseira utilizando o modelo com resistência variável (RV).....	61
25: Comportamento da rotação com a marcha no percurso para o modelo com resistência variável (RV).....	62
26: Abertura do acelerador pelo piloto no modelo com resistência variável (RV).....	63
27: Redução da velocidade de 100 km/h no trecho 2 para 50 km/h no trecho 3.....	63
28: Comparação da posição na redução da velocidade em pista seca e úmida para o modelo com resistência variável (RV).....	64
29: Comparação da potência da roda e potência máxima de frenagem em pista seca e úmida no modelo com resistência variável (RV).....	64
30: Comparação do coeficiente de aperto no manete do freio para pista seca e úmida no modelo com resistência variável (RV).....	65
31: Aceleração e frenagem em pista seca.....	65
32: Comparação da velocidade desejada com a velocidade real em função da posição no percurso de aceleração e frenagem no modelo com resistência variável (RV).....	66
33: Comportamento da normal em relação a transferência de peso para o modelo com resistência variável (RV).....	66
34: Comportamento das normais em relação a transferência de peso com valor de $b_{CG} = 0,3$ m no modelo com resistência variável (RV).....	67
35: Comportamento das normais em relação a transferência de peso com valor de $h_{CG} = 1$ m no modelo com resistência variável (RV).....	68
36: Vista superior da área de contato, no plano xz entre o pneu traseiro deformado da motocicleta e a estrada, apresentando a força centrípeta e a força aplicada roda.....	73
37: Vista frontal da motocicleta, no plano yz , apresentando as forças aplicadas no pneu e no centro de gravidade.....	74
38: Desaceleração na frenagem em função da distância. $\mu_D = \mu_T = f = 0,8$. Redução de velocidade de 100 km/h para 60 km/h. São considerados o modelo sem resistência (FSR), resistência constante (FRC) e resistência variável (FRV).....	78

39: Desaceleração na frenagem em função da distância. $\mu D = \mu T = f = 0,4$. Redução de velocidade de 100 km/h para 60 km/h. São considerados o modelo sem resistência (FSR), resistência constante (FRC) e resistência variável (FRV).....	78
40: Uso dos freios dianteiro e traseiro em função da desaceleração desejada. Casos sem resistência (FSR) e resistência constante (FRC) utilizando 70% da força do freio dianteiro.....	79
41: Movimento completo da manobra. Trecho 1: velocidade de cruzeiro; trecho 2: distância para o piloto reagir; trecho 3: frenagem; trecho 4: curva em velocidade constante.....	82
42: Velocidade na curva para motocicleta em pista seca em função do raio de curvatura para os modelos sem resistência, resistência constante e resistência variável.....	83
43: Velocidade na curva para motocicleta em pista úmida em função do raio de curvatura para os modelos sem resistência, resistência constante e resistência variável.....	84
44: Variação da normal traseira em função do coeficiente de utilização do freio ($\mu D = \mu T = f$). Modelo com resistência constante (FRC) em uma redução de 100 km/h a 60 km/h	86
45: Curvas de desaceleração e distribuição de frenagem (P_D/P_T). Modelo com resistência constante (FRC) para uma redução de 100 km/h para 60 km/h.....	87
46: Limites de desaceleração na frenagem de motocicleta para pista úmida e seca no modelo com resistência constante (FRC) para um a redução de velocidade de 100 km/h pra 60 km/h	88
47: Distância de frenagem mínima e P_D para $\mu D = \mu T = f$. Modelo de resistência constante (FRC) para redução de 100 km/h para 60 km/h.....	89
48: Distância mínima de frenagem em função do P_D para $f = 0,4$ e $f = 0,8$. Modelo de resistência constante (FRC) para redução de 100 km/h para 60 km/h.....	90

LISTA DE TABELAS

1: Relação peso/potência e velocidade final para carros e motocicletas	21
2: Diferenças entre os modelos utilizados na simulação	47
3: Dados do motor da motocicleta.....	50
4: Termos do modelo geral do comportamento do piloto, do motor e do freio	52
5: Parâmetros físicos da motocicleta inclinação da pista	54
6: Valores geométricos da motocicleta.....	57
7: Estudo de convergência da solução da posição para que a motocicleta aumente sua velocidade de 50 km/h para 100 km/h	60
8: Velocidade máxima de entrada na curva em função do raio de curvatura e do coeficiente de atrito. Modelos sem resistência (CSR), resistência constante (CRC) e resistência variável (CRV)	85
9: Raio mínimo em função da velocidade e do coeficiente de atrito. Modelos sem resistência (CSR), resistência constante (CRC) e resistência variável (CRV).....	86
10: Distância de observação da placa em relação ao início da curva para P_D ótimo ($\mu_D =$ $\mu_T = \mu = f$). Redução 100 km/h a 60 km/h.....	91

LISTA DE SIGLAS

FENABRAVE	Federação Nacional da Distribuição de Veículos Automotores
MAIDS	<i>Motorcycle Accidents in Depth Study</i>
OMS	Organização Mundial da Saúde
CONTRAN	Conselho Nacional de Trânsito
CTB	Código de Trânsito Brasileiro
LOST	Laboratório de Otimização de Sistemas Térmicos
DNIT	Departamento Nacional de Infraestrutura de Trânsito
ABS	<i>Anti-lock Breaking System</i>
VRFT	<i>Virtual Reference Feedback Tuning</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
RH	<i>Right-Hand</i>
LH	<i>Left-Hand</i>
MPCA	<i>Model Predictive Control Allocation</i>
CP	Centro de Pressão
CG	Centro de Gravidade
SR	Sem Resistência
RC	Resistência Constante
RV	Resistência Variável
EES	<i>Engineering Equation Solver</i>
CSR	Curva Sem Resistência
CRC	Curva com Resistência Constante
CRV	Curva com Resistência Variável
FSR	Frenagem Sem Resistência
FRC	Frenagem com Resistência Constante
FRV	Frenagem com Resistência Variável
SI	Sistema Internacional

LISTA DE SÍMBOLOS

P	Potência do motor
T	Torque do motor
ω	Rotação do motor
F_R	Força de rolagem
C_R	Coefficiente de rolagem
g	Aceleração da gravidade
m	Massa do piloto e moto
θ	Ângulo de inclinação da pista
F_A	Força aerodinâmica
C_D	Coefficiente de arrasto
ρ	Massa específica do ar
V	Velocidade do veículo
W	Velocidade do vento
A	Área frontal do conjunto motocicleta/piloto
k_A	Fator de arrasto aerodinâmico
F_{G_x}	Força peso
I	Inclinação da pista
F_{roda}	Força nas rodas
a_x	Aceleração no eixo x
F_{res}	Força das resistências
F_{motriz}	Força motriz do motor
F_{fren}	Força de frenagem nas rodas
α	Coefficiente de abertura do acelerador
$P_{max,mot}$	Potência máxima do motor
η_{trans}	Eficiência de transmissão
β	Coefficiente de aperto no manete do freio
$P_{max,fren}$	Potência máxima de frenagem
$P_{roda,des}$	Potência nas rodas desejada
c_1	Constante da potência máxima do motor

c_2	Constante da potência máxima do motor
Ω_{min}	Rotação mínima do motor
$\Omega_{mot,max}$	Rotação máxima do motor
$\Omega_{pico,torq}$	Rotação para torque máximo
Ω	Rotação
$P_{mot,pico}$	Potência de pico do motor
$\Omega_{pico,pot}$	Rotação de pico para potência máxima
f	Coefficiente de atrito
ϕ	Relação de transmissão
N_1	Rotação das engrenagens
N_2	Rotação das engrenagens
D_1	Diâmetro das engrenagens
D_2	Diâmetro das engrenagens
R_{roda}	Raio da roda
r_{tot}	Relação total
γ	Marcha
i	Ponto inicial
Δt_{des}	Intervalo de tempo desejado
x	Posição
V_{des}	Velocidade desejada
a_{des}	Aceleração desejada
n_{mar}	Número de marchas
Ω_{mud}	Rotação de mudança de marcha
D	Dianteira
T	Traseira
N_D	Força normal na roda dianteira
b_g	Distância do centro de gravidade para o eixo da roda traseira
h_{cg}	Distância da pista para o centro de gravidade
h_{cp}	Distância da pista para o centro de pressão
p	Distância entre os eixos das rodas
N_T	Força normal na roda traseira
N_{trans}	Força de transferência de peso

$F_{at,D}$	Força de atrito na roda dianteira
$F_{at,T}$	Força de atrito na roda traseira
$F_{roda,T}$	Força na roda traseira
$F_{roda,D}$	Força na roda dianteira
u_D	Uso do atrito na roda dianteira
u_T	Uso do atrito na roda traseira
μ_T	Coefficiente do freio traseiro
μ_D	Coefficiente do freio dianteiro
F_{cent}	Força centrípeta
R	Raio de curvatura da pista
V_D	Velocidade na roda dianteira
V_T	Velocidade na roda traseira
a	Desaceleração
$d_{frenagem}$	Distância de frenagem
V_{ini}	Velocidade inicial
V_{fin}	Velocidade final
$d_{reação}$	Distância de reação
δt	Intervalo de tempo da reação
V_{cruz}	Velocidade de cruzeiro
P_D	Proporção do freio dianteiro
C_1	Constante da proporção do freio dianteiro
C_2	Constante da proporção do freio dianteiro
M_{res}	Momento das resistência

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Motivação	20
1.2	Objetivo geral	24
1.3	Objetivos específicos	24
1.4	Estrutura da dissertação	24
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	26
2.1	Relação de curvas de potência, torque e força motriz	26
2.2	Resistências externas	29
2.2.1	Resistência à rolagem nos pneus	29
2.2.2	Resistência de arrasto aerodinâmico	32
2.2.3	Resistência da força peso	34
2.3	Manobras nas motocicletas	36
2.3.1	Manobra de <i>stoppie</i> ou <i>babalu</i>	36
2.3.2	Manobra de <i>wheelie</i> ou empinamento	36
2.3.3	Perda de aderência	37
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	38
3.1	Estudos sobre modelagem da dinâmica da motocicleta	38
4	METODOLOGIA GERAL	44
4.1	Modelo físico	44
4.1.1	Modelos físicos simplificados	47
4.1.2	Comportamento do piloto, do motor e do freio	48
4.1.3	Relação de transmissão	51
4.2	Modelo computacional	52
4.2.1	Cálculo computacional	53
4.3	Estudos sobre o modelo	55
4.3.1	Perda de contato ou de aderência das rodas em pista reta	56
4.4	Análise do grau de refinamento da malha	59
4.5	Exemplos didáticos do funcionamento do modelo em pista reta	60

4.5.1	Comportamento do motor e piloto na aceleração	60
4.5.2	Comportamento da motocicleta e do piloto na frenagem	63
4.5.3	Influência da geometria no comportamento das forças normais	65
5	DINÂMICA DA MOTOCICLETA NAS FRENAGENS E CURVAS	69
5.1	Dinâmica da frenagem em motocicleta para entradas em curvas	69
5.1.1	Fundamentos da dinâmica da motocicleta na reta	69
5.1.2	Perda de aderência das rodas dianteira e traseira.....	73
5.1.3	Velocidade máxima na curva.....	75
5.1.4	Desaceleração e distância de frenagem.....	76
5.1.5	Limite de <i>stoppie</i> e técnica de frenagem	80
5.1.6	Metodologia de estudo de curvas e frenagens	81
5.2	Resultados da frenagem e velocidade em curvas.....	83
5.2.1	Velocidade máxima na curva e raio de curvatura mínimo	83
5.2.2	Limite na frenagem: <i>stoppie</i>	86
5.2.3	Influência da técnica de frenagem na desaceleração	87
5.2.4	Técnica ótima para distância de frenagem mínima	89
5.2.5	Influência da técnica na distância de frenagem	90
5.2.6	Distância da placa	90
6	CONCLUSÕES.....	92
	REFERÊNCIAIS.....	95
	APÊNDICE A – ARTIGO	99

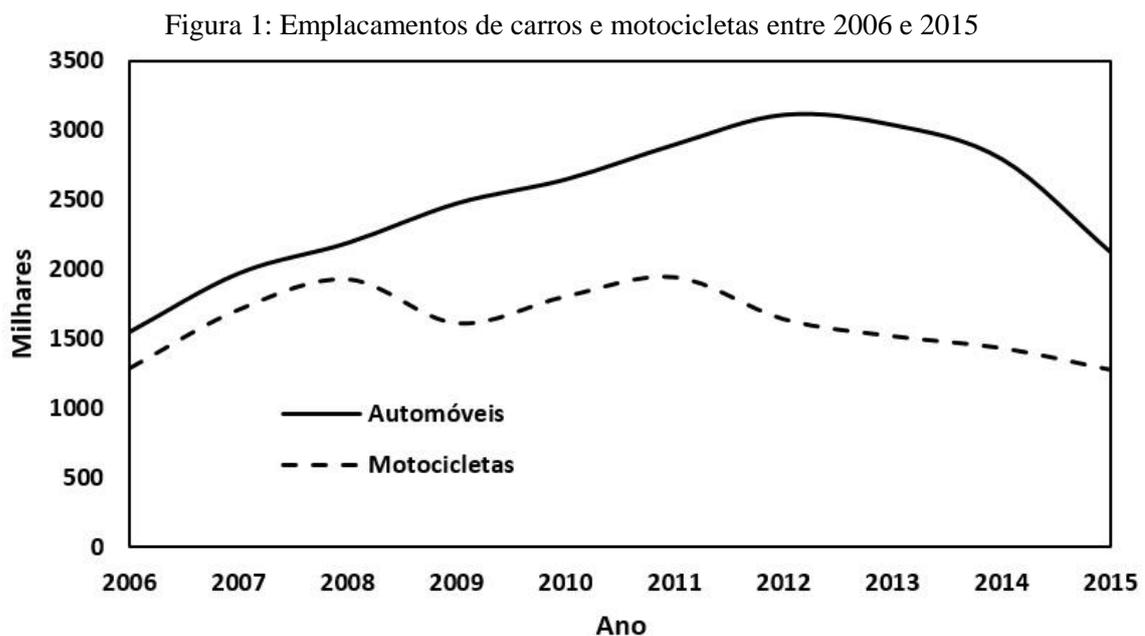
1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

No Brasil, na década de 1990, políticas públicas do governo federal incentivaram a fabricação, a compra e o uso da motocicleta. A frota de motocicletas aumentou de 1,5 milhões em 1990 para 17 milhões de veículos no final de 2012. Infelizmente, o aumento no número de motocicletas foi acompanhado pelo aumento no número de acidentes com esses veículos (VASCONCELLOS, 2013).

A motocicleta é hoje um meio de transporte, trabalho, lazer, expressão cultural e atividade econômica. Isso se deve principalmente ao fato de ter alta velocidade efetiva, um índice que leva em conta o tempo de deslocamento somado com o tempo de trabalho para pagar o veículo, o combustível, taxas, estacionamento, e outros custos mensais (PUCHER; BUEHLER, 2012).

Comparando a quantidade de emplacamentos de carros e motocicletas de 2006 a 2015, na figura 1 observamos que a quantidade de carros é superior ao de motocicletas, mesmo com o incentivo do governo federal em facilitar a compra da motocicleta. Vemos ainda que de 2012 a 2015 existiu uma queda no número de emplacamento dos veículos devido à crise econômica que ocorreu nesse intervalo de tempo.



Fonte: (FENABRAVE, 2016)

Do ponto de vista do desempenho, comparando carros e motos, uma das maiores diferenças é a capacidade da velocidade máxima do veículo, intimamente ligada à relação entre peso e potência. Conforme a tabela 1, quanto menor for esta relação maior será a capacidade do veículo apresentar uma velocidade máxima maior para uma mesma quantidade de energia fornecida pelo motor. Por exemplo, utilizando os dados da potência do automóvel de tamanho médio e da motocicleta de Grand Prix, temos que a motocicleta atinge uma velocidade máxima maior, pois a relação peso/potência é menor.

Tabela 1: Relação peso/potência e velocidade final para carros e motocicletas

Tipo de Veículo	Cilindrada cc	Peso com piloto kg	Potência kW (CV)	Razão pe- so/potência kg/kW	Velocidade máxima km/h
automóveis					
Tamanho médio	2000	1415	97 (132)	14,2	190
Alta potência	2800	1570	142 (193)	11,1	230
Carro esportivo	3200	1515	236 (321)	6,4	250
Alta potência sp.	3500	1500	280 (380)	5,35	295
motocicleta					
Baixa potência	125	215	24,2 (33)	9	175
Média potência	600	272	70 (95)	3,9	244
Alta potência	1100	300	101 (138)	3	275
Grand Prix	900	270	98 (133)	2,7	270

Fonte: Adaptado (COCCO, 2013)

Portanto, com a vida das pessoas cada vez mais corrida, a motocicleta acaba por ser uma excelente escolha para quem não tem tempo a perder. Isso devido à velocidade média (função principalmente da agilidade em trafegar entre os carros) e à velocidade efetiva (variável que inclui os custos). Agora, o principal problema das motocicletas são os acidentes.

O número de acidentes com motocicletas no Brasil são bem conhecidos. Segundo o Ministério da Saúde (2015), os acidentes com motos foram responsáveis por um aumento de 115% no número de internações em hospitais públicos. Por ano, essas internações custam quase R\$ 30 milhões para o SUS (Sistema Único de Saúde). No entanto, não há muitos estudos técnicos so-

bre as reais causas desses acidentes. A grande maioria dos trabalhos é feita nos leitos dos hospitais ou então baseados nos registros dos acidentes, não permitindo portanto nada mais que conjecturas sobre as suas causas. No mundo todo, os dois únicos trabalhos completos sobre as causas dos acidentes são Hurt (1981) e MAIDS (2009). Nesses trabalhos, equipes de médicos e de engenheiros se deslocavam aos locais dos acidentes para analisar quantitativamente o que acontecera. Os resultados eram então comparados com situações de outras vias próximas.

Em 2010, a Organização Mundial de Saúde foi convidada por alguns países a preparar um relatório com a avaliação do estado de segurança rodoviária global e para monitorar o progresso ao longo da década (OMS, 2013). Essa ação indicou a preocupação dos governantes ao redor do globo com os efeitos devastadores dos acidentes de trânsito.

As causas dos acidentes são variadas: configuração dos veículos, imprudência, imperícia, além do projeto e das condições das vias. Em relação ao projeto das vias, na concepção e na implantação da segurança no trânsito, a sinalização é um fator básico que influencia a percepção dos usuários para as condições da via. De acordo com o CONTRAN (2007), a sinalização de regulamentação tem por finalidade transmitir aos usuários as condições, proibições, obrigações ou restrições no uso das vias urbanas e rurais. Assim, o desrespeito aos sinais de regulamentação constitui infrações no Código de Trânsito Brasileiro (CTB, 1997).

Como boa prática de segurança, a redução da velocidade regulamentada para um trecho, em relação ao trecho imediatamente anterior, deve ser feita com base em estudos de engenharia que levem em conta diversos fatores, tais como: tempo de reação do condutor e distância de frenagem em função da redução desejada. Por ser universal, a placa de sinalização deve levar em conta os diversos veículos que circulam pelas vias, como automóveis, motocicletas e caminhões.

No caso das motocicletas, há um complicador nessa análise, pois os freios traseiro e dianteiro são acionados de forma independente. Conforme o documento Pilotando Consciente-Frenagem, encontrado no site da Honda e Cossalter (2006), explicam que o domínio de uma boa técnica de frenagem (i.e., escolher a proporção correta entre a aplicação do freio dianteiro e do traseiro) permite reduzir em mais de 50% a distância de parada. Por outro lado, conclui-se que o uso de uma má técnica pode aumentar muito a distância de frenagem, podendo ocasionar queda ou colisão. Isso é comprovado neste estudo.

A capacidade da frenagem das motocicletas depende diretamente da aderência entre o pneu e o pavimento da pista, e, desta forma, deve-se evitar a todo custo que a utilização da aderência seja reduzida. Algumas das situações que provocam a redução da aderência são o

bloqueio das rodas durante as frenagens e o deslizamento durante a aceleração, casos em que o pneu, ao invés de rolar, passa a escorregar sobre o pavimento da pista.

Assim, explicar o comportamento de uma motocicleta durante a frenagem não é trivial, pois envolve tanto a modelagem da dinâmica do veículo quanto das escolhas que o piloto realiza.

As referências clássicas para o estudo da dinâmica de veículos de duas rodas são Bradley (1996), Cossalter (2006) e Cocco (2013) no caso das motocicletas, e Wilson (2004) e Baird (2010) para as bicicletas. O presente trabalho é baseado nesses clássicos, sobre os quais propomos três contribuições. Em primeiro lugar, a inclusão das forças resistivas nos modelos de aceleração, de frenagem e de curva. Segundo, o acoplamento, em um mesmo modelo matemático, de três manobras (aceleração, frenagem e curva) para o estudo do problema específico da segurança. Terceiro, a consideração integrada de fenômenos indesejáveis, como o *wheelie* (empinar a roda dianteira ao acelerar), o *stoppie* (suspender a roda traseira na frenagem), e a perda de aderência (deslizamento da roda, podendo ocorrer na aceleração, frenagem ou curva).

Além dessas bibliografias clássicas, este estudo da dinâmica da motocicleta se apoiou nos trabalhos desenvolvidos pelo Laboratório de Otimização de Sistemas Térmicos e de Estudos Sobre Bicicletas e Motocicletas (LOST) da Universidade Federal de Pernambuco, que vem nos últimos anos publicando trabalhos acadêmicos e apostilas. Por exemplo, temos o trabalho de mestrado de Garcia Neto (2014), que analisou o comportamento de motocicletas no tráfego urbano. Também, temos dois trabalhos de graduação, um de Silva Júnior (2014), que estudou a influência de pequenas mudanças no projeto dos motores de combustão interna sobre o consumo de combustível, e Lima (2014), que otimizou a estratégia de mudança de marchas e as relações de transmissão de uma motocicleta, com a finalidade de diminuir o seu consumo de combustível. Todos esses trabalhos têm em comum a utilização de um modelo matemático computacional, que descreve o comportamento do motor, da motocicleta e do tráfego, desenvolvido originalmente nas disciplinas de “Propulsão de Bicicletas e Motocicletas” (pós-graduação) e “Engenharia da Motocicleta” (graduação), ministradas na Universidade Federal de Pernambuco pelos professores Fábio Santana Magnani (ambas) e Ramiro Brito Willmersdorf (Engenharia da Motocicleta).

Nesta dissertação, aprimoramos este modelo computacional (modelando as duas rodas separadamente, permitindo a aplicação diferenciada dos dois freios e monitorando os efeitos indesejáveis) e aplicamos o mesmo na simulação de uma motocicleta em situação de aceleração, frenagem e curva. Adicionalmente, estudamos a influência das várias resistências ao mo-

vimento (arrasto aerodinâmico, resistência à rolagem, peso) no comportamento da motocicleta.

1.2 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é realizar a análise do comportamento das motocicletas no tráfego urbano, em especial o comportamento dinâmico nas acelerações, frenagens e nas perdas de aderência dos pneus com a pista.

1.3 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho podem ser listados da seguinte forma:

- Aprimorar o modelo computacional de simulação do comportamento da motocicleta, considerando as duas rodas e os dois freios separadamente.
- Estudar a ocorrência de fenômenos indesejáveis (*stoppie*, *wheelie* e perda de aderência nas rodas) durante o movimento da motocicleta.
- Calcular a distância mínima de frenagem e a velocidade máxima de entrada nas curvas.
- Estudar a influência da técnica de frenagem na distância para a redução da velocidade.
- Estudar a importância das forças resistivas na distância de frenagem e na velocidade de curva.
- Propor uma metodologia para o posicionamento das placas para redução de velocidade nas entradas de curvas.

1.4 Estrutura da dissertação

Neste Capítulo 1, apresentamos a introdução, com a justificativa, contextualização e os objetivos que levaram a desenvolver o trabalho. A fundamentação teórica para realização de algumas análises e resultados estão no Capítulo 2. No Capítulo 3, apresentamos a revisão bibliográfica de alguns estudos relacionados aos objetivos apresentados. Já no Capítulo 4, temos o modelo computacional geral, junto com os modelos simplificados apresentando suas equações, o algoritmo de cálculo e alguns exemplos didáticos do comportamento do piloto, do motor e a influência da geometria nos limites de *wheelie*, *stoppie*. No Capítulo 5 é apresentada a metodologia específica utilizada para estudar os fenômenos específicos, como a frenagem anterior à curva e a permanência ao longo dessa. Nos resultados e discussões desse capítulo

apresentamos os resultados da velocidade máxima que a motocicleta pode utilizar em uma curva para não perda a aderência dos pneus com a pista, a distância de frenagem anterior à curva, determinada pela técnica de frenagem, pelo atrito do pneu com o piso e pelas forças resistivas, para que com isso, possamos posicionar uma placa de redução de velocidade nas entradas de curvas. Por fim, no Capítulo 6, temos a conclusão do trabalho e a proposta de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos a teoria do trabalho, começando com as características das curvas dos motores de combustão interna, seguindo com as forças às quais uma motocicleta é submetida, e terminando com uma brevíssima apresentação de algumas manobras existentes nas motocicletas.

2.1 Relação de curvas de potência, torque e força motriz

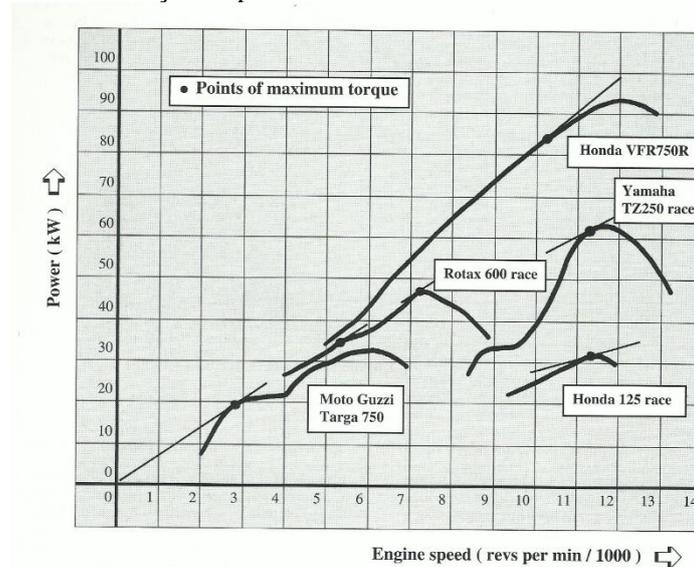
Dada a curva de torque, a curva de potência pode ser prontamente obtida pela equação 1:

$$P = T \cdot \omega \quad (1)$$

Existem várias potências em um motor, dependendo de onde são medidas: potência do combustível, potência no pistão, potência no eixo do motor e potência na roda.

Conforme a figura 2 e a equação 1, a potência de um motor não é um valor único, pois varia com a rotação. Na figura 2 são apresentadas várias curvas de motores. Além da potência máxima, uma característica importante dos motores é a faixa útil de rotação. Por exemplo, a *Honda VFR750R* opera entre 5.000 e 13.000 rpm, enquanto a *Honda 125 race* opera apenas entre 9.500 e 12.000 rpm.

Figura 2: Diferenças de potência entre motores distintos de motocicletas



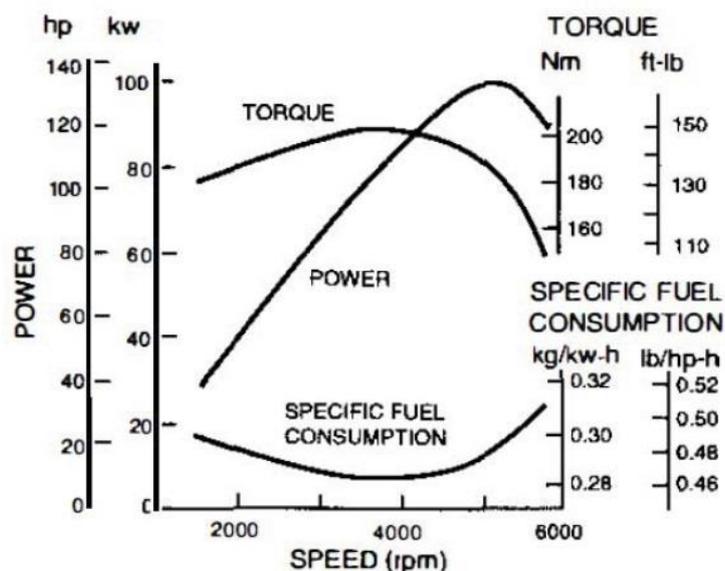
Fonte: (BRADLEY, 2003)

A figura 3 apresenta o comportamento do torque (T), da potência (P) e do consumo de combustível em função da rotação. Vemos que as curvas do torque e da potência tem o comportamento semelhante de crescer e diminuir com o aumento da rotação (equação 1).

Um ponto importante a destacar é que essas curvas são de torque e de potência máximos para uma determinada rotação. Quando o piloto aciona o acelerador, mudando assim a posição da borboleta e conseqüentemente dificultando a alimentação do ar (isto é., reduzindo a eficiência volumétrica do motor), o motor opera em um ponto abaixo da potência máxima descrita na curva. Portanto, as curvas de torque e de potência devem ser vistas como envelopes da região de operação do motor. Outro ponto importante é que é relativamente fácil injetar a quantidade correta de combustível no motor. A limitação na potência dos motores se dá principalmente pela aspiração de ar. Portanto, para aumentar a potência do motor, as seguintes medidas de projeto são comuns: aumentar o volume do cilindro (“cilindrada”), aumentar a rotação do motor, aumentar a eficiência volumétrica do motor (instalação de compressor de ar e/ou mudança na geometria dos dutos e dos cames).

A curva de consumo em geral é dada apenas para a condição de potência/torque máximos, mas na verdade essa informação é um mapa. Quer dizer, o consumo específico do motor, depende tanto da rotação quanto da carga do motor que é percentual da potência máxima que está sendo efetivamente utilizada em uma determinada rotação.

Figura 3: Curvas características do torque, potência e consumo para um motor de combustão interna

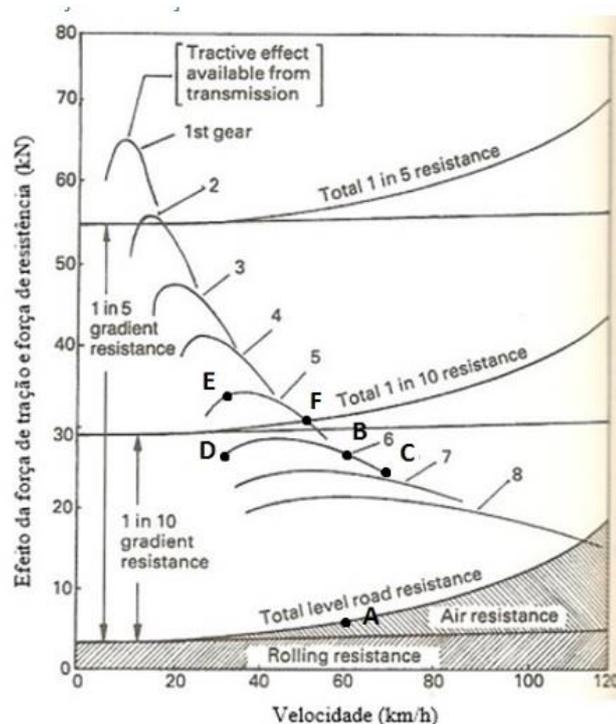


Fonte: (GILLESPE, 1992)

Como visto nas figuras anteriores, o motor opera apenas em uma faixa de rotação, comumente insuficiente para cobrir toda a faixa de velocidade do veículo. Para tanto, são utilizadas as marchas, que mudam a relação de transmissão entre o motor e a roda. Exemplificando, temos, na figura 4, o comportamento das marchas de um caminhão. Como se vê, na 1ª marcha o motor opera somente até 20 km/h. Para poder continuar na faixa operacional do motor conforme a velocidade aumenta, o motorista precisa mudar de marchas. Outra informação interessante na figura 4 são as resistências ao movimento.

Durante o início do movimento do caminhão até atingir a velocidade de 20 km/h, a única forma de resistência presente é a força de rolagem no pneu, já a força de tração aplicada é maior e ocorre na 1ª marcha. Temos um exemplo, com seis pontos que apresentam o comportamento do caminhão.

Figura 4: Relação da força de tração e resistência com a marcha e velocidade



Fonte: Adaptado (HEISLER, 2002)

No ponto A, o caminhão está no plano a uma velocidade de 60 km/h, neste ponto, já temos a força de resistência aerodinâmica somada com a força de rolagem. No ponto B, o caminhão está na 6ª marcha e pretende subir uma rampa com inclinação de 1:10. Ele aumenta sua velocidade até o ponto C, mas a marcha não tem potência suficiente para vencer as resistências, então a velocidade diminui para o ponto D, onde o caminhão tem que mudar de marcha para o

motor não parar. Assim, o caminhão na 5ª marcha tem potência suficiente para vencer as forças de resistência, ponto E, e acelerar até o ponto F, mantendo a velocidade constante. Portanto, para que o caminhão possa continuar o movimento, a curva de potência do motor sempre deve ser superior à curva das resistências que são: a resistência à rolagem que é basicamente a força necessária para deformar o pneu, praticamente constante com a velocidade, a força de arrasto aerodinâmico que aumenta bastante com a velocidade e depende da velocidade relativa do caminhão com o vento e a força gravitacional que depende da inclinação da pista, sendo diferença entre as curvas é utilizada para acelerar o caminhão.

2.2 Resistências externas

As forças de resistência ao movimento de um veículo consomem grande parte da potência. Quer dizer, a potência do motor tem que ser suficiente para vencer a resistência de rolagem, a resistência aerodinâmica, a inclinação da pista e, também, a inércia para poder aumentar a velocidade, no caso de aceleração. Destacamos que a inércia e o peso são influenciadas pela massa total do conjunto, tanto a massa útil (piloto, passageiro e carga) quanto a massa inútil (veículo). Em outras palavras, se um veículo for muito pesado (característica comum dos automóveis), boa parte da energia é usada para movimentar o próprio veículo.

A seguir apresentamos algumas dessas forças resistivas, mostrando como elas agem durante o movimento da motocicleta.

2.2.1 Resistência à rolagem nos pneus

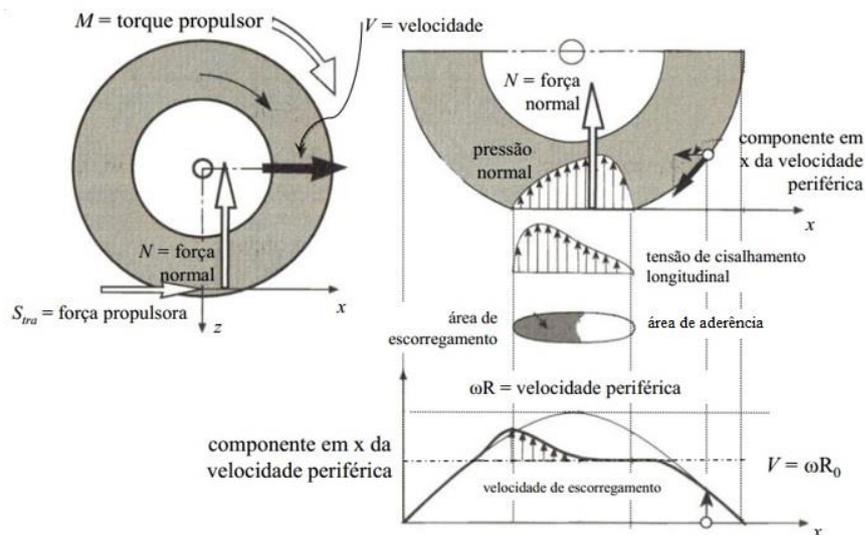
O diagrama de forças apresentado na figura 5 é utilizado para apresentar a força de rolagem do pneu em uma roda propulsora. Considerando um veículo que trafega com velocidade constante, dada a histerese na deformação do pneu, temos que a atuação da força normal (N) se dá em um ponto deslocado à frente do eixo da roda.

De acordo com Cossalter (2006), isso acontece porque, durante o rolamento, a parte do pneu sobre a pista sofre deflexão. A área de contato do pneu pode ser dividida em duas: uma área maior com escorregamento e outra área menor com aderência. A parte da energia que é gasta para deformar o pneu não é restaurada na fase seguinte de relaxamento, ou é restaurada depois da perda de contato. Causa-se assim uma mudança na distribuição das pressões de contato, que não são simétricas, sendo maiores na área em frente ao eixo da roda, fazendo com

que a resultante da pressão de contato normal fique deslocada para frente com respeito ao centro do pneu.

Esse deslocamento da força normal, figura 5 é que ocasiona o que se denomina de resistência à rolagem. Se as deformações no pneu fossem elásticas, sem amortecimento, e se não houvesse qualquer histerese, a pressão seria distribuída uniformemente em relação ao centro da região de contato do pneu com a pista, fazendo com que a força normal ficasse exatamente abaixo do eixo da roda.

Figura 5: Diagrama de forças em uma roda propulsora



Fonte: (Adaptado do COSSALTER, 2006)

Além disso, Cocco (2013) afirma que a resistência à rolagem depende de outros parâmetros, como: pressão de calibragem do pneu, dimensões da roda, estrutura e material do pneu, carga sobre a roda, temperatura, superfície da estrada, e também da velocidade. Ele, explica que a força de resistência ao rolamento do pneu da motocicleta é da ordem de 2% do peso. A resistência de rolagem é caracterizada pelo coeficiente (experimental) de rolagem C_R , com o qual podemos determinar a força de rolagem em uma determinada pista pela equação 2:

$$F_R = C_R mg \cos \theta \quad (2)$$

Onde:

C_R é o coeficiente de rolamento

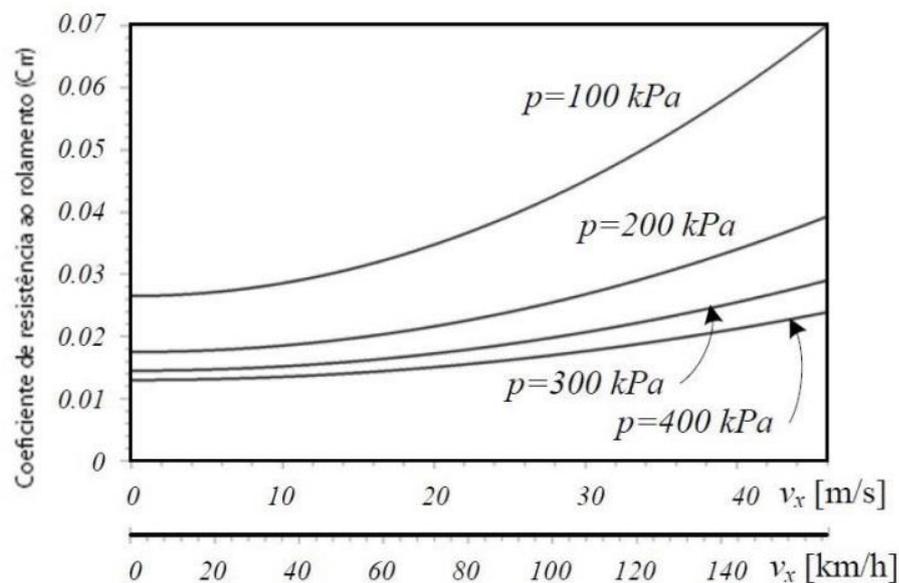
m é a massa [kg]

g a aceleração da gravidade [m/s^2]

$\cos \theta$ é o cosseno da inclinação da pista com respeito a horizontal

Pode-se perceber na figura 6 que o coeficiente de resistência ao rolamento cresce quase que exponencialmente para altas velocidades e que, para velocidades médias e baixas, pode-se considerá-lo constante para efeito de cálculo. Ainda, percebe-se a influência da pressão no valor do coeficiente de resistência ao rolamento; aumentando a pressão de calibragem do pneu reduz-se a região deformada e, assim, reduz-se também a resistência ao rolamento. Por outro lado, o aumento da pressão do pneu tem efeitos negativos, como reduzir o amortecimento e a adesão do pneu.

Figura 6: Variação do coeficiente de rolamento em função da velocidade e pressão



Fonte: (Adaptado de HOAG, 2006)

Segundo Cossalter (2006), em consonância com Cocco (2013), valores típicos para o coeficiente de resistência ao rolamento para as motocicletas estão em torno de 0,02.

2.2.2 Resistência de arrasto aerodinâmico

Durante o movimento, a motocicleta sofre a ação de uma resistência devido ao deslocamento do ar. Essa resistência, conhecida como força aerodinâmica ou força de arrasto, é dada pela equação 3:

$$F_A = C_D \frac{\rho(V - W)^2 A}{2} \quad (3)$$

Na qual:

C_D : coeficiente de arrasto, um número adimensional que indica a eficiência do projeto aerodinâmico do veículo.

ρ , massa específica do ar (kg/m^3)

V , velocidade do veículo (m/s)

W , velocidade do vento (m/s)

A , área frontal do conjunto motocicleta/piloto (m^2)

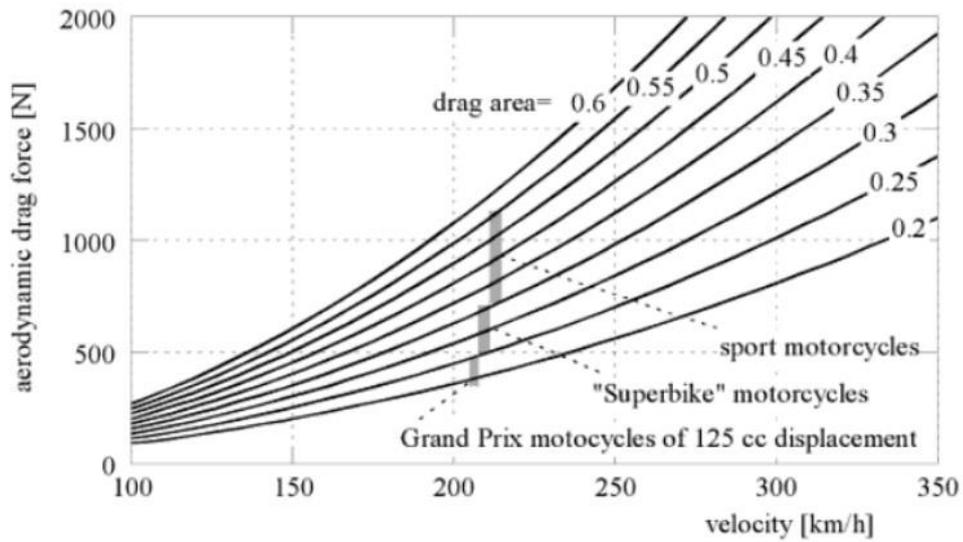
Neste trabalho, chamaremos o termo $\frac{\rho C_D A}{2}$ de fator de arrasto (k_A) dado em kg/m , assim, a equação 4 pode ser reescrita como

$$F_A = k_A (V - W)^2 \quad (4)$$

Em geral os carros possuem melhor aerodinâmica (menor C_D) que as motocicletas. Mas, como essas últimas apresentam menor área frontal, o fator de arrasto, k_A , é menor no caso das motocicletas. A figura 7 mostra como a força aerodinâmica varia com a velocidade e também como varia de uma motocicleta para outra.

A força aerodinâmica varia com produto do coeficiente de arrasto aerodinâmico (C_D) com a área frontal do conjunto piloto/motocicleta (A). Esse produto é conhecido como *drag area* e as motocicletas apresentam valores diferentes. Por exemplo, a *superbike* apresenta faixa de *drag area* de 0,25 a 0,35, e a *sport* apresenta faixa de 0,35 a 0,55. Portanto, para um mesma velocidade as motocicletas apresentam força de arrasto diferentes.

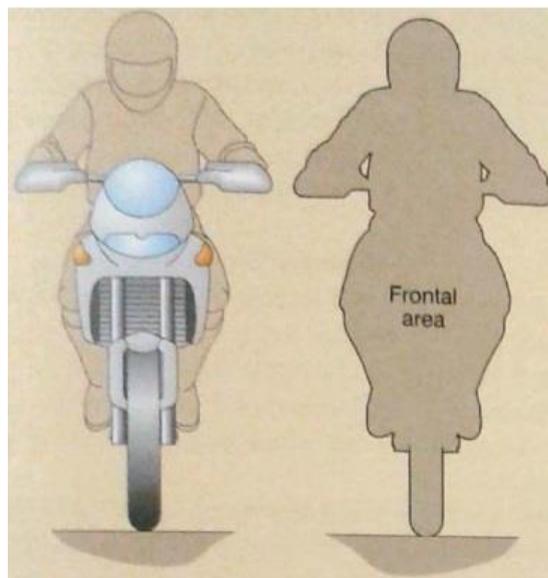
Figura 7: Variação da força de arrasto aerodinâmico em função da velocidade para cada tipo de motocicleta



Fonte: (COSSALTER, 2006)

A força aerodinâmica é influenciada pelo formato da motocicleta e da posição do piloto na condução, conforme figura 8. Segundo Cocco (2013), para o piloto agachado, a área exposta ao fluxo de ar é menor do que com ele sentado ereto ou em pé, como acontece nas motos que fazem trilhas. Assim, para uma mesma motocicleta, pilotada em diferentes posições, teremos diferentes comportamentos dinâmicos.

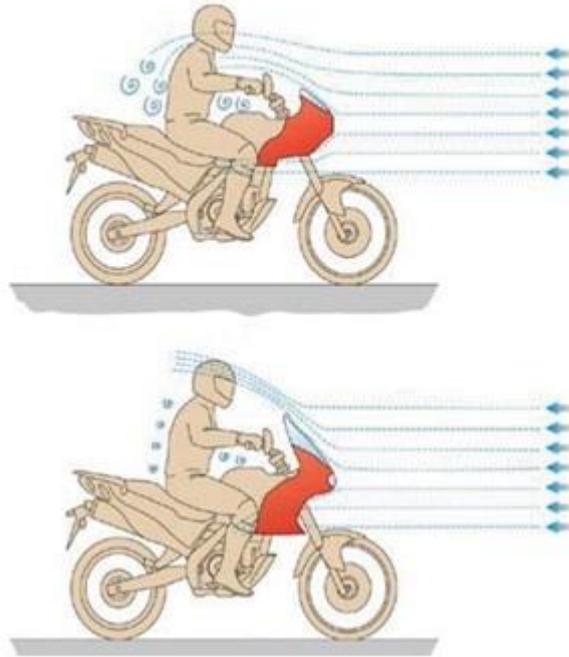
Figura 8: Área frontal composta por motocicleta e piloto



Fonte: (COCCO, 2013)

Além disso, Cocco (2013) afirma que a carenagem da motocicleta tem papel fundamental na sua aerodinâmica, como pode ser visto na figura 9.

Figura 9: Influência da carenagem no arrasto aerodinâmico



Fonte: (COCCO, 2013)

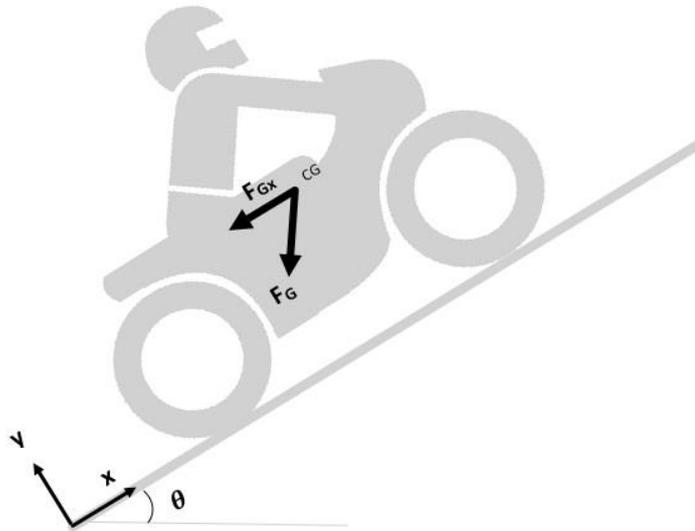
No projeto da carenagem, têm-se como objetivos diminuir o arrasto aerodinâmico e aumentar o conforto do piloto, objetivos muitas vezes contraditórios. Uma grande dificuldade no projeto da carenagem é que um bom projeto para vento frontal pode ser horrível para vento lateral, transformando a motocicleta em uma vela de barco, (FOALE, 2006).

A mudança da posição de condução acarreta na redução do coeficiente de arrasto, podendo variar de 5 a 20%, dependendo do tipo de motocicleta e da estrutura corporal do condutor, (COSSALTER, 2006).

2.2.3 Resistência da força peso

A figura 10 apresenta a aplicação da força gravitacional na motocicleta em um plano inclinado. O vetor da força peso (F_G) é mostrado decomposto apenas na direção x , pois essa componente é que resiste ao movimento.

Figura 10: Aplicação da força peso na motocicleta em um plano inclinado



Essa força de resistência gravitacional é a componente do peso na direção x (F_{G_x}), aplicada no centro de gravidade da motocicleta (CG) e pode ser calculada pela equação 5:

$$F_G = mgsen\theta \quad (5)$$

Temos:

m , massa do conjunto [kg]

g , aceleração da gravidade [m/s^2]

$sen \theta$, seno do ângulo de inclinação [rad]

Nos nossos modelos usaremos a inclinação do plano da pista (I), calculada pela equação 6.

$$I = sen \theta \quad (6)$$

O Departamento Nacional de Infraestrutura de Transporte (DNIT) faz recomendações para as inclinações máximas permitidas em rodovias, dependendo da classe da estrada. A determinação da inclinação é calculada pela tangente do ângulo da inclinação. Em vias expressas, onde o volume de tráfego é alto, recomenda-se, no máximo, inclinações de 5%, ou seja, cerca de 3°

Já em rodovias que possuem baixo volume de tráfego, as inclinações máximas recomendadas são de 9%, ou seja, cerca de 5°.

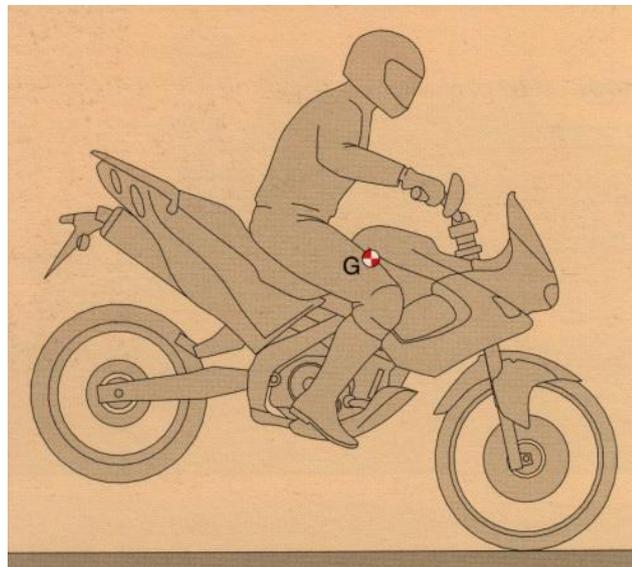
2.3 Manobras nas motocicletas

As motocicletas podem apresentar manobras indesejadas (com exceção das exibições e competições) durante o seu movimento, como a perda de contato ou de adesão das rodas com o piso. Nas próximas seções descrevemos essas manobras.

2.3.1 Manobra de *stoppie* ou *babalu*

Durante a frenagem, a motocicleta pode realizar um movimento conhecido como *stoppie*, ou *babalu*, conforme apresentado na figura 11. Essa manobra ocorre quando a transferência de peso é tal que anula a força normal da roda traseira. É instável, porque o momento do peso diminuiu e o da força de inercia aumenta.

Figura 11: Movimento conhecido como *stoppie*, ou *babalu* feito em motocicleta



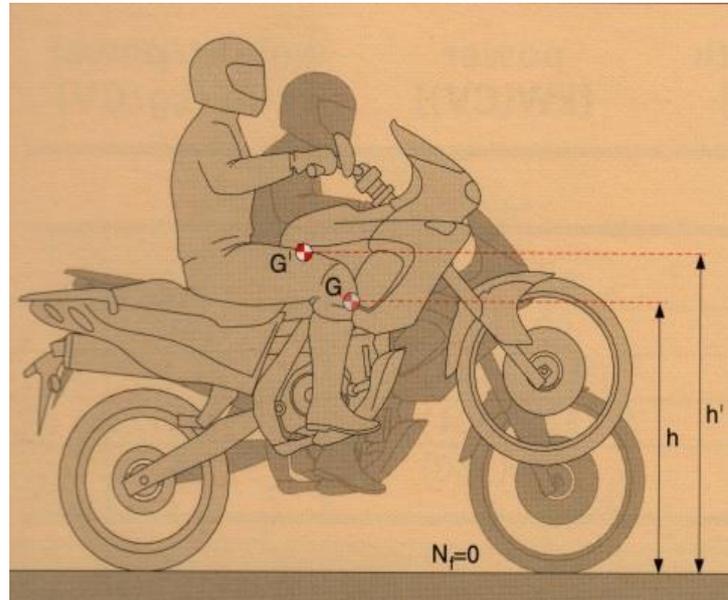
Fonte: (COCCO, 2013)

2.3.2 Manobra de *wheelie* ou empinamento

Quando a motocicleta realiza essa manobra, observa-se que o seu centro de gravidade tem uma elevação na sua altura, conforme figura 12. Assim, se o piloto continuar acelerando, a tendência é a de que o conjunto piloto e motocicleta percam o equilíbrio e caiam para trás.

Isso ocorre devido a transferência de peso, que aumenta a carga na roda traseira e diminui na roda dianteira até que ela perca o contato com a pista.

Figura 12: Movimento conhecido como *wheelie*, ou *empinamento* feito em motocicleta



Fonte: (COCCO, 2013)

2.3.3 Perda de aderência

No caso da aceleração, os limites de aderência também são fundamentais para a análise do movimento, podendo ocorrer inclusive a “patinação” da roda antes que se concretize a situação de *wheelie*. Isso vai depender obviamente dos parâmetros do caso a ser estudado, que irão determinar qual situação ocorrerá primeiro. O mesmo acontece durante a frenagem. Dependendo os parâmetros, pode ocorrer primeiro o *stoppie* ou a perda de aderência da roda.

Na roda de tração a perda de aderência em linha reta tem como efeito principal diminuir a aceleração (positiva ou negativa). No caso de curvas, a perda de aderência é mais perigosa, pois pode fazer com que a motocicleta perca a trajetória, saindo pela tangente. Alguns pilotos dominam a técnica do *power slide*, que pode ser usado para fazer curvas com perda de aderência, mas é uma manobra bastante especial e de difícil execução. Em geral o piloto deve entrar na curva já na velocidade correta, pois no caso de perda de adesão causada pela alta velocidade, qualquer tentativa de frenagem pioraria mais ainda a falta de adesão.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nessa seção será feito um levantamento de publicações que tratam da dinâmica da motocicleta. Apresentaremos alguns trabalhos que modelam o efeito dos freios da motocicleta durante a frenagem e a maioria desses trabalhos tem como objetivo relacionar a técnica de frenagem com a velocidade de segurança para entrada em curvas.

3.1 Estudos sobre modelagem da dinâmica da motocicleta

Um estudo feito com 24 motociclista e motocicletas com motores diferentes por Mortimer (1985), apresentou diferenças na distância de frenagem quando se utiliza-se o freio integrado e separado. Os resultados indicaram uma vantagem significativa no freio integrado em relação ao freio separado na redução da distância de frenagem.

Toyofuku *et al.* (1994), realizou teste com ABS (*Anti-lock Breaking System*) em motocicleta e avaliou a sua eficácia tanto para os pilotos com experiência e sem experiência em termos de distância de frenagem e estabilidade do veículo.

Uma análise numérica no estudo feito por Cossalter, Lot e Maggio (2002), avaliou a importância do pneu na estabilidade da motocicleta, tanto em reta quanto em curvas. Foi utilizado um modelo detalhado do pneu considerando suas propriedades geométricas e físicas para verificar sua influência na vibração.

Utilizando um código de computador conhecido como *FastBike*, Cossalter, Lot e Maggio (2003) analisaram a dinâmica de veículos em duas rodas. Suas análises foram feitas para determinar o modo de vibração desses veículos no domínio do tempo e no domínio da frequência. Além disso, analisaram estaticamente e em situações de aceleração, frenagem e curvas. Com os resultados da análise, o código *FastBike* foi validado.

Cossalter, Lot e Maggio (2004) desenvolveram um modelo matemático não linear para determinar o comportamento modal de motocicletas na reta e na curva destacando a influência da força centrípeta na estabilidade. Eles, ainda, apresentam outro estudo sobre o comportamento da motocicleta na frenagem. Inicialmente, fenômenos básicos em um modelo de motocicleta simplificado. Em seguida, manobras que ocorrem na frenagem utilizando um modelo de motocicleta que considera as suas dimensões. As simulações são feitas variando as condições de atrito da pista para que, finalmente, apresente a melhor maneira de estabilizar a motocicleta na frenagem.

Um questionário que mede de forma confiável o comportamento de motociclistas e quais tipos de comportamento influenciam em riscos de acidentes foi desenvolvido por Elliott, Baughan e Sexton (2007) que apresentou 5 fatores que aumentam os riscos de acidentes com motocicletas por exemplos: erros de trânsito, erros de controle, violações de velocidade, manobras e uso de equipamentos de segurança.

Levando em conta a transferência de peso, o limite entre a perda de aderência e o *stoppie*, e o do arrasto aerodinâmico. Corno *et al.* (2008), apresentam uma discussão, usando um pacote comercial de simulação, como a variação do coeficiente de atrito com o deslizamento da roda e do movimento da suspensão na frenagem podem influenciar na dinâmica da motocicleta.

Um estudo apresentado por Popov, Rowell e Meijaard (2008) apresenta uma revisão sobre o controle da direção da motocicleta. Nele o controle é baseado em informações sensoriais do piloto através de uma percepção visual de um alvo no trajeto.

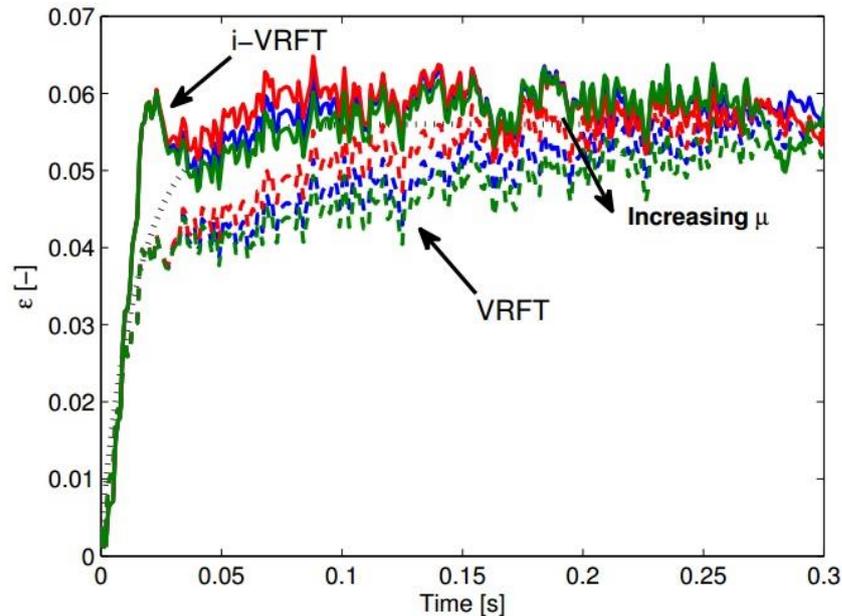
O controle da direção de veículos de duas rodas em curvas é apresentado em Cossalter e Lot (2009), que modelou a motocicleta considerando as propriedades dos pneus. As equações não lineares são resolvidas numericamente onde os resultados são discutidos sobre a influência do pneu e da geometria no controle de direção.

A estabilidade, o controle e as respostas da motocicleta na direção são apresentadas em Sharp (2010). É discutido o comportamento da motocicleta quando é levado em consideração o corpo do piloto como uma extensão da estrutura da motocicleta.

Cossalter, Doria e Lot (2010) modelaram uma motocicleta considerando a deformação do pneu que foi modelado em um código *Fortran*. A partir disso, simularam a motocicleta com manobras e movimentos na pista e os resultados numérico do programa apresentou boas concordâncias com os resultados experimentais.

Controladores eletrônicos são utilizados em sistemas de freio para melhorar a eficácia da frenagem em motocicletas comuns como apresentado no estudo de Formentin *et al.* (2010), que utilizou esses sistemas. A figura 13 apresenta a resposta do sistema de controle de frenagem para diferentes condições de atrito longitudinal (μ). Temos que o controle i – VRFT garante o desempenho da frenagem com o aumento do tempo.

Figura 13: Sensibilidade para fricção longitudinal



Fonte: (FORMENTIN *et al.*, 2010)

O estudo feito por Ohlhauser, Milloy e Caird (2011), comparou usuários de motocicletas utilizando carros para saber se seu comportamento no trânsito é diferente, chegando à conclusão que usuários de carros e motocicleta não se diferenciam quanto a resposta a frenagem. Além desse estudo, apresentou um segundo estudo comparando o desempenho na condução de motoristas sem experiência e com experiência através de um simulador. Percebeu que os motoristas sem experiência apresentam um tempo de percepção maior que os motoristas com experiências durante a frenagem.

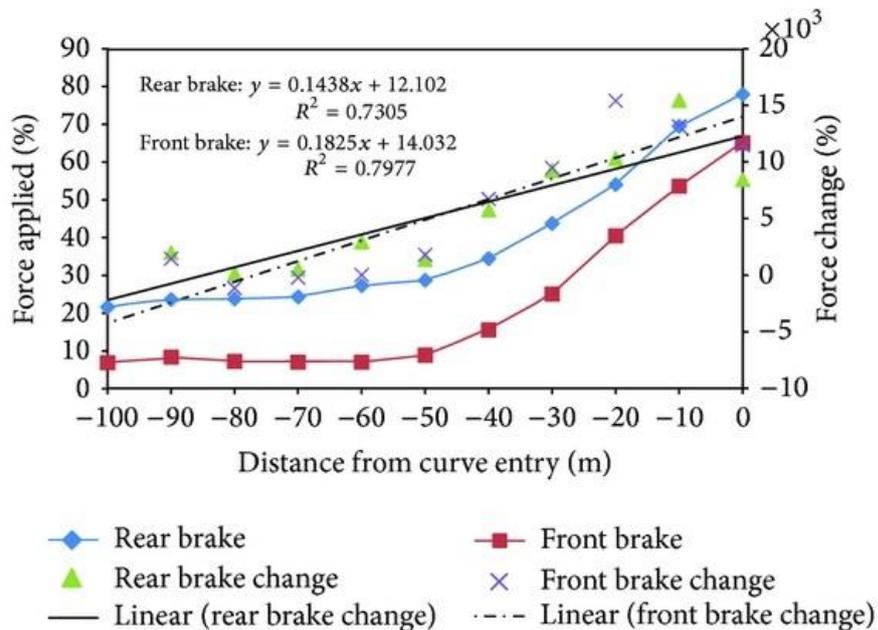
Um projeto de simulador de motocicleta é apresentado em Cossalter *et al.* (2011), com o propósito de desenvolver e testar dispositivos eletrônicos para melhorar a segurança e o desempenho da motocicleta. O simulador foi validado utilizando protocolos específicos que incluíam avaliação subjetivas e objetivas.

Özkan *et al.* (2012) apresentam em seu trabalho quais são os comportamentos do piloto de motocicleta que podem apresentar perigo no trânsito. Eles estudaram erros de tráfego, erros no controle da motocicleta, violações de limite de velocidade, realização de manobras perigosas e o uso de equipamentos de segurança

Vlahogianni, Yannis e Golias (2012), discutem os riscos específicos do uso das motocicletas. Em particular, destacamos a seção em que eles apresentam os riscos associados à infraestrutura, que incluem o tipo de piso, geometria das estradas, visibilidade do piloto e perda de controle durante frenagens e curvas.

No estudo desenvolvido por Yuen, Karin e Saifizul (2014), são detalhadas as mudanças no comportamento de condução, tais como mudanças na velocidade, bem como a força de freio e a força de aceleração aplicada, quando os motociclistas percorrem uma estrada de seção curva usando uma motocicleta utilizando sensores. Eles verificaram que a velocidade diminui em uma taxa, maior que -1 km/h a partir de um ponto distante de 40 m da entrada da curva, como apresentado na figura 14.

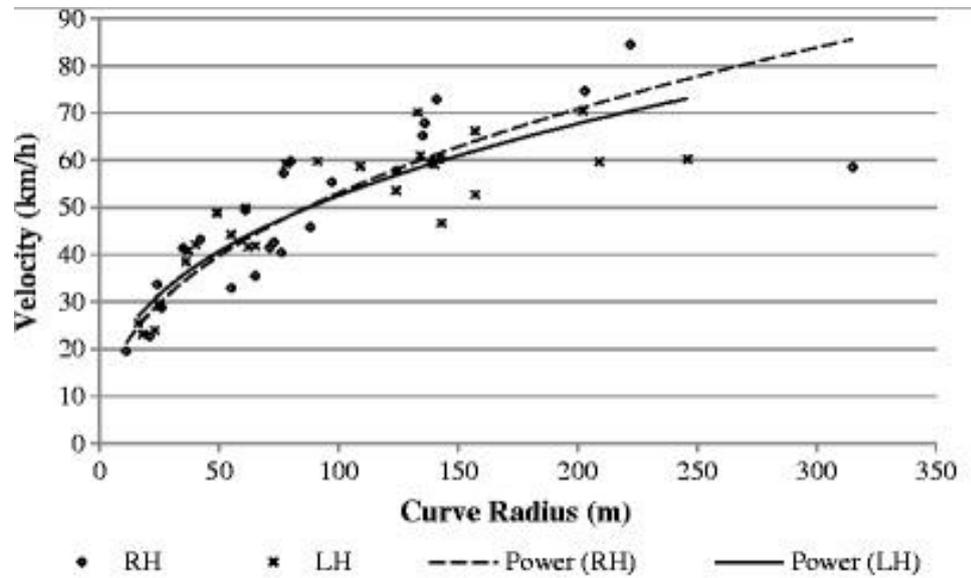
Figura 14: Freios traseiro e dianteiro sendo aplicados em função da distância da curva



Fonte: (YUEN; KARIN; SAIFIZUL, 2014)

Lemonakis *et al.* (2014) apresentam um estudo do comportamento das motocicletas em curvas. Eles utilizaram o sistema de posicionamento global (GPS) para determinar a velocidade ótima que a motocicleta deve fazer a curva para um determinado raio de curvatura e compara com a velocidade na curva de motociclistas sem experiência, como mostra a figura 15. Temos duas curvas ótimas em função do raio de curvatura tanto a direita (RH) quanto a esquerda (LH) sendo comparadas com as velocidades feitas por motociclistas sem experiência feita a luz do dia.

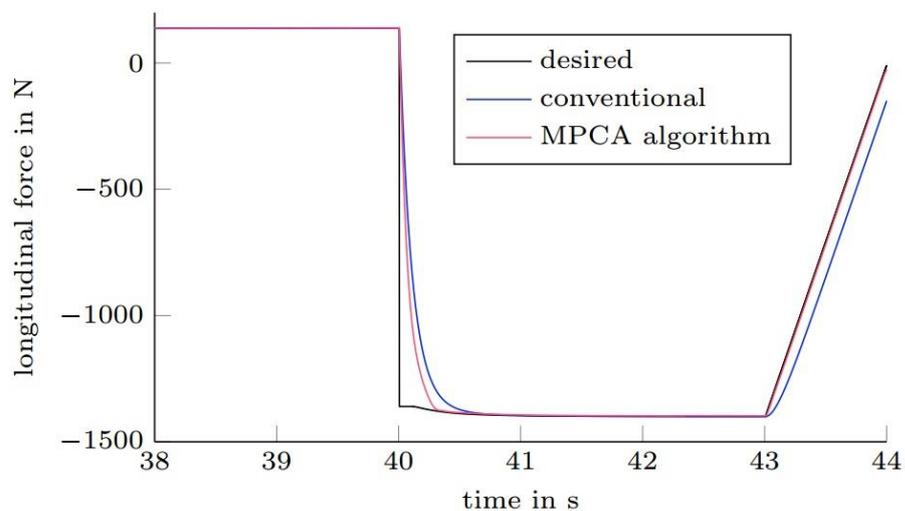
Figura 15: Velocidade da curva ótima a direita e a esquerda em comparação com a velocidade feita pelos motociclistas sem experiência em dia claro



Fonte: (LEMONAKIS *et al.*, 2014)

Apresentando um método de análise de frenagem durante a curva, manobra que pode ser facilitada no caso de motocicletas elétricas com tração nas duas rodas. Baumann *et al.* (2016), utiliza um modelo de algoritmo computacional que calcula o limite da força de frenagem na aderência do pneu e do ângulo de rolagem com a curva, conforme apresenta a figura 16.

Figura 16: Comparação das forças de frenagem na motocicleta



Fonte: (BAUMANN *et al.* 2016)

Um estudo feito por Baldanzini *et al.* (2016), investigou o comportamento de pilotos de motocicletas, que foram separados em grupos, identificando diferentes comportamento durante a frenagem nos diferentes grupos.

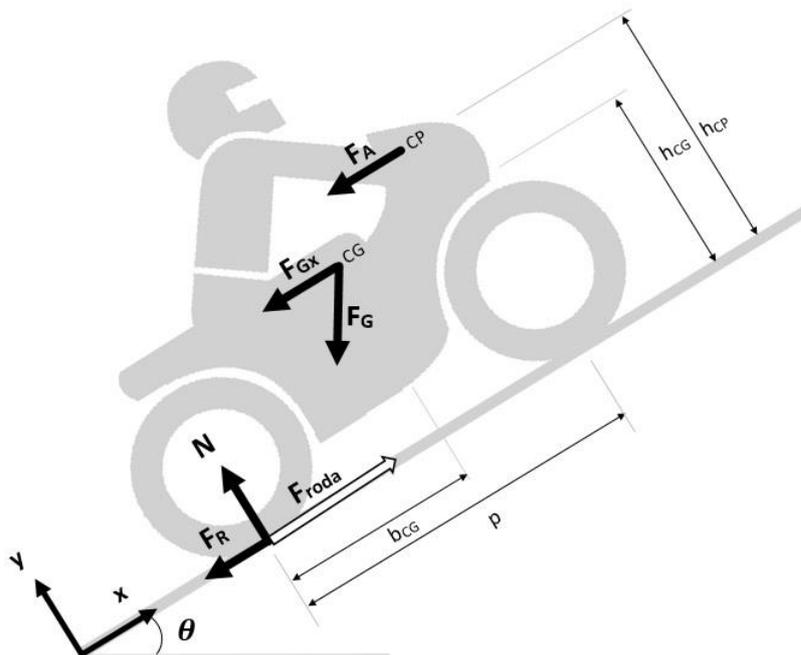
4 METODOLOGIA GERAL

Neste capítulo, iremos apresentar as equações do modelo computacional que posteriormente será aplicado a estudos específicos. Adicionalmente à modelagem, mostraremos a discretização das equações, o algoritmo de cálculo e alguns exemplos de aplicações.

4.1 Modelo físico

Os modelos apresentados a seguir são usados para determinar o comportamento da motocicleta com a ação imposta pelo motociclista, motor e pista. A figura 17 apresenta a ação das forças que atuam na motocicleta. Percebe-se que as forças de resistência são (comumente) contrárias ao movimento da motocicleta. Ainda, temos a força de inércia ($m.a$) que, também, impede (comumente) o movimento. No caso de inclinação negativa (descida) ou vento em popa, as forças “resistivas” auxiliam o movimento. Embora o nosso modelo inclua alguns desses fenômenos, não os estudaremos neste trabalho.

Figura 17: Forças aplicadas no centro de pressão (CP), centro de gravidade (CG) e na roda traseira (T)



Aplicando um balanço de forças na figura 17, ficamos com a equação 11. Essa equação está relacionando a força na roda (F_{roda}) que a motocicleta deve utilizar para poder vencer as força de resistência que são contrárias ao movimento (no caso de frenagem, a força na roda é negativa). Neste seção, consideraremos o termo F_{roda} para representar a soma das forças tangenci-

ais nas duas rodas sendo aplica, apenas, na roda traseira. Em seções posteriores, iremos separar as forças na roda dianteira e traseira.

$$F_{roda} = F_A + F_R + F_{G_x} + ma_x \quad (11)$$

Como já visto, as forças de resistência são determinadas pelas equações 2, 4 e 5. Portanto, a força de resistência ao movimento da motocicleta tem a seguinte equação:

$$F_{resistência} = F_A + F_R + F_{G_x} \quad (12)$$

Analisando a operação interna à motocicleta, sabemos que a força da roda da motocicleta vem da ação do motor e/ou do freio.

$$F_{roda} = F_{motriz} + F_{fren} = \alpha \frac{\eta_{trans} P_{max,mot}}{V} + \beta \frac{P_{max,fren}}{V} \quad (13)$$

Na equação 13, o primeiro termo é a força advinda do motor, chamada de força motriz (F_{motriz}), que leva em conta a máxima potência do motor naquela rotação ($P_{max,mot}$), a eficiência de transmissão (η_{trans}), a velocidade da motocicleta (V), e a ação do piloto com o coeficiente de abertura do acelerador – α , que apresenta valores na faixa [0,1]. O segundo termo, força de frenagem, considera a velocidade da motocicleta (V), a potência máxima de frenagem ($P_{max,fren}$). Essa potência é função do fator de atrito entre o pneu e o piso (f) multiplicado pela força normal (N), e também leva em conta a ação do piloto com o coeficiente de aperto do manete do freio traseiro pela variável β , que apresenta valores na faixa [0,1].

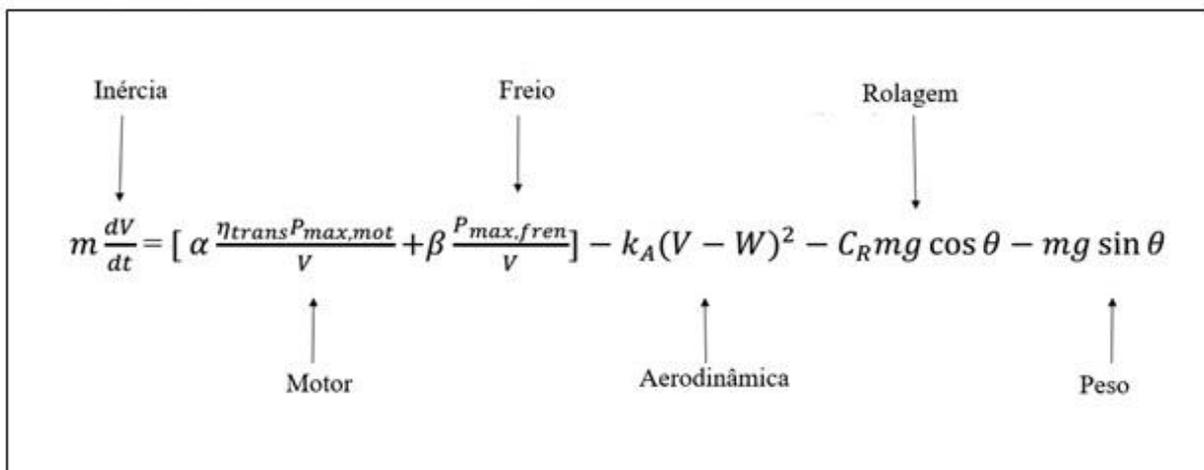
Um ponto importante deste modelo é que consideramos que o sistema de frenagem sempre é capaz de aplicar a força necessária na roda. Em outras palavras, assumimos que o limite da frenagem está entre o pneu e o piso, não entre a pastilha de freio e o disco de freio. Isso não é necessariamente verdade em motocicletas mais antigas (freio a tambor) ou em caso de disco de freio molhado. Nas bicicletas convencionais, é comum que o freio não seja capaz de travar a roda dianteira. Outro ponto importante é que estamos levando em consideração, nesta seção, que a força de frenagem é utilizada, apenas, na roda traseira, isto é, toda a força de frenagem é utilizada nesta roda.

Substituindo as equações 2, 4, 5 e 13 na equação 11, podemos apresentar o modelo geral da dinâmica da motocicleta, equação 14, que modela matematicamente o movimento da motocicleta, (COSSALTER, 2006; COCCO 2013, BAIRD, 2010; WILSON 2004).

$$m \frac{dV}{dt} = \left[\alpha \frac{\eta_{trans} P_{max,mot}}{V} + \beta \frac{P_{max,fren}}{V} \right] - k_A (V - W)^2 - C_R mg \cos \theta - mg \sin \theta \quad (14)$$

Os termos da equação 14 são apresentados na figura 18. Essa figura apresenta uma equação diferencial de primeira ordem na variável V , que é resolvida pelo método das diferenças finitas explicitamente. O primeiro termo entre colchetes representa a força nas rodas e os outros termo representa as resistências.

Figura 18: Modelo geral da dinâmica da motocicleta



Das grandezas presentes no modelo geral, alguns devem ser dados, por exemplo: o fator de arrasto aerodinâmico (k_A), a velocidade do vento (W), o coeficiente da força de rolagem nos pneus (C_R), a inclinação da pista (θ), eficiência da transmissão (η_{trans}) e a massa do conjunto piloto/motocicleta (m). Outras fazem parte da solução: V , α , β , $P_{max,mot}$ e $P_{max,fren}$.

Aqui se faz necessário um comentário sobre a necessidade de resolver numericamente a equação 14 que representa o modelo geral. Primeiro, os valores de α e β dependem da velocidade, pois em geral, como veremos mais adiante, o piloto tenta atingir uma determinada velocidade desejada (curva dada) ao longo do percurso. Segundo, há uma relação entre a potência máxima $P_{max,mot}$ (que é função da rotação) e a velocidade da motocicleta. O problema é que essa relação entre P e V apresenta valores diferentes dependendo da marcha escolhida

pelo piloto. Por essas razões, embora seja possível resolver analiticamente o modelo geral para alguns casos especiais, em geral é necessária a solução numérica.

4.1.1 Modelos físicos simplificados

A equação 14 apresenta o modelo geral da motocicleta. Vamos considerá-la de três formas diferentes. Primeiro, considerando todos os termos, chamando-a de modelo com resistência variável (RV). Segundo, considerando constante a velocidade da motocicleta no termo do arrasto aerodinâmico (usaremos uma velocidade de referência) – modelo com resistência constante (RC). Finalmente, iremos desprezar todas as resistências (modelo sem resistência, SR). Os modelos são organizados na tabela 2.

Há duas razões para essas aproximações. Em primeiro lugar, para podermos comparar nossos resultados com os modelos apresentados na literatura (muitas vezes usam o SR). Em segundo lugar, porque, na prática, conforme veremos, nem sempre é necessária a consideração de todas as resistências.

Tabela 2: Diferenças entre os modelos utilizados na simulação

Modelos	Condição
Sem Resistência (SR)	$F_{resistência} = 0$
Resistencia Constante (RC)	$F_{resistência} = \text{constante}$
Resistencia Variável (RV)	$F_{resistência} = \text{variável}$

Esses modelos foram implementados em várias linguagens/pacotes no LOST. As linguagens C e C++ têm a vantagem do tempo de processamento, o Matlab tem a vantagem de apresentação em sala de aula, o Excel facilita bastante a análise dos resultados, e o EES (Engineering Equation Solver, um *solver* de sistemas de equações algébricas não lineares, que inclui tabelas termodinâmicas) ajuda bastante no algebrismo, pois não demanda a explicitação de variáveis e o ordenamento das equações, nem mesmo a implementação de um algoritmo de solução. As grandes limitações do EES são o número máximo de variáveis, 6.000, a organização do código e uma certa dificuldade em montar os gráficos.

Como no caso deste trabalho não há problema de tempo de processamento (é importante apenas quando o modelo do veículo é acoplado a um modelo de tráfego), escolhemos usar a implementação em Excel para o modelo RV no caso de movimento genérico. Para o

caso de curva com velocidade constante, ou frenagem (RC e SR), preferimos a implementação no EES (depois de verificarmos que apresentava os mesmos resultados que o modelo geral no Excel).

4.1.2 Comportamento do piloto, do motor e do freio

O comportamento da motocicleta depende intrinsecamente das decisões do piloto (coeficiente de abertura do acelerador- α e coeficiente de aperto do manete do freio- β), que aparecem na figura 19.

Figura 19: Termos do modelo geral do comportamento do piloto, do motor e do freio

$$\left[\alpha \frac{\eta_{trans} P_{max,mot}}{v} + \beta \frac{P_{max,fren}}{v} \right]$$

Cada um desses termos apresentados na figura 19 são definidos e calculados separadamente. O valor do coeficiente de abertura do acelerador (α) é definida pela equação 15. Se a potência da roda desejada na roda ($P_{roda,des}$) for maior que a potência máxima do motor disponível na roda ($\eta_{trans} P_{max,mot}$), o seu valor é $\alpha = 1$. Isso significa que a potência máxima do motor está sendo utilizada para desenvolver uma determinada velocidade que é pedida. Quando a potência motriz desejada é menor que a potência máxima do motor, então α é utilizada para modular o motor. Caso a potência motriz desejada seja negativa (redução de velocidade), então $\alpha = 0$.

$$\alpha = \begin{cases} 1 & P_{roda,des} > \eta_{trans} P_{max,mot} \\ \frac{P_{roda,des}}{\eta_{trans} P_{max,mot}} & 0 \leq P_{roda,des} \leq \eta_{trans} P_{max,mot} \\ 0 & P_{roda,des} < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Outro termo a ser determinado é a potência máxima do motor, ou a potência disponível do motor numa rotação específica. Neste trabalho usaremos a correlação empírica de Ni e Henclewood (2008, *apud* GARCIA NETO, 2014). Calculada pela equação 15, que depende das constantes c_1 e c_2 , e da faixa de operação do motor – que opera entre a rotação mínima ($\Omega_{mot,min}$) e a rotação máxima ($\Omega_{mot,max}$).

No caso que a rotação é menor que a rotação mínima, primeira linha da equação 16, estamos modelando a embreagem, já a última linha modela o corte do motor.

$$P_{max,mot}(\Omega) = \begin{cases} c_1\Omega_{min} - c_2(\Omega_{min} - \Omega_{pico,torq})^2\Omega_{min} & \Omega < \Omega_{mot,min} \\ c_1\Omega - c_2(\Omega - \Omega_{pico,torq})^2\Omega & \Omega_{mot,min} \leq \Omega \leq \Omega_{mot,max} \\ 0 & \Omega > \Omega_{mot,max} \end{cases} \quad (16)$$

A determinação das constantes c_1 e c_2 é feita pelas equações 17 e 18:

$$c_1 = \frac{P_{mot,pico}}{2\Omega_{pico,pot}^2} (3\Omega_{pico,pot} - \Omega_{pico,torq}) \quad (17)$$

$$c_2 = \frac{P_{mot,pico}}{2\Omega_{pico,pot}^2 (\Omega_{pico,pot} - \Omega_{pico,torq})} \quad (18)$$

Onde:

$P_{mot,pico}$, potência em um ponto na curva de potência máxima do motor [kW]

$\Omega_{pico,pot}$, rotação do motor na potência de pico [rad/s]

$\Omega_{pico,torq}$, rotação do motor no torque de pico [rad/s]

Os dados de entrada são (em geral) disponibilizados pelos fabricantes das motocicletas. Para nosso cálculo, escolhemos a motocicleta com as seguintes características dos dados do motor apresentados na tabela 3.

Tabela 3: Dados do motor da motocicleta

Parâmetros	Valor	Valor no SI
Potência máxima	30 CV	22,06 kW
Rotação na potência máxima	8.500 rpm	890,12 rad/s
Rotação no torque máximo	6.500 rpm	680,68 rad/s

Voltando à figura 19, precisamos agora tratar do segundo termo, o freio. A aplicação do coeficiente de aperto do manete do freio (β) em cada momento se dá pela equação 19:

$$\beta = \begin{cases} 0 & P_{roda,des} > 0 \\ \frac{P_{roda,des}}{P_{max,fren}} & P_{max,fren} \leq P_{roda,des} \leq 0 \\ 1 & P_{roda,des} < P_{max,fren} \end{cases} \quad (19)$$

Onde:

$P_{roda,des}$, potência desejada nas rodas [kW]

$P_{max,fren}$, potência máxima de frenagem na roda traseira para atrito máximo [kW]

De forma similar ao caso do acelerador, o acionamento do freio ocorre apenas quando a potência da roda desejada na traseira é negativa.

A potência máxima de frenagem na roda traseira é determinada pela equação 20, sendo necessário conhecer o valor do coeficiente de atrito entre o pneu e a pista (f), a massa do conjunto motocicleta/piloto (m), ângulo da pista (θ) e da velocidade naquele momento (V). Mais para a frente, neste trabalho, iremos considerar separadamente o freio na roda dianteira e traseira. Por enquanto, o modelo trata o freio como algo único.

$$P_{max,fren} = -fmg\cos\theta V \quad (20)$$

Embora não indicado nas equações, é extremamente fácil considerar casos em que os parâmetros variam durante o trajeto, como por exemplo a velocidade do vento, W , a inclinação da pista, I , o coeficiente de atrito, f , e assim por diante.

4.1.3 Relação de transmissão

Na mecânica, a relação de transmissão é a medida da relação entre as velocidades angular de duas ou mais engrenagens interligadas. Em geral, no caso de duas engrenagens, se a primeira (a que está recebendo o torque do motor) tem um diâmetro menor do que a segunda, esta irá girar mais rápido e vice versa. Podemos expressar esse conceito básico usando a equação 21.

$$\phi = \frac{N_1}{N_2} = \frac{D_2}{D_1} \quad (21)$$

Onde:

N_1 e N_2 , são as rotação das engrenagem, [rpm]

D_1 e D_2 , são o diâmetro das engrenagem, [mm]

ϕ , relação de transmissão [adimensional]

Existem três relações de transmissão em uma motocicleta: na relação primária, entre o virabrequim e a entrada da caixa de marchas; no interior da caixa de marchas; e na relação final, entre o pinhão e a coroa. A relação total, entre a rotação do motor e da roda, é dada pela multiplicação dessas três. As relações primária e final são constantes, e a relação da caixa de marcha depende da marcha selecionada.

A equação 22 relaciona a rotação (Ω) do motor com o raio da roda (R_{roda}), a velocidade da motocicleta (V) e a marcha (γ) selecionada. A marcha selecionada é função da relação total (r_{tot}). Percebe-se que quanto maior a velocidade, maior é a rotação do motor.

$$\Omega = \begin{cases} \frac{V}{R_{roda}} \frac{60}{2\pi} r_{tot}(\gamma) & \frac{V}{R_{roda}} \frac{60}{2\pi} r_{tot}(\gamma) \geq \Omega_{min,mot} \\ \Omega_{min,mot} & \frac{V}{R_{roda}} \frac{60}{2\pi} r_{tot}(\gamma) < \Omega_{min,mot} \end{cases} \quad (22)$$

A tabela 4 apresenta os dados de relação usados em nossa motocicleta. Observa-se, em conjunto com a equação 22, que a função de um aumento de marcha é diminuir a rotação do motor, mantendo-o dentro da faixa do operação.

Tabela 4: Termos do modelo geral do comportamento do piloto, do motor e do freio

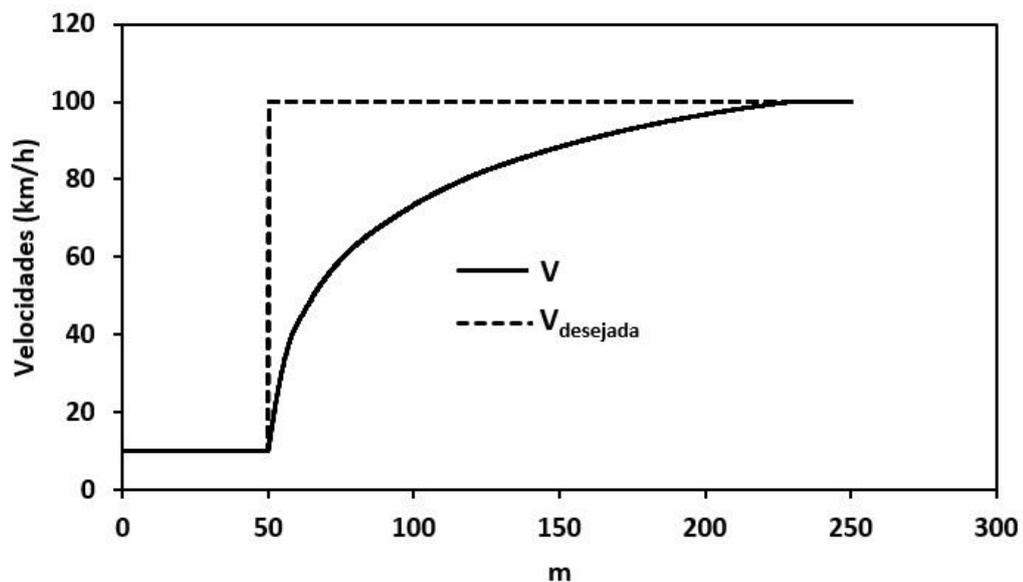
$\gamma(\text{marcha})$	Relação da caixa de marcha	Relação final
1°	2,79	29,73
2°	1,79	19,10
3°	1,35	14,41
4°	1,12	11,96
5°	0,96	10,23

4.2 Modelo computacional

A partir de agora, explicamos como é resolvido o modelo geral da motocicleta. O espaço é discretizado em nx elementos (não necessariamente uniformes), em um vetor dado x_i . Todos os parâmetros e todas as variáveis são explicitadas em função do espaço. Como condição inicial, são dadas a velocidade inicial (V_I) e a marcha inicial (γ_1). São dados ainda os vetores de velocidade do vento W_i , da inclinação da pista θ_i , o coeficiente de atrito f_i , a curva do motor, e as características do veículo (C_R, k_A, m).

Outro dado fundamental para o problema é a evolução da velocidade desejada durante o percurso, i.e., um vetor $V_{des,i}$, figura 20.

Figura 20: Comparação entre a velocidade desejada e a velocidade real em função da posição pelo método computacional



No caso deste trabalho, esse vetor é conhecido, mas em geral é dado pela evolução de um modelo de tráfego – afinal, no trânsito real, a velocidade do veículo é definida principalmente pelo tráfego, não pelo desejo do condutor. Importante salientar que não necessariamente a solução do modelo geral será igual à velocidade desejada, como mostra a figura 20, na qual o piloto desejou acelerar de forma instantânea, mas o veículo não tinha essa capacidade.

4.2.1 Cálculo computacional

O cálculo pode ser dividido em duas partes. Primeiramente, vamos determinar quais devem ser os valores de α_i e β_i (acionamento do acelerador e do freio). Isto é, como se estivéssemos modelando o piloto que deseja certo comportamento. Esses valores são calculados pelas equações 15 e 19, após determinarmos a potência desejada na roda, $P_{roda,des}$. Depois, com esses valores de α_i e β_i modelaremos o comportamento “real” da motocicleta. Resumindo o modelo completo, i.e, piloto e moto, conhecida a velocidade em um instante/posição i , V_i (calculada na posição anterior), e a velocidade desejada no instante/posição $i+1$, $V_{des,i+1}$ (lembrando que conhecemos o vetor completo), tentaremos calcular a velocidade no instante/posição V_{i+1} .

Modelo do piloto (acelerador e freio)

Conhecidas a velocidade no instante/posição i e a velocidade desejada no instante/posição $i+1$, podemos calcular o tempo necessário para o deslocamento de um ponto a outro.

$$\Delta t_{des,i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\frac{V_{des,i+1} + V_i}{2}} \quad (23)$$

Com a equação 24 calculamos a aceleração desejada:

$$a_{des,i} = \frac{V_{des,i+1} - V_i}{\Delta t_{des,i}} \quad (24)$$

Com isso, podemos calcular a potência desejada na roda utilizando a equação 25 (modelo geral escrito de forma mais conveniente). Os dados do veículo estão na tabela 5.

$$P_{roda,des,i} = (ma_{des,i} + k_A(V_i - W_i)^2 + C_R mg \cos \theta_i + mg \sin \theta_i) V_i \quad (25)$$

Tabela 5: Parâmetros físicos da motocicleta inclinação da pista

Parâmetros	Valor
Massa total	230 kg
C_R	0,02
k_A	0,36
θ	5°

Modelo da motocicleta (aceleração “real”)

Determinada a ação do piloto (α_i e β_i) a partir da velocidade desejada, podemos agora determinar a aceleração “real” da motocicleta, pela equação 26 (que é o modelo geral escrito de forma conveniente).

$$a_i = \frac{\left(\alpha_i \frac{\eta_{trans} P_{max,mot,i}}{V_i} + \beta_i \frac{P_{max,fren,i}}{V_i} \right) - k_A (V_i - W_i)^2 - C_R mg \cos \theta_i - mg \sin \theta_i}{m} \quad (26)$$

Com a aceleração calculada pela equação 26, o tempo que a motocicleta leva para se deslocar no trecho é determinado pela equação 27.

$$\Delta t_i = \begin{cases} \frac{V_i + \sqrt{V_i^2 + 2a_i(x_{i+1} - x_i)}}{a_t} & a_i > 0 \\ \frac{(x_{i+1} - x_i)}{V_i} & a_i = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Determinada a aceleração e o tempo, o método finalmente calcula a nova velocidade no ponto posterior (equação 28):

$$V_{i+1} = V_i + a_i \Delta t_i \quad (28)$$

Modelo do piloto (mudança de marcha)

Com a nova velocidade, podemos calcular a nova rotação do motor (equação 22). Caso essa rotação fique muito alta, o piloto deve aumentar a marcha, e se a rotação ficar muito baixa, o piloto deve diminuir a marcha. Essa operação de mudança de marcha é modelada matematicamente pela equação 29.

A rotação de mudança de marcha (Ω_{mud}) é uma estratégia do piloto para que a motocicleta aumente ou diminua sua marcha variando a rotação do motor.

$$\gamma_{i+1} = \begin{cases} \max(\gamma_i - 1, 1) & \frac{V_{i+1}}{R_{roda}} \frac{60}{2\pi} r_{tot}(\gamma_i) < \Omega_{mud,i} \\ \gamma_i & \Omega_{mud,i} \leq \frac{V_{i+1}}{R_{roda}} \frac{60}{2\pi} r_{tot}(\gamma_i) \leq \Omega_{mud,i} \\ \min(\gamma_i + 1, n_{mar}) & \frac{V_{i+1}}{R_{roda}} \frac{60}{2\pi} r_{tot}(\gamma_i) > \Omega_{mud,i} \end{cases} \quad (29)$$

Onde:

n_{mar} , número de marcha

$\Omega_{mud,i}$, rotação de mudança de marcha, [rad/s]

r_{tot} , relação total

R_{roda} , raio roda, [m]

γ_i , marcha

Terminados os cálculos computacionais para um determinado tempo, o modelo passa para o tempo/posição posterior, calculando α_i (coeficiente de abertura do acelerador) e β_i (coeficiente de aperto do manete do freio), a (aceleração), e γ_i (marcha).

4.3 Estudos sobre o modelo

Nesta seção, vamos estudar limites de fenômenos indesejáveis, o refino da malha e analisar alguns exemplos.

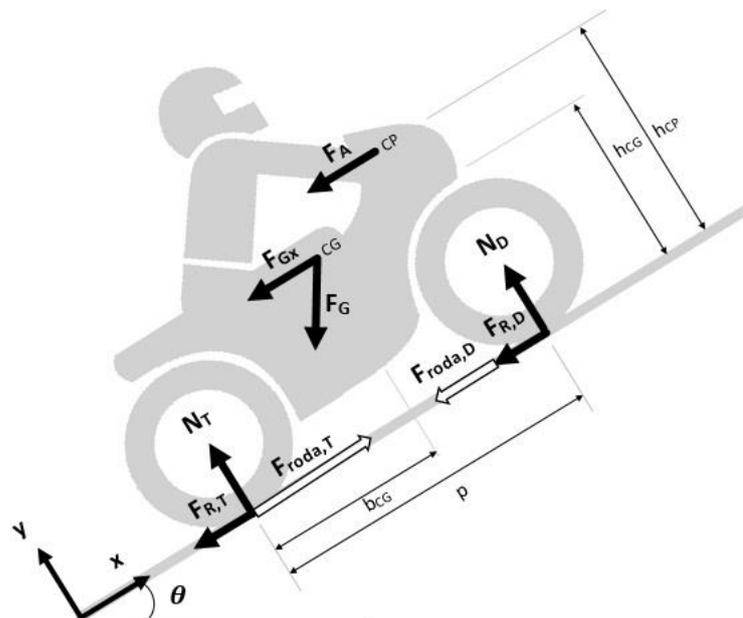
4.3.1 Perda de contato ou de aderência das rodas em pista reta

Embora o modelo ainda não leve em conta os fenômenos indesejáveis, podemos ao menos monitorar os seus limites. Para levar em conta esses fenômenos quantitativamente, teríamos que modelar a mudança do coeficiente de atrito no caso de deslizamento e a mudança do centro de gravidade no caso de perda de contato com o chão. Outro ponto importante a modelar no futuro é um controle de tração (eletrônico ou humano). Um detalhe a destacar é que o modelo, ao considerar que o coeficiente de atrito é constante e ao limitar β a um, implicitamente está considerando um sistema com ABS (*Anti-lock Breaking System*).

As equações apresentadas a seguir ampliam a modelagem da motocicleta vista nas seções anteriores. Por exemplo, nesta seção iremos considerar separadamente as duas rodas.

Na figura 21 temos as forças aplicadas na motocicleta. Para avaliar a falta de contato das rodas na pista, devemos determinar as forças normais em cada roda. Essas forças normais são indicadas na figura como (N_D) que é a normal da roda dianteira e (N_T) que é a normal da roda traseira.

Figura 21: Forças existentes na aceleração e frenagem da motocicleta



Para determinarmos uma equação para cada um desses termos foi feito um balanço de momento de forças no ponto de contato da roda traseira com o piso e, assim, ficamos com a equação 30. Essa equação relaciona as forças existentes na motocicleta com a sua geometria.

$$N_D = \frac{1}{p} [mg \cos \theta b_{CG} - mg \sin \theta h_{CG} - mah_{CG} - k_A(V - W)^2 h_{CP}] \quad (30)$$

Os dois primeiros termos da equação são a força normal aplicada na roda se a motocicleta estivesse parada (o primeiro tentando “afundar” a moto no chão”, e o segundo tentando “virá-la” para trás). O terceiro e quarto termos é a transferência de peso, que surge quando a motocicleta sofre aceleração e a resistência com a velocidade do vento, que é composto pela força de inércia e a força de resistência aerodinâmica.

Voltando para figura 21, vemos que existem forças que são aplicadas em pontos diferentes da motocicleta e que alguns desses pontos estão a uma certa distância da roda traseira. O ponto CG é o centro de gravidade onde atua a força peso e a inércia, o CP é o centro de pressão onde atua a força aerodinâmica. Essa força aerodinâmica pode apresentar sentido de aplicação diferente, por exemplo: quando temos uma velocidade do vento a favor ao movimento o sinal da força de arrasto na equação 14 torna-se negativo, caso contrário, permanece o sinal.

O centro de gravidade sem o piloto varia de 0,4 a 0,55 m, mas com o piloto varia de 0,5 a 0,7 m. Já a razão de h/p sem o piloto varia de 0,3 a 0,4 m. Neste caso, iremos utilizar os dados da tabela 6, esses dados são próximos de uma motocicleta comumente utilizada, (COS-SALTER, 2006).

Tabela 6: Valores geométricos da motocicleta

Parâmetros	Valor
p	1,4 m
h_{CG}	0,75 m
h_{CP}	0,9 m
b_{CG}	0,73 m

Com a equação 30, podemos determinar quando a motocicleta perde o contato da roda dianteira com a pista. Isto é, quando a equação apresentar $N_D = 0$ é porque a motocicleta está iniciando o *whellie*.

A equação 31 determina o valor da força normal na roda traseira, obtida pelo balanço de forças na direção perpendicular ao eixo y .

$$N_T = mg \cos \theta - N_D \quad (31)$$

Com a equação 31 podemos determinar se a motocicleta perdeu o contato da roda traseira com a pista. Quer dizer, quando a equação apresentar $N_T = 0$ significa que a motocicleta está iniciando o *stoppie*.

Em geral, a maior responsável pela diferença entre as normais dianteira e traseira é a transferência de peso, causada pela aceleração (ou desaceleração) da motocicleta junto com a força aerodinâmica, destacada na equação 32 (terceiro e quarto termos da equação 30). Outros fatores que causam diferença de carregamento são geometria da moto e a inclinação da pista.

$$N_{trans} = \frac{mah_{cg}}{p} + k_A(V - W)^2 h_{CP} \quad (32)$$

Determinadas as forças normais nas rodas, outra força importante é a força de atrito disponível. Essa força é importante, pois mantém a aderência com o solo. Depende do coeficiente de atrito (f) entre a pista e a roda, e da força normal. Em pista úmidas, molhadas, lamacentas, etc., o coeficiente de atrito é aproximadamente 0,4, já em pista seca esse coeficiente de atrito é aproximadamente 0,8 (COSSALTER, 2006). Quanto maior é o coeficiente de atrito maior é a força de atrito disponível nas rodas. As forças de atrito podem ser calculadas pelas equações 33, para roda dianteira, e equação 34, para a roda traseira.

$$F_{at,D} = f N_D \quad (33)$$

$$F_{at,T} = f N_T \quad (34)$$

Agora vamos apresentar as equações das forças tangenciais nas rodas para pista reta. Na equação 35 temos a força tangencial na roda traseira, causada pela aplicação da força motriz e do freio traseiro. Temos na equação que a força motriz na roda traseira depende do coeficiente de abertura do acelerador (α), da eficiência de transmissão (η_{trans}) e da potência máxima do motor ($P_{max,mot}$). Já a força de frenagem depende do coeficiente de aperto do manete do freio (β), do coeficiente de atrito (f), da força normal (N_T). Para roda dianteira temos a equação 36. Diferente da roda traseira, a roda dianteira não apresenta força motriz, apenas, força de frenagem.

$$F_{roda,T} = \alpha \eta_{trans} P_{max,mot} - \beta f N_T \quad (35)$$

$$F_{roda,D} = \beta f N_D \quad (36)$$

Percebe-se que a força de frenagem é máxima se o coeficiente de aperto no manete do freio for máximo, $\beta = 1$. Essas equações 35 e 36 são alteradas quando a motocicleta está na curva, isso será apresentado mais à frente.

Para avaliar a perda de aderência da roda na pista reta, utilizamos a equação 37 para a roda dianteira e a equação 38 para roda traseira. Essas equações apresentam uma relação entre a força em cada roda e a sua força de atrito disponível.

$$u_D = \frac{F_{roda,D}}{f N_D} \quad (37)$$

$$u_T = \frac{F_{roda,T}}{f N_T} \quad (38)$$

Para que a roda dianteira não perca a aderência na pista, temos que ter $u_D \leq 1$. Da mesma forma, $u_T \leq 1$ para que a roda traseira não perca a adesão.

Como o nosso modelo considera uma moto com ABS (*Anti-lock Breaking System*), no caso da frenagem a variável uso (u) não será nunca superior à unidade. Já no caso da aceleração isso pode ocorrer, já que o modelo não leva em conta o controle de tração.

Essas equações apresentadas servirão para apresentar o comportamento da motocicleta em pista reta. Para pista curva, as equações serão um pouco modificadas mais à frente, levando em conta também a força centrípeta.

4.4 Análise do grau de refinamento da malha

Na utilização do modelo, uma das verificações necessárias em uma solução computacional é estudar a influência da malha na solução. Na tabela 7 apresentamos alguns resultados que justificam a nossa escolha do número de nós da malha em nossas simulações. Vemos que a solução da posição, que aumenta a velocidade de 50 km/h para 100 km/h, converge com 500

nós, no entanto, para valores maiores que 500 nós a solução da posição não se altera. Isso é confirmando para a solução da posição com 1.000 nós.

Tabela 7: Estudo de convergência da solução da posição para que a motocicleta aumente sua velocidade de 50 km/h para 100 km/h

Nós	Solução da posição (m)
2	125,00
20	212,50
200	218,75
500	218,00
1000	218,00

4.5 Exemplos didáticos do funcionamento do modelo em pista reta

Para avaliar qualitativamente o modelo, mostraremos a dinâmica da motocicleta em pista reta para casos de aceleração e de frenagem, em pista seca e úmida, para o modelo com resistência variável (RV). Veremos como é o comportamento da motocicleta, do motor e do piloto durante um percurso.

4.5.1 Comportamento do motor e piloto na aceleração

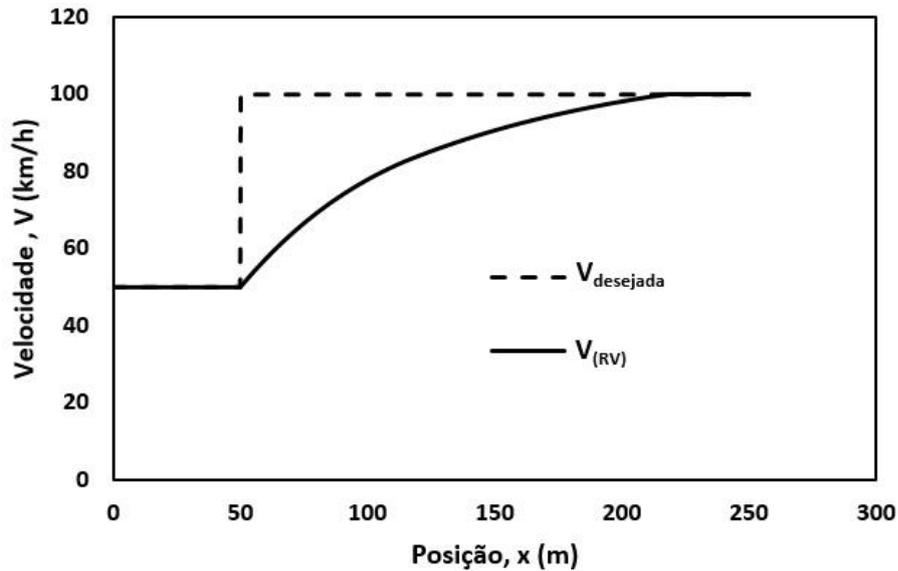
A figura 22 apresenta o percurso feito pelo piloto. No trecho 1 (50m) a motocicleta está com velocidade constante de 50 km/h, e no trecho 2 o piloto acelera a moto até 100 km/h (250m).

Figura 22: Aumento de velocidade de 50 km/h no trecho 1 para 100 km/h no trecho 2



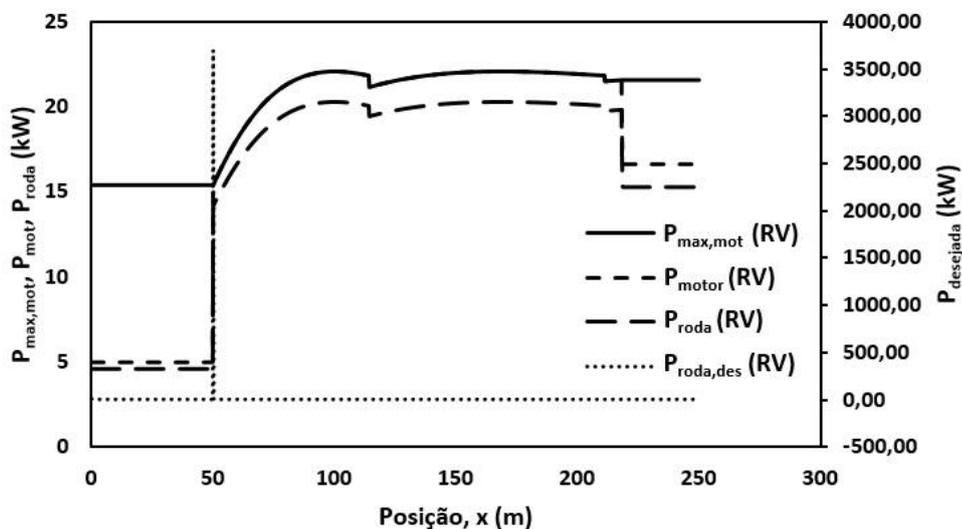
Na figura 23 temos a comparação da velocidade desejada com a velocidade real da motocicleta. Como comentado na explicação do modelo, a velocidade “real” da moto não foi a desejada, já que o motor não tem potência infinita para garantir o degrau de velocidade.

Figura 23: Comparação da velocidade desejada e velocidade real no percurso para o modelo com resistência variável (RV)



A figura 24 apresenta o comportamento do motor. Durante a aceleração, posição 50 m, vê-se que a motocicleta usa toda a potência disponível no motor, pois a curva da potência do motor que depende do coeficiente de abertura do acelerador, coincide com a curva de potência máxima. Percebe-se que a curva de potência do motor e a curva de potência da roda apresenta uma diferença devido a eficiência de transmissão.

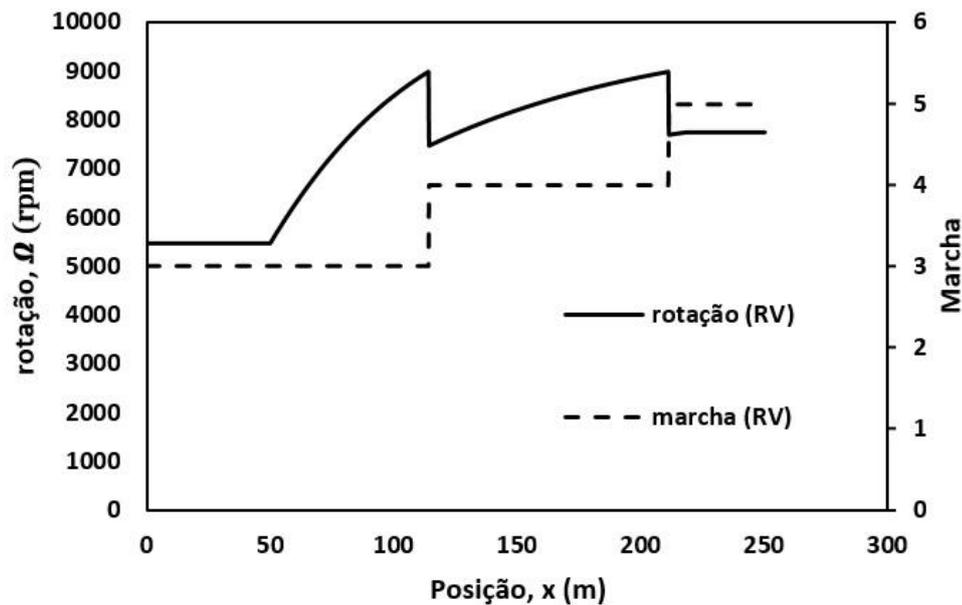
Figura 24: Comparação da potência máxima do motor com a potência na roda traseira utilizando o modelo com resistência variável (RV)



Comparando essas curvas de potência com a curva de potência desejada, vemos que o motor não tem potência suficiente para aumentar a velocidade instantaneamente (posição 50 m), pois, a potência desejada deve ser maior que 3.500 kW para alterar a velocidade de 50 km/h para 100 km/h. Aproximadamente aos 220m, quando alcança a velocidade desejada (anulando assim a resistência da inércia), o motor precisa de uma potência do motor e potência na roda menor, suficiente apenas para vencer as outras resistências (arrasto, rolagem e gravidade).

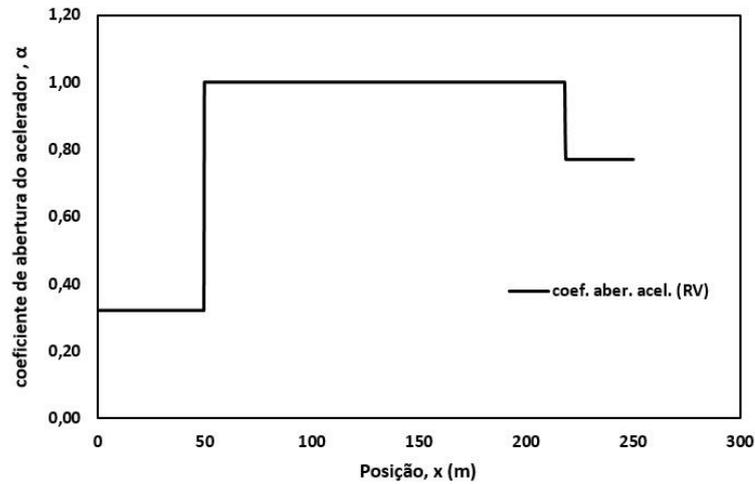
Na figura 25 vemos, o comportamento da rotação e da marcha. Nos primeiros 50 m a rotação do motor é constante e o piloto mantém a terceira marcha, pois é suficiente para vencer as resistências. Durante a aceleração, conforme a rotação vai aumentando, o piloto aumenta as marchas de forma a manter a rotação dentro do limite do motor.

Figura 25: Comportamento da rotação com a marcha no percurso para o modelo com resistência variável (RV)



Para analisarmos melhor o comportamento do piloto durante o percurso, a figura 26 apresenta a abertura da borboleta do acelerador, através do coeficiente de abertura do acelerador. Temos que nos primeiros 50 m, a borboleta fica aberta em 32%. Quando é necessário acelerar, o piloto abre a borboleta completamente (100%) utilizando toda potência disponível no motor. Na figura 24, percebemos que mesmo com o coeficiente de abertura do acelerador totalmente aberto o motor da motocicleta não apresenta potência suficiente para variar a velocidade de 50 km/h para 100 km/h na posição 50 m.

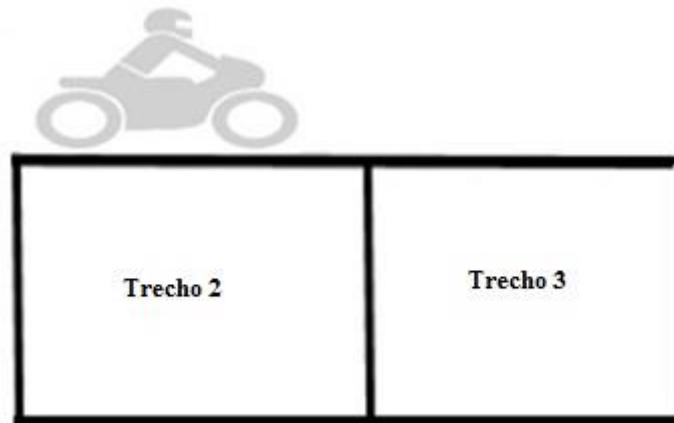
Figura 26: Abertura do acelerador pelo piloto no modelo com resistência variável (RV)



4.5.2 Comportamento da motocicleta e do piloto na frenagem

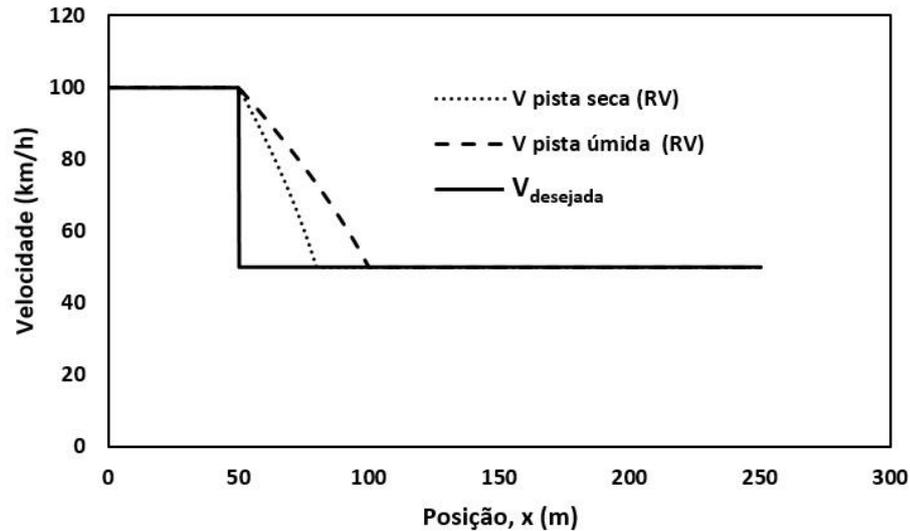
Agora vamos analisar o caso contrário. A motocicleta está a 100 km/h no trecho 2 e deve reduzir sua velocidade para 50 km/h no trecho 3 (figura 27). Estudamos esta situação com a pista seca com coeficiente de atrito (f) 0,8 e em pista úmida com coeficiente de atrito (f) 0,4.

Figura 27: Redução da velocidade de 100 km/h no trecho 2 para 50 km/h no trecho 3



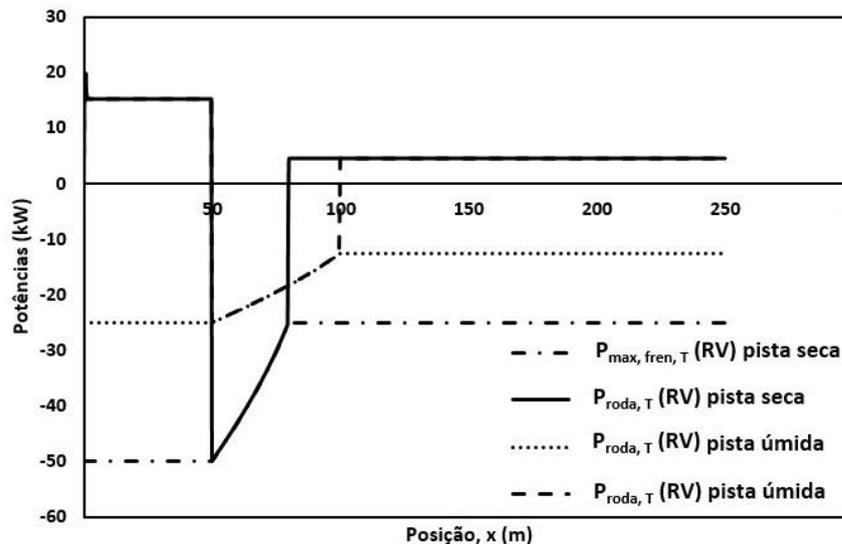
Na figura 28, analisamos a distância de frenagem. Primeiro, percebemos, como no caso anterior em que a velocidade real não é a desejada, já que o freio não tem potência infinita. Segundo, quanto maior o coeficiente de atrito, menor a distância para a redução de velocidade desejada – como esperado.

Figura 28: Comparação da posição na redução da velocidade em pista seca e úmida para o modelo com resistência variável (RV)



A figura 29 apresenta a relação da potência máxima de frenagem e da potência na roda para pista seca e pista úmida. Vê-se que, durante a desaceleração, a roda usa toda a potência disponível de atrito e, mesmo assim, não consegue atingir a velocidade desejada. Além disso, a potência de frenagem em pista seca é maior que a potência de frenagem em pista úmida, dessa forma, mostrando a importância do coeficiente de atrito na frenagem e, conseqüentemente, uma distância de frenagem em pista seca menor.

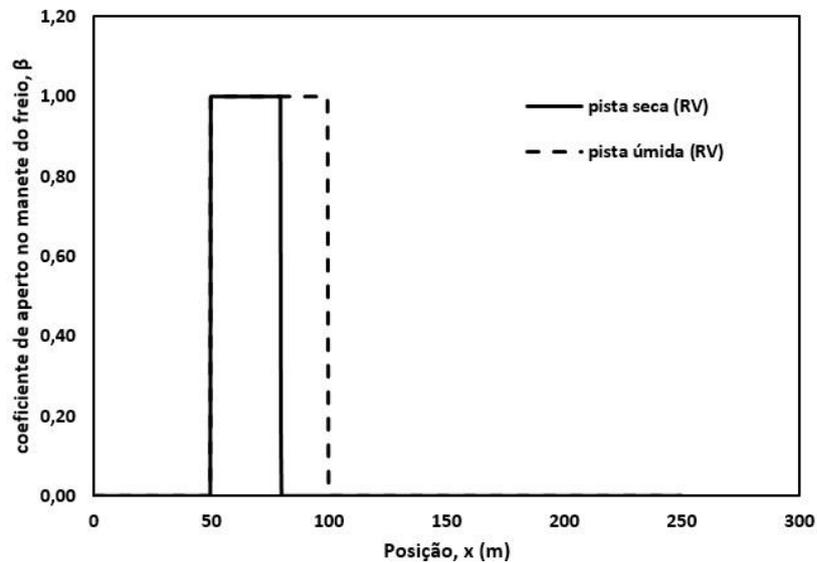
Figura 29: Comparação da potência da roda e potência máxima de frenagem em pista seca e úmida no modelo com resistência variável (RV)



Na figura 30, temos o acionamento do freio. Durante a frenagem, tanto em pista seca quanto em pista úmida, o piloto aperta o manete do freio totalmente. Por isso, durante a frenagem a

potência na roda é a mesma que a potência máxima de frenagem e temos toda a força de atrito sendo utilizada.

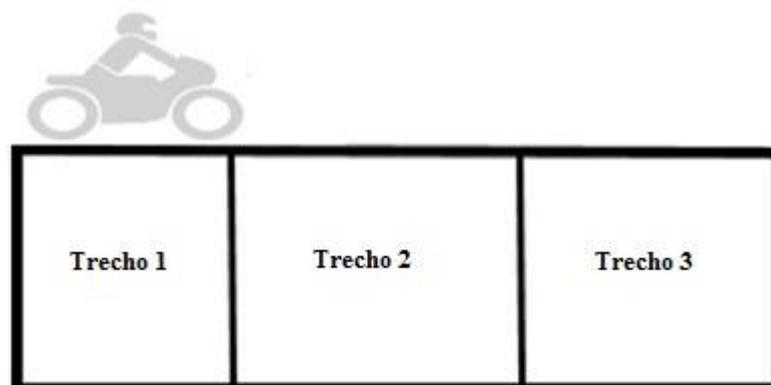
Figura 30: Comparação do coeficiente de aperto no manete do freio para pista seca e úmida no modelo com resistência variável (RV)



4.5.3 Influência da geometria no comportamento das forças normais

No próximo exemplo, vamos analisar o comportamento da motocicleta no percurso apresentado pela figura 31. A motocicleta está a 50 km/h no trecho 1, acelera a 100 km/h no trecho 2, e reduz novamente para 50 km/h no trecho 3. Este percurso é uma combinação dos percurso de aceleração e frenagem em pista seca já visto.

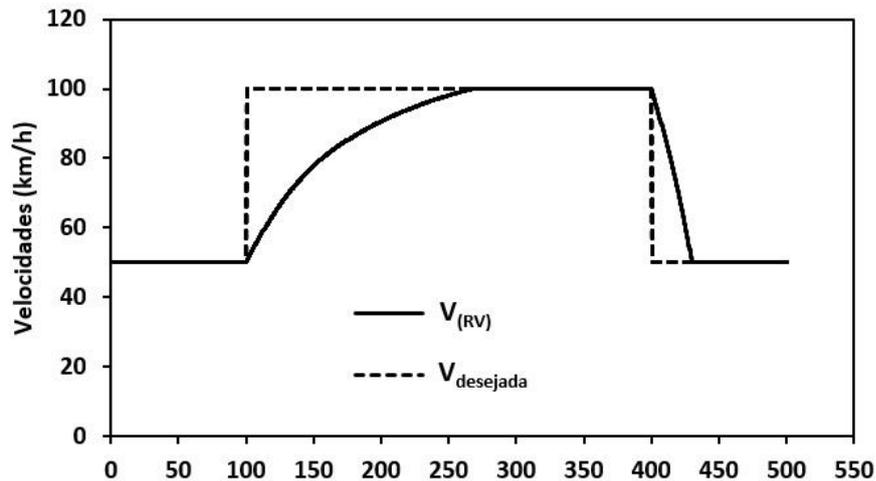
Figura 31: Aceleração e frenagem em pista seca



A figura 32 apresenta esse percurso para o modelo com resistência variável. Temos a motocicleta com velocidade de cruzeiro de 50 km/h e na posição de 50 m deve aumentar sua veloci-

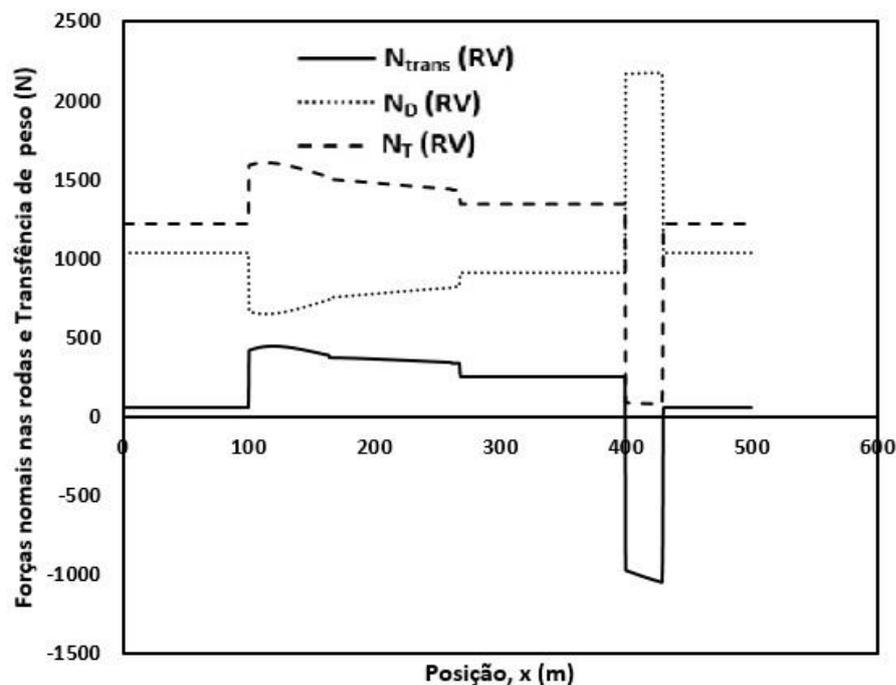
dade para 100 km/h, depois, deve manter essa velocidade por 300 m e, na posição 400 m deve reduzir a velocidade para 50 km/h.

Figura 32: Comparação da velocidade desejada com a velocidade real em função da posição no percurso de aceleração e frenagem no modelo com resistência variável (RV)



Analizamos agora o comportamento das forças normais aplicadas nos pneus com a respectiva transferência de peso devido a aceleração e força aerodinâmica. A figura 33 mostra a ação da força de transferência de peso calculada pela equação 31, e as forças normais da roda dianteira e traseira calculadas pelas equações 29 e 30.

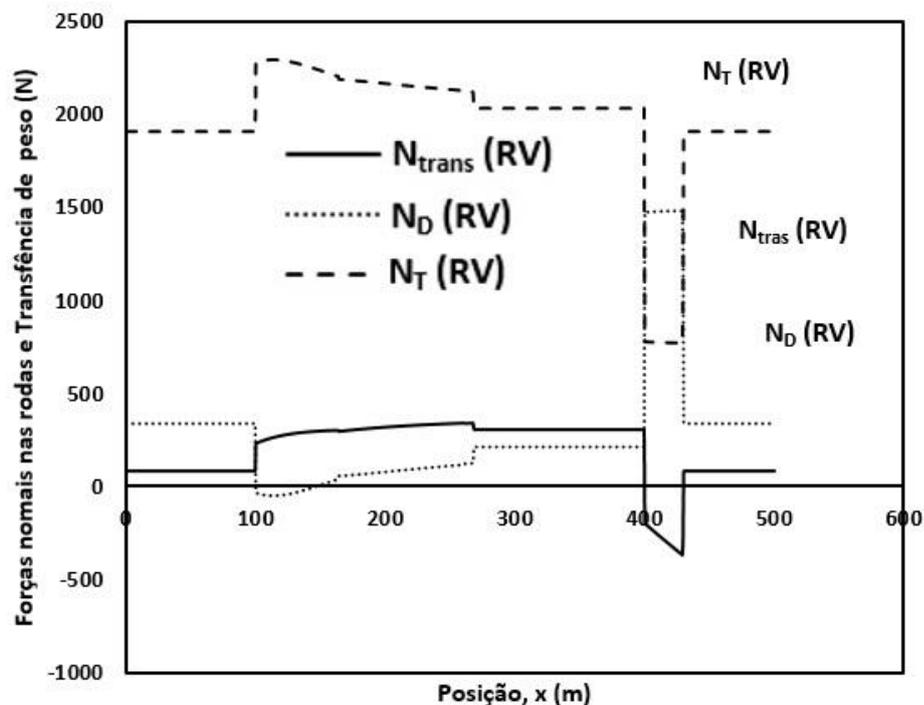
Figura 33: Comportamento da normal em relação a transferência de peso para o modelo com resistência variável (RV)



Inicialmente, com o percurso a velocidade constante, temos a transferência de peso e valores das normais constantes. Já na aceleração, a normal dianteira diminui e na frenagem a normal dianteira aumenta. Como exemplo apresentado na figura 33 em nenhum momento as normais se anulam, não há a ocorrência de *stoppie* ou *wheelie*.

Sabemos que a geometria da motocicleta tem influência direta no carregamento das forças normais, como visto na equação 30. Agora, iremos avaliar o comportamento das normais em uma motocicleta com alteração no centro de gravidade ($b_{CG}=0,3$) com o piloto mais próximo da roda traseira. Portanto, a figura 34 mostra a ocorrência do *wheelie* na aceleração.

Figura 34: Comportamento das normais em relação a transferência de peso com valor de $b_{CG} = 0,3$ m no modelo com resistência variável (RV)

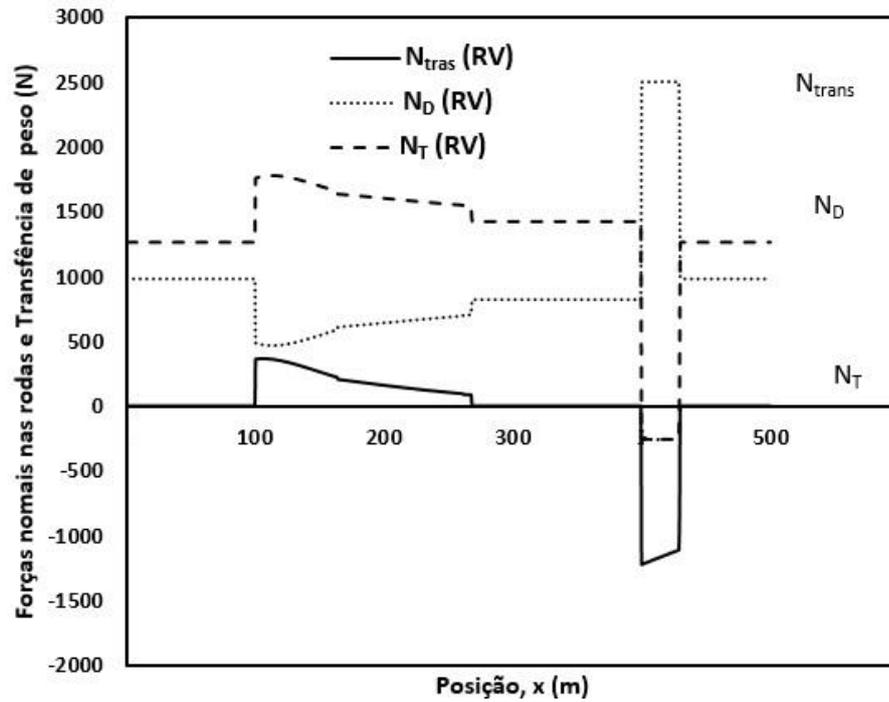


Em outro exemplo, vamos analisar a alteração no centro de gravidade ($h_{CG} = 1$ m) do conjunto motocicleta/piloto. Essa mudança poderia ocorrer tanto por uma modificação no projeto da motocicleta ou com o piloto em pé sobre as pedaleiras.

Na figura 35, observamos a ocorrência do *stoppie* no início da frenagem (400m). Os riscos de acontecer essa manobra nas motos mais altas são maiores em comparação às motos mais baixas, pois, comparando as figura 33 com a figura 35, aproximadamente, a mesma força de transferência de peso faz com que a motocicleta perca o contato da roda traseira com o solo.

Portanto, com a utilização do modelo com resistência variável (RV), vimos o comportamento do motor e do piloto na aceleração e frenagem. Além disso, vimos a influência da geometria na ocorrência das manobras de *wheelie* e *stoppie*.

Figura 35: Comportamento das normais em relação a transferência de peso com valor de $h_{CG} = 1$ m no modelo com resistência variável (RV)



5 DINÂMICA DA MOTOCICLETA NAS FRENAGENS E CURVAS

Neste capítulo, é apresentado um estudo específico sobre o comportamento dinâmico da motocicleta nas frenagens e curvas. Este estudo leva em conta a força de frenagem nas duas rodas, bem como possibilidade de usar técnicas distintas de frenagem (distribuição entre o freio dianteiro e traseiro).

O estudo apresentado neste capítulo, foi submetido e aceito em forma de artigo na Revista Brasileira de Ensino de Física (2016) tem como objetivo de engenharia apresentar uma metodologia para o posicionamento de placas de redução de velocidade nas entradas das curvas.

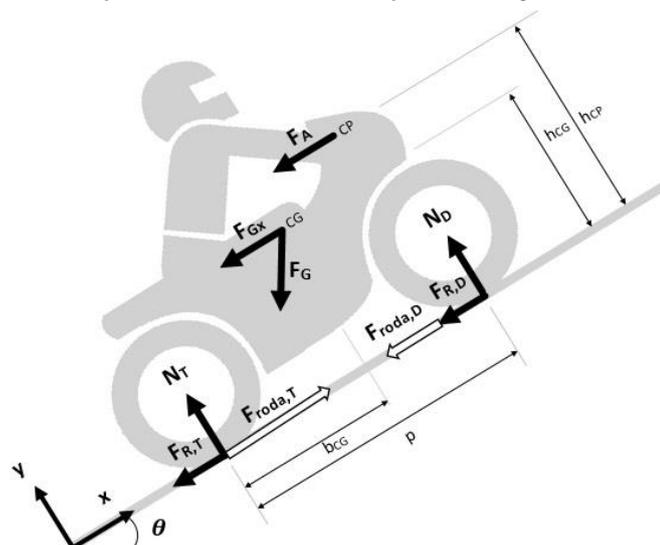
5.1 Dinâmica da frenagem em motocicleta para entradas em curvas

Nesta seção, primeiramente são apresentadas as equações da dinâmica das motocicletas e, em seguida, como foram arranjadas para o presente estudo sobre frenagens e curvas. Além disso, faz uma comparação dos resultados dos três modelos físicos simplificados.

5.1.1 Fundamentos da dinâmica da motocicleta na reta

Durante o movimento, a motocicleta sofre a ação de variadas forças, como apresentadas na figura 17. Algumas dessas forças provocam o movimento para frente, enquanto outras tendem a resistir ao movimento.

Figura 17: Forças existentes na aceleração e frenagem da motocicleta



A força aplicada na roda traseira é apresentada pela equação 39. O primeiro termo do lado direito é a reação do piso à força vinda do motor, a qual depende da potência máxima do motor em uma determinada rotação (P), da velocidade da motocicleta (V) e do coeficiente de abertura do acelerador (α). O segundo termo é a força de frenagem, que depende do coeficiente de utilização do freio (μ_T) e da força normal (N_T). Dependendo da atuação do piloto no acelerador (α) ou no freio (μ_T), ambos os termos à direita podem ser nulos ou não nulos.

$$F_{roda,T} = \alpha \frac{P}{V} - \mu_T N_T \quad (39)$$

A potência máxima do motor (P) é uma curva que varia com a rotação, mas essa informação não será importante especificamente neste trabalho, já que ou estudamos a motocicleta em curva com velocidade constante ($P = \text{cte}$) ou durante a frenagem ($\alpha = 0$). No entanto, destacamos que as equações aqui apresentadas são gerais, podendo ser usadas em movimentos mais complexos. O coeficiente de utilização do acelerador (α) pode variar de 0 a 1 (condição em que toda a potência do motor em uma determinada rotação está sendo usada). O coeficiente de utilização do freio (μ_T , traseiro; ou μ_D , dianteiro) varia de 0 a f , onde f é o coeficiente de atrito entre o pneu e o piso.

De forma similar, a equação 40 apresenta a força na roda dianteira. Como as motocicletas, com raríssimas exceções, não têm tração dianteira, usamos apenas o termo de frenagem.

$$F_{roda,D} = -\mu_D N_D \quad (40)$$

Temos que as equações 39 e 40 são equivalentes as equações 35 e 36 em relação ao termo do coeficiente de atrito (f) e o coeficiente de utilização do freio (μ). Esses dois termos são relacionados pela equação 41. Como o coeficiente de aperto do manete do freio varia de 0 a 1, o coeficiente de utilização do freio apresenta valor nulo quando $\beta = 0$, apresenta valor igual ao valor do coeficiente de atrito quando $\beta = 1$ e apresenta uma proporção do coeficiente de atrito quando temos $0 < \beta < 1$.

$$\mu = \beta f \quad (41)$$

As outras forças que atuam sobre a motocicleta tendem a resistir ao movimento, como aquelas apresentadas na equação 42, na qual F_A é a resistência aerodinâmica, F_R é a resistência à deformação do pneu (resistência de rolagem), e F_{Gx} é a componente da força da gravidade na direção do movimento. Em alguns casos particulares essas forças podem assumir valores negativos (i.e., auxiliam o movimento), como quando o vento sopra por trás ou nas descidas.

$$F_{res} = -F_A - F_R - F_{Gx} \quad (42)$$

A equação 42 pode ser detalhada pela equação 43, expressando cada força a partir de seus parâmetros.

$$F_{res} = -k_A(V - W)^2 - C_R mg \cos \theta - mg \sin \theta \quad (43)$$

O primeiro termo do lado direito da equação 43 é a força aerodinâmica (F_A), que depende da velocidade relativa entre a motocicleta (V) e o vento (W), e do fator de arrasto (k_A), que, por sua vez, é função da forma do conjunto piloto/motocicleta e da massa específica do ar. O fator de arrasto k_A varia com a velocidade e com a posição do piloto, mas aqui iremos considerá-lo constante. O segundo termo representa a resistência de rolagem dos pneus (F_R), que é função do coeficiente de rolagem (C_R), do peso da motocicleta (mg) e do ângulo da pista (θ). Em geral, o coeficiente de rolagem varia com a velocidade da motocicleta e com a construção e pressão do pneu, mas neste trabalho consideramos C_R constante. Finalmente, há a influência do peso (F_{Gx}) no movimento, como indicado pelos últimos termos nas equações 42 e 43.

Os pontos de aplicação das forças resistivas são distintos. A força de arrasto (F_A) é aplicada no centro de pressão (CP), a força da gravidade (F_G) é aplicada no centro de gravidade (CG), e a força de rolagem dos pneus (F_R) é aplicada na interface entre o pneu e a pista, como indicado na figura 17. O fato das forças terem pontos diferentes de atuação será importante posteriormente no cálculo dos momentos. Veremos adiante que a inércia da motocicleta (ma), agindo no centro de gravidade combinado piloto/motocicleta, também influencia o movimento. Por exemplo, quanto maior a massa do conjunto, menor será a aceleração para uma mesma força na roda.

Outras duas forças que existem na motocicleta durante a aceleração ou frenagem são as forças normais nas rodas. Essas forças não influenciam diretamente no movimento para frente, mas são importantes no cálculo da aderência. A equação 44 é a normal da roda dianteira, e a equação 45 apresenta a normal traseira. As duas equações são obtidas fazendo um ba-

lanço de forças em y e um balanço de momentos em relação ao ponto de contato da roda traseira com o piso.

$$N_D = \frac{F_G b_{CG} \cos \theta - F_A h_{CP} - mah_{CG} - F_G h_{CG} \sin \theta}{p} \quad (44)$$

$$N_T = mg \cos \theta - N_D \quad (45)$$

Interessante observar nas equações 44 e 45 que as normais não dependem apenas do projeto da motocicleta (massa e geometria) e da pista (inclinação), mas também do próprio movimento da motocicleta. Isto é, quando há uma aceleração (a) positiva, por exemplo, há uma transferência de peso para a roda traseira. Já na frenagem, é a roda dianteira que tem a normal aumentada. Outra característica do movimento que pode interferir na normal é a velocidade da moto, que influencia a força aerodinâmica (aplicada no centro de pressão).

A equação 46 é a Segunda Lei de Newton aplicada ao movimento da motocicleta na direção x . No caso sem a utilização dos freios ($\mu_D = \mu_T = 0$), se as forças resistivas forem menores (em módulo) que a força na roda traseira, a moto vai acelerar. Se as forças resistivas forem maiores que a força na roda traseira, a moto irá diminuir a sua velocidade. No caso geral, o balanço (positivo ou negativo) entre as forças na direção x depende se o piloto está acelerando ($\alpha > 0$), se está freando ($\mu_D > 0$ e/ou $\mu_T > 0$), se há declive na pista ($\theta \neq 0$), e se há velocidade relativa do vento ($V - W \neq 0$), bem como dos parâmetros do conjunto piloto/motocicleta, dados por k_A , C_R e m .

$$ma = F_{roda,D} + F_{roda,T} + F_{res} \quad (46)$$

Sabemos que a aceleração é a derivada da velocidade com o tempo, resultando então na equação 47 - uma equação diferencial em V , que neste trabalho é resolvida pelo método das diferenças finitas.

$$ma = m \frac{dV}{dt} = \alpha \frac{P}{V} - \mu_T N_T - \mu_D N_D - k_A (V - W)^2 - C_R mg \cos \theta - mg \sin \theta \quad (47)$$

A solução computacional da equação diferencial 47, ao invés de uma solução analítica, é justificada para o caso geral porque P , N_D e N_T são funções não lineares da velocidade. No caso particular de P , a solução é mais complicada ainda, já que a relação entre P e V depende tam-

bém da marcha escolhida pelo piloto, o que em geral depende da história da velocidade, não apenas do seu valor momentâneo.

A equação 47 é a equação 14, que representa o modelo geral, mas com os termos dos freios dianteiro ($\mu_D N_D$) e traseiro separados ($\mu_T N_T$), ou seja, a equação 47, está considerando a aplicação da força de frenagem nos dois pneus.

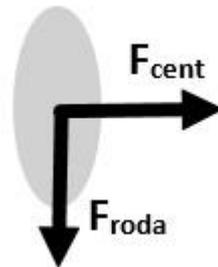
No caso de curva, a força centrípeta não influencia diretamente o movimento para frente, mas, como ela usa parcialmente o atrito disponível, acaba limitando indiretamente a força que pode ser aplicada na roda tanto para aceleração quanto para frenagem. A força centrípeta aplicada sobre a moto é apresentada pela equação 48. Mais para frente iremos dividir essa força centrípeta entre as duas rodas.

$$F_{cent} = \frac{mV^2}{R} \quad (48)$$

5.1.2 Perda de aderência das rodas dianteira e traseira

Considerando o movimento mais geral, *i.e.*, durante uma curva, a força de atrito máxima entre um dos pneus e a pista (dada pelo coeficiente de atrito multiplicado pela normal, fN_i) não pode ser superada pela força resultante composta pela força longitudinal na roda (equações 39 ou 40) e pela força centrípeta (equação 48), conforme mostrado na figura 36.

Figura 36: Vista superior da área de contato, no plano xz entre o pneu traseiro deformado da motocicleta e a estrada, apresentando a força centrípeta e a força aplicada roda



O limite de uso do atrito é representado pela equação 49, onde o índice i é usado para indicar que a equação vale tanto para a dianteira ($i=D$) quanto para traseira ($i=T$).

$$F_{roda,i}^2 + F_{cent,i}^2 \leq (fN_i)^2 \quad (49)$$

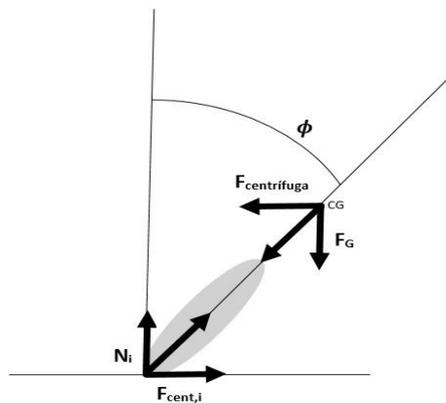
O coeficiente de atrito (f) depende do material da pista, da construção e da calibragem do pneu, bem como das condições da pista (e.g., pista seca, pista molhada, pista suja, lama). Por exemplo, em pista seca o valor típico do coeficiente é 0,8, e, em pista úmida, 0,4. (COSSALTER, 2006)

Caso a condição da equação 49 não seja satisfeita, ocorrem fenômenos indesejáveis. Nas curvas, a moto perde a aderência e sai pela tangente. Nas retas, o pneu desliza, provocando uma diminuição no coeficiente de atrito (que passa de atrito estático para dinâmico) e diminuindo drasticamente a estabilidade da motocicleta. (COSSALTER, 2006) e (COCCO, 2013)

Ainda analisando a motocicleta na curva, mas agora a observando frontalmente (figura 37), vemos as forças que atuam no plano yz . Para que haja o equilíbrio entre a normal e o peso em y , e entre a força centrípeta (atrito) e a centrífuga (inércia radial), a moto precisa permanecer em um ângulo de rolagem ϕ . Na prática, esse valor é limitado pela geometria da pedaleira, em geral com valor máximo de 50° . (COSSALTER, 2006)

A razão pela qual os pilotos profissionais se inclinam em direção da pista durante as curvas é para conseguir baixar o centro de gravidade (do conjunto piloto/motocicleta) sem que a pedaleira toque no chão. Neste trabalho, consideramos constante o centro de gravidade do conjunto.

Figura 37: Vista frontal da motocicleta, no plano yz , apresentando as forças aplicadas no pneu e no centro de gravidade



5.1.3 Velocidade máxima na curva

A velocidade máxima que a motocicleta pode permanecer em uma curva, em velocidade constante, sem perder a aderência, pode ser obtida substituindo a equação 48 na equação 49. A distribuição da força centrípeta entre as duas rodas é feita a partir do balanço dos momentos dessas duas forças radiais em relação a um eixo na direção z que passa pelo centro de gravidade. Explicitando a velocidade, resultam as equações 50 para a roda dianteira e 51 para a traseira:

$$V_D^2 \leq \left(\frac{p}{b_{CG}} \frac{R}{m} \right) \sqrt{(fN_D)^2 - F_{roda,D}^2} \quad (50)$$

$$V_T^2 \leq \left(\frac{p - b_{CG}}{b_{CG}} \frac{R}{m} \right) \sqrt{(fN_T)^2 - F_{roda,T}^2} \quad (51)$$

Vemos que tanto o coeficiente de atrito (f) quanto o raio da curva (R) são importantes para a velocidade máxima de curva. Quanto menor o atrito e menor o raio de curvatura, menor será a velocidade máxima possível. Importante notar que a força na roda depende do arrasto aerodinâmico, que por sua vez depende da velocidade da motocicleta. Logo, no caso geral, as equações 50 e 51 necessitam de uma solução numérica para a obtenção da velocidade máxima de curva.

A diferença entre a roda dianteira na equação 50 e a traseira na equação 51 é causada pela utilização do acelerador e dos manetes de freio (casos em que $F_{roda,D} \neq F_{roda,T}$) e da distribuição da força centrípeta entre as duas rodas, que depende da posição do centro de gravidade. Neste trabalho, escolhemos como velocidade máxima para que a motocicleta consiga realizar a curva o menor valor obtido entre as equações 50 e 51.

No caso de aceleração nula, vemos pela equação 46 que a força nas duas rodas deve ser igual à força resistiva, calculada pela equação 43. Portanto, podemos ver que quanto maiores forem as resistências, maior terá que ser a força na roda e, conseqüente, menor a velocidade com que a moto poderá fazer a curva. É importante notar que mesmo com velocidade constante, o piloto em geral usa o acelerador para que a tração equilibre as resistências, ou então usa o freio, no caso de curva em descida.

Na seção de estudos de casos, nós vamos usar três modelos de curva baseados nas equações 48 e 49. O primeiro é o modelo de curva sem resistência (CSR) em que considera-

mos $k_A = C_R = \theta = 0$. Nesse caso, pelas equações 43 e 446, vemos que $F_{res} = F_{roda} = 0$. Então, as equações 50 e 51 se transformam na clássica equação 52. (COSSALTER, 2006)

$$V_{D,T}^2 \leq fRg \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu_D = \mu_T = 0 \\ F_{res} = 0 \end{cases} \quad (52)$$

No segundo modelo de curva (CRC) consideramos que a resistência aerodinâmica é constante, *i.e.*, usamos uma velocidade de referência para o cálculo de F_{res} na equação 43, o que permite calcular V explicitamente nas equações 50 e 51, já que agora F_{roda} não varia com a velocidade.

O terceiro modelo de curva (CRV), com resistência variável, usa a velocidade real da motocicleta para o cálculo de F_{res} , obrigando que as equações 50 e 51 sejam resolvidas iterativamente, uma vez que $F_{roda} (= F_{res})$ é função da velocidade por causa do arrasto aerodinâmico.

5.1.4. Desaceleração e distância de frenagem

A desaceleração da motocicleta é calculada pela equação 47, que é a equação 46 alimentada pelas equações 39, 40 e 43. Durante a frenagem, assim como no caso da curva em velocidade constante, consideramos três modelos distintos: sem resistência, resistência constante e resistência variável. Para o modelo de frenagem sem resistência (FSR) e com resistência constante (FRC), consideramos que as forças resistivas (arrasto aerodinâmico em particular) não são função da velocidade, e, portanto, a equação 46 se transforma em uma equação algébrica simples para o cálculo da aceleração. No caso do modelo de frenagem com resistência variável (FRV), a variação da velocidade durante a frenagem implica em uma variação da resistência aerodinâmica, fazendo com que a equação 47 seja uma equação diferencial (aqui resolvida por diferenças finitas).

Considerando o caso específico em que o acelerador não é usado ($\alpha = 0$), que os dois freios são usados com o mesmo coeficiente ($\mu_D = \mu_T$) e que a resistência aerodinâmica é constante (*i.e.*, usando uma velocidade de referência), a equação 47 se transforma na equação 53, que será chamada de modelo de frenagem com resistência constante (FRC).

$$a = -\mu g \cos \theta + \frac{F_{res}}{m} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu = \mu_D = \mu_T \\ F_{res} = cte \end{cases} \quad (53)$$

Simplificando mais ainda, desprezando agora as resistências, obtemos a equação 54 (modelo de frenagem sem resistência, FSR).

$$a = -\mu g \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu_D = \mu_T \\ F_{res} = 0 \end{cases} \quad (54)$$

Para os casos FRC, equação 53, e FSR, equação 54, uma vez determinada a desaceleração (a), a distância de frenagem pode ser determinada pela equação 55, classicamente conhecida como Equação de Torricelli.

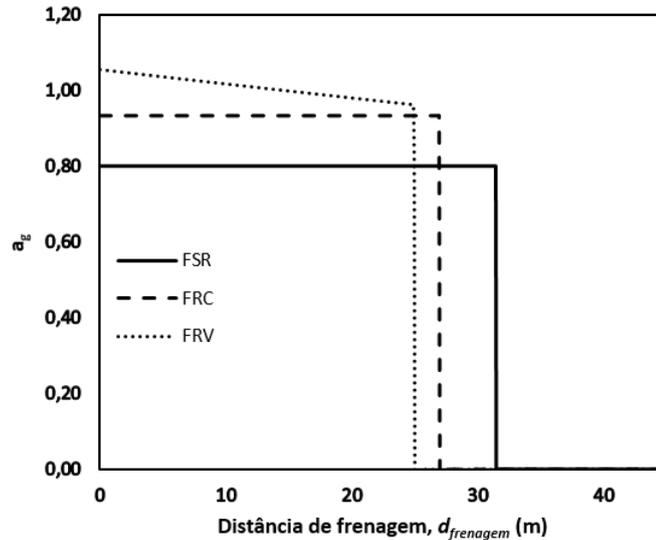
$$d_{frenagem} = \frac{v_{ini}^2 - v_{fin}^2}{-2a} \quad a = cte \quad (55)$$

No caso do modelo FRV, em que o valor da aceleração não é constante, a distância de frenagem é calculada resolvendo a equação 47 por diferenças finitas.

Um exemplo de frenagem pode ser visto na figura 38, para o caso em que a motocicleta está com velocidade de cruzeiro de 100 km/h e reduz para 60 km/h, sendo a força de frenagem utilizada ao máximo ($\mu_D = \mu_T = f = 0,8$).

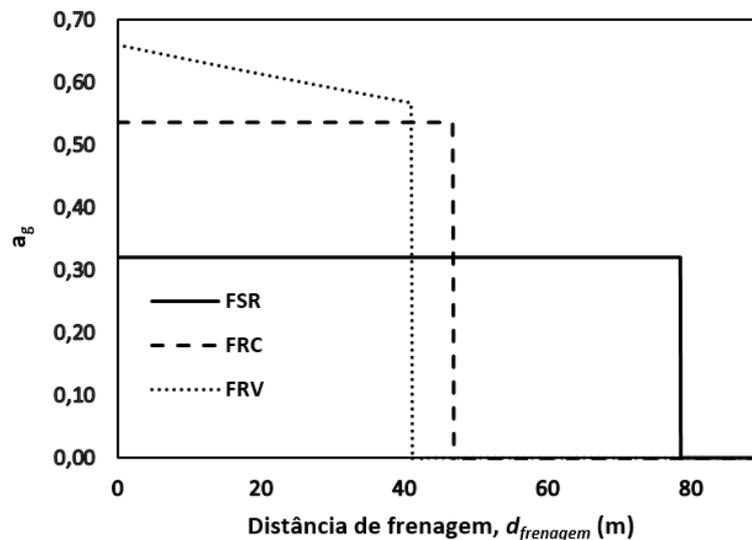
Temos que, para o caso sem resistência (FSR), a desaceleração é constante com valor de 0,8g, até tornar-se nula ao atingir os desejados 60 km/h, quando então o piloto desativa o freio. Já para o caso com resistência constante (FRC), a desaceleração é de 0,93g. Para o caso com resistência variável (FRV), o valor da desaceleração varia de 1,06g a 0,96g, já que quando a velocidade diminui, diminui também o arrasto aerodinâmico que auxilia a desaceleração.

Figura 38: Desaceleração na frenagem em função da distância. $\mu_D = \mu_T = f = 0,8$. Redução de velocidade de 100 km/h para 60 km/h. São considerados o modelo sem resistência (FSR), resistência constante (FRC) e resistência variável (FRV)



Outro exemplo de frenagem pode ser visto na figura 39, para o caso de redução de velocidade com coeficiente de utilização do freio de 0,4 ($\mu_D = \mu_T = f = 0,4$; o que fisicamente é análogo ao uso de 50% do freio com coeficiente de atrito de 0,8). Vemos que, para o caso sem resistência (FSR), a desaceleração é constante com valor de 0,32g. Já para o caso com resistência constante (FRC), a desaceleração é 0,54g, e para o caso com resistência variável (FRV) a desaceleração fica na faixa 0,66g a 0,57g.

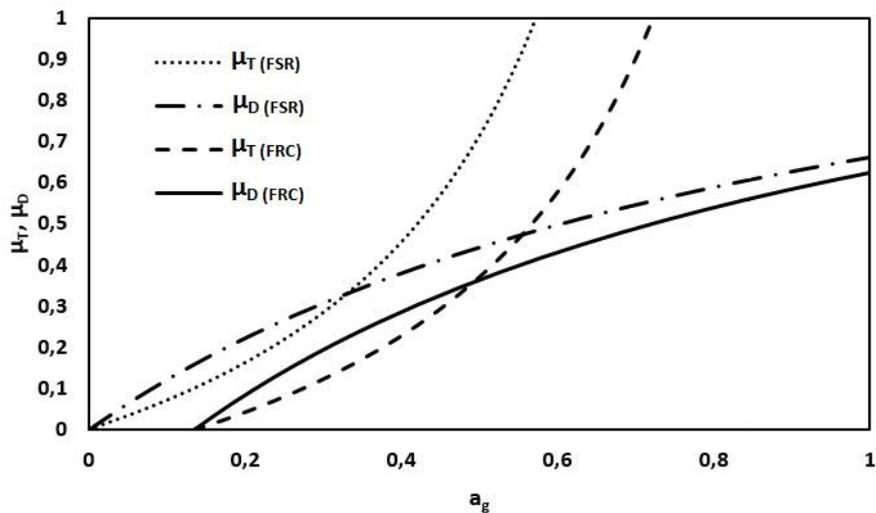
Figura 39: Desaceleração na frenagem em função da distância. $\mu_D = \mu_T = f = 0,4$. Redução de velocidade de 100 km/h para 60 km/h. São considerados o modelo sem resistência (FSR), resistência constante (FRC) e resistência variável (FRV)



Observa-se então o esperado, que uma menor utilização do freio (por desejo do piloto ou por uma diminuição no coeficiente de atrito entre o pneu e a pista) provoca uma maior distância necessária para a frenagem.

Outra forma de verificar a influência das simplificações nos modelos é fixando a proporção da força do freio dianteiro em relação à força de frenagem total. A figura 40 mostra os resultados para o caso em que o motociclista escolhe μ_D e μ_T de forma que 70% da força de frenagem sempre seja proporcionada pela roda dianteira. Por exemplo, se o piloto desejar uma desaceleração de 0,4g, pelo modelo FRC ele terá que usar $\mu_T = 0,22$ e $\mu_D = 0,29$. Já pelo modelo FSR, para a mesma frenagem ($a_g = 0,4g$) esses valores seriam $\mu_T = 0,45$ e $\mu_D = 0,38$.

Figura 40: Uso dos freios dianteiro e traseiro em função da desaceleração desejada. Casos sem resistência (FSR) e resistência constante (FRC) utilizando 70% da força do freio dianteiro.



Assim, podemos concluir que, para um mesmo par de coeficientes de utilização do freio (μ_T e μ_D), o modelo com resistência constante (FRC) apresenta valores de frenagem maiores que o modelo sem resistência (FSR). Isso acontece porque as forças resistivas na equação (43) impõem uma desaceleração ao movimento da motocicleta. Neste caso, a desaceleração adicional causada pelas resistências tem valor aproximado de 0,16g, sendo esse o motivo das curvas do modelo com resistência constante (FRC) não partirem da origem na figura 40.

Além da distância de frenagem, que é a distância após o início do acionamento do freio, existe também uma distância percorrida entre o momento em que o piloto observa a placa e o momento em que ele atua sobre o freio da motocicleta. Essa distância é chamada de distância de reação do piloto, e é calculada pela equação 56, levando em conta o tempo de

reação δt e a velocidade de cruzeiro (V_{cruz}) em m/s. O CONTRAN (2007) considera nos seus cálculos $\delta t=2,5$ segundos.

$$d_{reação} = \delta t V_{cruz} \quad (56)$$

5.1.5 Limite de *stoppie* e técnica de frenagem

Durante a frenagem, um dos limites para que o piloto fique em segurança é o limite de *stoppie*, que é a perda de contato da roda traseira com o chão. Esse limite pode ser determinado calculando o momento em que a normal traseira fica nula na equação 45. Se desconsiderarmos as resistências e considerarmos a mesma utilização dos dois freios, esse limite é expresso pela equação 57, na qual vemos que o valor máximo do coeficiente de utilização do freio para que não ocorra o *stoppie* é maior no caso de motos com menor altura do centro de gravidade (h_{CG}) ou com centro de gravidade mais deslocado para a traseira (menor valor de b_G , figura 17) como já visto no Capítulo 4.

$$\mu = \frac{p - b_{CG}}{h_{CG}} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu_D = \mu_T \\ F_{res} = 0 \end{cases} \quad (57)$$

Uma forma alternativa de representar a atuação dos freios é a partir da proporção da força do freio dianteiro (P_D). Por exemplo, considerando um coeficiente de atrito unitário ($f = 1$), digamos que uma motocicleta apresenta 1.000 N de força de atrito disponível na roda dianteira (fN_D) e 600 N na roda traseira (fN_T). No entanto, durante a frenagem, são utilizados 800 N de força de frenagem na roda dianteira e 420 N na traseira. O coeficiente de utilização do freio (μ) é calculado pela razão da força utilizada e da força disponível na roda, i.e., $\mu_D = 0,8$ ($=800/1000$) e $\mu_T = 0,7$ ($=420/600$). Já a proporção do freio dianteiro (P_D) é calculada pela razão da força utilizada na roda dianteira (800N) e a força total utilizada (800+420=1.220N), resultando em $P_D = 0,66$. A atuação dos freios pode então ser caracterizada ou pelos dois μ 's ou por um dos dois μ 's juntamente com o P_D .

Manipulando algebricamente as equações anteriores, os coeficientes de utilização do freio (dianteiro e traseiro, μ_D e μ_T) se relacionam com a proporção da força do freio dianteiro (P_D) e com a aceleração (a) pelas equações 58 e 59, respectivamente:

$$P_D = \frac{\mu_D}{\mu_D + \mu_T \left(\frac{C_1 - C_2}{\frac{M_{res}}{mg \cos \theta} - C_1} - 1 \right)} \quad (58)$$

$$a_g = -\frac{a}{g} = \mu_T \cos \theta + \left(\frac{\mu_D - \mu_T}{C_2 - C_1} \right) \left(\frac{M_{res}}{mg} - C_1 \cos \theta \right) + \frac{F_{res}}{mg} \quad (59)$$

Essas equações dependem do termo resistivo M_{res} , dado pela equação 60:

$$M_{res} = mg h_{CG} \sin \theta + k_A h_{cp} (V - W)^2 \quad (60)$$

Nas equações 61 e 62 aparecem ainda dois parâmetros, C_1 e C_2 , que são funções da geometria da motocicleta e da utilização dos freios.

$$C_1 = \frac{\mu_T h_{CG} + b_{CG}}{p - b_{CG}} \quad (61)$$

$$C_2 = \frac{\mu_D h_{CG}}{p - b_{CG}} \quad (62)$$

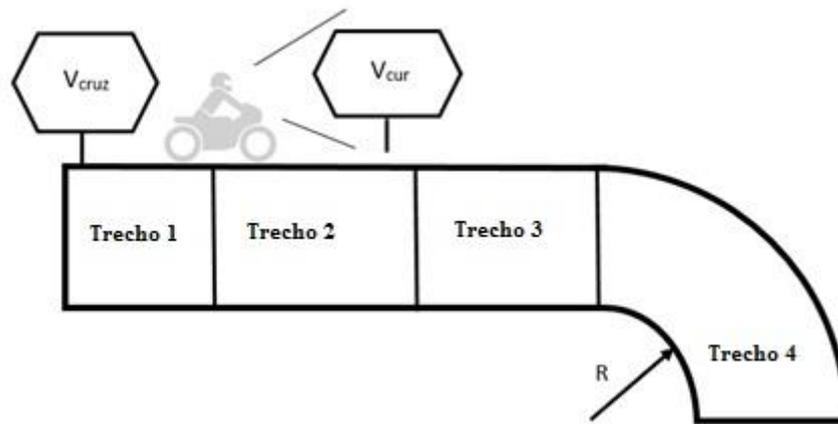
No caso $\mu_D = \mu_T$, considerando a força de resistência constante, a equação 59 torna-se a equação 53. No caso de resistência nula, torna-se a equação 54. Já a equação 58 transforma-se na equação 63 para o caso sem resistência e com valores de coeficientes de utilização de freio distintos.

$$P_D = \frac{\mu_D (b_{CG} + h_{CG} \mu_T)}{p \mu_T + b_{CG} (\mu_D - \mu_T)} \quad \{F_{res} = M_{res} = 0\} \quad (63)$$

5.1.6 Metodologia de estudo de curvas e frenagens

Para estudar todo o processo de curva de uma motocicleta, analisamos o caso apresentado na figura 41. A motocicleta está em velocidade de cruzeiro V_{cruz} no trecho 1. No início do trecho 2 o piloto percebe a placa. Levando em conta o tempo de reação, somente no início do trecho 3 é que o piloto inicia a frenagem, até alcançar a velocidade da curva no início do trecho 4.

Figura 41: Movimento completo da manobra. Trecho 1: velocidade de cruzeiro; trecho 2: distância para o piloto reagir; trecho 3: frenagem; trecho 4: curva em velocidade constante.



Considerando a manobra completa da figura 41, queremos estudar (1) a distância mínima antes do início da curva em que o piloto precisa observar a placa para que tenha tempo de reagir e desacelerar, e (2) o valor da velocidade máxima que deve estar escrito na placa para que a motocicleta consiga manter a aderência durante a curva. Em outras palavras, queremos determinar onde deve estar a placa e qual o valor escrito nela. A motocicleta utilizada para o estudo tem as características apresentadas nas tabelas 3, 4, 5 e 6.

A pista tem inclinação (θ) de 5° e o vento tem velocidade (W) contrária de -5 km/h. No trecho 1, a motocicleta tem velocidade de cruzeiro (V_{cruz}) de 100 km/h. Essa velocidade irá interferir na distância de frenagem, como apresentado na equação 55. Já no início do trecho 2, o piloto visualiza a placa de redução, levando uma certa distância até que inicie a frenagem, como calculada pela equação 56.

No trecho 3, com o manete de freio já acionado, a motocicleta sofre a desaceleração. Essa reação de frenagem é calculada utilizando as equações de desaceleração, considerando ainda os limites de *stoppie* e de perda de aderência. Nesta análise, usamos o modelo de frenagem com força de resistência constante (FRC). Essa escolha foi feita porque permite o cálculo da dinâmica da moto sem a necessidade da solução da equação diferencial, equação 47, ao mesmo tempo em que apresenta resultados parecidos com o que obteríamos com aquele modelo mais completo.

Por fim, no trecho 4, a motocicleta deve apresentar velocidade menor ou igual à velocidade máxima possível permitida para fazer a curva sem perder a aderência.

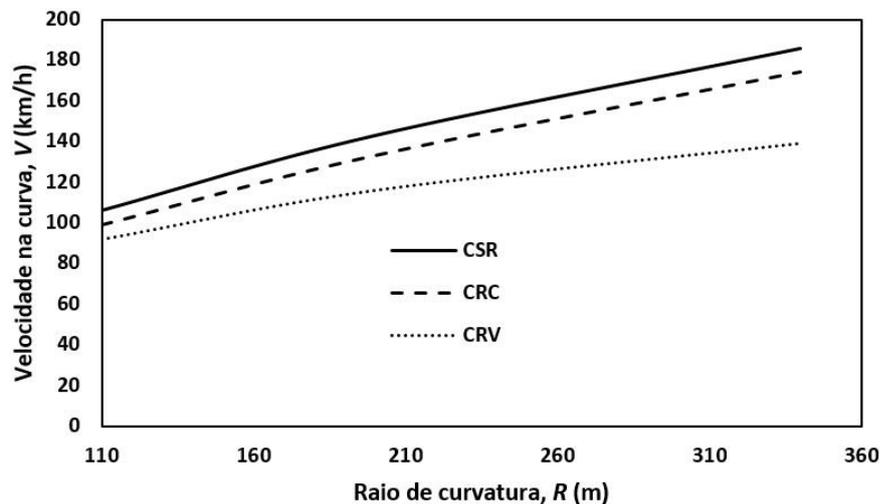
5.2 Resultados da frenagem e velocidade em curvas

A análise do movimento da motocicleta será apresentada no sentido inverso ao movimento, partindo do trecho 4 (cálculo da velocidade máxima na curva) e finalizando no trecho 2 (distância de percepção da placa). Nesses estudos, consideramos a influência da pista (coeficiente de atrito, raio de curvatura) e da técnica de frenagem usada pelo piloto. Todas as equações estão escritas no SI. No entanto, alguns gráficos e tabelas apresentam os resultados transformados para unidades mais comuns (*e.g.*, km/h).

5.2.1 Velocidade máxima na curva e raio de curvatura mínimo

Utilizando as equações 50, 51 e 52 foi possível construir os gráficos apresentados nas figura 42 e 43. A figura 42 apresenta a velocidade da motocicleta em função do raio de curvatura da pista considerando os modelos sem resistência (CSR), resistência constante (CRC) e resistência variável (CRV). Essa velocidade é em pista seca com coeficiente de atrito $f = 0,8$ e variando o raio de curvatura de 110 m a 340 m.

Figura 42: Velocidade na curva para motocicleta em pista seca em função do raio de curvatura para os modelos sem resistência, resistência constante e resistência variável

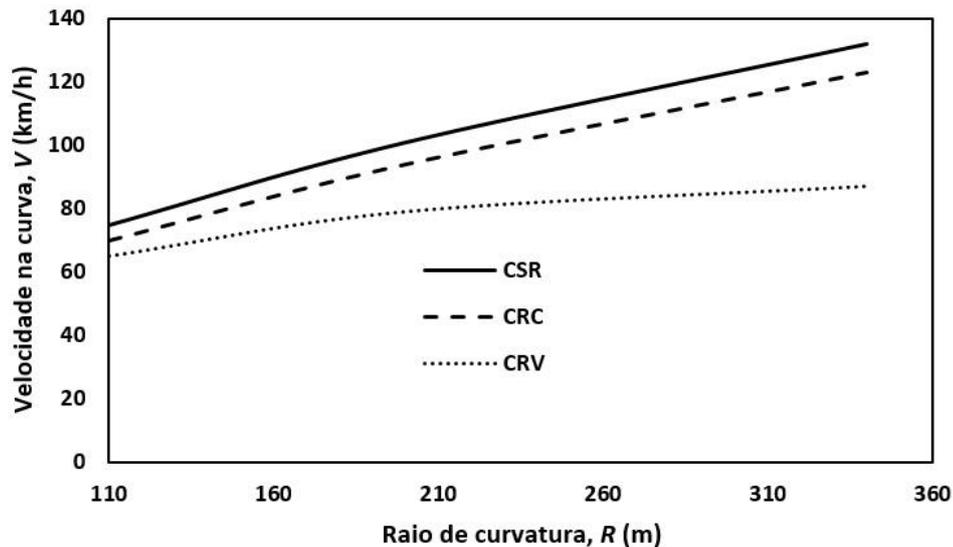


Vemos que nos três modelos a motocicleta aumenta o valor da velocidade com o aumento do raio de curvatura e que o modelo sem resistência (CSR) apresenta velocidade maior, enquanto, o modelo com resistência variável (CRV) apresenta velocidade menor. Essas diferenças nos valores de velocidade nos modelos utilizados é por causa das forças resistivas que é utilizada nas equações 50 e 51.

Já a figura 43, apresenta a variação da velocidade na curva em função do raio de curvatura para pista úmida, ou seja, coeficiente de atrito $f = 0,4$ nos modelos sem resistência (CSR), resistência constante (CRC) e resistência variável (CRV). Comparando a figura 43 com a figura 42, percebe-se que o atrito tem um influência significativa na velocidade na curva. Por exemplo, em pista seca o modelo com resistência variável (CRV) apresenta valores de velocidade maiores em função do raio de curvatura que o modelo sem resistência (CSR) para pista úmida. Assim, com a redução do atrito, a velocidade na curva da motocicleta diminui fazendo com a motocicleta faça a curva numa velocidade menor quando poderia fazer se a pista estivesse seca.

Os gráficos das figura 42 e 43 apresentam a influência em considerar as resistências e o atrito da pista quando a motocicleta faz a curva para que o piloto faça a curva em uma velocidade segura.

Figura 43: Velocidade na curva para motocicleta em pista úmida em função do raio de curvatura para os modelos sem resistência, resistência constante e resistência variável



Nos gráficos da figura 42 e 43 estamos levando em consideração que motocicleta perde a aderência com a roda dianteira e/ou traseira com a pista durante a curva. Isso é visto na tabela 8 e 9 que indicam com quais rodas a motocicleta é limitada para perde a aderência com a pista.

A tabela 8 apresenta a velocidade máxima da motocicleta na curva em função do raio de curvatura e do coeficiente de atrito f (0,4 para pista molhada; 0,8 para pista seca). A velocidade máxima é dada pela equação 52 desconsiderando as resistências, e pelo mínimo entre as equações 50 e 51 quando consideramos as resistências.

Tabela 8: Velocidade máxima de entrada na curva em função do raio de curvatura e do coeficiente de atrito. Modelos sem resistência (CSR), resistência constante (CRC) e resistência variável (CRV)

R [m]	f	V [km/h]		
		CSR	CRC	CRV
340	0,4	132 ^(D, T)	123 ^(D)	87 ^(T)
	0,8	186 ^(D, T)	174 ^(D)	139 ^(D)
200	0,4	101 ^(D, T)	94 ^(D)	79 ^(T)
	0,8	143 ^(D, T)	133 ^(D)	116 ^(D)
110	0,4	75 ^(D, T)	70 ^(D)	65 ^(T)
	0,8	106 ^(D, T)	99 ^(D)	92 ^(D)

O atrito disponível é determinada pelas equações 37 e 38, substituindo as forças nas rodas pelas equações 39 e 40, assim a variável uso (u), que determinam o quanto de atrito disponível as rodas da motocicleta utilizaram para pode fazer a curva, indica quais as rodas a motocicleta perde aderência com a pista.

Pelo modelo sem resistência (CSR), a velocidade máxima na curva pode ser maior que nos modelos com resistência, pois a motocicleta não precisa de força na roda para vencer as forças contrárias ao movimento, sobrando mais do atrito para a força centrípeta. Para o modelo sem resistência, o limite de velocidade é o mesmo para as duas rodas (D,T). No caso dos modelos com resistência (constante, CRC, ou variável, CRV), as velocidades máximas são diferentes para as duas rodas. Na tabela 9, a roda que perde primeiro a aderência, e que portanto limita a velocidade da moto, é indicada no índice superior (D ou T). Por exemplo, para o modelo CRV, a moto sempre perde a traseira em pista molhada ($f = 0,4$) e perde a dianteira em pista seca ($f = 0,8$), para qualquer raio de curvatura. Já no caso CRC, a moto estudada sempre é limitada pela perda de aderência na dianteira.

Em geral, como esperado, quanto menor o coeficiente de atrito e menor o raio de curvatura, menor a velocidade máxima na curva. Outro padrão na tabela 9 é que o modelo CRV é mais conservativo que o modelo CRC, que por sua vez é mais conservativo que o CSR.

A tabela 9 apresenta a mesma análise, mas agora especificando a velocidade desejada e calculando o raio mínimo de curvatura permitido para cada condição. Para o modelo CRV, no caso de baixo atrito ($f = 0,4$), a motocicleta não tem aderência a 100 km/h mesmo em linha reta, por isso o valor do raio de curvatura mínimo não é indicado na tabela 9.

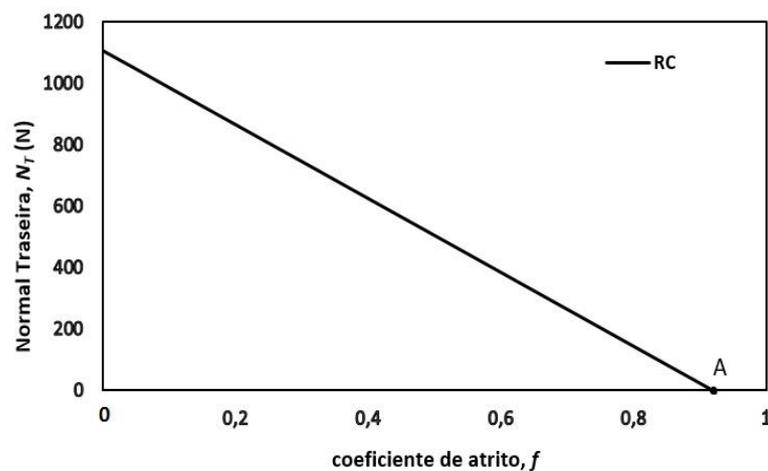
Tabela 9: Raio mínimo em função da velocidade e do coeficiente de atrito. Modelos sem resistência (CSR), resistência constante (CRC) e resistência variável (CRV)

V (km/h)	f	R (m)		
		CSR	CRC	CRV
100	0,4	196 ^(D, T)	226 ^(D)	-
	0,8	98 ^(D, T)	113 ^(D)	137 ^(D)
80	0,4	125 ^(D, T)	144 ^(D)	216 ^(T)
	0,8	62 ^(D, T)	72 ^(D)	80 ^(D)
60	0,4	71 ^(D, T)	81 ^(D)	89 ^(T)
	0,8	35 ^(D, T)	41 ^(D)	42 ^(D)

5.2.2 Limite na frenagem: *stoppie*

Agora passamos a estudar o trecho 3, analisando primeiramente em que caso o limite da frenagem se dá por travamento nas rodas ou por *stoppie* (perda do contato da roda traseira com o chão). Neste caso, usamos o modelo com resistência constante (FRC) e o mesmo coeficiente de utilização do freio nas duas rodas ($\mu = \mu_D = \mu_T$). A equação 51 é usada para o cálculo da (des)aceleração, e as equações 42 e 43 para o cálculo da normal traseira. A figura 44 mostra que, até limite $\mu = 0,92$ (ponto A), não há levantamento da roda traseira ($N_T > 0$).

Figura 44: Variação da normal traseira em função do coeficiente de utilização do freio ($\mu_D = \mu_T = f$). Modelo com resistência constante (FRC) em uma redução de 100 km/h a 60 km/h



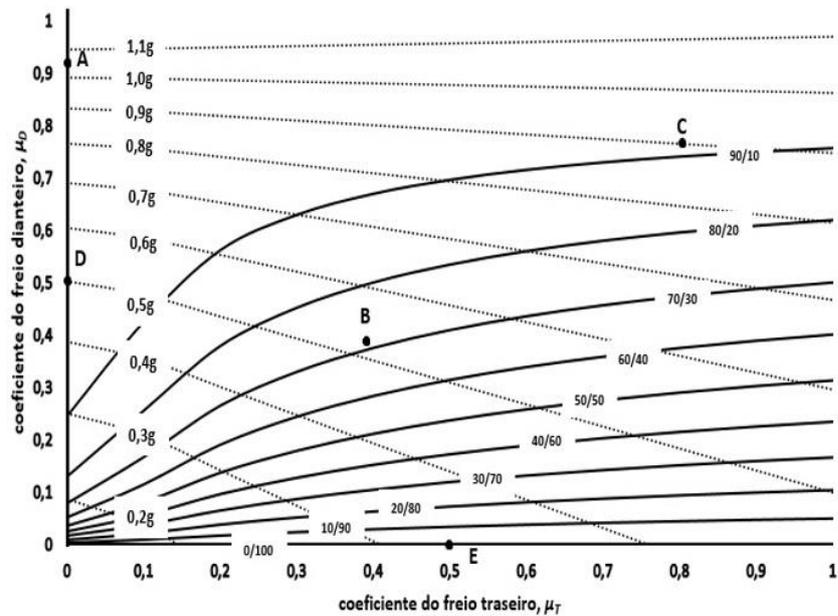
Logo, o limite da frenagem é dado pela perda de aderência. Caso o coeficiente de utilização do freio seja maior que 0,92 (desde que o atrito permita), a moto irá girar para frente (*stoppie*)

antes de perder a aderência. Quando ocorre o *stoppie*, não há mais sentido em falar em μ_T , já que agora a normal traseira é nula.

5.2.3 Influência da técnica de frenagem na desaceleração

Até este momento, todas as análises (com exceção da figura 40) foram feitas considerando $\mu_D = \mu_T$. A partir de agora, iremos estudar a influência da técnica de frenagem na pilotagem. A figura 45 apresenta as desacelerações que são obtidas para cada par (μ_D, μ_T) pela equação 59. São indicados, também, os valores P_D (equação 58) para cada situação. Cossalter (2006) apresenta uma figura parecida com a figura 45, mas para o caso sem resistência e geometria um pouco diferente.

Figura 45: Curvas de desaceleração e distribuição de frenagem (P_D/P_T). Modelo com resistência constante (FRC) para uma redução de 100 km/h para 60 km/h



O ponto A é o mesmo apresentado na figura 44 e afirma que para valores $\mu_D = 0,92$ e $P_D = 1$ (i.e., curva coincidente com o eixo y; $\mu_T = 0$) a motocicleta apresenta a desaceleração de 1,05g.

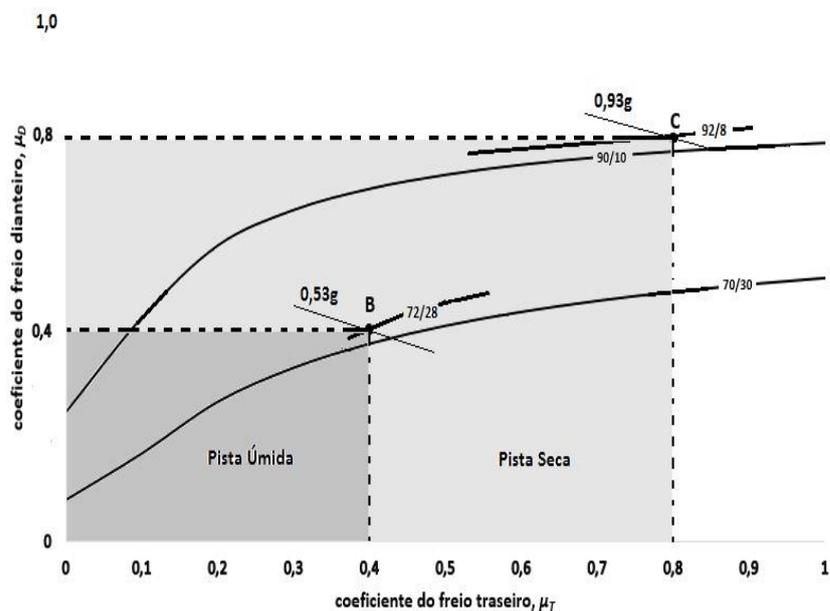
No ponto B, temos os valores de $\mu_D = \mu_T = 0,4$, que corresponde a uma frenagem máxima em pista úmida ($f = 0,4$) ou a utilização de 50% do freio em pista seca ($f = 0,8$). Para esse caso, $P_D = 0,72$, e a desaceleração é de 0,53g.

Quando a motocicleta utiliza 100% da capacidade de frenagem em pista seca ($f = \mu_D = \mu_T = 0,8$), ela consegue uma desaceleração de 0,93g, com $P_D = 0,92$, como mostra o ponto C.

Os pontos D e E mostram a diferença entre o uso de apenas um dos freios (no caso $\mu = 0,5$). Para o uso único do dianteiro (Ponto D, $\mu_D = 0,5$, $P_D = 1$), a desaceleração é de 0,5g. Já usando apenas o freio traseiro (Ponto E, $\mu_T = 0,5$, $P_D = 0$), a desaceleração é bem menor, 0,35g. O freio dianteiro permite uma frenagem melhor porque, ao desacelerar, há uma transferência de peso para a roda dianteira, o que aumenta a normal e, conseqüentemente, a força de atrito disponível. No entanto, embora o travamento de qualquer uma das rodas seja perigoso, o travamento da roda dianteira é bem mais desestabilizante para movimento, merecendo bastante cuidado por parte do piloto. (COCCO, 2013)

Agora, na figura 46 temos a área máxima disponível que indica a faixa de utilização dos freios para a pista úmida e pista seca.

Figura 46: Limites de desaceleração na frenagem de motocicleta para pista úmida e seca no modelo com resistência constante (FRC) para uma redução de velocidade de 100 km/h pra 60 km/h

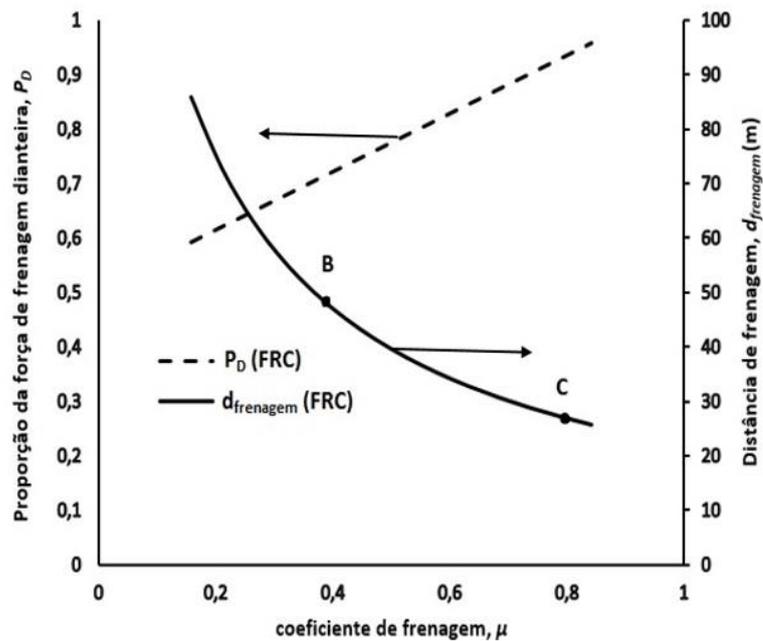


Em pista úmida onde os valores máximos dos coeficientes de utilização são $\mu_D = \mu_T = f = 0,4$ com desaceleração máxima que a motocicleta pode alcançar de $a_g = 0,53g$ com uma proporção de força do freio dianteiro sendo $P_D = 0,72$. Já em pista seca os valores máximos dos coeficientes de utilização dos freios são $\mu_D = \mu_T = f = 0,8$ com desaceleração máxima de $a_g = 0,93g$ e $P_D = 0,92$. Portanto, essas áreas que incluem pista seca e pista úmida representam o domínio de utilização do coeficiente dos freios com as respectivas proporções do freio dianteiro e com a desaceleração que podem ser facilmente obtidas na figura 45.

5.2.4 Técnica ótima para distância de frenagem mínima

Na figura 47, podemos escolher a técnica de frenagem que possibilita a menor distância de frenagem. Os pontos analisados são os mesmos da figura 45. Na figura 47, a linha contínua mostra a distância mínima de frenagem para cada uso de freio ($\mu_D = \mu_T = f$). A linha tracejada mostra a qual deve ser a distribuição das forças, P_D , para aquela frenagem ótima.

Figura 47: Distância de frenagem mínima e P_D para $\mu_D = \mu_T = f$. Modelo de resistência constante (FRC) para redução de 100 km/h para 60 km/h



Para o ponto B, caso de pista úmida ($\mu_D = \mu_T = 0,4$), a distância mínima de frenagem que a motocicleta deve ter para reduzir a velocidade de 100 km/h a 60 km/h é aproximadamente 47 m. Já no ponto C, caso de pista seca ($\mu_D = \mu_T = 0,8$), a distância mínima de frenagem necessária é aproximadamente 27 m. O valor de P_D ótimo para o caso de pista úmida é 0,72, enquanto no caso de pista seca é 0,92. Ou seja, quanto maior o coeficiente de atrito maior a importância relativa do freio dianteiro. Observamos então que não é possível recomendar uma técnica única de frenagem para todos os casos.

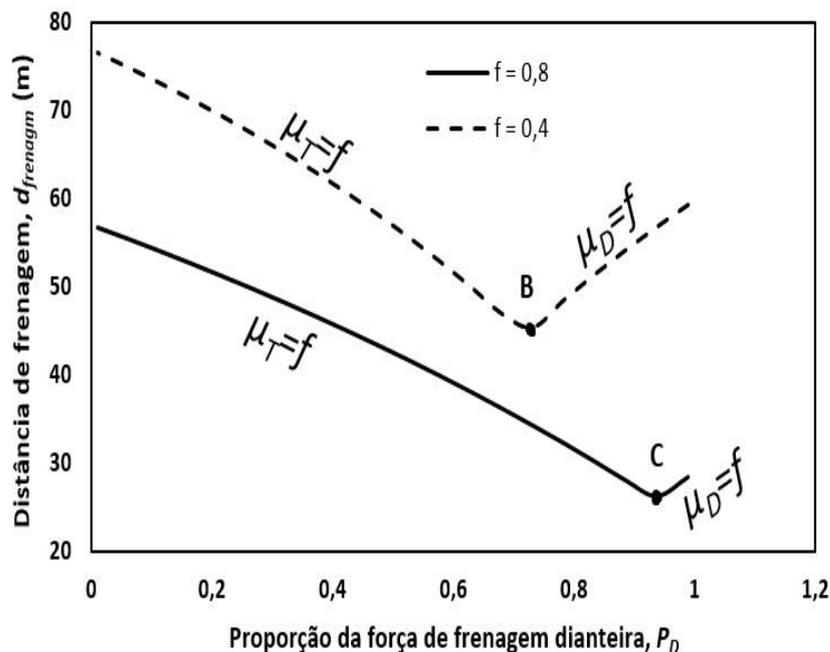
5.2.5 Influência da técnica na distância de frenagem

A figura 48 apresenta a distância de frenagem para várias distribuições de força de frenagem, P_D , considerando pista seca ($f = 0,8$) e pista úmida ($f = 0,4$). Nas duas curvas percebe-se um ponto de mínimo (frenagem ótima), à esquerda do qual a frenagem é limitada pela perda de aderência da roda traseira e à direita pela roda dianteira.

Esse limite de perda de aderência na frenagem é determinado pelo atrito disponível (u) que existe entre a pista e o pneu. Temos na figura 48 que a roda traseira utiliza todo atrito, tanto em pista úmida quanto em pista seca até o ponto de inflexão das curvas, a qual, passa a ser limitada pela roda dianteira sendo essa, agora, a utilizar todo atrito disponível.

Duas observações são importantes. Primeiro, como já discutido, o valor ótimo de P_D depende do coeficiente de atrito. Segundo, uma técnica incorreta de frenagem pode significar uma distância muito maior para a diminuição da velocidade. Na figura 48 estão indicados os casos B e C (ótimos) que já haviam aparecido nas figuras 45, 46 e 47.

Figura 48: Distância mínima de frenagem em função do P_D para $f = 0,4$ e $f = 0,8$. Modelo de resistência constante (FRC) para redução de 100 km/h para 60 km/h.



5.2.6 Distância da placa

Nesta subseção estudamos o posicionamento da placa de velocidade. Consideramos que o piloto, inicialmente em velocidade de cruzeiro de 100 km/h, avista a placa indicando a existência de uma curva. O raio de curvatura neste caso é de 110 m. Então, pela tabela 9, sabemos

que 60 km/h é uma velocidade segura tanto com baixo quanto com alto atrito. Pelo modelo CRV, que é o mais conservativo, a moto sairia de traseira apenas se estivesse acima de 65 km/h com $f = 0,4$, e sairia de frente com $f = 0,8$ somente acima de 92 km/h.

Para essa condição ($V_{\text{cruz}} = 100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}$), utilizando a equação 56 para calcular a reação do piloto, a distância percorrida até o início da frenagem é de 69 m.

Para avaliar a distância de frenagem da motocicleta, consideramos duas situações: $\mu = 0,4$ (que pode significar 100% do freio em pista úmida ou 50% do freio em pista seca) e $\mu = 0,8$ (100% do freio em pista seca). As distâncias são retiradas da figura 47 ($\mu_D = \mu_T = \mu$).

A tabela 10 mostra a distância de reação do piloto, a distância de frenagem da motocicleta, e a soma das duas, que é a distância mínima na qual a placa precisa ser percebida. Para as duas condições de atrito estudadas, consideramos que o piloto ajusta o uso do freio (P_D) de forma a obter a melhor frenagem possível ($\mu_D = \mu_T = \mu = f$).

Tabela 10: Distância de observação da placa em relação ao início da curva para P_D ótimo ($\mu_D = \mu_T = \mu = f$). Redução 100 km/h a 60 km/h.

R (m)	μ	Distância (m)		
		Reação	Frenagem	Placa
110	0,8	69	27	96
	0,4	69	47	116

Para essa redução de velocidade, o CONTRAN (2007) recomenda que a distância de frenagem deve ser considerada 123 m (usando Torricelli para uma redução de 100 km/h para 60 km/h com desaceleração de 2 m/s^2) Esse cálculo do CONTRAN (2007) corresponde ao nosso modelo de frenagem sem resistência (FSR), equação 55. Portanto, vemos que essa recomendação é segura, principalmente porque o piloto irá observar a placa antes de chegar ao local onde está posicionada. O modelo com resistência variável (FRV) apresenta uma distância de frenagem de 25 m, valor bem parecido com o obtido pelo modelo FRC (27 m, tabela 10). O modelo sem resistência resulta em uma distância de frenagem de 32 m. Portanto, dos três modelos, o modelo sem resistência (FSR) é o mais conservativo.

6 CONCLUSÕES

O trabalho mostrou que existem variadas considerações que podem ser feitas na análise da dinâmica da motocicleta. Foram apresentados modelos matemáticos que determinaram o comportamento da motocicleta em aceleração, frenagem e curvas através do modelo geral da dinâmica da motocicleta.

Com o modelo que considera, apenas, a força motriz e de frenagem na roda traseira é possível determinar a potência do motor da motocicleta para que se possa vencer as forças de resistência e alcançar a velocidade desejada. Esse modelo é muito apropriado para isso, pois com as curvas de potências, determinamos os limites de capacidade do motor, desde que seja considerada a variação da potência máxima do motor, P , com a rotação do motor.

Com a variação da distância entre eixos das rodas e do centro de gravidade, vemos a influência da geometria em algumas manobras na motocicleta. Temos que, para motocicletas com o valor b_{CG} próximo da roda traseira é mais fácil, durante, a aceleração acontecer a manobra de *wheelie*. Agora, com motocicleta que apresenta centro de gravidade mais elevado é fácil acontecer, durante a frenagem, a manobra de *stoppie*. Ainda, nesse modelo, foi visto a capacidade de frenagem da motocicleta utilizando a força total de frenagem na roda traseira. Confirmamos que, para a motocicleta reduzir sua velocidade, é mais fácil fazer em pista seca do que em pista molhada, pois a distância de frenagem é menor em pista seca.

Com o modelo que considera a separação da força total de frenagem nas duas rodas, apresentamos uma metodologia de posicionamento de uma placa de redução de velocidade para entrada em curvas.

Na dinâmica da velocidade em curvas, o trabalho mostrou algumas considerações que devem ser feitas no cálculo da velocidade máxima de curva. Vimos que no caso da curva, do ponto de vista da segurança, é importante levar em conta as resistências. e, ainda, comparando o nosso modelo de velocidade máxima na curva com o estudo feito por Lemonaski *et al.* (2014), temos que os gráficos das velocidades ótimas da figura 15 são próximas das figuras 43 no caso do modelo do gráfico com resistência variável (CRV).

Já no caso de frenagem em linha reta, o modelo sem resistências é mais conservativo, podendo ser utilizado. Outro resultado importante é que os modelos com resistência constante ou com resistência variável apresentam resultados parecidos, permitindo o uso do primeiro, que não necessita a solução de uma equação diferencial. Agora, considerando a distância de frenagem na tabela 10, com a distância de entrada na curva no trabalho de Yuen, Karin e Saifizul (2014), apresentada na figura 14, temos que, para uma frenagem em pista seca, ou acio-

nando 100% os freios a nossa distância de entrada na curva é menor, já quando em pista úmida, ou acionamento de 50% dos freios a nossa distância de frenagem é maior. Essas diferenças deve-se que no nosso trabalho estamos considerando que todo atrito disponível é utilizado.

Do ponto de vista físico, como esperado, confirmamos que quanto menor o atrito e menor o raio de curvatura, menor a velocidade máxima possível na curva. Ainda estudamos os vários limites durante curvas e frenagens, que podem ser a perda de adesão na roda dianteira, a perda de adesão na roda traseira ou a perda de contato da roda traseira através da variável uso (u), determinada pelas equações 37 e 38, que apresentam as velocidades limites nas tabelas 8 e 9.

Vimos também como a técnica de frenagem (proporção dos freios dianteiro e traseiro) influenciam na desaceleração e, conseqüentemente, na distância de frenagem. Um ponto importante é que a técnica ótima de frenagem depende do coeficiente de atrito, o que desaconselha a recomendação de uma técnica universal para todas as situações. Portanto, o nosso modelo de frenagem é apenas um indicativo da distância desejada para frenagem para que o piloto tenha uma distância segura para alcançar a velocidade de entrada na curva e não perda a aderência dos pneus na frenagem, isso é muito explorado em Baumann *et al.* (2016).

Além disso, apresentamos uma metodologia para o cálculo da posição e da velocidade máxima de uma placa em função das condições de atrito, do raio de curvatura e da utilização do freio. Esses cálculos demonstraram que a recomendação do Conselho Nacional de Trânsito (CONTRAN) é segura.

Por fim, os modelos apresentados neste trabalho estão bem consistentes com alguns resultados apresentados no Capítulo 3, mesmo com algumas simplificações sobre aplicações de forças. Portanto, concluímos que existem modelos específicos para cada tipo de situação e podem ser simplificados; algumas manobras em motocicletas podem ocorrer por causa de um péssimo projeto na geometria; que existe uma distância mínima de frenagem para que o piloto de motocicleta faça uma curva com segurança; não existem uma técnica ótima de frenagem; para algumas situações reais as forças de resistências devem ser consideradas. Assim, espero que o trabalho tenha contribuído com a dinâmica da motocicleta, apresentando variados modelos que foram aplicados em algumas condições reais de uso e que seja o ponto inicial para uma validação dos resultados encontrados.

Para o desenvolvimento de trabalhos futuros que venham analisar a dinâmica da motocicleta na aceleração, frenagem e velocidade em curvas.

- Considerar a aceleração na curva.
- Considerar o acionamento dos manetes dos freios variáveis na distância de frenagem.
- Considerar a variação de todas as forças resistivas durante o movimento da motocicleta.
- Avaliar para qual tipo de solo a frenagem em motocicletas apresenta distância de frenagem menores.
- Utilizar a força de arrasto lateral para calcular a velocidade na curva.
- Comparar os resultados do trabalho na prática para validar os modelos utilizados.

REFERÊNCIAS

- BAIRD, S., Performance Cycling, Cycle Publishing, 2010.
- BALDANZINI, N.; LEYVA, P. H.; SAVINO, G.; PIERINI, M. Rider Behavioral Patterns in Braking Manoeuvres. *Transportation Research Procedia*, v. 14, p. 4374-4383. 2011.
- BAUMANN, M.; BACHLE, T.; BUCHHOLZ, M.; DIETMAYER, K. Model-based Corner Braking Control for Electric Motorcycles. *IFAC-PapersOnLine*, v. 49, n. 11, p. 291-296, jun. 2016. ISSN 2405-8963. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896316313660>>.
- BRADLEY, J. B. *The Racing motorcycle, a technical guide for constructors*. York, England: Broadland Leisure, 2003.
- COCCO, G., *Motorcycle Design and Technology*, Giorgio Nada Editore, 2013.
- CONTRAN. Conselho Nacional de Trânsito (Brasil). *Sinalização vertical de regulamentação / Contran-Denatran*. – Brasília: Contran, 2006. 214 p. : il. (Manual Brasileiro de Sinalização de Trânsito; 1).
- CONTRAN, *Manual Brasileiro de Sinalização no Trânsito*, 2007.
- CORNO, M.; SAVARESI, S. M.; TANELLI, M.; FABBRI, LUCA. On optimal motorcycle braking. *Control Engineering Practice*, v. 16, n. 6, p. 664-657, jun. 2008. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066107001384>>.
- COSSALTER, V. *Motorcycle Dynamics*. 2nd edition, LULU, 2006.
- COSSALTER, V.; LOT, R.; MAGGIO, F. The Modal Analysis of a Motorcycle in Straight Running and on a Curve. *Meccanica*, v. 39, n. 1, p. 1-16, feb. 2004.
- _____. The Influence of Tire Properties on the Stability of a Motorcycle in Straight Running and Curves. SAE International, mar. 2002.
- _____. A Multibody Code for Motorcycle Handling and Stability Analysis with Validation and Examples of Application. SAE International, set. 2003.
- _____. On the Braking Behavior of Motorcycles. SAE International, set. 2004.
- COSSALTER, V.; LOT, R. A Motorcycle Multi-Body Model for Real Time Simulations Based on the Natural Coordinates Approach. *Vehicle System Dynamics*, v. 37, n. 6, p. 423-447, aug. 2007.

- COSSALTER, V.; DORIA, A. LOT, R. A Steady Turning of Two-Wheeled Vehicles. *Journal Vehicle System Dynamics*, v. 31, n. 3, p. 157-181, aug. 2010.
- COSSALTER, V.; LOT, R.; MASSARO, M.; SARTORI, R. Development and validation of an advanced motorcycle riding simulator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, v. 225, n. 6, p. 705-720, jun. 2011.
- DNIT. Normas para o Projeto de Estradas de Rodagem. Rio de Janeiro. 1973.
- ELLIOTT, M. A.; BAUGHAN, C. J.; SEXTON, B. F. Errors and violations in relation to motorcyclists' crash risk. *Accident Analysis & Prevention*, v. 39, n. 3, p. 491-499, May. 2007.
- FENABRAVE. 2016. Anuário: *o desempenho da distribuição automotiva no Brasil*. Disponível em: <<http://www3.fenabreve.org.br/>>. Acesso em: setembro de 2016.
- FORMENTIN, S.; FILIPPI, P. D.; TANELLI, M.; SAVARESI, S.M. Model-free control for active braking systems in sport motorcycles. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 43, n. 14, p. 873-878, set. 2010.
- GARCIA NETO, P. D. Estudo computacional do tráfego misto de motocicletas e automóveis. 2014. 180f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife.
- GILLESPIE, T. D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Warrendale, USA: Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.
- FOALE, T. H. *Motorcycle Handling and chassis design: The art and science*. 4 ed espanha, 2002. 912p.
- HEISLER, V. *Advanced Vehicle Technology*. 2 ed. Warrendale: SAE, 2002. 654p.
ISBN 0-7680-1071-4
- HOAG, K. L. *Vehicular Engine Design. Powertrain*. Madison, Wisconsin, U.S.A: Engine Research Center, University of Wisconsin Madison, 2006.
- HONDA. Pilotagem Consciente: *Frenagem*. Disponível em: <<http://bit.ly/2fKknOd>>. Acesso em: setembro de 2016.
- HURT, H.; OUELLET, J.; THOM, DR. Motorcycle accident cause factors and identification of countermeasures; Volume 1: Technical report, Final report. Washington, DC: U.S. Department of Transportation; 1981.

LEMONAKIS, P. V.; ELIOU, N. E.; KARAKASIDIS, T.; BOTZORIS, G. A new methodology for approaching motorcycle riders' behavior at curved road sections. *European Transport Research Review*, v. 6, n. 3, p. 303-314, set. 2014.

LIMA, A.C. Otimização da estratégia de troca de marchas e das relações de transmissão de uma motocicleta visando a redução no consumo de combustível. 2014. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

OHLHAUSER, A. D.; MILLOY, S.; CAIRD, J. K. Driver responses to motorcycle and lead vehicle braking events: *The effects of motorcycling experience and novice versus experienced drivers*. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*, v. 14, p. 472-483, nov. 2011.

OMS, Organização Mundial de Saúde, Global Status Report on Road Safety, 2013.

OZKAN, T.; LAJUNEN, T.; DOGRUYOL, B.; YILDIRIM, Z.; COYMAK, A. Motorcycle accidents, rider behaviour, and psychological models. *Accident Analysis & Prevention*, v. 49, p. 124-132, nov. 2012. ISSN 0001-4575. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001457511000601>> .

MAIDS (Motorcycle Accidents in Depth Study). In-depth Investigations of Accidents Involving Powered Two-wheelers, 2009. Disponível em: <<http://www.maids-study.eu/>>. Acesso em: 2016.

MINISTÉRIO DA SAÚDE. 2015. Brasil registra 12 mil mortes por acidente de moto a cada ano. Disponível em: <<http://g1.globo.com/jornal-da-globo/noticia/2015/05/brasil-registra-12-mil-mortes-por-acidente-de-moto-cada-ano.html>>. Acesso em: setembro de 2016.

MONTIMER, R. G. Improving Motorcyclists' Braking Performance: *The Integrated Brake System*. *Proceedings of the Human Factors and Ergonomics Society Annual Meeting*, v. 29, n. 3, p. 274-277, oct. 1985.

POPOV, A. A.; ROWELL, S.; MEIJAARD, J. P. A review on motorcycle and rider modeling for steering control. *Journal Vehicle System Dynamics*, v. 48, n. 6, p. 775-792, may. 2010.

PUCHER, J., BUEHLER, R., (editors), *Urban Cycling*, The MIT Press, 2012.

SHARP, R. S. Stability, Control and Steering Responses of Motorcycles. *Journal Vehicle System Dynamics*, v. 35, n. 4, p. 291-318, aug. 2010.

SILVA JUNIOR, E.J. Simulação de tráfego considerando automóveis e motocicletas: *ênfase na influência dos parâmetros do motor no consumo global de combustível*. 2014. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

TOYOFUKU, Y.; MATSUSHIMA, K.; IRIE, Y.; YONEZAWA, H.; MIZUNO, K. Study on the effects of motorcycle anti-lock-braking-system for skilled and less-skilled riders: *regarding braking in a turn*. JSAE Review, v. 15, n. 3, p. 223-228, jul.1994. ISSN 0389-4304. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0389430494900388>>.

VASCONCELLOS, EDUARDO A. Risco no trânsito, omissão e calamidade: impacto do incentivo à motocicleta no Brasil. São Paulo: Ed. do Autor, 2013.

VLAHOGIANNI, E. I.; YANNIS, G.; GOLIAS, J. C. Overview of critical risk factors in Power-Two-Wheeler safety. Accident Analysis & Prevention, v. 49, p. 12-22, nov. 2012. ISSN 0001-4575.

WILSON, D.G., Bicycling Science, 3rd edition, MIT Press, 2004.

YAMAHA WR 250R. Manual do Proprietário. Disponível em: <<https://www.yamahamotor.com.br/servicos/manual-do-proprietario>>. Acesso em: setembro de 2016.

YUEN, C. W.; KARIN, M. R.; SAIFIZUL, A. Investigation on Motorcyclist Riding Behaviour at Curve Entry Using Instrumented Motorcycle. The Scientific World Journal, v. 2014, p. 9, dec. 2014.

APÊNDICE A – ARTIGO

Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 39, nº 2, exxx (2017)
 www.scielo.br/rbef
 DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0221>

Artigos Gerais

Licença Creative Commons

Estudo da Dinâmica das Motocicletas em Frenagens e Curvas: O Efeito da Técnica do Piloto e da Condição da Estrada

Motorcycle Dynamics in Braking and Curves: The Effect of the Rider Technique and Road Condition

Fábio Santana Magnani¹, Saulo dos Santos Cunha¹

¹Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil

Recebido em 2 de outubro de 2016. Revisado em 25 de novembro de 2016. Aceito em 27 de novembro de 2016

O estudo das motocicletas apresenta um interessante exemplo de ensino que combina teoria, tecnologia e prática. Neste artigo, apresentamos um estudo dinâmico típico efetuado na disciplina Engenharia da Motocicleta, UFPE. O problema em questão é determinar quando uma motocicleta deve iniciar a sua frenagem e qual é a máxima velocidade em que pode fazer uma determinada curva. Para estudar esse movimento, modelamos a dinâmica da motocicleta em linha reta e depois em curva, considerando as forças inerciais, as forças resistivas, e as forças controladas pelo piloto (propulsão e frenagem). Os modelos matemáticos são então usados para estudar a mínima distância para iniciar a frenagem e a máxima velocidade possível na curva, considerando limites de aderência e a possibilidade de perda de contato de uma das rodas. Como resultado, concluímos que, do ponto de vista da segurança, é importante a consideração das forças resistivas no modelo da velocidade máxima em curva, mas não no cálculo da distância mínima de frenagem. Outro resultado importante é que a técnica ótima de frenagem (proporção do freio dianteiro e traseiro) é função do coeficiente de atrito, não sendo interessante recomendar aos pilotos uma proporção universal.

Palavras-chaves: motocicleta; frenagem; dinâmica na curva

The study of motorcycles presents an interesting example of teaching that combines theory, technology and application. In this paper, we present a typical dynamic study conducted in the discipline of Motorcycle Engineering, UFPE. The problem is to determine when a motorcycle should begin its braking and what would be the maximum speed to make a curve. To study this phenomenon, we model the dynamics of the motorcycle on straight and curved paths, considering the inertial forces, resistive forces and the forces controlled by the rider (propulsion and braking). The models are then used to study the minimum distance to start the braking and the maximum possible cornering speed, considering the limits of adhesion and the possibility of loss of contact of one of the wheels. As result, we conclude, from a safety point of view, that it is important to consider the resistive forces on the model of maximum cornering speed, but not in the calculation of the minimum braking distance. Another important result is that the optimum braking technique (ratio of front and rear braking) is a function of the friction coefficient, so it is not interesting to recommend to the riders a universal proportion.

Keywords: motorcycle; braking; curve dynamics

1. Introdução

Desde 2010, a disciplina Engenharia da Motocicleta vem sendo oferecida pelo Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da UFPE. A disciplina começa estudando os problemas gerais ligados às motocicletas, como acidentes, poluição, preconceito e monopólio, e, logo depois, descreve a tecnologia do veículo, incluindo motor, quadro, dire-

ção, pneus, etc. Concluídos esses 20% da disciplina, começa a parte principal, dedicada à modelagem matemática da motocicleta: propulsão, frenagem, manobras e amortecimento. Essa combinação é bastante rica do ponto de vista pedagógico, pois revisa os conceitos teóricos da dinâmica que os estudantes aprenderam em disciplinas preliminares, inclui as limitações tecnológicas encontradas na prática, e, principalmente, mostra como uma modelagem relativa-

mente simples pode ser usada para auxiliar na solução de problemas práticos. Do ponto de vista didático, um ponto interessante é que a motocicleta é um veículo bastante atraente entre os jovens, o que ajuda muito na motivação durante as aulas, trabalhos e avaliações.

Neste artigo, iremos mostrar como um modelo simples, basicamente de balanço de forças e de momentos, pode explicar o comportamento das motocicletas em frenagens e curvas. Adicionalmente, esse modelo pode ainda proporcionar respostas práticas, como a melhor técnica para o piloto usar durante a frenagem, a distância mínima para a redução de velocidade e a máxima velocidade na qual uma motocicleta consegue fazer uma determinada curva. Mas, antes de começar a apresentação do modelo dinâmico, iremos contextualizar o problema geral.

O número de acidentes com motocicletas no Brasil, bem como as suas consequências, são bem conhecidos. No entanto, não existem muitos estudos técnicos sobre as reais causas desses acidentes. A grande maioria dos trabalhos é feita nos leitos dos hospitais ou então baseados nos registros dos acidentes, não permitindo, portanto, nada mais que conjecturas sobre as reais causas dos acidentes. No mundo todo, os dois únicos trabalhos completos sobre as causas dos acidentes são de Hurt et al. [1] e ACEM [2]. Nesses trabalhos, equipes formadas por médicos e engenheiros se deslocavam aos locais dos acidentes para analisar quantitativamente o que realmente acontecera. Os resultados eram então comparados com situações de controle em vias próximas.

Em 2010, a Organização Mundial da Saúde foi convidada por alguns países a preparar um relatório com a avaliação do estado de segurança rodoviária global e para monitorar o progresso ao longo da década [3]. Essa ação indicou claramente a preocupação dos governantes ao redor do globo com os efeitos devastadores dos acidentes de trânsito.

No Brasil, na década de 1990, políticas públicas do governo federal incentivaram a fabricação, a compra e o uso das motocicletas. A frota desses veículos aumentou de 1,5 milhão em 1990 para 17 milhões no final de 2012. Por causa da sua versatilidade, baixo custo e conveniência pessoal, as motos passaram a ser usadas intensamente no transporte de pequenas mercadorias e pessoas, para o trabalho e para a escola, em áreas urbanas e rurais. Infelizmente, o aumento no número de motocicletas foi acompanhado pelo aumento dos acidentes com esses veículos [4].

As causas dos acidentes são variadas: configuração dos veículos, imprudência e imperícia dos condutores (tanto das motocicletas quanto dos automóveis), além do próprio projeto e das condições das vias. Em relação ao projeto das vias, na concepção e na implantação da segurança no trânsito, a sinalização é um fator básico que influencia a percepção dos usuários para as condições da via. De acordo com o CONTRAN [5], a sinalização de regulamentação tem por finalidade transmitir aos usuários as condições, proibições, obrigações ou restrições no uso das vias urbanas e rurais. Assim, o desrespeito aos sinais de regulamentação constitui infrações previstas Código de Trânsito Brasileiro [6].

Como boa prática de segurança, a redução da velocidade regulamentada para um trecho, em relação ao trecho imediatamente anterior, deve ser feita com base em estudos de engenharia que levem em conta diversos fatores, tais como o tempo de reação do condutor e a distância de frenagem em função da redução desejada. Por ser universal, a placa de sinalização deve levar em conta os diversos veículos que circulam pelas vias, como automóveis, motocicletas e caminhões.

No caso das motocicletas, há um complicador nessa análise, pois os freios traseiro e dianteiro são acionados de forma independente. Fabricantes [7] e acadêmicos [8] defendem que o domínio de uma boa técnica de frenagem (i.e., escolher a proporção correta entre a aplicação do freio dianteiro e do traseiro) permite reduzir em mais de 50% a distância de parada. Inversamente, conclui-se que o uso de uma má técnica pode então aumentar muito a distância de frenagem, podendo ocasionar queda ou colisão.

A capacidade da frenagem das motocicletas depende diretamente da aderência entre o pneu e o pavimento da pista, e, desta forma, deve-se evitar a todo custo que a utilização da aderência seja reduzida. Algumas das situações que provocam a redução da aderência são o bloqueio das rodas durante as frenagens e o deslizamento durante a aceleração, casos em que o pneu, ao invés de rolar, passa a escorregar sobre o pavimento da pista.

Assim, explicar o comportamento de uma motocicleta durante a frenagem não é trivial, pois envolve tanto a modelagem da dinâmica do veículo quanto das escolhas que o piloto realiza.

As referências clássicas para o estudo da dinâmica de veículos de duas rodas são Cossalter [8] no caso das motocicletas e Wilson [9] para as bicicletas. O presente trabalho é baseado nesses autores clássicos, mas com três contribuições. Em primeiro lugar, a inclusão das forças resistivas nos modelos de frenagem e de curva. Segundo, o acoplamento das duas manobras (frenagem e curva) para o estudo do problema específico de segurança. Terceiro, a consideração integrada de fenômenos indesejáveis, como a perda de aderência e o *stoppie* (perda de contato da roda traseira com o piso durante a frenagem).

Na Seção 2 apresentamos a modelagem matemática dos fenômenos. Depois, na Seção 3, esses modelos são usados para determinar a distância mínima de frenagem e a máxima velocidade da motocicleta em curva. Na Seção 4 discutimos em que casos é importante a consideração das forças resistivas e concluímos que as recomendações para colocação de placas sinalizadoras frenagem são seguras.

2. Materiais e métodos

Nesta seção, primeiramente são apresentadas as equações básicas da dinâmica das motocicletas e, em seguida, como essas equações são arrançadas especificamente para o presente estudo sobre frenagens e curvas.

2.1. Fundamentos da dinâmica da motocicleta na reta

Durante o movimento, a motocicleta sofre a ação de variadas forças, como apresentadas na Fig. 1. Algumas dessas

forças provocam o movimento para frente, enquanto outras tendem a resistir ao movimento.

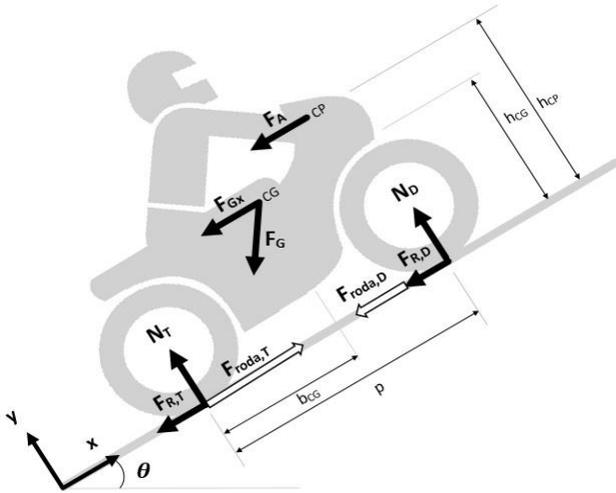


Figura 1 – Forças existentes no movimento e frenagem da motocicleta

A força aplicada na roda traseira é apresentada pela equação (1). O primeiro termo do lado direito é a reação do piso à força vinda do motor, a qual depende da potência máxima do motor em uma determinada rotação (P), da velocidade da motocicleta (V) e do coeficiente de abertura do acelerador (α). O segundo termo é a força de frenagem, que depende do coeficiente de utilização do freio (μ_T) e da força normal (N_T). Dependendo da atuação do piloto no acelerador (α) ou no freio (μ_T), ambos os termos à direita podem ser nulos ou não nulos.

$$F_{roda,T} = \alpha \frac{P}{V} - \mu_T N_T \quad (1)$$

A potência máxima do motor (P) é uma curva que varia com a rotação, mas essa informação não será importante especificamente neste trabalho, já que ou estudamos a motocicleta em curva com velocidade constante ($P = cte$) ou durante a frenagem ($\alpha = 0$). No entanto, destacamos que as equações aqui apresentadas são gerais, podendo ser usadas em movimentos mais complexos. O coeficiente de utilização do acelerador (α) pode variar de 0 a 1 (condição em que toda a potência do motor em uma determinada rotação está sendo usada). O coeficiente de utilização do freio (μ_T , traseiro; ou μ_D , dianteiro) varia de 0 a f , onde f é o coeficiente de atrito entre o pneu e o piso.

De forma similar, a equação (2) apresenta a força na roda dianteira. Como as motocicletas, com raríssimas exceções, não têm tração dianteira, usamos apenas o termo de frenagem.

$$F_{roda,D} = -\mu_D N_D \quad (2)$$

As outras forças que atuam sobre a motocicleta tendem a resistir ao movimento, como aquelas apresentadas na equação (3), na qual F_A é a resistência aerodinâmica, F_R é a resistência à deformação do pneu (resistência de rolamento), e F_{Gx} é a componente da força da gravidade na direção do

movimento. Em alguns casos particulares essas forças podem assumir valores negativos (i.e., auxiliam o movimento), como quando o vento sopra por trás ou nas descidas.

$$F_{res} = -F_A - F_R - F_{Gx} \quad (3)$$

A equação (3) pode ser detalhada pela equação (4), expressando cada força a partir de seus parâmetros.

$$F_{res} = -k_A(V - W)^2 - C_R mg \cos \theta - mg \sin \theta \quad (4)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (4) é a força aerodinâmica (F_A), que depende da velocidade relativa entre a motocicleta (V) e o vento (W), e do fator de arrasto (k_A), que, por sua vez, é função da forma do conjunto piloto/motocicleta e da massa específica do ar. O fator de arrasto k_A varia com a velocidade e com a posição do piloto, mas aqui iremos considerá-lo constante. O segundo termo representa a resistência de rolamento dos pneus (F_R), que é função do coeficiente de rolamento (C_R), do peso da motocicleta (mg) e do ângulo da pista (θ). Em geral, o coeficiente de rolamento varia com a velocidade da motocicleta e com a construção e pressão do pneu, mas neste trabalho consideramos C_R constante. Finalmente, há a influência do peso (F_{Gx}) no movimento, como indicado pelos últimos termos nas equações (3) e (4).

Os pontos de aplicação das forças resistivas são distintos. A força de arrasto (F_A) é aplicada no centro de pressão (CP), a força da gravidade (F_G) é aplicada no centro de gravidade (CG), e a força de rolamento dos pneus (F_R) é aplicada na interface entre o pneu e a pista, como indicado na Fig. 1. O fato das forças terem pontos diferentes de atuação será importante posteriormente no cálculo dos momentos. Veremos adiante que a inércia da motocicleta (ma), agindo no centro de gravidade combinado piloto/motocicleta, também influencia o movimento. Por exemplo, quanto maior a massa do conjunto, menor será a aceleração para uma mesma força na roda.

Outras duas forças que existem na motocicleta durante a aceleração ou frenagem são as forças normais nas rodas. Essas forças não influenciam diretamente no movimento para frente, mas são importantes no cálculo da aderência. A equação (5) é a normal da roda dianteira, e a equação (6) apresenta a normal traseira. As duas equações são obtidas fazendo um balanço de forças em y e um balanço de momentos em relação ao ponto de contato da roda traseira com o piso.

$$N_D = \frac{F_G b_{CG} \cos \theta - F_A h_{CP} - ma h_{CG} - F_G h_{CG} \sin \theta}{p} \quad (5)$$

$$N_T = mg \cos \theta - N_D \quad (6)$$

Interessante observar nas equações (5) e (6) que as normais não dependem apenas do projeto da motocicleta (massa e geometria) e da pista (inclinação), mas também do próprio movimento da motocicleta. Isto é, quando há uma aceleração (a) positiva, por exemplo, há uma transferência de peso para a roda traseira. Já na frenagem, é a roda dianteira

que tem a normal aumentada. Outra característica do movimento que pode interferir na normal é a velocidade da moto, que influencia a força aerodinâmica (aplicada no centro de pressão).

A equação (7) é a Segunda Lei de Newton aplicada ao movimento da motocicleta na direção x . No caso sem a utilização dos freios ($\mu_D = \mu_T = 0$), se as forças resistivas forem menores (em módulo) que a força na roda traseira, a moto vai acelerar. Se as forças resistivas forem maiores que a força na roda traseira, a moto irá diminuir a sua velocidade. No caso geral, o balanço (positivo ou negativo) entre as forças na direção x depende se o piloto está acelerando ($\alpha > 0$), se está freando ($\mu_D > 0$ e/ou $\mu_T > 0$), se há declive na pista ($\theta \neq 0$), e se há velocidade relativa do vento ($V - W \neq 0$), bem como dos parâmetros do conjunto piloto/motocicleta, dados por k_A , C_R e m .

$$ma = F_{roda,D} + F_{roda,T} + F_{res} \quad (7)$$

Sabemos que a aceleração é a derivada da velocidade com o tempo, resultando então na equação (8) - uma equação diferencial em V , que neste trabalho é resolvida pelo método das diferenças finitas.

$$ma = m \frac{dV}{dt} = \alpha \frac{P}{V} - \mu_T N_T - \mu_D N_D - k_A (V - W)^2 - C_R mg \cos \theta - mg \sin \theta \quad (8)$$

A solução computacional da equação diferencial (8), ao invés de uma solução analítica, é justificada para o caso geral porque P , N_D e N_T são funções não lineares da velocidade. No caso particular de P , a solução é mais complicada ainda, já que a relação entre P e V depende também da marcha escolhida pelo piloto, o que em geral depende da história da velocidade, não apenas do seu valor momentâneo.

No caso de curva, a força centrípeta não influencia diretamente o movimento para frente, mas, como ela usa parcialmente o atrito disponível, acaba limitando indiretamente a força que pode ser aplicada na roda tanto para aceleração quanto para frenagem. A força centrípeta aplicada sobre a moto é apresentada pela equação (9). Mais para frente iremos dividir essa força centrípeta entre as duas rodas.

$$F_{cent} = \frac{mV^2}{R} \quad (9)$$

2.2. Perda de aderência das rodas dianteira e traseira

Considerando o movimento mais geral, *i.e.*, durante uma curva, a força de atrito máxima entre um dos pneus e a pista (dada pelo coeficiente de atrito multiplicado pela normal, fN_i) não pode ser superada pela força resultante composta pela força longitudinal na roda (equações 1 ou 2) e pela força centrípeta (equação 9), conforme mostrado na Fig. 2.

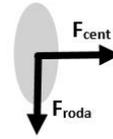


Figura 2 – Vista superior da área de contato, no plano xz , entre o pneu traseiro deformado da motocicleta e a estrada, apresentando a força centrípeta e força aplicada na roda.

O limite de uso do atrito é representado pela equação (10), onde o índice i é usado para indicar que a equação vale tanto para a dianteira ($i=D$) quanto para traseira ($i=T$).

$$F_{roda,i}^2 + F_{cent,i}^2 \leq (fN_i)^2 \quad (10)$$

O coeficiente de atrito (f) depende do material da pista, da construção e da calibragem do pneu, bem como das condições da pista (e.g., pista seca, pista molhada, pista suja, lama). Por exemplo, em pista seca o valor típico do coeficiente é 0,8, e, em pista úmida, 0,4 [8]. Caso a condição da equação (10) não seja satisfeita, ocorrem fenômenos indesejáveis. Nas curvas, a moto perde a aderência e sai pela tangente. Nas retas, o pneu desliza, provocando uma diminuição no coeficiente de atrito (que passa de atrito estático para dinâmico) e diminuindo drasticamente a estabilidade da motocicleta [8,10].

Ainda analisando a motocicleta na curva, mas agora a observando frontalmente (Fig. 3), vemos as forças que atuam no plano yz . Para que haja o equilíbrio entre a normal e o peso em y , e entre a força centrípeta (atrito) e a centrífuga (inércia radial), a moto precisa permanecer em um ângulo de rolagem ϕ . Na prática, esse valor é limitado pela geometria da pedaleira, em geral com valor máximo de 50° [8]. A razão pela qual os pilotos profissionais se inclinam em direção da pista durante as curvas é para conseguir baixar o centro de gravidade (do conjunto piloto/motocicleta) sem que a pedaleira toque no chão. Neste trabalho, consideramos constante o centro de gravidade do conjunto.

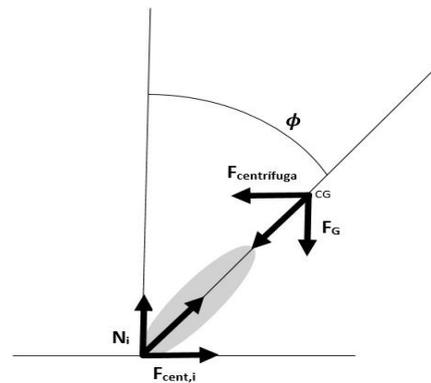


Figura 3 – Vista frontal da motocicleta, no plano yz , apresentando as forças aplicadas no pneu e no centro de gravidade.

2.3. Velocidade máxima na curva

A velocidade máxima que a motocicleta pode permanecer em uma curva, em velocidade constante, sem perder a

aderência, pode ser obtida substituindo a equação (9) na equação (10). A distribuição da força centrípeta entre as duas rodas é feita a partir do balanço dos momentos dessas duas forças radiais em relação a um eixo na direção z que passa pelo centro de gravidade. Explicitando a velocidade, resultam as equações (11) para a roda dianteira e (12) para a traseira:

$$V_D^2 \leq \left(\frac{p}{b_{CG}} \frac{R}{m} \right) \sqrt{(fN_D)^2 - F_{roda,D}^2} \quad (11)$$

$$V_T^2 \leq \left(\frac{p - b_{CG}}{b_{CG}} \frac{R}{m} \right) \sqrt{(fN_T)^2 - F_{roda,T}^2} \quad (12)$$

Vemos que tanto o coeficiente de atrito (f) quanto o raio da curva (R) são importantes para a velocidade máxima de curva. Quanto menor o atrito e menor o raio de curvatura, menor será a velocidade máxima possível. Importante notar que a força na roda (equação 7) depende do arrasto aerodinâmico (equação 4), que por sua vez depende da velocidade da motocicleta. Logo, no caso geral, as equações (11) e (12) necessitam de uma solução numérica para a obtenção da velocidade máxima de curva.

A diferença entre a roda dianteira na equação (11) e a traseira na equação (12) é causada pela utilização do acelerador e dos manetes de freio (casos em que $F_{roda,D} \neq F_{roda,T}$) e da distribuição da força centrípeta entre as duas rodas, que depende da posição do centro de gravidade. Neste trabalho, escolhemos como velocidade máxima para que a motocicleta consiga realizar a curva o menor valor obtido entre as equações (11) e (12).

No caso de aceleração nula, vemos pela equação (7) que a força nas duas rodas deve ser igual à força resistiva, calculada pela equação (4). Portanto, podemos ver que quanto maiores forem as resistências, maior terá que ser a força na roda e, conseqüente, menor a velocidade com que a moto poderá fazer a curva (equação 11 e 12). É importante notar que mesmo com velocidade constante, o piloto em geral usa o acelerador para que a tração equilibre as resistências, ou então usa o freio, no caso de curva em descida.

Na seção de estudos de casos, vamos usar três modelos de curva baseados nas equações (11) e (12). O primeiro é o modelo de curva sem resistência (CSR) em que consideramos $k_A = C_R = \theta = 0$. Nesse caso, pelas equações (4) e (7), vemos que $F_{res} = F_{roda} = 0$. Então, as equações (11) e (12) se transformam na clássica equação (13) [8].

$$V_{D,T}^2 \leq fRg \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu_D = \mu_T = 0 \\ F_{res} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

No segundo modelo de curva (CRC) consideramos que a resistência aerodinâmica é constante, *i.e.*, usamos uma velocidade de referência para o cálculo de F_{res} na equação (4), o que permite calcular V explicitamente nas equações (11) e (12), já que agora F_{roda} não varia com a velocidade.

O terceiro modelo de curva (CRV), com resistência variável, usa a velocidade real da motocicleta para o cálculo de F_{res} , obrigando que as equações (11) e (12) sejam resolvidas iterativamente, uma vez que $F_{roda} (= F_{res})$ é função da velocidade por causa do arrasto aerodinâmico.

2.4. Desaceleração e distância de frenagem

A desaceleração da motocicleta é calculada pela equação (8), que é a equação (7) alimentada pelas equações (1), (2) e (4). Durante a frenagem, assim como no caso da curva em velocidade constante, consideramos três modelos distintos: sem resistência, resistência constante e resistência variável. Para o modelo de frenagem sem resistência (FSR) e com resistência constante (FRC), consideramos que as forças resistivas (arrasto aerodinâmico em particular) não são função da velocidade, e, portanto, a equação (7) se transforma em uma equação algébrica simples para o cálculo da aceleração. No caso do modelo de frenagem com resistência variável (FRV), a variação da velocidade durante a frenagem implica em uma variação da resistência aerodinâmica, fazendo com que a equação (8) seja uma equação diferencial (aqui resolvida por diferenças finitas).

Considerando o caso específico em que o acelerador não é usado ($\alpha = 0$), que os dois freios são usados com o mesmo coeficiente ($\mu_D = \mu_T$) e que a resistência aerodinâmica é constante (*i.e.*, usando uma velocidade de referência), a equação (8) se transforma na equação (14), que será chamada de modelo de frenagem com resistência constante (FRC).

$$a = -\mu g \cos \theta + \frac{F_{res}}{m} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu = \mu_D = \mu_T \\ F_{res} = cte \end{cases} \quad (14)$$

Simplificando mais ainda, desprezando agora as resistências, obtemos a equação (15) (modelo de frenagem sem resistência, FSR).

$$a = -\mu g \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu_D = \mu_T \\ F_{res} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Para os casos FRC, equação (14), e FSR, equação (15), uma vez determinada a desaceleração (a), a distância de frenagem pode ser determinada pela equação (16), classicamente conhecida como Equação de Torricelli.

$$d_{frenagem} = \frac{v_{ini}^2 - v_{fn}^2}{-2a} \quad a = cte \quad (16)$$

No caso do modelo FRV, em que o valor da aceleração não é constante, a distância de frenagem é calculada resolvendo a equação (8) por diferenças finitas.

Um exemplo de frenagem pode ser visto na Fig. 4, para o caso em que a motocicleta está com velocidade de cruzeiro de 100 km/h e reduz para 60 km/h, sendo a força de frenagem utilizada ao máximo ($\mu_D = \mu_T = f = 0,8$). Temos que, para o caso sem resistência (FSR), a desaceleração é constante com valor de 0,8g, até tornar-se nula ao atingir os

desejados 60 km/h, quando então o piloto desativa o freio. Já para o caso com resistência constante (FRC), a desaceleração é de 0,93g. Para o caso com resistência variável (FRV), o valor da desaceleração varia de 1,06g a 0,96g, já que quando a velocidade diminui, diminui também o arrasto aerodinâmico que auxilia a desaceleração.

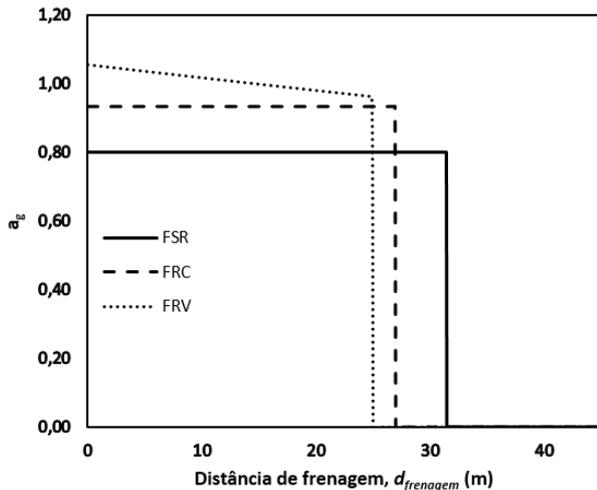


Figura 4 - Desaceleração na frenagem em função da distância. $\mu_D = \mu_T = f = 0,8$. Redução de velocidade de 100 km/h para 60 km/h. São considerados o modelo sem resistência (FSR), resistência constante (FRC) e resistência variável (FRV).

Outro exemplo de frenagem pode ser visto na Fig. 5, para o caso de redução de velocidade com coeficiente de utilização do freio de 0,4 ($\mu_D = \mu_T = f = 0,4$; o que fisicamente é análogo ao uso de 50% do freio com coeficiente de atrito de 0,8). Vemos que, para o caso sem resistência (FSR), a desaceleração é constante com valor de 0,32g. Já para o caso com resistência constante (FRC), a desaceleração é 0,54g, e para o caso com resistência variável (FRV) a desaceleração fica na faixa 0,66g a 0,57g.

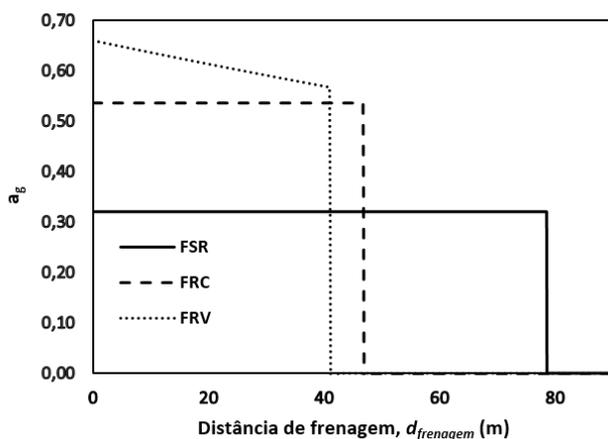


Figura 5 - Desaceleração na frenagem em função da distância. $\mu_D = \mu_T = f = 0,4$. Redução de velocidade de 100 km/h para 60 km/h. São considerados o modelo sem resistência (FSR), resistência constante (FRC) e resistência variável (FRV).

Observa-se então o esperado, que uma menor utilização do freio (por desejo do piloto ou por uma diminuição no coe-

ficiente de atrito entre o pneu e a pista) provoca uma maior distância necessária para a frenagem.

Outra forma de verificar a influência das simplificações nos modelos é fixando a proporção da força do freio dianteiro em relação à força de frenagem total. A Fig. 6 mostra os resultados para o caso em que o motociclista escolhe μ_D e μ_T de forma que 70% da força de frenagem sempre seja proporcionada pela roda dianteira. Por exemplo, se o piloto desejar uma desaceleração de 0,4g, pelo modelo FRC ele terá que usar $\mu_T = 0,22$ e $\mu_D = 0,29$. Já pelo modelo FSR, para a mesma frenagem ($a_g = 0,4g$) esses valores seriam $\mu_T = 0,45$ e $\mu_D = 0,38$.

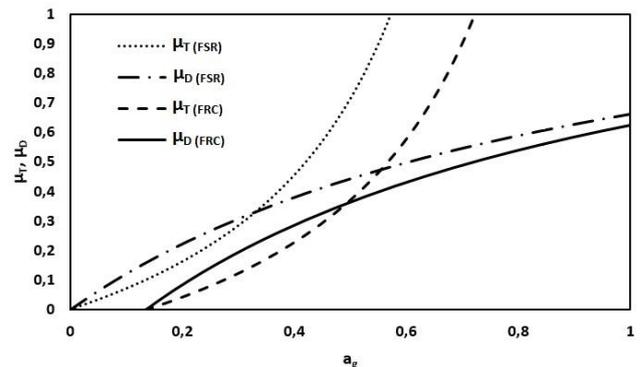


Figura 6 - Uso dos freios dianteiro e traseiro em função da desaceleração desejada. Casos sem resistência (FSR) e resistência constante (FRC) utilizando 70% da força do freio dianteiro.

Assim, podemos concluir que, para um mesmo par de coeficientes de utilização do freio (μ_T e μ_D), o modelo com resistência constante (FRC) apresenta valores de frenagem maiores que o modelo sem resistência (FSR). Isso acontece porque as forças resistivas na equação (7) impõem uma desaceleração ao movimento da motocicleta. Neste caso, a desaceleração adicional causada pelas resistências tem valor aproximado de 0,16g, sendo esse o motivo das curvas do modelo com resistência constante (FRC) não partirem da origem na Fig. 6.

Além da distância de frenagem, que é a distância após o início do acionamento do freio, existe também uma distância percorrida entre o momento em que o piloto observa a placa e o momento em que ele atua sobre o freio da motocicleta. Essa distância é chamada de distância de reação do piloto, e é calculada pela equação (17), levando em conta o tempo de reação δt e a velocidade de cruzeiro (V_{cruz}) em m/s. O CONTRAN [5] considera nos seus cálculos $\delta t = 2,5$ segundos.

$$d_{reação} = \delta t V_{cruz} \quad (17)$$

2.5. Limite de stoppie e técnica de frenagem

Durante a frenagem, um dos limites para que o piloto fique em segurança é o limite de *stoppie*, que é a perda de contato da roda traseira com o chão. Esse limite pode ser determinado calculando o momento em que a normal traseira fica nula na equação (6). Se desconsiderarmos as resistências e considerarmos a mesma utilização dos dois freios,

esse limite é expresso pela equação (18), na qual vemos que o valor máximo do coeficiente de utilização do freio para que não ocorra o *stoppie* é maior no caso de motos com menor altura do centro de gravidade (h_{CG}) ou com centro de gravidade mais deslocado para a traseira (menor valor de b_G , Fig. 1).

$$\mu = \frac{p - b_{CG}}{h_{CG}} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu_D = \mu_T \\ F_{res} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Uma forma alternativa de representar a atuação dos freios é a partir da proporção da força do freio dianteiro (P_D). Por exemplo, considerando um coeficiente de atrito unitário ($f=1$), digamos que uma motocicleta apresenta 1000 N de força de atrito disponível na roda dianteira ($f.N_D$) e 600 N na roda traseira ($f.N_T$). No entanto, durante a frenagem, são utilizados 800 N de força de frenagem na roda dianteira e 420 N na traseira. O coeficiente de utilização do freio (μ) é calculado pela razão da força utilizada e da força disponível na roda, i.e., $\mu_D = 0,8$ ($=800/1000$) e $\mu_T = 0,7$ ($=420/600$). Já a proporção do freio dianteiro (P_D) é calculada pela razão da força utilizada na roda dianteira (800N) e a força total utilizada ($800+420=1220N$), resultando em $P_D = 0,66$. A atuação dos freios pode então ser caracterizada ou pelos dois μ 's ou por um dos dois μ 's juntamente com o P_D .

Manipulando algebricamente as equações anteriores, os coeficientes de utilização do freio (dianteiro e traseiro, μ_D e μ_T) se relacionam com a proporção da força do freio dianteiro (P_D) e com a aceleração (a) pelas equações (19) e (20), respectivamente:

$$P_D = \frac{\mu_D}{\mu_D + \mu_T \left(\frac{C_1 - C_2}{\frac{M_{res}}{mg \cos \theta} - C_1} - 1 \right)} \quad (19)$$

$$a_g = -\frac{a}{g} = \mu_T \cos \theta + \left(\frac{\mu_D - \mu_T}{C_2 - C_1} \right) \left(\frac{M_{res}}{mg} - C_1 \cos \theta \right) + \frac{F_{res}}{mg} \quad (20)$$

Essas equações dependem do termo resistivo M_{res} , dado pela equação (21):

$$M_{res} = mg h_{CG} \sin \theta + k_A h_{cp} (V - W)^2 \quad (21)$$

Nas equações (19) e (20) aparecem ainda dois parâmetros, C_1 e C_2 , que são funções da geometria da motocicleta e da utilização dos freios.

$$C_1 = \frac{\mu_T h_{CG} + b_{CG}}{p - b_{CG}} \quad (22)$$

$$C_2 = \frac{\mu_D h_{CG}}{p - b_{CG}} \quad (23)$$

No caso $\mu_D = \mu_T$, considerando a força de resistência constante, a equação (20) torna-se a equação (14). No caso de resistência nula, torna-se a equação (15).

Já a equação (19) transforma-se na equação (24) para o caso sem resistência e com valores de coeficientes de utilização de freio distintos.

$$P_D = \frac{\mu_D (b_{CG} + h_{CG} \mu_T)}{p \mu_T + b_{CG} (\mu_D - \mu_T)} \quad \{F_{res} = M_{res} = 0 \quad (24)$$

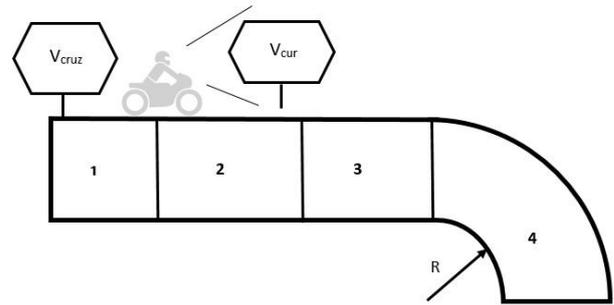


Figura 7 – Movimento completo da manobra. Trecho 1: velocidade de cruzeiro; trecho 2: distância para o piloto reagir; trecho 3: frenagem; trecho 4: curva em velocidade constante.

2.6. Metodologia de estudo da velocidade máxima em curva e de frenagem em linha reta

Para estudar todo o processo de curva de uma motocicleta, analisamos o caso apresentado na Fig. 7. A motocicleta está em velocidade de cruzeiro V_{cruz} no trecho 1. No início do trecho 2 o piloto percebe a placa. Levando em conta o tempo de reação, somente no início do trecho 3 é que o piloto inicia a frenagem, até alcançar a velocidade da curva no início do trecho 4.

Considerando a manobra completa da Fig. 7, queremos estudar (1) a distância mínima antes do início da curva em que o piloto precisa observar a placa para que tenha tempo de reagir e desacelerar, e (2) o valor da velocidade máxima que deve estar escrito na placa para que a motocicleta consiga manter a aderência durante a curva. Em outras palavras, queremos determinar onde deve estar a placa e qual o valor escrito nela.

A motocicleta utilizada para o estudo tem as características apresentada na Tabela 1.

A pista tem inclinação (θ) de 5° e o vento tem velocidade (W) contrária de -5 km/h. No trecho 1, a motocicleta tem velocidade de cruzeiro (V_{cruz}) de 100 km/h. Essa velocidade irá interferir na distância de frenagem, como apresentado na equação (16). Já no início do trecho 2, o piloto visualiza a placa de redução, levando uma certa distância até que inicie a frenagem, como calculada pela equação (17).

Tabela 1 – Características físicas e geométricas da motocicleta

Características	
m	230 kg
P	22,06 kW
k_A	0,4 kg/m
C_R	0,02
h_{CG}	0,75 m
h_{CP}	0,9 m
p	1,4 m
b_{CG}	0,73 m

No trecho 3, com o manete de freio já acionado, a motocicleta sofre a desaceleração. Essa reação de frenagem é calculada utilizando as equações de desaceleração, considerando ainda os limites de *stoppie* e de perda de aderência. Nesta análise, usamos o modelo de frenagem com força de resistência constante (FRC). Essa escolha foi feita porque permite o cálculo da dinâmica da moto sem a necessidade da solução da equação diferencial, equação (8), ao mesmo tempo em que apresenta resultados parecidos com o que obteríamos com aquele modelo mais completo (Fig. 4 e 5).

Por fim, no trecho 4, a motocicleta deve apresentar velocidade menor ou igual à velocidade máxima possível (equações 11, 12 e 13) permitida para fazer a curva sem perder a aderência.

3. Resultados e discussões

A análise do movimento da motocicleta será apresentada no sentido inverso ao movimento, partindo do trecho 4 (cálculo da velocidade máxima na curva) e finalizando no trecho 2 (distância de percepção da placa). Nesses estudos, consideramos a influência da pista (coeficiente de atrito, raio de curvatura) e da técnica de frenagem usada pelo piloto. Todas as equações estão escritas no SI. No entanto, alguns gráficos e tabelas apresentam os resultados transformados para unidades mais comuns (*e.g.*, km/h).

3.1. Velocidade máxima na curva e raio de curvatura mínimo

A Tabela 2 apresenta a velocidade máxima da motocicleta na curva em função do raio de curvatura e do coeficiente de atrito f (0,4 para pista molhada; 0,8 para pista seca). A velocidade máxima é dada pela equação (13) desconsiderando as resistências, e pelo mínimo entre as equações (11) e (12) quando consideramos as resistências.

Pelo modelo sem resistência (CSR), a velocidade máxima na curva pode ser maior que nos modelos com resistência, pois a motocicleta não precisa de força na roda para vencer as forças contrárias ao movimento, sobrando mais do atrito para a força centrípeta. Para o modelo sem resistência, o limite de velocidade é o mesmo para as duas rodas (D,T). No caso dos modelos com resistência (constante, CRC, ou variável, CRV), as velocidades máximas são diferentes para as duas rodas. Na Tabela 2, a roda que perde primeiro

a aderência, e que portanto limita a velocidade da moto, é indicada no índice superior (D ou T). Por exemplo, para o modelo CRV, a moto sempre perde a traseira em pista molhada ($f=0,4$) e perde a dianteira em pista seca ($f=0,8$), para qualquer raio de curvatura. Já no caso CRC, a moto estudada sempre é limitada pela perda de aderência na dianteira.

Tabela 2 – Velocidade máxima de entrada na curva em função do raio de curvatura e do coeficiente de atrito. Modelos sem resistência (CSR), resistência constante (CRC) e resistência variável (CRV).

R [m]	f	V [km/h]		
		CSR	CRC	CRV
340	0,4	132 ^(D, T)	123 ^(D)	87 ^(T)
	0,8	186 ^(D, T)	174 ^(D)	139 ^(D)
200	0,4	101 ^(D, T)	94 ^(D)	79 ^(T)
	0,8	143 ^(D, T)	133 ^(D)	116 ^(D)
110	0,4	75 ^(D, T)	70 ^(D)	65 ^(T)
	0,8	106 ^(D, T)	99 ^(D)	92 ^(D)

Em geral, como esperado, quanto menor o coeficiente de atrito e menor o raio de curvatura, menor a velocidade máxima na curva. Outro padrão na Tabela 2 é que o modelo CRV é mais conservativo que o modelo CRC, que por sua vez é mais conservativo que o CSR.

A Tabela 3 apresenta a mesma análise, mas agora especificando a velocidade desejada e calculando o raio mínimo de curvatura permitido para cada condição. Para o modelo CRV, no caso de baixo atrito ($f=0,4$), a moto não tem aderência a 100 km/h mesmo em linha reta, por isso o valor do raio de curvatura mínimo não é indicado na Tabela 3.

Tabela 3 – Raio mínimo em função da velocidade e do coeficiente de atrito. Modelos sem resistência (CSR), resistência constante (CRC) e resistência variável (CRV)

V (km/h)	f	R (m)		
		CSR	CRC	CRV
100	0,4	196 ^(D, T)	226 ^(D)	-
	0,8	98 ^(D, T)	113 ^(D)	137 ^(D)
80	0,4	125 ^(D, T)	144 ^(D)	216 ^(T)
	0,8	62 ^(D, T)	72 ^(D)	80 ^(D)
60	0,4	71 ^(D, T)	81 ^(D)	89 ^(T)
	0,8	35 ^(D, T)	41 ^(D)	42 ^(D)

3.2. Limite na frenagem: *stoppie*

Agora passamos a estudar o Trecho 3, analisando primeiramente em que caso o limite da frenagem se dá por travamento nas rodas ou por *stoppie* (perda do contato da roda traseira com o chão). Neste caso, usamos o modelo com resistência constante (FRC) e o mesmo coeficiente de utilização do freio nas duas rodas ($\mu=\mu_D=\mu_T$). A equação (14) é usada para o cálculo da (des)aceleração, e as

equações (5) e (6) para o cálculo da normal traseira. A Fig. 8 mostra que, até limite $\mu = 0,92$ (ponto A), não há levantamento da roda traseira ($N_T > 0$). Logo, o limite da frenagem é dado pela perda de aderência. Caso o coeficiente de utilização do freio seja maior que 0,92 (desde que o atrito permita), a moto irá girar para frente (*stoppie*) antes de perder a aderência. Quando ocorre o *stoppie*, não há mais sentido em falar em μ_T , já que agora a normal traseira é nula.

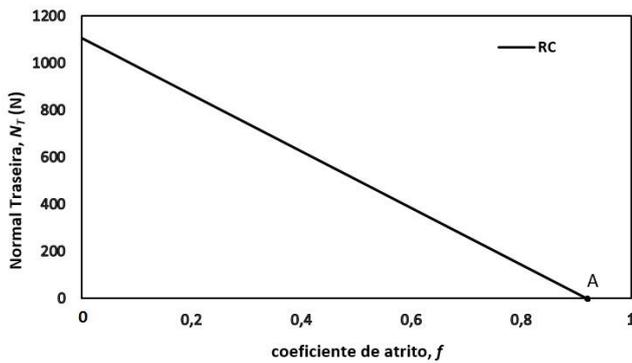


Figura 8 – Variação da normal traseira em função do coeficiente de utilização do freio ($\mu_D = \mu_T = f$). Modelo com resistência constante (FRC) em uma redução de 100 km/h a 60 km/h

3.3. Influência da técnica de frenagem na desaceleração

Até este momento, todas as análises (com exceção da Fig. 6) foram feitas considerando $\mu_D = \mu_T$. A partir de agora, iremos estudar a influência da técnica de frenagem na pilotagem. A Fig. 9 apresenta as desacelerações que são obtidas para cada par μ_D, μ_T pela equação (20). São indicados, também, os valores P_D (Equação 19) para cada situação. Cossalter [8] apresenta uma figura parecida com a Fig. 9, mas para o caso sem resistência e geometria um pouco diferente.

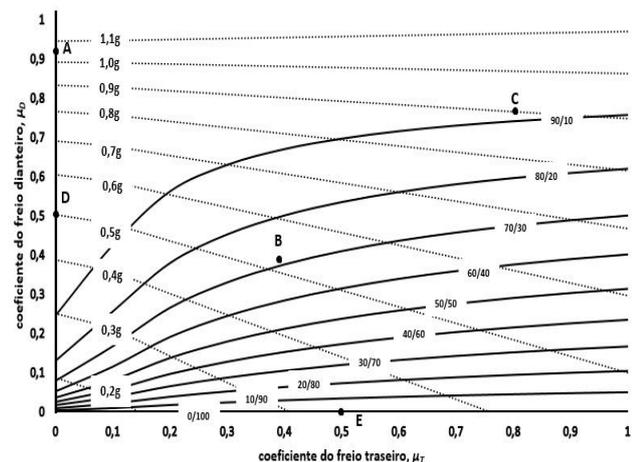


Figura 9 – Curvas de desaceleração e distribuição de frenagem (P_D/P_T). Modelo com resistência constante (FRC) para uma redução de 100 km/h para 60 km/h

O ponto A é o mesmo apresentado na Fig. 7 e afirma que para valores $\mu_D = 0,92$ e $P_D = 1$ (i.e., curva coincidente

com o eixo y; $\mu_T = 0$) a motocicleta apresenta a desaceleração de 1,05g.

No ponto B, temos os valores de $\mu_D = \mu_T = 0,4$, que corresponde a uma frenagem máxima em pista úmida ($f = 0,4$) ou a utilização de 50% do freio em pista seca ($f = 0,8$). Para esse caso, $P_D = 0,72$, e a desaceleração é de 0,53g.

Quando a motocicleta utiliza 100% da capacidade de frenagem em pista seca ($f = \mu_D = \mu_T = 0,8$), ela consegue uma desaceleração de 0,93g, com $P_D = 0,92$, como mostra o ponto C.

Os pontos D e E mostram a diferença entre o uso de apenas um dos freios (no caso $\mu=0,5$). Para o uso único do dianteiro (Ponto D, $\mu_D=0,5$, $P_D = 1$), a desaceleração é de 0,5g. Já usando apenas o freio traseiro (Ponto E, $\mu_T=0,5$, $P_D = 0$), a desaceleração é bem menor, 0,35g. O freio dianteiro permite uma frenagem melhor porque, ao desacelerar, há uma transferência de peso para a roda dianteira, o que aumenta a normal e, conseqüentemente, a força de atrito disponível. No entanto, embora o travamento de qualquer uma das rodas seja perigoso, o travamento da roda dianteira é bem mais desestabilizante para movimento [10], merecendo bastante cuidado por parte do piloto.

3.4. Técnica ótima para distância de frenagem mínima

Na Fig. 10, podemos escolher a técnica de frenagem que possibilita a menor distância de frenagem. Os pontos analisados são os mesmos da Fig. 9. Na Fig. 10, a linha contínua mostra a distância mínima de frenagem para cada uso de freio ($\mu_D = \mu_T = f$). A linha tracejada mostra a qual deve ser a distribuição das forças, P_D , para aquela frenagem ótima.

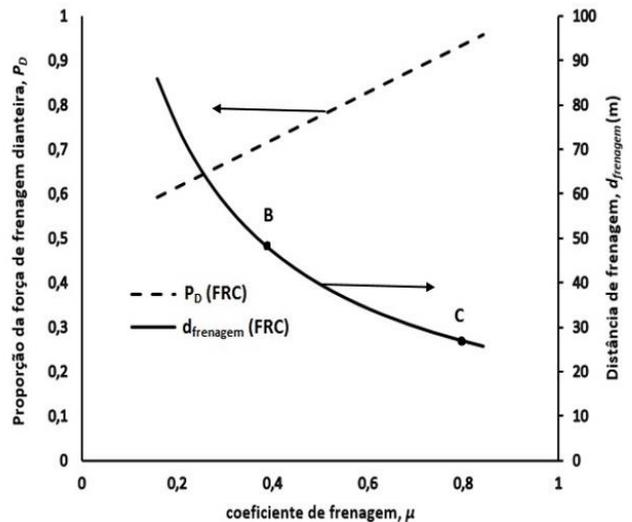


Figura 10 – Distância de frenagem mínima e P_D para $\mu_D = \mu_T = f$. Modelo de resistência constante (FRC) para redução de 100 km/h para 60 km/h

Para o ponto B, caso de pista úmida ($\mu_D = \mu_T = 0,4$), a distância mínima de frenagem que a motocicleta deve ter para reduzir a velocidade de 100 km/h a 60 km/h é aproximadamente 47 m. Já no ponto C, caso de pista seca ($\mu_D = \mu_T = 0,8$), a distância mínima de frenagem necessária é

aproximadamente 27 m. O valor de P_D ótimo para o caso de pista úmida é 0,72, enquanto no caso de pista seca é 0,92. Ou seja, quanto maior o coeficiente de atrito maior a importância relativa do freio dianteiro. Observamos então que não é possível recomendar uma técnica única de frenagem para todos os casos.

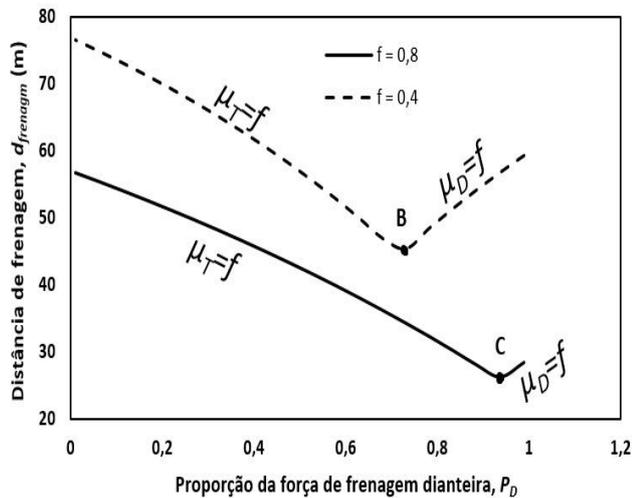


Figura 11 – Distância mínima de frenagem em função do P_D para $f = 0,4$ e $f = 0,8$. Modelo de resistência constante (FRC) para redução de 100 km/h para 60 km/h.

3.5. Influência da técnica na distância de frenagem

A Fig. 11 apresenta a distância de frenagem para várias distribuições de força de frenagem, P_D , considerando pista seca ($f=0,8$) e pista úmida ($f=0,4$). Nas duas curvas percebe-se um ponto de mínimo (frenagem ótima), à esquerda do qual a frenagem é limitada pela perda de aderência da roda traseira e à direita pela roda dianteira. Duas observações são importantes. Primeiro, como já discutido, o valor ótimo de P_D depende do coeficiente de atrito. Segundo, uma técnica incorreta de frenagem pode significar uma distância muito maior para a diminuição da velocidade. Na Fig. 11 estão indicados os casos B e C (ótimos) que já haviam aparecido nas Figs. 9 e 10.

3.5. Distância da placa

Nesta subseção estudamos o posicionamento da placa de velocidade. Consideramos que o piloto, inicialmente em velocidade de cruzeiro de 100 km/h, avista a placa indicando a existência de uma curva. O raio de curvatura neste caso é de 110m. Então, pela Tabela 2, sabemos que 60 km/h é uma velocidade segura tanto com baixo quanto com alto atrito. Pelo modelo CRV, que é o mais conservativo, a moto sairia de traseira apenas se estivesse acima de 65 km/h com $f=0,4$, e sairia de frente com $f=0,8$ somente acima de 92 km/h.

Para essa condição ($V_{cruz} = 100 \text{ km/h} = 27,8\text{m/s}$), utilizando a equação (17) para calcular a reação do piloto, a distância percorrida até o início da frenagem é de 69 m.

Para avaliar a distância de frenagem da motocicleta, consideramos duas situações: $\mu=0,4$ (que pode significar

100% do freio em pista úmida ou 50% do freio em pista seca) e $\mu=0,8$ (100% do freio em pista seca). As distâncias são retiradas da Fig. 10 ($\mu_D = \mu_T = \mu$).

A Tabela 4 mostra a distância de reação do piloto, a distância de frenagem da motocicleta, e a soma das duas, que é a distância mínima na qual a placa precisa ser percebida. Para as duas condições de atrito estudadas, consideramos que o piloto ajusta o uso do freio (P_D) de forma a obter a melhor frenagem possível ($\mu_D = \mu_T = \mu = f$).

Tabela 4 – Distância de observação da placa em relação ao início da curva para P_D ótimo ($\mu_D = \mu_T = \mu = f$). Redução 100 km/h a 60 km/h.

R (m)	μ	Distância (m)		
		Reação	Frenagem	Placa
110	0,8	69	27	96
	0,4	69	47	116

Para essa redução de velocidade, o CONTRAN [5] recomenda que a distância de frenagem deve ser considerada 123 m (usando Torricelli para uma redução de 100 km/h para 60 km/h com desaceleração de 2 m/s^2). Esse cálculo do CONTRAN [5] corresponde ao nosso modelo de frenagem sem resistência (FSR), equação (16). Portanto, vemos que essa recomendação é segura, principalmente porque o piloto irá observar a placa antes de chegar ao local onde está posicionada. O modelo com resistência variável (FRV) apresenta uma distância de frenagem de 25 m, valor bem parecido com o obtido pelo modelo FRC (27 m, Tabela 4). O modelo sem resistência resulta em uma distância de frenagem de 32 m. Portanto, dos três modelos, o modelo sem resistência (FSR) é o mais conservativo.

4. Conclusões

O trabalho mostrou algumas considerações que devem ser feitas no cálculo da distância de frenagem e da velocidade máxima de curva. Vimos que, no caso da curva, do ponto de vista da segurança, é importante levar em conta as resistências. Já no caso de frenagem em linha reta, o modelo sem resistência é mais conservativo, podendo ser utilizado. Outro resultado importante é que os modelos com resistência constante ou com resistência variável apresentam resultados parecidos, permitindo o uso do primeiro, que não necessita a solução de uma equação diferencial.

Do ponto de vista físico, como esperado, determinamos que quanto menor o atrito e menor o raio de curvatura, menor a velocidade máxima possível na curva. Ainda estudamos os vários limites durante curvas e frenagens, que podem ser a perda de aderência na roda dianteira, a perda de aderência na roda traseira, ou a perda de contato da roda traseira (*stoppie*).

Destacamos que o modelo matemático apresentado pode ser usado também no caso de acelerações, desde que seja considerada a variação da potência máxima do motor, P , com a rotação do motor.

Vimos também como a técnica de frenagem (proporção dos freios dianteiro e traseiro, P_D) influencia na desaceleração e, conseqüentemente, na distância de frenagem. Um

ponto importante é que a técnica ótima de frenagem depende do coeficiente de atrito, o que desaconselha a recomendação de uma técnica universal para todas as situações.

Por fim, apresentamos uma metodologia para o cálculo da posição e da velocidade máxima de uma placa em função das condições de atrito, do raio de curvatura e da utilização do freio. Esses cálculos demonstraram que a recomendação do CONTRAN [5] é segura.

Os modelos apresentados neste trabalho são introdutórios. Em passos seguintes da carreira de engenheiro de motocicletas, o estudante poderá considerar outros fenômenos importantes. Para tanto, citamos alguns trabalhos mais avançados. Corno et al. [11] apresentam uma discussão parecida com a aqui apresentada, levando em conta a transferência de peso, o limite entre a perda de aderência e o *stoppie*, e a influência do arrasto aerodinâmico. Adicionalmente, usando um pacote comercial de simulação, eles estudam outros fenômenos mais complexos, como a variação do coeficiente de atrito com o deslizamento da roda e a influência do movimento da suspensão na frenagem. Toyofuku et al. [12] mostram os resultados de experimentos de frenagem, comparando pilotos com e sem experiência. Baumann et al. [13] apresentam um método de análise de frenagem durante a curva, manobra que pode ser facilitada no caso de motocicletas elétricas com tração nas duas rodas. Özkan et al. [14] mostram uma dimensão que não foi considerada neste trabalho, que é o comportamento do piloto. Eles estudam erros de tráfego, erros no controle da motocicleta, violações de limite de velocidade, realização de manobras perigosas e o uso de equipamentos de segurança. Vlahogianni et al. [15] discutem os riscos específicos do uso das motocicletas. Em particular, destacamos a seção em que eles apresentam os riscos associados à infraestrutura, que incluem o tipo de piso, geometria das estradas, visibilidade do piloto e perda de controle durante frenagens e curvas.

Um ponto muito importante a destacar é que no cálculo da distância mínima de frenagem e da velocidade máxima de curva, consideramos os casos limites. Na prática, com a exceção de pilotos profissionais, é muito difícil que um piloto consiga conduzir a motocicleta nesses casos extremos. Ainda, mesmo um piloto profissional, no dia a dia, não usa a motocicleta em situação limite nas curvas e frenagens. Outro ponto importante é que os valores calculados dependem fortemente dos parâmetros utilizados, não podendo, portanto, ser utilizados como regras gerais para qualquer caso.

Voltando ao ensino na graduação, exemplos como o aqui apresentado levam cerca de seis horas para serem construídos na disciplina de Engenharia da Motocicleta. Incluem a apresentação da teoria, a construção do modelo físico e a análise dos resultados. Em geral, um exemplo de seis horas poderia ser considerado um tempo elevado para manter a atenção dos estudantes, mas, por se tratar de um fenômeno atraente e de fácil visualização, os estudantes apresentam um interesse contínuo, participando ativamente durante a formulação das hipóteses do modelo, e, posteriormente, nas discussões das consequências do movimento modelado. Ainda, ao final da disciplina, os estudantes mostram-se bastante motivados tanto para estender o mo-

delo matemático para outras situações quanto para elaborar relatórios finais em forma de pequenas monografias.

Agradecimentos

Os autores agradecem à UFPE pela infraestrutura e à CAPES pela bolsa de mestrado.

Referências

- [1] H. H. Hurt, J. V. Ouellet, D. R. Thom, *Motorcycle Accident Cause Factors and Identification of Countermeasures, vol. I*, Traffic Safety Center, University of Southern California, Los Angeles, <http://bit.ly/2fw8fTA> (1981).
- [2] ACEM (Association of European Motorcycle Manufacturers), *Motorcycle Accidents in Depth Study (MAIDS): In-depth Investigations of Accidents Involving Powered Two-wheelers*, <http://www.maids-study.eu/>, (2009).
- [3] OMS (Organização Mundial de Saúde), *Global Status Report on Road Safety 2013*, <http://bit.ly/1RjzbQC> (2013).
- [4] E. A. Vasconcellos. *Risco no Trânsito, Omissão e Calamidade: Impacto do Incentivo à Motocicleta no Brasil*, Ed. do Autor, São Paulo, <http://bit.ly/2gFavd4> (2013).
- [5] CONTRAN (Conselho Nacional de Trânsito), *Manual de Sinalização de Trânsito, Volume II, Sinalização Vertical de Advertência*, <http://bit.ly/2g9lgRo> (2007).
- [6] Código de Trânsito Brasileiro, *Lei Nº 9.503, de 23 de setembro de 1997, Capítulo XV*, <http://bit.ly/1i54cEq> (1997).
- [7] Honda Motocicletas do Brasil Ltda., *Pilotagem Consciente: Frenagem*, <http://bit.ly/2fKknOd> (acesso em 24.09.2016).
- [8] V. Cossalter, *Motorcycle Dynamics*, (LULU, 2006), 2nd ed.
- [9] D. G. Wilson, *Bicycling Science*, (MIT Press, Cambridge, 2004), 3rd ed.
- [10] G. Cocco, *Motorcycle Design and Technology*, (Giorgio Nada Editore, Milão, 2013).
- [11] M. Corno, S. M. Savaresi, M. Tanelli, L. Fabbri, *Control Engineering Practice* **16**, 644-657, <http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2007.08.001> (2008).
- [12] Y. Toyofuku, K. Matsushima, Y. Irie, H. Yonezawa, K. Mizuno, *JSAE Review* **15**, 223-228, <http://bit.ly/2fKm1zu> (1994).
- [13] M. Baumann, T. Bächle, M. Buchholz, K. Dietmayer, *IFAC-PapersOnLine* **49**, 291-296, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.08.044> (2016).
- [14] T. Özkan, T. Lajunen, B. Doğruyol, Z. Yıldırım, A. Çoymak, *Accident Analysis & Prevention* **49**, 124-132, <http://dx.doi.org/10.1016/j.aap.2011.03.009> (2012).

- [15] E. I. Vlahogianni, George Yannis, John C. Golias, *Accident Analysis & Prevention* **49**, 12-22, <http://dx.doi.org/10.1016/j.aap.2012.04.009> (2012).