

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO**

ALMIR DE LIMA SERPA

**O SABER A SER ENSINADO SOBRE MEDIÇÃO DE COMPRIMENTOS COM O
USO DO PAQUÍMETRO EM UM CURSO PROFISSIONALIZANTE**

**RECIFE
2016**

ALMIR DE LIMA SERPA

**O SABER A SER ENSINADO SOBRE MEDIÇÃO DE COMPRIMENTOS COM O
USO DO PAQUÍMETRO EM UM CURSO PROFISSIONALIZANTE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima
Co-orientadora: Prof^a. Dr^a. Paula Moreira Baltar Bellemain

**RECIFE
2016**

Catálogo na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S486s	Serpa, Almir de Lima. O saber a ser ensinado sobre medição de comprimentos com o uso do paquímetro em um curso profissionalizante / Almir de Lima Serpa – 2016. 88 f. ; 30 cm. Orientador: Paulo Figueiredo Lima. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016. Inclui Referências e Anexos. 1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Metrologia. 3. Medição. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Lima, Paulo Figueiredo. II. Título. 372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2016-37)
-------	---

ALMIR DE LIMA SERPA

**O SABER A SER ENSINADO SOBRE MEDIÇÃO DE COMPRIMENTOS COM O
USO DO PAQUÍMETRO EM UM CURSO PROFISSIONALIZANTE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 09/03/2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dr^a. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dr^a. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora Externa)
Universidade de Pernambuco

À Arthur Serpa e Maria das Dores, por me ensinarem à ética, o respeito, a dedicação e a humildade como elementos de um conjunto básico ao perfil de um homem. Sobretudo, nesse momento da minha educação que, se revelam suas virtudes meus pais, obrigado!

Aos meus filhos: Arthur Neto e Alison Henrique pela paciência e apoio nos momentos cruciais da pesquisa, compreendendo o sacrifício que surge após uma árdua escolha; ser professor num país que desrespeita o profissional de Educação.

AGRADECIMENTOS

Á todos que direta e indiretamente participaram da finalização desse trabalho, em especial ao meu orientador Professor Paulo Figueiredo Lima e a co-orientadora Professora Paula Moreira Baltar a quem devo enorme admiração e respeito. E que, de forma justa, contribuíram efetivamente para os ensinamentos acadêmicos.

As professoras Rosinalda Aurora Melo Teles e Professora Verônica Gitirana participantes da banca de seleção para o Mestrado no 2013.

As professoras Rosinalda Aurora Melo Teles e Professora Marilene Rosa (UPE) examinadoras da banca de defesa do Mestrado no 2016.

Aos colegas de turma EDUMATEC (2014) pelos momentos de aprendizagem durante o curso.

Á todos que fazem parte da Secretaria do EDUMATEC – UFPE pela paciência e disposição em ajudar sempre.

EPÍGRAFE

Existe apenas um bem, o saber, e apenas um mal, a ignorância. (Sócrates)

RESUMO

O objetivo desta dissertação foi investigar o ensino da medição de comprimentos para estudantes da disciplina Metrologia em um curso profissionalizante do Programa Nacional de Ensino Tecnológico – PRONATEC, sob responsabilidade do Ministério da Educação – MEC (BRASIL, 2011). Tais alunos estão, simultaneamente, matriculados em uma escola pública do ensino médio regular da Região Metropolitana do Recife. Nessas escolas, como se sabe, eles estudam as disciplinas Matemática e Física. Além disso, escolhemos focalizar nosso trabalho no ensino do uso do paquímetro, dispositivo amplamente utilizado nas medições de comprimento, no âmbito da indústria, dos serviços profissionais e nas ciências. O quadro teórico adotado é a *transposição didática* (Chevallard, 1991). A medição de comprimento requer a consideração de vários conceitos matemáticos, entre os quais o de número racional (a medida de comprimento) bem como o da incerteza do resultado dessa medição (o “erro de medida”). Optamos por investigar materiais didáticos disponíveis para os estudantes do citado curso, em particular duas apostilas de Metrologia e as coleções de Matemática de Física. Esses materiais foram analisados do ponto de vista de se constituírem um dos elementos que cumprem o papel de meios da transposição didática dos saberes em jogo. A análise dos dados obtidos revelou vários pontos em que o saber estabelecido no campo das grandezas e da medição de grandezas é abordado de modo inadequado, nos materiais didáticos examinados. Isso conduz à hipótese de que fica comprometida nesses materiais uma transposição didática que se apresente como um instrumento eficaz de aprendizagem dos estudantes.

Palavras-chave: Medição de Comprimentos. Livro Didático. Paquímetro. Transposição Didática. Ensino Profissionalizante.

ABSTRACT

The aim of this work was to investigate the teaching of length measurement for students Metrology course in a course of the National Technological Education Program - PRONATEC, under the Ministry of Education - MEC (BRAZIL, 2011). Such students are simultaneously enrolled in a public school in regular high school in the Metropolitan Region of Recife. In these schools, as we know, they study subjects Mathematics and Physics. In addition, we chose to focus our work in teaching the use of vernier caliper, widely used device for length measurements in the industry, professional services and science. The theoretical framework is the didactic transposition (Chevallard, 1991). The length measurement requires consideration of various mathematical concepts, including the rational number (gauge length) as well as the uncertainty of the result of measurement (the "measurement error"). We chose to investigate teaching materials available to students of that course, in particular two booklets Metrology and collections of Mathematical Physics. These materials were analyzed from the point of view of constituting one of the elements that play the role of means of didactic transposition of knowledge into play. The data analysis revealed several points where the established knowledge in the field of quantities and measured variables is addressed improperly in teaching materials examined. This leads to the hypothesis that is compromised in these materials a didactic transposition that is presented as an effective learning tool for students.

Keywords: Lengths measurement. Textbook. Caliper. Didactic Transposition. Vocational Education.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	11
2. BREVE HISTÓRICO DOS MARCOS INSTITUCIONAIS E LEGAIS DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL NO BRASIL.....	14
2.1. Os primórdios.....	14
2.2. O Surgimento do Sistema S.....	15
2.3. A integração do ensino Médio e do ensino profissional.....	16
3. A IMPORTÂNCIA DO PAQUÍMETRO.....	20
3.1. A Metrologia: uma visão geral.....	20
3.2. O paquímetro.....	23
4. PRESSUPOSTOS NO CAMPO DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA....	26
4.1. Discussão preliminar.....	26
4.2. A transposição didática.....	27
4.3. A transposição didática e o objetivo desta pesquisa.....	29
5. GRANDEZAS E MEDIDAS NA MATEMÁTICA ESCOLAR.....	31
5.1. Um modelo da didática da matemática.....	31
5.2. Grandezas e Medidas em documentos curriculares.....	33
5.3. O Guia do livro Didático do PNLD 2015.....	34
6. GRANDEZAS E MEDIDAS NA METROLOGIA.....	38
6.1. Alguns conceitos básicos da metrologia.....	38
6.2. Um experimento de medição de comprimento.....	43
6.3. Medição de comprimentos com um paquímetro.....	47
6.4. Tipos de paquímetros.....	52
7. OBJETIVOS DA PESQUISA.....	54
7.1. Objetivo geral.....	54
7.2. Objetivos específicos.....	54
8. O MÉTODO.....	55
8.1. Descrição geral da abordagem metodológica.....	55
8.2. Os elementos visados na pesquisa.....	56
8.3. A importância do Livro Didático.....	57
8.4. Breves considerações sobre o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD.....	57
8.5. Os livros didáticos do PNLD analisados.....	60
8.6. A apostila de metrologia.....	61
8.7. Campos de conceitos matemáticos e TD.....	61
9. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....	63
9.1. Análise da Coleção A: Matemática.....	63
9.2. Análise da Coleção B: Física.....	69
9.3. Análise das apostilas de Metrologia.....	74
9.4. Matemática aplicada.....	80
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	82
REFERÊNCIAS.....	84
ANEXOS.....	87

1. INTRODUÇÃO

O objetivo desta dissertação é investigar o ensino da medição de comprimentos com o emprego do paquímetro para estudantes de um curso profissionalizante. Adota-se para suporte da pesquisa a teoria da transposição didática, construto teórico proposto por Chevallard (1991).

Como consequência, analisaremos alguns materiais didáticos pertencente aos cursos do Programa Nacional de Ensino Tecnológico - PRONATEC, cujos estudantes da disciplina de metrologia estão matriculados, em concomitância nas escolas públicas do nível médio da Região Metropolitana do Recife e no Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial - SENAI.

Esses estudantes fazem parte do referido Programa (PRONATEC), o qual está sob responsabilidade do Ministério da Educação – MEC (BRASIL, 2011):

O Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego (Pronatec) foi criado pelo Governo Federal, em 2011, por meio da Lei 11.513/2011, com o objetivo de expandir, interiorizar e democratizar a oferta de cursos de educação profissional e tecnológica no país, além de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino médio público (BRASIL, 2011, p. 01).

Outros esclarecimentos sobre nosso local de investigação podem ser lidos, ainda, em Brasil (2011):

O Pronatec busca ampliar as oportunidades educacionais e de formação profissional de qualificação aos jovens, trabalhadores e beneficiários de programas de transferência de renda (BRASIL, 2011, p. 01).

A expressão formação profissional, usada aqui, diferencia-se da formação de nível técnico e profissionalizante, em especial no que refere à resolução nº 06 de 20 de setembro de 2012, que traz em suas disposições preliminares a definição das diretrizes curriculares nacionais para a educação profissional e técnica de nível médio. Assim, a resolução¹ determina em seu artigo 3º que a Educação Técnica Profissional de Nível Médio será desenvolvida na forma articulada podendo ser: integrada, ou concomitante a essa etapa da Educação Básica.

Conforme Brasil (2012), temos que:

¹ Resolução CNE/CBE/06/2012 – publicada no Diário Oficial da União, Brasília, 21 de setembro de 2012, seção 1 p. 22.

Os cursos, financiados pelo Governo Federal, são ofertados de forma gratuita por instituições da Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica e das redes estaduais, distritais e municipais de educação profissional e tecnológica. Também são ofertantes as instituições do Sistema S, como o SENAI, SENAT, SENAC e SENAR. A Partir de 2013, as instituições privadas, devidamente habilitadas pelo Ministério da Educação, também passaram a ser ofertantes dos cursos do Programa.

De 2011 a 2014, por meio do Pronatec, foram realizadas mais de 8 milhões de matrículas, entre cursos técnicos e de formação inicial e continuada (BRASIL, 2012, p. 03).

O curso de Educação Técnica Profissional de Nível Médio a que nos referimos possui em sua matriz curricular a disciplina de metrologia e, é ensinada no Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial – SENAI, entidade do denominado Sistema S. Quanto às escolas públicas, elas são as várias instituições do ensino médio que fornecem os estudantes para curso que contém essa disciplina e estão matriculados.

De início, vale mencionar que o presente trabalho está em consonância com os objetivos do Programa de Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – EDUMATEC (2014):

[...] Estudos relativos ao funcionamento da sala de aula de matemática buscando compreender os fenômenos didáticos relacionados ao ensino aprendizagem de matemática, para todos os níveis de ensino² [...] (EDUMATEC, 2014).

O presente trabalho iniciou-se por uma pesquisa documental sobre as instituições e os marcos legais relacionados com a formação profissionalizante no Brasil. Tal levantamento é descrito de modo resumido no Capítulo 1.

No Capítulo 2, procura-se justificar a escolha do paquímetro como instrumento de medição privilegiado no trabalho. Destaca-se, também, que a disciplina metrologia faz parte de um grande número de cursos técnicos e profissionalizantes e, nessa disciplina, é sempre ensinado o emprego desse instrumento de medição, em virtude de seu uso frequente nas práticas profissionais.

Adota-se no presente estudo o suporte teórico da transposição didática, conceito do campo da didática da matemática que tem no pesquisador francês Yves

² Disponível em: <http://www.gente.eti.br/edumatec>. Acesso em: 07 de fevereiro de 2015.

Chevallard o seu proponente. Uma descrição sucinta dessa teoria compõe o Capítulo 3.

Em consonância com o quadro teórico adotado, dedica-se o Capítulo 4 ao estudo dos conceitos matemáticos envolvidos no ensino da medida de comprimentos como parte do estudo mais geral do campo das grandezas e medidas no contexto da Educação Matemática, seja nas pesquisas na didática desses conceitos, seja nas recomendações de documentos oficiais.

O Capítulo 5 é voltado para o estudo de conceitos básicos da metrologia e para os pormenores do uso do paquímetro como dispositivo de medição de comprimentos. Entre esses conceitos destacam-se o de grandeza, medição de uma grandeza, unidade de medida, número racional, entre outros.

No Capítulo 6, são apresentados os objetivos geral e específicos do presente trabalho.

Os métodos e as etapas da pesquisa são descritos no Capítulo 7. Ainda no Capítulo 7, apresentam-se as justificativas da escolha do material didático disponível para os sujeitos da pesquisa – livros didáticos e apostila – considerando esses materiais como elementos importantes da transposição didática.

No Capítulo 8 são descritos os dados obtidos na pesquisa e, simultaneamente, apresenta-se a análise desses dados, à luz da fundamentação teórica adotada.

Encerra-se a presente dissertação com as considerações finais, que devem indicar de modo sumário os resultados da investigação e apontar as potencialidades e limitações desta investigação, bem como, a proposição de novos estudos.

2. BREVE HISTÓRICO DOS MARCOS INSTITUCIONAIS E LEGAIS DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL NO BRASIL

1.1. Os primórdios

Segundo Fonseca (1961) a formação do trabalhador no Brasil já existia no momento em que se usava mão de obra dos aprendizes de ofícios, como eram chamados os índios e os escravos.

Fato observado durante a corrida pelo ouro na região do atual estado das Minas Gerais, essa região, trouxe um novo tipo de ensino profissionalizante. Devido a essa necessidade, surge então, a criação das casas de moeda, chamadas, também de casas de fundição, nas quais se exigiam trabalhadores com habilidades específicas e diferenciadas das profissões comuns à época.

Consagra-se assim, o processo de ensino especializado para os filhos dos que já trabalhavam nessas casas, com a ressalva de que só podiam aprender o ofício; os filhos de homens brancos.

Todos os fatos ocorrem num período em que se inicia a criação da capitania denominada *São Paulo e Minas de Ouro (1709)*, e ficou marcado por inovações e por avanços na formação dos aprendizes que contribuíram para novas profissões técnicas.

Em 1808, com a chegada de D. João VI ao Brasil, surge uma nova fase em que foram criados centros de formação de aprendizes, chamados de Centro de Aprendizes de Ofícios nos Arsenais da Marinha do Brasil.

Sobre isso, Crudo (1999) relata que:

Pelo regulamento, somente meninos órfãos, abandonados e pobres podiam ser admitidos no Arsenal de Guerra. As primeiras relações mensais enviadas pelos diretores do Arsenal de Guerra eram bastante detalhadas, citando números de matrículas, nomes, idade, data de ingresso, filiação, naturalidade entre outros dados (CRUDO, 1999, p. 112).

Outro importante acontecimento, segundo Garcia (2000), foi o surgimento do Colégio das Fábricas, considerado o primeiro estabelecimento constituído pelo poder público para atender à educação dos egressos de Portugal.

Depois desse período, em 1906, consagra-se como um marco da evolução da formação profissionalizante no Brasil, no domínio do governo de Nilo Peçanha no Rio de Janeiro. Nessa gestão, são criadas quatro escolas, dentre elas, três para aprendizagem de ofícios e uma para aprendizagem agrícola. Posteriormente, em 1909, são instituídas mais dezenove Escolas de Aprendizes de Artífices para o ensino profissional, ainda por iniciativa de Nilo Peçanha.

Na década de 1930, quando se intensifica a industrialização no país, as escolas de aprendizes e artífices evoluem para os denominados Liceus Profissionais. Em 1941, no âmbito da Reforma Capanema, o ensino profissional é reformulado, passando a ser de nível médio, com exames de admissão. Logo em seguida, em 1942, os Liceus de Profissionais, passam a ser chamados Escolas Industriais Técnicas, com cursos de duração de 3 anos. A idade dos alunos nessas escolas situava-se entre os 15 e 17 anos e a conclusão do curso permitia que o estudante concorresse à admissão no ensino superior nas áreas afins à sua formação.

2.2. O surgimento do Sistema S

Nos anos 1940, são criadas instituições voltadas para a formação profissional que foram ampliadas e desdobradas durante as décadas seguintes, formando-se o hoje denominado Sistema S. Essas instituições eram: Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial – SENAI e o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial – SESI, entre outros.

No fim da década de 1950, uma nova mudança ocorre nas Escolas Industriais Técnicas que passam a ser Escolas Técnicas Federais, com mais autonomia didática e de gestão. Procurava-se, com isso, responder à necessidade de formação de técnicos para as novas demandas do processo de industrialização.

Em 1971 é promulgada a Lei de Diretrizes e Bases nº 5.692 – LDB. Na Lei, no lugar dos ensinos primário e ginasial, cria-se o ensino do 1º grau e o ensino colegial passa a ser o ensino do 2º grau (BRASIL, 1971). No que se refere à formação profissional, a LDB de 1971 estabeleceu que o ensino do 2º grau deveria ser técnico-profissional. Ao lado disso, as Escolas Técnicas Federais tiveram o número de vagas e de cursos ampliados.

Nos anos subsequentes, enquanto as instituições públicas (estaduais e federais) seguiam o modelo imposto pela legislação, as instituições particulares mantiveram um ensino “colegial” preparatório para o ingresso nas universidades, procurando atender à demanda das camadas mais favorecidas da sociedade.

Tal distorção foi agravada pelo fato de as instituições públicas nesse nível do ensino não conseguirem pôr em prática um currículo que cumprisse o duplo e simultâneo papel de preparar o estudante para o acesso às universidades e para obter uma formação técnico-profissional.

No âmbito da formação profissional, sete anos depois, três das principais Escolas Técnicas Federais tornam-se Centros Federais de Educação Tecnológica – CEFET. Entre os objetivos destes últimos, estavam o de formar engenheiros de operação e tecnólogos.

Tal medida entre outras, incluídas na legislação que se seguiu, não foram capazes de reverter o quadro geral de estagnação que caracterizou o ensino profissional nos anos 1980 e 1990.

2.3. A integração do ensino médio e do ensino profissional

Um desafio que acompanhou, e ainda acompanha, a formação do jovem, após a conclusão dos nove anos de estudos, é o de integrar, por um lado, a sua formação profissional e, por outro, sua preparação para fases posteriores de vida escolar. Após o insucesso das experiências anteriores, vivem-se, hoje, novas experiências decorrentes das normas legais e das políticas educacionais surgidas nos anos 2000 e 2010.

Convém observar que esses novos rumos educacionais receberam influência de correntes internacionais de políticas para o ensino médio, muitas delas registradas nos textos da UNESCO, em particular, no denominado Relatório Dolors.

Nos parágrafos seguintes, são mencionados textos normativos que direcionam atualmente a formação profissional e a chamada formação propedêutica (Educação Básica).

Fazemos uma primeira referência à Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN, em vigor no país desde dezembro de 1996. Em itens originais da LDBEN ou em itens modificados pela Lei nº 11.741 de 2008, podemos ler:

Art. 36-A. Sem prejuízo do disposto na Seção IV deste Capítulo, o ensino médio, atendida a formação geral do educando, poderá prepará-lo para o exercício de profissões técnicas.

Parágrafo único. A preparação geral para o trabalho e, facultativamente, a habilitação profissional poderão ser desenvolvidas nos próprios estabelecimentos de ensino médio ou em cooperação com instituições especializadas em educação profissional.

Art. 36-B. A educação profissional técnica de nível médio será desenvolvida nas seguintes formas:

I - articulada com o ensino médio;

II - subsequente, em cursos destinados a quem já tenha concluído o ensino médio.

Parágrafo único. A educação profissional técnica de nível médio deverá observar:

I - os objetivos e definições contidos nas diretrizes curriculares nacionais estabelecidas pelo Conselho Nacional de Educação;

II - as normas complementares dos respectivos sistemas de ensino;

III - as exigências de cada instituição de ensino, nos termos de seu projeto pedagógico.

Art. 36-C. A educação profissional técnica de nível médio articulada, prevista no inciso I do caput do art. 36-B desta Lei, será desenvolvida de forma:

I - integrada, oferecida somente a quem já tenha concluído o ensino fundamental, sendo o curso planejado de modo a conduzir o aluno à habilitação profissional técnica de nível médio, na mesma instituição de ensino, efetuando-se matrícula única para cada aluno;

II - concomitante, oferecida a quem ingresse no ensino médio ou já o esteja cursando, efetuando-se matrículas distintas para cada curso, e podendo ocorrer:

a) na mesma instituição de ensino, aproveitando-se as oportunidades educacionais disponíveis;

b) em instituições de ensino distintas, aproveitando-se as oportunidades educacionais disponíveis;

c) em instituições de ensino distintas, mediante convênios de intercomplementaridade, visando ao planejamento e ao desenvolvimento de projeto pedagógico unificado.

Art. 36-D. Os diplomas de cursos de educação profissional técnica de nível médio, quando registrados, terão validade nacional e habilitarão ao prosseguimento de estudos na educação superior.

Parágrafo único. Os cursos de educação profissional técnica de nível médio, nas formas articulada concomitante e subsequente, quando estruturados e organizados em etapas com terminalidade, possibilitarão a obtenção de certificados de qualificação para o trabalho após a conclusão, com aproveitamento, de cada etapa que caracterize uma qualificação para o trabalho (BRASIL, 1996)

O recorte promovido pela LDB (1996) e pela Lei nº 11.741 de 2008 estabelece ao determinar no Artigo 36 e demais parágrafos únicos, uma distinção entre a educação profissional técnica de nível médio e a educação básica. Como se

vê, a legislação admite a formação profissional simultaneamente à formação geral de nível médio ou posteriormente a essa formação.

Essa oferta está estruturada e condicionada qualquer das três formas previstas: integrada, concomitante e/ou subsequente ao ensino médio. Dessas três formas, escolhemos a que nos propicia investigar duas instituições de ensino, portanto optamos por analisar a forma concomitante – escola pública e o SENAI.

Na forma integrada, o estudante, em uma mesma instituição e com matrícula única, percorre um currículo adequado – com ampliação de carga horária – ao duplo objetivo de formação profissional e educação básica.

No ensino concomitante, o aluno poderá estudar em uma mesma escola ou cursar em instituições distintas, mas, em ambos os casos, terá duas matrículas distintas, uma para cada modelo de ensino e poderá ter, ou não, uma complementação para projetos pedagógicos unificados.

Já no tipo subsequente, o estudante tem como pré-condição de formação profissional o término do ensino médio.

Para se ter uma perspectiva da distribuição dos estudantes entre três das modalidades, pode-se examinar a tabela 1 do Estudo Nacional de Ensino e Pesquisa – Inep que se segue e foi publicada na revista EDUCATRIX:

Total Brasil		Norte	Nordeste	Sudeste	Sul	Centro-Oeste	
Concomitante	240.226	8.508	21.744	167.419	34.367	8.188	
Subsequente	823.429	49.492	122.570	465.496	142.539	43.332	
Integrado	298.545	19.786	127.346	75.205	56.175	20.033	
TOTAL	1.362.200						

Tabela 1. Fonte: MEC/Inep/DEED - Sinopse Estatística da Educação Básica.

Considerando a complexidade, importância e premência do tema, faz-se necessário um estudo sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio publicada em 2012³. Esse texto normativo toma como base a legislação maior vigente no país, em particular nos itens da LDBEN citados anteriormente nesta dissertação e ampara-se em sólida fundamentação teórica.

³ Eliezer Pacheco Org. Perspectiva da Educação Profissional Técnica de Nível Médio: proposta de diretrizes curriculares nacionais. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica do Ministério da Educação – Setec/MEC. 2012.

Nessas diretrizes, são preconizadas as articulações entre a formação desenvolvida no ensino médio e a preparação para o exercício da profissão técnica, com o foco para a formação integral do estudante, salientando-se o caráter indissociável que deve existir entre a educação e a prática social, considerada a historicidade dos envolvidos nesse processo.

No referido texto, estabelecem-se a organização e o planejamento relativos às formas de oferta articulada e subsequente ao ensino médio, indicando a unificação dos projetos pedagógicos para ambos os cursos.

Além dessas disposições normativas, a citada resolução dispõe também sobre a avaliação do aproveitamento do estudante e das certificações, com valorização da experiência extraescolar dos estudantes.

Considerando o exposto, segue parte do texto referente à Lei nº 11.741/08 (BRASIL, 2008) sobre a educação profissional:

Art. 40. A educação profissional será desenvolvida em articulação com o ensino regular ou por diferentes estratégias de educação continuada, em instituições especializadas ou no ambiente de trabalho (BRASIL, 2008)⁴.

Como observado, a Lei nº 11.741/08 altera a Lei de Diretrizes e Bases (BRASIL, 1996), localizando assim a educação profissional técnica de nível médio como parte do corpo da Educação Básica no intuito de ser uma das possibilidades do desenvolvimento do Ensino Médio. Não uma modalidade educacional.

⁴ Fontes: Brasil, 2008. Disponível em: <http://www.jusbrasil.com.br>. Acesso em: 22/03/2015.

3. A IMPORTÂNCIA DO PAQUÍMETRO

Neste capítulo, procura-se justificar por que o instrumento paquímetro universal empregado no curso profissionalizante foi escolhido como objetivo deste trabalho.

De início, observa-se que o uso desse dispositivo é de suma importância para a metrologia, visto que é um dos vários instrumentos usados para a aprendizagem dessa ciência. Em particular, o paquímetro possui duas escalas de medidas: uma no sistema métrico decimal e, outra no sistema americano (polegada). A referida disciplina é obrigatória no currículo de um grande número de cursos profissionalizantes, por isso, convém comentar o seu papel na formação propedêutica e profissional.

3.1 A metrologia: uma visão geral

De acordo com Guedes (2011) a metrologia é a ciência da medição, compreendida em todos os seus aspectos teóricos e práticos. Nessa ciência estudam-se temas como os processos de medição, as unidades de medida, assim como, os dispositivos utilizados nesse processo.

Os instrumentos de medição de grandezas têm sido usados pelo homem desde os seus primórdios e a evolução do emprego desses dispositivos é parte relevante do desenvolvimento das civilizações. Em nosso tempo, a indústria é uma atividade humana em que se recorre permanentemente a medições de grandezas, por instrumentos e isso, se repete em todas as atividades científicas.

Assim, a metrologia constituiu-se, progressivamente, na ciência – de cunho teórico-prático – em que se estudam e se sistematizam os processos de medição de grandezas. Ela é parte relevante da formação técnico-profissional, o que se confirma pela sua presença no currículo de um número elevado desses cursos.

Uma possível categorização dessa ciência é apresentada na figura 1, a seguir:

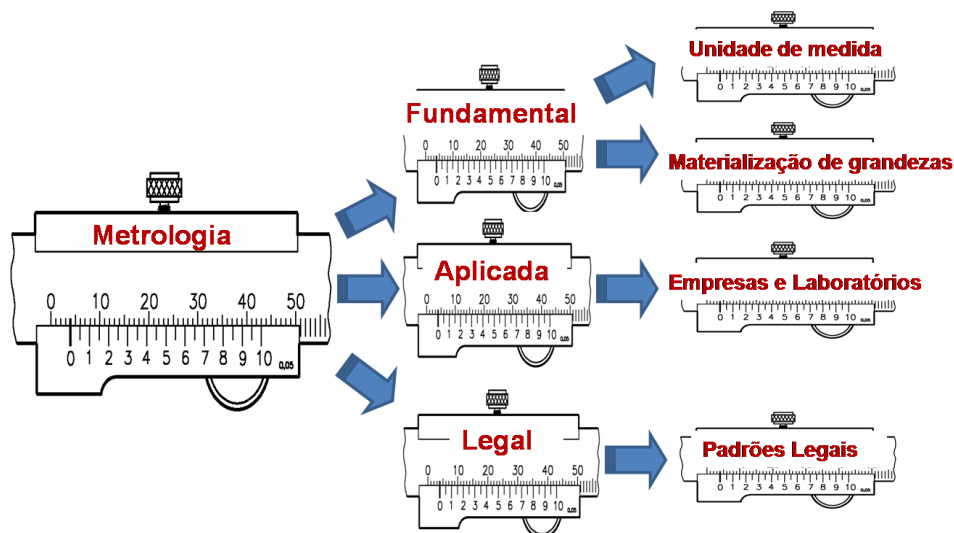


Figura 1 - um esquema de categorias da metrologia. Fonte: banco de dados do pesquisador

Na categoria metrologia fundamental enquadram-se o estudo teórico dos conceitos presentes no processo de medição das grandezas, incluídos nesse estudo o conceito de grandeza e as unidades de grandezas; na aplicação são focalizados os aspectos tecnológicos de seu emprego na medição de grandezas no âmbito dos processos industriais e científicos; já na metrologia legal encontram-se sistematizados os esforços de padronização internacional dos processos de medição.

A metrologia legal teve um marco importante na criação, em 1875, do *Bureau International de Pesos e Medidas – BIPM*. O estágio atual de padronização internacional encontra-se sintetizado no *Sistema Internacional de Medidas – SI*. Localizado no Vocabulário Internacional de metrologia estabelecido no ano de 2012 com descrição de (IMETRO, 2012).

Segundo Neto (2011, f. 7):

A metrologia precisa dialogar tanto com o mundo acadêmico, como com o mundo industrial. Além disso, ela precisa informar o grande público, que hoje vive numa era cada vez mais tecnológica, não apenas para protegê-lo e orientá-lo, mas para poder contar com seu auxílio na realização das importantes tarefas metrológicas impostas pela sociedade moderna (NETO, 2011, f. 7).

No Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, realizado no ano de 2011, foi publicado um artigo científico intitulado: *Contribuições da metrologia em*

Cursos de Engenharia, de João Neto, no qual afirma-se que a metrologia é aplicada em todo ramo da ciência em que se faz necessário o uso da tecnologia da medição.

Segundo Bernardes (2010, p. 04):

Todo engenheiro realiza frequentemente medições experimentais em sua atividade profissional e utiliza normas e regulamentos técnicos para atender às exigências de Avaliação da Conformidade em produtos, processos ou serviços. Este profissional deve estar apto a identificar e atender às demandas sociais, tecnológicas e científicas de um processo produtivo, que deve estar presente em sua rotina (BERNARDES, 2010, p. 04).

Já Conejero (2009, p. 01), ressalta que a metrologia é um saber cada vez indispensável na ciência pura e na ciência aplicada:

A expressão em “números de medidas” é universal. Tem sido assim devido principalmente ao amplo progresso industrial em todo o mundo, mas é tão necessária na ciência pura como na ciência aplicada. Não há como um pesquisador repetir o trabalho de outro sem as medidas específicas. Isso é aplicável em todos os campos das ciências, da astronomia à biologia, entre outras (CONEJERO, 2009, p. 01).

No Brasil, o ensino da metrologia teve início no Instituto Nacional de Tecnologia (INT), na década de 1940. Em data mais recente, Dias (1998, p. 01) recomenda a seguinte grade (matriz) curricular para essa disciplina:

A grade curricular deste curso de metrologia é composta por seis disciplinas: matemática, noções de física aplicada à metrologia, noções de desenho, prática de calibração de instrumentos de medição e trabalhos práticos de oficina. O ensino era essencialmente prático, limitando-se à teoria somente as noções básicas indispensáveis à compreensão das matérias. A duração do curso era de oito meses, dividido em dois períodos (DIAS, 1998, p. 01).

Nessas reflexões ficam evidenciadas algumas possibilidades de emprego da ciência metrológica, que por sua vez, dá significado ao conceito de grandeza, bem como, a outros conceitos matemáticos como: número natural, inteiro, racional, irracional. Também fica evidenciada a importante articulação dessa ciência entre os domínios matemáticos das grandezas e medidas, da aritmética, da álgebra, da geometria, da estatística (teoria do erro) e entre a Matemática e a Física abordadas na escola.

3.2. O paquímetro

Como se sabe, um grande número de instrumentos tem sido utilizado para a medição de comprimentos em objetos do mundo físico. Cabe ressaltar que nas medições de grandezas concretas com o uso desses dispositivos, no mundo físico, os resultados de suas medidas, são inevitavelmente aproximadas.

Contudo, acreditamos que todas as medidas físicas possuem valor dado por um número racional afetado pelo erro associado ao instrumento de medição usado, sobretudo deve-se ater ao fato dessa medida ser estritamente positiva, pertencentes ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Deixando-se de lado os dispositivos mais rudimentares utilizados nas diversas culturas e mesmo as usuais réguas, escalas ou trenas, apresenta-se, brevemente, nesta seção, o paquímetro. Etimologicamente, o termo deriva de *paqui* (espessura) e *metro* (medida) e a imagem a seguir dá uma primeira ideia do dispositivo, ver figura 2:

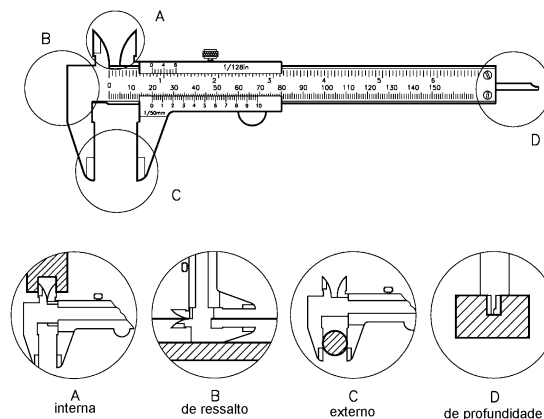


Figura 2 - imagens de um paquímetro. Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre

O paquímetro é adequado para medir comprimentos no intervalo de décimos de milímetro a cerca de 15 centímetros. Nas medições de peças, a figura 2 mostra a versatilidade desse instrumento. Com ele podem ser medidos: comprimentos “internos”; ressaltos; comprimentos “externos”; e profundidade de pequenas cavidades.

É conhecida a importância de seu uso em um grande número de atividades na Engenharia, em particular no ramo da engenharia metal-mecânica. De modo

análogo, em quase todas as atividades industriais, utiliza-se desse artefato para medição de comprimentos.

No entanto, é menos conhecido o fato de que o paquímetro encontra muitas aplicações em diversos outros campos de atividade profissional. Por exemplo, na Medicina, emprega-se o instrumento para medir comprimentos em afecções da pele, como indica a imagem 3, apresentada a seguir:

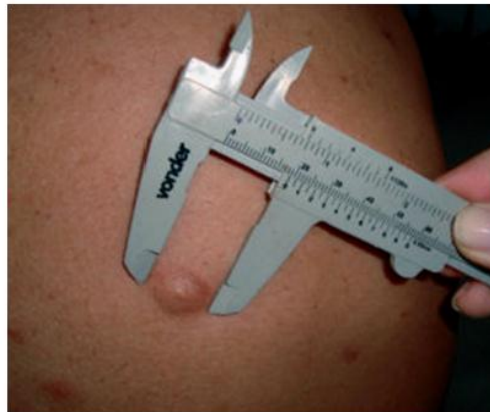


Imagem 3 - Medição de um quelóide em região dorçal. Fonte: (BRITO 2010).

Também nas intervenções no âmbito da cosmetologia, há lugar para o uso do paquímetro, como se pode ver na imagem 4:



Imagem 4 - uso do paquímetro nas intervenções estéticas em pessoas. Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre

Dentre o recorte das aplicações do paquímetro tem sido citado o seu uso nas medições necessárias para registrar dados sobre espécies de plantas e de animais nos estudos de meio ambiente, ver Duarte & Barella (2011).

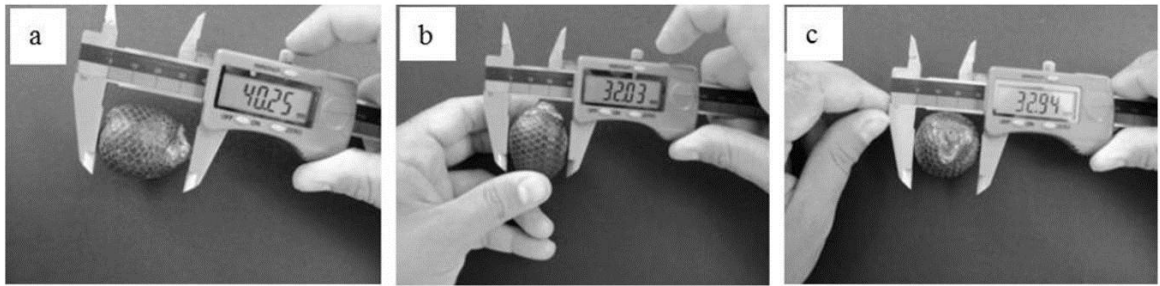


Imagem 5 - imagens de um paquímetro medindo um fruto. Fonte: <http://dx.doi.org/10>.

4. PRESSUPOSTOS NO CAMPO DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

4.1 Discussão preliminar

Sabe-se que o conceito de transposição didática inscreve-se em uma vertente da Educação Matemática denominada Didática da Matemática. Esta última, por sua vez, foi descrita, de modo sintético, por Douady (1986, p. 05):

A Didática da Matemática estuda os processos de transmissão e de aquisição dos diferentes conteúdos desta ciência, particularmente numa situação escolar ou universitária. Ela se propõe a observar e explicar os fenômenos relativos às relações entre seu ensino e sua aprendizagem. Ela não se reduz a pesquisar uma boa maneira de ensinar uma determinada noção particular. (DOUADY, 1986, p. 05).

Usualmente, na Didática da Matemática são incluídos vários construtos teóricos com múltiplas conexões entre si: *Transposição Didática*, *Contrato Didático*, *Situações Didáticas*, *Obstáculos Epistemológicos*, *Registros de Representações*, *Dialética Ferramenta Objeto*, *Campos Conceituais* e, entre outros, *Engenharia Didática*.

Na primeira caracterização de *transposição didática*, conceito atribuído a Chevallard (1991), diz-se que:

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os “objetos de ensino”. O “trabalho”, que um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 39).

Do texto citado, a transposição didática pode ser entendida como o trabalho de transformar um objeto do saber produzido pela ciência em um objeto a ser ensinado e aprendido na escola.

Tem sido feita na literatura uma rica discussão em torno do sentido do termo “saber”, em confronto teórico com os possíveis sentidos atribuídos a “conhecimento”, “pensamento”, “conceito”, “teoria”, “modelo”, entre outros termos (ver, por exemplo, Laville (2007), Triviños (2012), Brousseau (1986), Chevallard (1991), Pais (2002), entre outros).

Neste capítulo, adotaremos o “saber produzido pela ciência”, com um sentido simplificado: conceitos, teorias, modelos criados e sistematizados, historicamente, pelos cientistas e que são agrupadas em áreas, tais como Matemática, Física, Linguística, Sociologia, etc, com seus objetos próprios de estudo, suas linguagens e seus métodos e específicos.

4.2. A transposição didática

A teoria da transposição didática de Chevallard (1991) tem suas raízes principais nos estudos de Verret (1975) e de Bachelard (apud Santos, 1991).

De acordo com Chevallard (1991), sua teoria surge para retificar um equívoco que, ao seu olhar, é comum na reflexão pedagógica: o colocar em segundo plano a discussão dos saberes escolares. Como parte da vertente da Didática da Matemática, sua teoria incorpora a denominada tríade do sistema didático: o saber (S), o professor (P) e o aluno (A).

Mais focado no “vértice” do saber, Chevallard (1991) investiga a distância entre o saber ensinado e seus saberes de referência priorizando as relações entre o saber científico e o ensinado.

Um esquema gráfico para representar o sistema didático poderia ser proposto recorrendo-se à ideia de engrenagens de um sistema mecânico na figura 5:



Figura 5 - Esquema para o sistema didático. Fonte: Arquivos do pesquisador

Com esse esquema, pretende-se traduzir o fato de que os três elementos da tríade didática são intrinsecamente ligados, de modo dinâmico: qualquer “movimento” de uma das “peças” implica necessariamente o “movimento” das outras duas.

Outros elementos que podem ser referidos quando se utiliza o modelo do sistema didático podem ser mencionados: o professor (**P**) está ligado ao polo pedagógico, enquanto que o aluno (**A**) está situado no polo psicológico e, por fim, o polo do saber (**S**) representa o saber, esse saber é composto por um processo particionado de saberes onde está contido: o **saber científico** observado epistemologicamente. O **saber a ensinar** como um processo sociológico e o **saber ensinado** observado e analisado como um processo psicológico.

Esses níveis do saber são a essência da passagem de um nível para o outro e, assim Chevallard (1991) apresenta sua ideia de fenômeno bailizado no conceito de que *todo saber é o saber de uma instituição*.

Nesse sentido, no polo dos objetos do saber têm-se, de início, as *noções matemáticas*. Aqui se consideram os objetos matemáticos e as operações entre esses objetos que compõem os campos: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, estatística, probabilidade e combinatória.

Nesse mesmo local também inscrevem-se as *noções paramatemáticas*, aquelas que dizem respeito às *ferramentas de estudo* das noções matemáticas, por exemplo, as demonstrações matemáticas (CHEVALLARD, 1991). No entanto, esse pesquisador observa que uma mesma noção pode ser interpretada como paramatemática no ensino fundamental básico e matemática no ensino superior.

No polo do saber são incluídas, também, as *noções protomatemáticas*. Para Chevallard (1991) essas noções situam-se no âmbito das competências matemáticas do estudante. Representam, por exemplo, a capacidade de um aluno em reconhecer, nas atividades propostas pelo professor, a aplicação dos saberes já estudados anteriormente.

O professor é a *cronogênese*. Tal afirmação de Chevallard (1991) indica que esse profissional da educação, encontra-se momentaneamente adiante dos seus alunos, o que facilita a previsões e decisões de novos objetos transacionais. Esse fato direciona a uma diferenciação entre professor e aluno está no *tempo de saber*, visto que, o professor estará numa posição avançada no momento em que se introduz um novo objeto de ensino, pois enquanto o professor recupera a distância temporal em relação aos alunos.

A relação antigo/novo faz parte da dinâmica da escola e o professor possui o papel, crucial, de garantir a continuidade desse processo controlando a *cronogênese*

e apresentando novos textos do saber, possivelmente, irá assegurar um nível de familiaridade desses conteúdos junto aos seus alunos.

É nesse ponto que o objeto de ensino tem o papel de *objeto transacional entre passado e futuro*. Para tanto, Chevallard (1991) indica que, se houver uma superação dessa contradição, significará o sucesso do processo de aprendizagem.

Além do *tempo do saber*, o que mais diferencia o professor do aluno é a *topogênese*, que Chevallard (1991) indica como a diferença de lugar, em relação ao saber que envolve os dois. Assim, de acordo com o autor, o professor ocuparia um lugar em que prevalece o saber a ensinar no nível abstrato avançado em relação ao que o aluno poderia alcançar no primeiro momento de estudo.

A seguir, falaremos um pouco mais sobre os polos professor e aluno. No modelo da didática da matemática exposto neste trabalho, um importante aspecto que distingue o professor do aluno é o fato de o professor precisar conhecer a maneira de ensinar esse saber, a qual é evidenciada e atualizada cotidianamente durante as relações em sua prática docente.

A diferença de lugar permite ao professor, a criação de estratégias concretas da abordagem do saber a ensinar pela construção da *variante local* do texto do saber, termo este, usado por Chevallard (1995) para a posição diferenciada do professor.

Segundo Chevallard (1991) com a interferência do professor na elaboração do texto do saber, ocorre a maior parte da transposição realizada.

Quanto à função do professor Pais (2001) indica que:

[...] o trabalho do professor envolve o desafio que consiste em realizar uma atividade que, em um certo sentido, é inverso daquela do pesquisador. Pois, enquanto o matemático tenta eliminar as condições contextuais de sua pesquisa, buscando níveis mais amplos de generalidade, o professor de matemática, ao contrário, deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais compreensível para o aluno. (PAIS, 2001, p. 32).

4.3. A transposição didática e o objetivo desta pesquisa

Na introdução desta dissertação, foi afirmado que nosso objetivo é o de analisar o ensino da medição de comprimentos com o uso do paquímetro em um curso de Educação Técnica Profissional de Nível Médio.

Sobretudo assumimos a pesquisa usando os pressupostos da perspectiva da transposição didática, assim, como primeiro momento deve-se aqui, identificar, no ensino do mencionado tópico, quais são os itens do saber científico que são transformados em saber a ser ensinado.

Segundo a teoria de Chevallard (1991), esse saber científico sofre modificações e adequações, que são influenciadas pelas características da instituição educacional que é responsável pelo ensino desse saber. Uma etapa inicial deste trabalho consistiu da identificação dos tópicos do saber científico que são transformados em *saber a ensinar* no caso do uso do paquímetro.

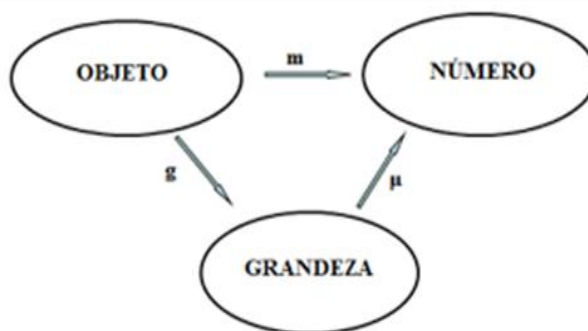
Os dois capítulos seguintes são dedicados a esboçar um conjunto de conceitos matemáticos que estão presentes no ensino do campo das grandezas e medidas, em particular da medida de comprimentos com o uso do paquímetro.

5. GRANDEZAS E MEDIDAS NA MATEMÁTICA ESCOLAR

5.1. Um modelo da didática da matemática

Entre as grandezas que são estudadas na escola, destacam-se as grandezas geométricas. Um olhar mais amplo sobre as pesquisas de didática sobre esses conceitos encontra-se em Bellemain & Lima (2002), em que se pode ler:

Um traço geral desses estudos é a distinção de três universos (Brousseau, 2001): o dos objetos; o dos números (medidas); e o das grandezas propriamente ditas. Entre esses universos concebem-se funções: a função m que faz corresponder a cada objeto (por meio de uma medição) um número positivo, que é uma medida; a função g , que associa cada objeto à classe dos objetos de mesma medida (a grandeza); e a função μ que faz corresponder a cada uma dessas classes a medida de um de seus elementos:



(BELLEMAIN & LIMA, 2002).

No caso desta dissertação, em que se focaliza a grandeza comprimento, os objetos referidos no diagrama acima, são os segmentos de reta, ou objetos do mundo físico, por exemplo: a aresta de um bloco retangular, o diâmetro da base de um cilindro circular, etc. Assumiremos, então, que a grandeza em foco é o comprimento desses segmentos de reta ou suas materializações no mundo físico e a medida é um número obtido no processo de medição⁵.

O processo de medição de um comprimento em um dado objeto pode ser descrito, de modo intuitivo, como uma sequência de operações que se inicia com a escolha de um comprimento unitário – a unidade de comprimento – e prossegue

⁵ Para maiores informações, usar a série de História da Matemática – Volume VIII com título: Um estudo da noção de Grandeza e implicações no Ensino Fundamental com autoria de Paula Moreira e Paulo Figueiredo. Editora SBHMat/2002.

pela verificação de “quantas vezes” esse comprimento unitário “cabe” no comprimento a ser medido.

O número produzido no processo de medição é a **medida** do comprimento na unidade adotada. E aqui temos uma distinção fundamental. Em todos os processos de medição empírica as medidas são números racionais, inteiros ou fracionários. Como neste trabalho estamos focalizando apenas medidas empíricas vamos supor que as medidas que serão tratadas serão sempre números racionais. Só no estudo dos modelos matemáticos abstratos devem ser consideradas medidas que são números reais, racionais ou irracionais.

Ainda com respeito ao fato de que as medidas empíricas são números racionais, convém lembrar que há muitas pesquisas em Educação Matemática dedicadas a esses números, o que acrescenta à importância matemática desses números, sua relevância do ponto de vista do ensino e da aprendizagem.

Em Kieren (1975) afirma-se que os números racionais podem ser interpretados por meio dos subconstrutos: *parte-todo*, *quociente*, **medida**, *razão* e *operador*. Dessa forma, o número racional como medida de uma grandeza em uma dada unidade, configura-se como fundamental do ponto de vista da Educação Matemática.

O diagrama apresentado em Bellemain & Lima (2010) indica uma distinção, nem sempre presente no ensino, entre os objetos geométricos (que podem ser objetos materiais, figuras geométricas abstratas ou desenhos desses dois elementos) a grandeza geométrica a ele associado e o número que é a medida da grandeza em uma unidade de área.

Dessa forma diferentes segmentos de reta podem ter o mesmo comprimento, diferentes figuras geométricas podem ter a mesma área, etc. Por exemplo: as distintas arestas de um cubo têm, todas o mesmo comprimento, assim como, diferentes varetas podem ter o mesmo comprimento.

Mas é preciso levar em conta uma advertência que é feita no Guia Bellemain & Lima (2010):

Em contrapartida, os três componentes apontados são intrinsicamente ligados entre si. Para exemplificar, vamos representar os conceitos acima referidos no caso de uma vareta representada pelo segmento de reta AB e escolher o centímetro (cm) para unidade de comprimento. A medida da vareta nessa unidade pode ser o número 50 e, neste caso, o seu

comprimento será indicado pelo **símbolo composto 50 cm**. Assim, o comprimento, como vai ocorrer com as demais grandezas, pode ser representado pelo par constituído por um número (a medida) e pelo símbolo da unidade adotada. Se escolhermos o metro (m) para unidade, a medida de comprimento mudará de 50 para 0,5. Vemos, assim, que mudam as unidades e as medidas, mas o comprimento da vareta não se altera. (BELLEMAIN & LIMA, 2010).

Como veremos com mais detalhes no próximo capítulo, a concepção brevemente delineada acima é compatível com o que estabelece o Vocabulário Internacional de Metrologia – VIM sobre a definição de uma grandeza e suas unidades: grandeza é uma propriedade de um fenômeno, corpo ou substância, que se pode exprimir quantitativamente sob a forma de um número e de uma referência - VIM 1.1 (IMETRO, 2012).

No citado texto, a unidade de medida é definida como sendo uma grandeza definida e adotada por convenção, com a qual qualquer outra grandeza da mesma natureza pode ser comparada para exprimir a relação das duas grandezas sob a forma de um número - VIM 1.9 (IMETRO, 2012). A representação composta de um número racional e de uma unidade de medida é o que se chama no Vocabulário Internacional de Metrologia, o valor de uma grandeza.

5.2. Grandezas e medidas em documentos curriculares

De início, um marco importante a ser registrado é a edição dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - PCNs, documento publicado pelo Ministério da Educação e do Desporto em 1997 e 1998, no qual se adota o campo das *Grandezas e Medidas* como um dos quatro grandes blocos de conteúdo dessa etapa de formação escolar.

Entre as várias justificativas para essa opção, no documento dos PCNs - Brasil (1997), argumenta-se que:

Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático. (BRASIL, 1997, p. 56).

Há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devem contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria). (BRASIL, 1997, p. 53)

Ainda nos documentos de âmbito nacional, podemos ler o que se diz sobre as grandezas e medidas no Plano Nacional de Alfabetização na Idade Certa – PNAIC (2014, p. 06):

As medidas⁶ não devem ser vistas apenas como um conteúdo escolar de matemática que se deve obrigatoriamente conhecer, ao contrário, a escola deverá nos ajudar a perceber o quanto usamos de medidas no dia a dia, abrindo possibilidades de tornarmos esse uso o mais amplo possível (BRASIL, 2014).

No documento da Base Curricular Comum para o Estado de Pernambuco – Brasil (2008) ratifica-se a importância do estudo do campo das grandezas e medidas em todo o ensino básico. Em particular no Ensino Médio:

O trabalho do aluno em outras disciplinas como a Física e a Química, por exemplo, pode servir como motivação para a consolidação da ideia de **grandeza**, particularmente aquelas formadas por relações entre outras grandezas (densidade, aceleração, etc.). Em relação às **grandezas geométricas**, as atividades propostas deverão proporcionar a consolidação dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores. O aluno já deve reunir as condições necessárias para a compreensão de demonstrações mais elaboradas, que conduzam às fórmulas de áreas do círculo ou do volume de figuras geométricas tais como a esfera (BRASIL, 2008).

5.3. O Guia do Livro Didático do PNLD 2015

O Guia do Livro Didático do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (2015), na Área de Matemática, reúne as resenhas dos livros que podem ser escolhidos pelos professores, para que após adquiridos pelo Ministério de Educação sejam adquiridos e distribuídos em todas as escolas do Ensino Básico do país.

⁶ Observamos que o termo ‘medida’ não é empregado nessa citação com o mesmo sentido daquele que é adotado em Bellemain & Lima (2002), nem no VIM. Nesses textos a medida é um número, que combinado com uma unidade de medida representa uma grandeza (ou quantidade). No texto do PNAIC o termo “medida” significa grandeza.

O Guia, além das resenhas, traz um material adicional que se destina a subsidiar o trabalho do professor, contendo os princípios e critérios de avaliação adotados bem como comentários gerais sobre questões de ensino aprendizagem dos conteúdos dos livros.

Nesse texto, há vários comentários relativos ao campo das grandezas e medidas que assumem um papel de recomendações amplamente divulgadas que, certamente, podem ter algum impacto sobre abordagem desse conteúdo junto a professores e autores de livros didáticos. Além disso, encontram-se, ainda, referências a abordagens inadequadas sob o ponto de vista conceitual que podem criar empecilhos à aprendizagem correta dos conteúdos envolvidos.

Começa-se por reforçar a importância das grandezas nas culturas humanas Brasil (2015):

Os números também são medidas de grandezas. Em todas as culturas humanas, desde os seus primórdios, foram realizadas medições de grandezas. Comprimento (distância), área, volume, tempo, massa, velocidade, entre outras grandezas, foram objeto de medições, processos que sempre ocuparam um papel central no desenvolvimento tecnológico e social do homem. (BRASIL, 2014, p. 90).

No Guia – Brasil (2104), em seguida, é ressaltado o papel fundamental que a medição de grandezas exerceu na própria gênese dos números:

As medições empíricas foram simultâneas à criação dos números naturais e dos fracionários e, mais adiante na história, dos números negativos. Com esses números, englobados, atualmente, no conjunto dos racionais, é sempre possível efetuar medições empíricas de qualquer grandeza do tipo escalar. Com o desenvolvimento da Matemática, em especial a partir da civilização grega, surgiu outro tipo de medição, realizada nos modelos abstratos que constituem o cerne desse saber. Como se sabe, na medição abstrata da diagonal de um quadrado de lado unitário, surge a necessidade de ampliar os racionais, com a criação do conjunto dos números reais. As grandezas podem ser entendidas como atributos mensuráveis de objetos ou de fenômenos. (BRASIL, 2014, p. 91)

Como sabemos; a medição – empírica ou abstrata – é um processo complexo que exige várias escolhas: da grandeza a medir; da unidade de medida; do método de medição. Na medição, obtém-se um número a que se denomina medida: números racionais nas medições empíricas, números reais nas medições abstratas.

Tomemos como exemplo o comprimento, uma das grandezas geométricas mais familiares na matemática escolar (as outras são área, volume e abertura de ângulo). Os objetos considerados tanto podem ser materializações de objetos finos e alongados, tais como varetas, arestas de poliedros, etc., quanto modelos matemáticos desses objetos, os denominados segmentos de reta. Escolha-se, como exemplo, uma dessas varetas para medir seu comprimento e selecione-se o centímetro como unidade de medida.

Dessa forma, quando se determina o valor da grandeza, com instrumentos ou por meio de medição abstrata, podem-se encontrar, como medidas; números racionais (2 ; $\frac{1}{4}$; $1,2 \times 10^{-2}$; etc). No caso de medições empíricas ou, quando se tratar de medição abstrata, números reais (3 ; 7 ; 3×10^{-3} ; 5 ; π , etc).

Os símbolos compostos 2 cm , $\frac{1}{4}\text{ cm}$, $1,2 \times 10^{-2}\text{ cm}$, 5 cm , $\pi\text{ cm}$ são representações de grandezas. Assim, o valor do comprimento de uma vareta aparece como um objeto matemático distinto da vareta, pois varetas diferentes podem possuir o mesmo comprimento. A grandeza comprimento também se distingue do número (a medida) obtido quando se mede essa vareta com uma unidade de medida, pois mudar a unidade altera a medida de comprimento, mas o comprimento permanece o mesmo (BELLEMAIN & LIMA, 2002).

Um tema relevante que é tratado no Guia do PNLD 2015 é o que se refere ao conceito de dimensão de uma grandeza. Como se sabe, o termo dimensão' possui vários significados, tanto na Matemática, quanto nas outras ciências. No estudo das grandezas, o termo significa, de modo simplificado, a espécie de grandeza. Assim, pode ser dito: a dimensão comprimento, a dimensão velocidade, a dimensão massa etc.

Podemos também considerar o conceito de dimensão como parte do que se pode chamar de "álgebra das grandezas". De fato, as grandezas geométricas ou físicas podem ser modelizadas por estruturas algébricas abstratas, tais como o domínio dos inteiros, dos racionais e de outros números. Como sabemos, nesses domínios são definidas operações entre seus elementos que seguem regras estabelecidas e que satisfazem, em geral, à propriedades algébricas que encontramos na álgebra dos números e dos polinômios.

Segundo o Guia do PNLD 2015, essa álgebra das grandezas vem sendo esquecida no ensino e nos materiais didáticos. Um exemplo é citado, Brasil (2014):

Em particular, a álgebra das grandezas não vem sendo devidamente estudada. Por exemplo, para obter a área de um paralelogramo com “base” e “altura” de comprimentos 4m e 5m, respectivamente, escreve-se, por vezes: $A = 4 \times 5 = 20 \text{ m}^2$.

Nota-se que, em um lado da igualdade, há um número (4×5) e, no outro, uma área (20 m^2), o que não é correto. Na verdade, a chamada fórmula de área é uma igualdade entre grandezas. Em um lado da igualdade, uma área e, no outro, o produto de dois comprimentos. Portanto dever-se-ia escrever: $A = 4\text{m} \times 5\text{m} = 20 \text{ m}^2$ (BRASIL, 2014, p. 92).

Para complementar os comentários sobre esse importante conceito que é o de dimensão de uma grandeza, recorreremos mais uma vez ao Guia do PNLD 2015:

Essa álgebra das grandezas é o que se denomina análise dimensional, tema estudado na Física, mas omitido na Matemática, e que seria um bom tópico articulador entre esses dois componentes curriculares. A análise dimensional é particularmente relevante no ensino médio pela existência de muitas grandezas que são razões de grandezas (BRASIL, 2014, p. 92).

Por fim, cabe mencionar que no Guia do PNLD 2015, a pagina 91, há uma referência ao Vocabulário Internacional de Metrologia: conceitos fundamentais e gerais e termos associados (IMETRO, 2012), 1ª Edição Luso-Brasileira, Rio de Janeiro, 2012, (www.inmetro.gov.br). Tal referência reforça a importância de que seja abordado no ensino básico, o Sistema Internacional de Unidades (SI) e os desdobramentos mais recentes dos conceitos da metrologia.

6. GRANDEZAS E MEDIDAS NA METROLOGIA

Neste capítulo procuramos abordar conceitos no campo das grandezas e da medição de grandezas como um saber na esfera da metrologia. Em seguida, discutimos o tema mais específico da medição de comprimentos com o paquímetro.

6.1. Alguns conceitos básicos da metrologia

São bem conhecidas na matemática escolar as grandezas: comprimento, área, volume, abertura de ângulo. No entanto, é muito mais vasto o conjunto de grandezas: massa, tempo (mais precisamente, duração de intervalo de tempo), energia, temperatura, carga elétrica, densidade volumétrica, e tantas outras. As primeiras são, algumas vezes, denominadas “grandezas geométricas”, as segundas, “grandezas físicas”. Convém observar, apesar disso, que essas categorias têm propriedades essenciais em comum.

É fundamental observar, na definição do conceito básico de grandeza, que sua representação inclui, de modo essencial, um **número** e uma **referência**.

A referência mais comum na representação de uma grandeza é unidade de medida. Quando medimos uma dada grandeza – o mensurando – escolhemos de modo conveniente uma grandeza de mesma espécie – a unidade de medida – e, intuitivamente, determinamos “quantas vezes a unidade cabe no mensurando”.

Por sua vez, no referido Vocabulário, encontramos as definições (IMETRO, 2009):

✓ **Medição** é um processo de obtenção experimental de um ou mais valores que podem ser atribuídos a uma grandeza. (INMETRO, 2009, p. 15).

✓ **Metrologia** é a ciência da medição. A metrologia engloba todos os aspectos teóricos e práticos qualquer que seja a incerteza da medição e o campo de aplicação. (INMETRO, 2009, p. 15).

Destacamos na citação acima o conceito de **valor de uma grandeza** que pode ser tomado, neste trabalho, como a representação da grandeza por meio de um número e de uma unidade de medida. Por exemplo, **2m** é o valor de um comprimento, **9m²** é o valor de uma área, **5g** é o valor de uma massa.

Outro conceito mencionado é o de incerteza de medição. Recorremos a Vuolo (1992) para uma discussão sobre esse conceito e mais alguns que o precedem no livro citado, como o de **valor verdadeiro** de uma grandeza:

O **mensurando** é a grandeza a ser determinada num processo de medição. Como regra geral, **valor verdadeiro do mensurando** é uma quantidade sempre desconhecida. Isto é, mesmo após a medição o valor verdadeiro do mensurando só pode ser conhecido aproximadamente devido a **erros de medição** (VUOLO, 1992, p. 41).

Como se contorna, na prática, a dificuldade da não existência de um valor verdadeiro para um mensurando? A prática científica e tecnológica adotou, ao longo de seu desenvolvimento histórico, o recurso à **repetição de medições**, nas “mesmas condições” isto é, procurando-se controlar as variáveis envolvidas no processo.

Cabe, então, perguntar por que podem surgir medidas diferentes de um mesmo comprimento, nas “mesmas condições de medição”? Como se lê na citação acima, Vuolo (1992), atribui esse fenômeno, que é fundamental na ciência e na tecnologia, à presença inevitável dos erros de medição.

Quando temos uma sequência de resultados da medição de uma grandeza por meio de um dispositivo, $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, os objetivos da teoria dos erros, segundo Vuolo (1992, p. 54) são o de:

- a) Obter o **melhor valor** para o mensurando a partir dos dados experimentais disponíveis. Isto significa determinar a melhor aproximação para o valor verdadeiro, em termos probabilísticos;
- b) Obter a **incerteza** no melhor valor obtido, o que significa determinar quanto este melhor valor pode ser diferente do valor verdadeiro da grandeza física, em termos probabilísticos. (VUOLO, 1992, p. 54).

Em símbolos, se o verdadeiro valor de uma grandeza é y_v e se o melhor valor dessa grandeza é y , o erro de medição, η é dado por: $\eta = y - y_v$.

Notemos que a igualdade indicada é uma igualdade entre grandezas de mesma espécie. Por exemplo, se a grandeza em foco é o comprimento, trata-se uma igualdade entre comprimentos. Quando se escolhe uma unidade, por exemplo, o centímetro, podemos escrever: $h\text{ cm} = y\text{ cm} - y_v\text{ cm} = (y - y_v)\text{ cm}$. Observemos que,

nesta última igualdade os símbolos (sem negrito) h , y e y_v representam números reais e não mais grandezas (comprimentos). O usual é considerar para a medida do erro de medição não a diferença $(y - y_v)$, mas o valor absoluto dessa diferença: $|y - y_v|$. Nesse caso, a medida do erro é sempre positiva.

Para melhor explicitar o significado dessas ideias, continua Vuolo (1992, p. 54):

No formalismo da teoria dos erros o valor verdadeiro y_v é considerado desconhecido. Assim, o erro η também é **uma quantidade desconhecida**, por hipótese. O melhor valor e a respectiva incerteza só podem ser obtidos e interpretados em termos de probabilidades (VUOLO, 1992, p. 54).

Na sequência do texto do citado autor, delineiam-se possíveis modos de especificação da incerteza do resultado de uma medição, entre as quais se destaca a incerteza padrão, que pode ser definida como o desvio padrão da distribuição de erros, conceito este estritamente ligado ao tratamento dos erros de medição como variáveis aleatórias e da distribuição de probabilidades dessas variáveis. Um outro modo de especificar a incerteza é a indicação do valor máximo admissível para os erros de medição em um dado experimento, denominado **limite de erro**.

Os erros de medição, segundo Vuolo (1992) podem ser agrupados em dois grandes conjuntos⁷:

- a) **Erro sistemático** é sempre o mesmo nos n resultados. Isto é, se só existisse erro sistemático, os n resultados y_i seriam iguais e a diferença para o valor verdadeiro y_v seria a mesma.
- b) **Erro estatístico** ou **erro aleatório**, é um erro tal que os n resultados y_i distribuem-se aleatoriamente em torno do verdadeiro valor y_v , na ausência de erro sistemático (VUOLO, 1992, p. 78).

⁷ Vuolo (1992), como outros autores, mencionam ainda os denominados **erros grosseiros**, que não têm interesse do ponto de vista da teoria da medição. Por exemplo, ao ler o comprimento de 37,6 cm, o experimentador pode registrar o valor 36,7 cm.

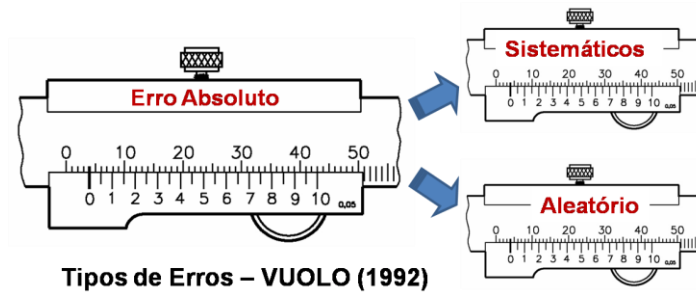


Figura 16 - tipos de erro de medição. Fonte: Adaptado do banco de dados do autor.

De modo simplificado, os erros sistemáticos são classificados em Vuolo (1992, p. 83):

- a) **instrumentais**, que resultam de defeitos no próprio aparelho de medição. No caso em foco, uma régua graduada com falha de fabricação em que o comprimento indicado como 1cm, não possui, de fato, esse comprimento, acarreta um erro em toda a medição em que for utilizada;
- b) **ambientais**, são erros provenientes das condições físicas do local em que é feita a medição. Por exemplo, em um ambiente com a temperatura elevada um paquímetro metálico pode sofrer dilatação e acarretar erros na medição;
- c) **observacionais**, que é um erro sistemático devido a pequenas falhas de procedimento ou limitações do próprio observador. Um desses erros, na medição com uma régua graduada, o de **paralaxe**, resulta do não alinhamento correto entre o olho do experimentador, o indicador da leitura e a escala da régua;
- d) **teórico**, que resulta do emprego de um modelo teórico que não é uma boa aproximação do fenômeno envolvido na medição. Pode desejar medir um comprimento inacessível por meio de comprimentos acessíveis, mas a fórmula geométrica que relaciona esses comprimentos estar incorreta. Haverá um erro sistemático de natureza teórica no experimento. (VUOLO, 1992, p. 83).

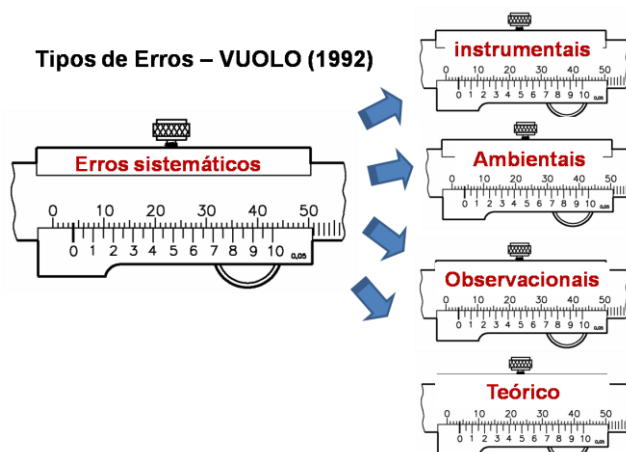


Figura 17- tipos de erro de medição. Fonte: Adaptado do banco de dados do autor.

Quanto ao erro estatístico, deve-se procurar saber o que o autor entende pelo termo ‘aleatório’. Em Vuolo (1992, p. 1), pode-se ler:

Processo aleatório é qualquer fenômeno que pode ter diferentes resultados finais, quando repetido sob **certas condições predeterminadas**. Nem todas as condições envolvidas no fenômeno precisam ser predeterminadas. Muitas vezes, o que torna o processo aleatório é justamente o fato de que algumas condições não são ou não podem ser repetidas (VUOLO, 1992, p. 1).

Como vemos, a teoria dos erros de medição fundamenta-se, em grande parte, em conceitos da teoria das probabilidades e da estatística.

Retornando ao conceito de valor verdadeiro de uma grandeza, podemos perguntar que procedimentos podem ser adotados para contornar o fato de que tal valor é, em geral, desconhecido.

Uma possibilidade ocorre quando se mede uma grandeza física que integra um modelo teórico. Por exemplo, atualmente o metro, unidade de comprimento no Sistema Internacional de Unidades (SI), é definido com base na teoria da relatividade geral, na qual se supõe que a velocidade da luz no vácuo é uma constante universal. Ao se efetuarem medições dessa velocidade, parte-se do princípio que existe um verdadeiro valor dessa constante.

Segundo Vuolo (1992), uma situação muito comum ocorre quando se dispõe – por exemplo, em manuais ou catálogos técnicos – do resultado da medição de uma grandeza com um certo grau de aproximação que se vai efetuar a medição dessa grandeza com um grau menor de aproximação. Nesses casos, o valor mais aproximado é tomado como o verdadeiro valor para tal experimento de medição.

Em experimentos didáticos, ao se obter uma sequência de resultados de medições, $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, pode-se adotar como uma aproximação do verdadeiro valor da grandeza, a média aritmética desses resultados:

$$M_a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n}{n}.$$

Uma medida de dispersão do conjunto das medidas em torno desse valor médio é dado pelo desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i(y_i - M_a)}{n}} .$$

6.2. Um experimento de medição de comprimento

Para prosseguirmos a discussão sobre conceitos de metrologia, tomemos o exemplo de medição empírica do comprimento de uma vareta, com o uso de uma régua graduada, figura 18:

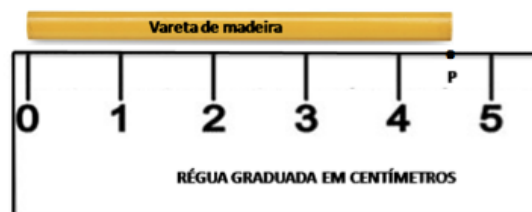


Figura 18. Medição por meio de régua graduada em centímetros. Fonte: Adaptado do portal do professor.gov.br. Acesso em 22/03/2015

Suponhamos que, para medir o comprimento do objeto, foi escolhido, de início, como unidade de medida, o centímetro. Uma *régua graduada* (algumas vezes denominada *escala*) em centímetros é um instrumento no qual são justapostos segmentos de reta de comprimento igual a 1 cm , do modo ilustrado na Figura 6.

Em seguida, fazemos corresponder o ponto marcado com o zero da régua graduada com a extremidade esquerda da vareta. A sua extremidade direita corresponde, então, a um ponto P na régua graduada. Medir o comprimento da vareta consiste em verificar quantos centímetros “cabem” do ponto zero até o ponto P, aproximadamente.

Observa-se que, no exemplo ilustrado, ocorre um fato simples, mas de muita importância: o ponto P não coincide com nenhuma das marcas de um número inteiro da régua. Em outros termos, pode-se dizer que a vareta não tem uma medida inteira, em centímetros. Em muitas situações da prática cotidiana, pode ser satisfatório dizermos que a vareta *possui um pouco mais de 4 cm*, ou que *não chega a ter 5 cm*.

Mas é muito frequente necessitemos mais informação sobre o **valor verdadeiro do comprimento** da vareta. Surge, assim, a questão do valor verdadeiro de uma grandeza a ser discutido, agora, neste caso particular.

Como vimos, uma solução possível é supor que não ocorrem erros sistemáticos e que os erros se distribuem aleatoriamente na sequência de medições. Em seguida, efetuar essa sequência de medições, atribuindo, para cada uma delas, um valor para o comprimento, que fica situado entre *4 cm* e *5 cm*, por exemplo:

4,4 cm ; 4,5 cm ; 4,5 cm; 4,6 cm; 4,4 cm ; 4,5 cm; 4,3 cm; 4,4 cm.

Podemos tomar o valor médio dessa distribuição de valores e obter:

$$M_a = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i}{8} = \frac{4,4cm + 4,5cm + 4,5cm + 4,3cm + 4,4cm + 4,5cm + 4,3cm + 4,4cm}{8} =$$

$$M_a = 4,4125cm$$

Os resultados das medições acima mencionadas foram fornecidos sem a indicação da incerteza da medição. Por convenção, nesses casos, deve ser tomado como limite de erro, que é umas formas de indicação da incerteza da medição, o comprimento *0,5 cm* (VUOLO, 1992, p.73). Por isso, os últimos algarismos na sequência dos oito valores obtidos são incertos (ou duvidosos). Diz-se, ainda, que esses valores são representados com dois **algarismos significativos** (um certo, o outro incerto). Em face disso, os algarismos *1*, *2* e *5*, na representação do valor do comprimento médio não são significativos e devemos efetuar um arredondamento desse valor, atribuindo, ao comprimento da vareta o valor médio *4,4 cm*.

Tal valor médio pode ser tomado como valor verdadeiro, na ausência de erros sistemáticos de medição, por exemplo, um defeito de fabricação na régua graduada.

Suponhamos, agora, que foi atribuído um valor verdadeiro para o comprimento da vareta por outro procedimento, assumido como mais confiável. Uma indicação de quanto um valor medido com a régua graduada se afasta desse valor verdadeiro, é o que se chama em metrologia de **exatidão** (ou acurácia) do resultado da medição.

Outro caminho que podemos adotar para efetuar a medição do comprimento da vareta seria escolher uma nova unidade de comprimento, por subdivisão da unidade originalmente escolhida, e produzir uma sequência de medições com essa nova régua, figura 19:



Figura 19. Medição por meio de régua graduada em milímetros. Fonte: banco de dados do pesquisador

No caso ilustrado, o comprimento unitário de 1 cm foi dividido em 10 segmentos de reta de mesmo comprimento e, do mesmo modo que se procede a justaposição dos segmentos de 1 cm na régua graduada, são justapostas as subdivisões que possuem, cada uma delas, $\frac{1\text{ cm}}{10} = 0,1\text{ cm}$.

Vemos, então, que a nova unidade possui medida **fracionária** ou **racional**⁸ na unidade inicial escolhida (o centímetro). Os números racionais desempenham um papel fundamental na Matemática e sua gênese histórica está associada ao processo de medição de grandezas. Observa-se, também, que o comprimento de medida racional mencionado pode ser representado, pelo menos, de três modos distintos:

- a) representação fracionária: $\frac{1}{10}\text{ cm}$;
- b) representação decimal: $0,1\text{ cm}$;
- c) com o símbolo de um submúltiplo do centímetro: 1 mm

Retomando o processo de medição da vareta, agora se sabe que o seu comprimento em centímetros *possui um pouco mais de 4,4 cm*, ou que *não chega a ter 4,5 cm*.

Suponhamos que são obtidas medidas de comprimento, em centímetros, por meio de oito medições nas “mesmas condições”:

4,47 cm; 4,47 cm; 4,48 cm; 4,48 cm; 4,47 cm; 4,48 cm; 4,49 cm; 4,49 cm.

⁸ Para uma abordagem matemática dos números racionais, podemos consultar Ferreira (2010)

Se adotarmos um procedimento análogo ao da medição com uma régua graduada em centímetros, podemos estabelecer para valor verdadeiro do comprimento da vareta o valor médio (arredondado) de $4,48\text{ cm}$. Observamos, ainda, que seguindo Vuolo (1992), o limite de erro nas medições com emprego da régua graduada em milímetros é de $0,5\text{ mm}$.

As duas sequências de valores das medições mencionadas nos parágrafos anteriores distinguem-se em um aspecto importante: a maior diferença entre dois valores da primeira sequência é $D_1 = 4,5\text{ cm} - 4,3\text{ cm} = 0,1\text{ cm}$, enquanto, na segunda sequência, a diferença máxima é $D_2 = 4,49\text{ cm} - 4,47\text{ cm} = 0,02\text{ cm}$. Em metrologia dizemos que as segundas medições são mais precisas do que a primeira. Dessa forma podemos recorrer ao VIM para uma definição de precisão de um conjunto de medições:

Precisão de medição é o grau de concordância entre **indicações** ou **valores medidos**, obtidos por medições repetidas no mesmo objeto ou em objetos similares, sob condições especificadas. (IMETRO, 2009, p. 19).

Convém observarmos que, na presença de erros sistemáticos, um conjunto de resultados de medição pode ter um grau elevado de precisão e cada um deles ser bastante inexato.

Observamos que efetuar as medições com a régua graduada em milímetros produziu um conjunto de resultados mais precisos, na suposição de que não haja erros sistemáticos nessas medições. Para aumentar a precisão dos resultados poderíamos procurar escolher uma régua graduada em décimos de milímetro. Isso, no entanto, não realizável numa régua graduada do tipo escolhido.

O paquímetro surge, então, como uma possibilidade de aumentar a precisão da medição de comprimentos. Na seção seguinte, detalhamos como essa medição pode ser realizada.

6.3. Medição de comprimentos com um paquímetro

O paquímetro aqui descrito é do tipo analógico (ou mecânico⁹), tem sua denominação técnica, embora esse instrumento seja também conhecido como **nônio**, em homenagem ao matemático português Pedro Nunes (1502 - 1578) ou, ainda, **vernier**, do matemático francês Pierre Vernier (1580 - 1637). A invenção desse secular dispositivo é objeto de disputa entre historiadores da tecnologia.

A figura 20 traz uma imagem desse instrumento¹⁰ com indicação de suas partes constitutivas:



Figura 20 - paquímetro analógico. Fonte: <http://paquimetro.reguaonline.com> adaptado pelo pesquisador

No entanto, convém observar que paquímetros mais simples, com resolução de 0,1 mm, quando disponíveis, são preferíveis do ponto de vista didático.

Como se pode observar, o paquímetro possui como parte essencial, uma régua graduada em milímetros¹¹. Além da régua graduada, há um cursor que desliza ao longo da régua graduada. Usualmente, esse cursor ganha o nome do próprio instrumento e é denominado *nônio* ou *vernier*. O cursor contém outra régua graduada (chamada, às vezes de *regueta*).

⁹ O paquímetro digital possui característica de ser bastante simples e rápido de se usar, pois consegue chegar facilmente ao resultado por contato e, também, é livre de erro de paralaxe - ângulo de visão. Seu uso é ideal para controle estatístico de processo de produção em série.

¹⁰ O paquímetro ilustrado na Figura 8 é um dos mais comuns à venda, mesmo os de baixo custo, produzidos em material plástico são úteis para atividades em sala de aula.

¹¹ Há, também, uma escala em polegadas e frações de polegadas. Nesta dissertação, para simplificar a abordagem, a atenção é focalizada apenas na escala métrica. Isso se justifica, pois o estudo da escala no Sistema Inglês não acrescenta elementos novos com relação à escala métrica do paquímetro.

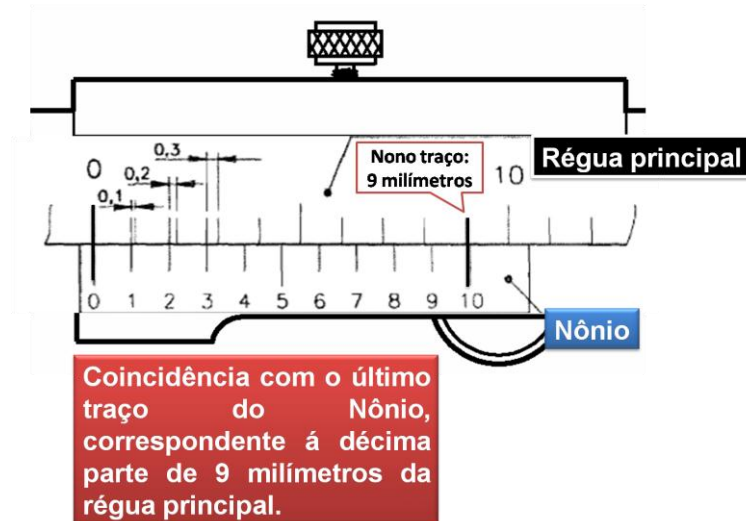


Figura 21 – Nônio. Fonte: Banco de dados do pesquisador.

Na sequência indicaremos um esquema que permite observar uma significativa diminuição do limite em comparação com a régua graduada ao longo da qual desliza o cursor. Na figura 22, na página seguinte, utiliza-se um desenho esquematizado da régua graduada principal com o nônio justaposto para explicar esse fato.

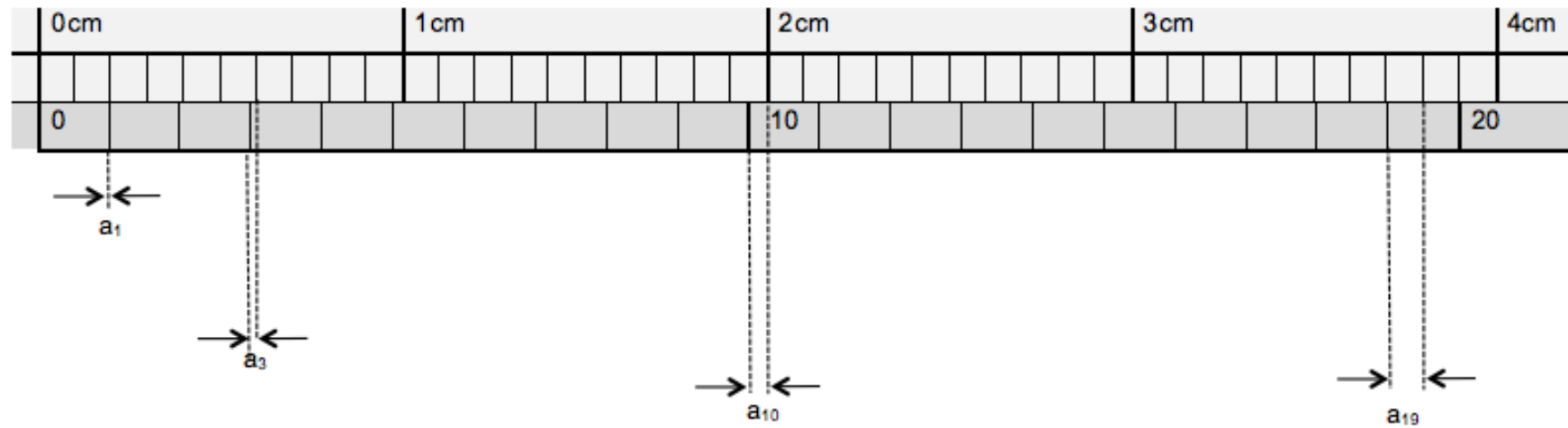


Figura 22. Desenho esquemático do conjunto régua graduada em centímetros e nônio com 20 divisões. Fonte: Banco de dados do autor

Quadro 10. Comparação entre as subdivisões da régua principal e do nônio de 20 subdivisões, dados em milímetros.

DADOS SOBRE A COMPARAÇÃO ENTRE AS ESCALAS DA RÉGUA PRINCIPAL E AS SUBDIVISÕES DO NÔNIO (em mm)				
$a_1 = 2 - 1 \times (39/20) = 1/20$	$a_5 = 10 - 5 \times (39/20) = 5/20$	$a_9 = 18 - 9 \times (39/20) = 9/20$	$a_{13} = 26 - 13 \times (39/20) = 13/20$	$a_{17} = 34 - 17 \times (39/20) = 17/20$
$a_2 = 4 - 2 \times (39/20) = 2/20$	$a_6 = 12 - 6 \times (39/20) = 6/20$	$a_{10} = 20 - 10 \times (39/20) = 10/20$	$a_{14} = 28 - 14 \times (39/20) = 14/20$	$a_{18} = 36 - 18 \times (39/20) = 18/20$
$a_3 = 6 - 3 \times (39/20) = 3/20$	$a_7 = 14 - 7 \times (39/20) = 7/20$	$a_{11} = 22 - 11 \times (39/20) = 11/20$	$a_{15} = 30 - 15 \times (39/20) = 15/20$	$a_{19} = 38 - 19 \times (39/20) = 19/20$
$a_4 = 8 - 4 \times (39/20) = 4/20$	$a_8 = 16 - 8 \times (39/20) = 8/20$	$a_{12} = 24 - 12 \times (39/20) = 12/20$	$a_{16} = 32 - 16 \times (39/20) = 16/20$	$a_{20} = 40 - 20 \times (39/20) = 20/20$

A figura 22 e o quadro 10 que a acompanha permite-nos concluir que se o zero do nônio está afastado $\frac{1}{20}mm$ do zero da régua graduada, o primeiro “traço” do nônio fica alinhado com a marca de 2mm da régua graduada principal e, neste caso, o comprimento medido a partir do zero da régua graduada principal é de, aproximadamente, $\frac{1}{20} = 0,05mm$, que é o limite de erro do paquímetro apresentado.

Quando o comprimento é medido a partir do zero da régua graduada principal for de $\frac{2}{20}mm$, consecutivamente o segundo “traço” do nônio estará alinhado com o quarto “traço” da régua. O comprimento de $\frac{3}{20}mm$, a partir do zero da régua principal, acarreta o alinhamento do terceiro “traço” do nônio com o sexto “traço” da régua.

Prosseguindo, conclui-se que um comprimento de $\frac{19}{20}mm$ implica no alinhamento do décimo nono “traço” do nônio com o trigésimo oitavo “traço” da régua. Um comprimento de $1mm$ medido pelo cursor do paquímetro a partir do zero da régua acarreta o alinhamento do vigésimo traço do nônio com o quadragésimo “traço” da régua. Quando se afasta o cursor do paquímetro de modo que o zero do nônio percorre o intervalo entre o primeiro e o segundo “traços” da régua graduada, que são espaçados de $1mm$, repetem-se os alinhamentos sucessivos descritos neste parágrafo.

Convém lembrar que é comum, para a leitura da medida fornecida pelo paquímetro, recorrer-se a uma lupa, que é um instrumento ótico de aumento de imagem.

Efetuem os a medição do comprimento de uma vareta na figura 22:

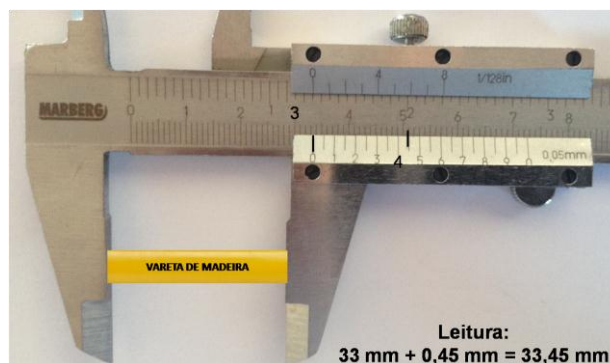


Figura 23. Medição da vareta com um paquímetro de 20 divisões. Fonte: Banco de dados do autor.

Nota-se que o limite de erro da medição é de $0,05\text{ mm}$, com o uso do paquímetro, o que mostra a importância desse dispositivo para aumentar a precisão dos resultados de medições de comprimento. Convém lembrar que, nas medições que apresentamos anteriormente com uma régua graduada em milímetros, o limite de máximo é de $0,5\text{ mm}$, isso significa que com paquímetro temos uma precisão 10 vezes maior do que com a régua graduada em milímetros.

Nas figuras a seguir, mostram-se outros exemplos de medição com um paquímetro de 20 divisões, conforme figuras; 23 e 24:

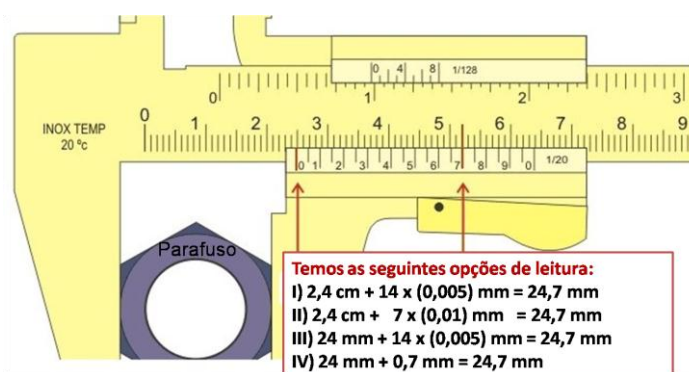


Figura 24. Medição de uma peça com um paquímetro de 20 divisões adaptado. Fonte: Banco de dados do autor.



Figura 25. Medição de uma peça com um paquímetro de 20 divisões. Fonte: Banco de dados do autor.

6.4. Tipos de paquímetros

Nas práticas profissionais, há muitas variedades de paquímetros. Já mencionamos que são muito comuns os paquímetros que possuem escalas métricas e escalas no Sistema Inglês. No entanto, há paquímetros que trazem apenas a escala métrica, como o que se indica na Figura 25, na qual se mostra o resultado da medição do comprimento de um dos eixos de uma peça:

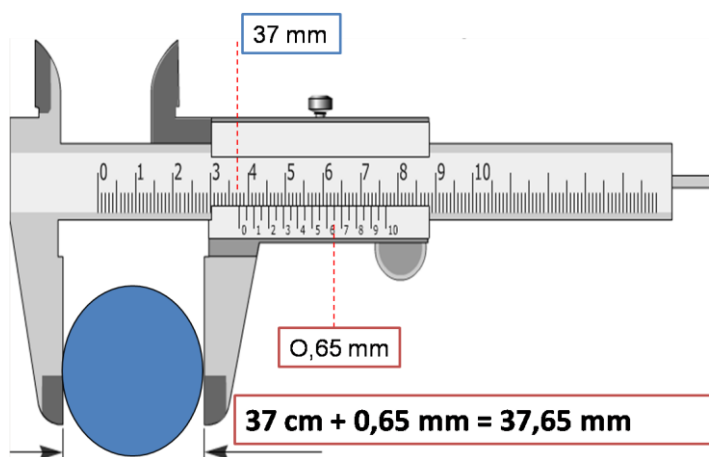


Figura 26. Paquímetro com régua principal apenas no sistema métrico. Fonte Banco de dados do autor.

O instrumento da Figura 25 é também de 20 divisões mas há paquímetros de 10 divisões e de até 50 divisões. No primeiro caso, a resolução é de 1 mm e no segundo caso de 0,02 mm, ver figuras; 26 e 27.

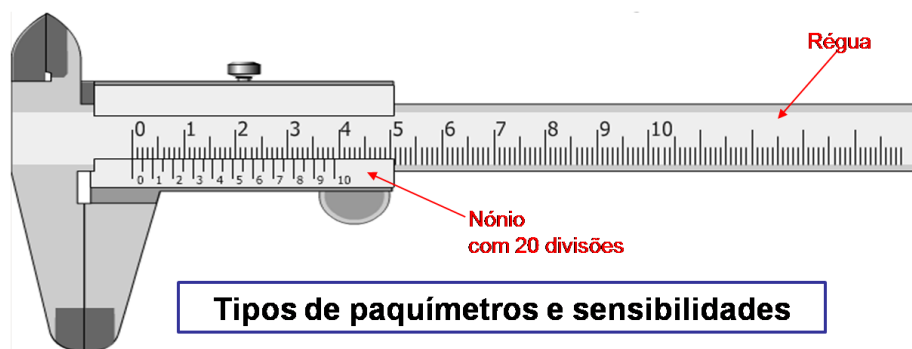


Figura 27. Paquímetro com régua principal apenas no sistema métrico. Fonte <http://paquimetro.reguaonline.com>. Adaptado pelo pesquisador.

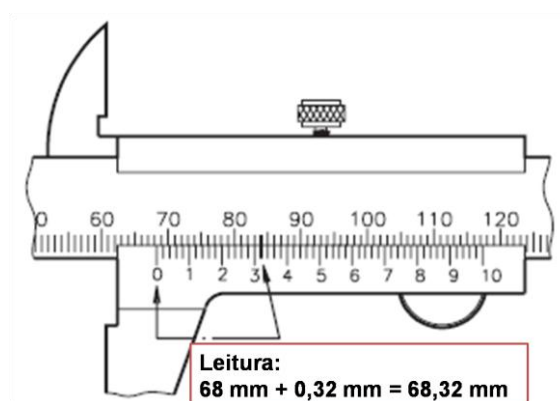


Figura 28. Paquímetro com régua principal apenas no sistema métrico. Fonte <http://paquimetro.reguaonline.com>. Adaptado pelo pesquisador.

7. OBJETIVOS

7.1. Objetivo Geral

Investigar o ensino da medição de comprimentos com o emprego do paquímetro para estudantes de um curso profissionalizante, com base na teoria da transposição didática, tendo como foco o material didático destinado a esse ensino.

7.2. Objetivos específicos

- Identificar os conceitos matemáticos envolvidos na medição de comprimentos com o uso do paquímetro, em particular os conceitos relativos a número racional e suas representações fracionária e decimal e à teoria dos erros de medição;
- Analisar os livros didáticos de Matemática e de Física aprovados pelo PNLD, usados no ensino médio de escolas pública da Região Metropolitana do Recife, à luz dos pressupostos teóricos da investigação;
- Analisar a apostila utilizada na disciplina metrologia do curso profissionalizante em que tomam parte os sujeitos, com base nos pressupostos teóricos da pesquisa.

8. O MÉTODO

Neste capítulo, os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa são descritos e justificados.

8.1. Descrição geral da abordagem metodológica

Em uma primeira etapa, foram realizados estudos documentais sobre a instituição na qual é ministrado o curso de formação profissionalizante alvo do trabalho. Na sequência, obtivemos informações básicas sobre os primórdios da educação profissionalizante no Brasil e, depois disso, um breve relato do Sistema “S”. Para concluir esta primeira fase, discorreremos brevemente sobre a integração dos ensinos propedêutico e profissionalizante.

A história da legislação sobre formação profissional também foi objeto de estudo, além de permitir identificar os posicionamentos de cada instituição quanto ao planejamento, modelos didáticos, competências e habilidades, ou campos da matemática que envolva essa modalidade de ensino.

Em outra fase da investigação, buscou-se identificar a literatura disponível, no atual momento, sobre a metrologia e, em particular, sobre o uso do paquímetro.

Na continuidade desta pesquisa, partimos para o estudo dos pressupostos teóricos, com ênfase na Transposição Didática de Chevallard (1991), questionando-se que saberes relativos à medição de comprimento com o paquímetro estão envolvidos nas duas instituições.

Etapa central neste trabalho foi à escolha de investigar os livros didáticos disponíveis para os alunos dessas instituições no que tange aos conceitos que intervêm na medição de comprimento com o paquímetro. A justificativa básica dessa escolha foi à consideração de que o livro didático constitui-se em elemento importante da transposição didática. Com mais detalhes, é o que procuramos argumentar na seção seguinte.

8.2. A importância do Livro Didático

A título de delimitação, consideramos que o livro didático - LD é uma parte de todo o material escrito “*relativo ao ensino, próprio para instruir*” (FERREIRA, 2001). Além disso, é consenso na literatura educacional que o LD desempenha múltiplas funções, tanto para os alunos quanto para os professores.

Varizo (1999) revela que o livro didático exerce grande influência no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Em particular, esse instrumento didático é a fonte em que o professor vai buscar os conteúdos que serão ministrados em suas aulas, bem como as formas de como serão abordados os conteúdos escolhidos.

Assim este instrumento didático cumpre um papel importante no início da fase da transposição didática interna (CHEVALLARD, 1991).

Em Gerard & Roegiers (2003) podemos encontrar uma síntese das funções de um livro didático:

Formação científica e geral que oferece aos professores uma melhor matriz do saber; formação pedagógica que pode sugerir aos professores uma série de vias de trabalho; ajuda a aprendizagem e a gestão de curso fornecendo numerosos instrumentos que permitem melhorar a aprendizagem ao quotidiano; e ajuda à avaliação das aquisições [...] (GERARD & ROEGIERS, 2003).

Esses autores buscam identificar nos livros didáticos algumas características qualitativas que contribuem para favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes, propiciando, o desenvolvimento de competências cognitivas.

E que estas, contribuam para aumento da autonomia, assim como, consolidem, ampliem, aprofundem e integrem os conhecimentos adquiridos. Além disso, o livro didático deve ser um auxiliar na auto-avaliação da aprendizagem, contribuindo para a formação social, cultural, desenvolvendo a capacidade de convivência e do exercício da cidadania.

Por sua vez, Assude & Moalinas (2005) indicam que, para o professor de matemática o livro didático traz quatro contribuições relevantes: elementos

das matemáticas a ensinarem; elementos lógicos subjacentes, atividades matemáticas e a maneira de conduzir a aprendizagem dos alunos. Em função disso, surge um instrumento que possui influência sobre as práticas pedagógicas dos professores.

Ao analisarmos as funções do livro didático referentes aos professores, obtivemos três funções gerais: uma ligada diretamente à sua atividade profissional e as outras duas possuindo ações diretas sobre a sua formação.

Esta formação é complementar em relação à sua formação inicial e diz respeito à busca do desenvolvimento de capacidades e competências para a sua vida diária ou para uma formação profissional ligada à sua atividade de professor. A tabela 3 a seguir, procura resumir as funções de um livro didático relativamente ao professor.

Função geral	Função específica
Ferramenta de utilização didático/profissional	Trazer explanações e atividades relativas ao conteúdo a ser ministrado; ajudar o professor a dosar as atividades de sala de aula; ajudar na avaliação de aquisições; incluir propostas relativas à abordagem dos conteúdos; contribuir na aprendizagem e nas gestões das lições; sugerir outros recursos didáticos; ser fonte de ajuda teórica.
Ferramenta de formação continuada	Constituir-se em: currículo a ser praticado pelos professores; obra de referência e de reflexão pedagógica; instrumento de transmissão do conhecimento e desenvolvimento de capacidades e de competências; fonte de informações científicas gerais; fator de formação científica e didático-pedagógica nos conteúdos da disciplina; instrumento de auto-formação.

Tabela 3 - Funções dos livros didáticos relativas aos professores. Fonte: Bando de dados do pesquisador

Em resumo, o professor de matemática pode ter nos livros didáticos um apoio para sua prática didático-pedagógica e para sua formação continuada.

8.4. Breves considerações sobre o Programa Nacional do Livro Didático - PNLD

Os primórdios da presença de livros didáticos de Matemática nas escolas do país recuam ao início do século XIX, quando se publicou, pela Impressão Régia, no Rio de Janeiro, a obra *Elementos de Geometria*, de Legendre, com tradução de Manuel Ferreira Guimarães (VALENTE, 2007). Mais de um século depois, aprova-se o decreto-lei 1006, em 1938, que, pela primeira vez, estabelece normas para esse instrumento didático em nosso país.

No entanto, uma política nacional voltada para garantir que todas as escolas públicas do país dispusessem de livros para seus alunos espera até o ano de 1985, com a criação do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD.

No ano de 1997, um passo importante foi dado nesse Programa para garantir da qualidade dos materiais didáticos em uso nas escolas, que foi o início da avaliação (científica e pedagógica) desses materiais, sob a responsabilidade da então Secretaria da Educação Fundamental (SEF), hoje ampliada para se tornar Secretaria da Educação Básica (SEB), atual coordenadora do referido processo de avaliação. Outra data a registrar é 2002, ano em que a avaliação do programa passou a ser feita em convênio do MEC com universidades federais brasileiras.

Atualmente, o PNLD é um programa do Ministério da Educação, gerido pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e tem como entidades partícipes a SEB/MEC, que coordena o processo de avaliação e universidades federais brasileiras, que executam essa avaliação.

A avaliação das obras inscritas nesse programa é um longo processo composto de várias etapas: a) convocação; via edital público nacional, para inscrições de livros didáticos pelos detentores de direitos autorais; b) inscrição das obras no FNDE; c) triagem dos livros, com base em especificações técnicas do edital referentes aos aspectos físicos e editoriais dos livros; d) avaliação (científica e pedagógica) das obras; e) divulgação do Guia do Livro Didático, com as resenhas das coleções aprovadas para a escolha dos professores; e) processo de escolha realizado em cada escola, com indicação das adoções pelos professores; f) negociação e aquisição dos livros escolhidos; g) distribuição dos livros nas escolas.

Ao longo dos anos ampliou-se sua abrangência para distribuir livros didáticos, avaliados sob coordenação da SEB/MEC, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental até o terceiro ano do Ensino Médio, para praticamente todos os componentes escolares desses anos.

A escolha feita neste trabalho de investigar livros didáticos egressos do programa nacional prende-se ao fato de que os sujeitos envolvidos na pesquisa dispõem desses livros nas escolas públicas em que estudam.

Para esta dissertação foi considerado o PNLD 2015, edição em que foram avaliados e distribuídos livros para o Ensino Médio. Em particular, foram escolhidos para análise apenas os livros de Matemática e de Física, componentes curriculares em que são abordados os conteúdos relacionados com os objetivos deste trabalho.

Os princípios em que se fundamenta a avaliação do livro didático, explicitados no edital do citado plano, incluem requisitos gerais, em conformidade com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996). Em seu artigo 35, essa Lei estabelece como finalidades do Ensino Médio:

I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo de ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina (BRASIL, 1996).

Como vemos; os princípios gerais, em particular o segundo e o quarto, apontam para uma formação integral, que contemple não só a formação científica e humanística como a preparação para o trabalho no mundo permeado de tecnologia de base científica. Para uma formação que propicie

condições de adaptação a novas formas e usos de equipamentos tecnológicos do cotidiano.

Além dos princípios gerais, a avaliação dos livros didáticos é baseada em dois conjuntos de critérios de avaliação. O primeiro é aplicável a todos os componentes curriculares e explicita que só serão oferecidas para escolha do professor obras que não infrinjam os seguintes requisitos Brasil (2015):

- respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao ensino médio;
- observância de princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano;
- coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela obra, no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados;
- respeito à perspectiva interdisciplinar na apresentação e abordagem dos conteúdos;
- correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos;
- observância das características e finalidades específicas do manual do professor e adequação da obra à linha pedagógica nela apresentada;
- adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico aos objetivos didático-pedagógicos da obra.
- pertinência e adequação do conteúdo multimídia ao projeto pedagógico e ao texto impresso (Referência do Guia de Matemática do PNLD 2015) (BRASIL, 2015).

O segundo conjunto é composto de critérios de avaliação que se referem a cada um dos componentes curriculares do Ensino Médio e podem ser lidos nos Guias do plano de 2015, disponíveis no endereço eletrônico: www.fnnde.gov.br. Esses critérios procuram zelar, em particular, pela correção dos conceitos científicos e pela adequação da metodologia de ensino e aprendizagem de cada componente curricular.

8.5. Os livros didáticos do PNLD analisados

Como dissemos, os alunos participantes do curso profissionalizante pesquisado são matriculados no ensino médio regular nas escolhas públicas da região metropolitana do Recife. Constatamos que todas as referidas

escolas adotavam a mesma coleção de Matemática e a mesma coleção de Física. Assim, essas obras impuseram-se como escolhas para nosso trabalho.

Resultou disso que foram escolhidos os seguintes livros didáticos para a coleta de dados do nosso trabalho:

- i) **Coleção A:** componente curricular Matemática;
- ii) **Coleção B:** componente curricular Física.

Convém informar que um suporte importante para nosso estudo das duas referidas coleções foram os Guias de Matemática e de Física do Programa Nacional do Livro Didático 2015, nos quais não só as resenhas dessas obras são apresentadas como são feitas análises gerais sobre todas as obras contidas nos dois documentos.

8.6. As apostilas de metrologia

A outra fonte de dados para a pesquisa foi à apostila utilizada na disciplina Metrologia do curso do PRONATEC que foi alvo do nosso trabalho. Com essa publicação completa-se o elenco de recurso didático a que podem recorrer os sujeitos da pesquisa. No âmbito deste trabalho esse material didático será denominado, simplesmente: Apostila de Metrologia.

8.7. Campos de conceitos matemáticos e transposição didática

Neste trabalho, é feita uma investigação sobre a transposição didática de alguns conceitos matemáticos envolvidos na medição de comprimentos com o uso do paquímetro. Como afirmamos anteriormente, com base em Chevallard (1991), a transposição didática é entendida como um *conjunto de transformações adaptativas* que tornam um objeto do saber científico apto a se constituir em *objeto de ensino*.

Convém, então, resumir quais são esses objetos do saber científico que fazem parte desta pesquisa. Esses objetos são resumidos e classificados por

conteúdo, blocos de conteúdos, eixo temático e/ou campos de conceitos que seguem:

- a) **Grandeza e Medidas** (bloco de conteúdos – eixo temático): conceito de grandeza; distinção entre os três elementos, objeto, grandeza, medida; relação de ordem entre grandezas de mesma espécie; medição de grandezas, valor verdadeiro de uma grandeza; erro de medição, limite de erro de um instrumento de medição, precisão de uma sequência de medidas, exatidão de uma sequência de medidas;
- b) **Número Racional** (conteúdo): definição de número racional; operações entre racionais, representações fracionária e decimal de um número racional; relação ordem no conjunto dos racionais;
- c) **Probabilidade e Estatística** (conteúdos): experimento aleatório; média; desvio padrão.

9. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

No presente capítulo, os dados obtidos na pesquisa são descritos, categorizados com base no que foi exposto no capítulo anterior e, ao mesmo tempo, analisados à luz da fundamentação teórica adotada.

9.1. Análise da Coleção A: Matemática

A obra é formada por três volumes, destinados aos 1º, 2º e 3º anos do ensino médio, e organiza-se em capítulos dedicados a tópicos de vários campos da matemática escolar: números e operações, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidade.

Segue a tabela 4 do 1º Ano do Ensino Médio contendo 12 capítulos – 256 páginas. Nela, são abordados os seguintes conteúdos:

VOLUME 1	
Capítulo 01	Conjuntos: conceitos primitivos, notação, classificação, subconjunto, universo, operações; conjuntos numéricos; eixo real
Capítulo 02	Equações, inequações e sistemas de equações polinomiais do 1º grau; equações polinomiais do 2º grau – matemática financeira: porcentagem, juros simples, juros compostos
Capítulo 03	Polígonos: elementos, classificação; triângulos: classificação, propriedades; teorema de Tales; semelhança de: figuras planas, triângulos; relações métricas no triângulo retângulo
Capítulo 04	Circunferência e círculo: definições, elementos, posições relativas, ângulos inscrito e central – perímetro e área; área de figuras planas
Capítulo 05	Sistemas de coordenadas cartesianas; função: conceito, representações, imagem, estudo do sinal
Capítulo 06	Funções de variáveis reais: domínio e contradomínio, zero, variação; funções inversas
Capítulo 07	Função polinomial do 1º grau: definição, gráfico; funções definidas por mais de uma sentença; inequação produto e inequação quociente
Capítulo 08	Função polinomial do 2º grau: definição, gráfico, máximo e mínimo, sinal; inequações polinomiais
Capítulo 09	Distância entre dois pontos; módulo, equações e inequações modulares; função modular
Capítulo 10	Potenciação e radiciação; função exponencial: definição, gráfico; equação e inequação exponencial
Capítulo 11	Logaritmo: propriedades; função logarítmica: propriedades; equação e inequação logarítmica.
Capítulo 12	Sequências: conceito, termos, lei de formação; progressões aritmética e geométrica: classificação, termo geral, soma dos termos

Tabela 4 - Fonte: Bando de dados do pesquisador

Na sequência segue a tabela 5 do 2º Ano do Ensino Médio contendo 11

capítulos – 312 páginas. Nela, são abordados os seguintes conteúdos:

VOLUME 2	
Capítulo 01	Trigonometria no triângulo retângulo: distâncias, razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente
Capítulo 02	Circunferência trigonométrica: ângulo, arco, radiano, simetrias, seno, cosseno; relação fundamental da trigonometria; equações e inequações trigonométricas
Capítulo 03	Tangente; equações e inequações trigonométricas; secante, cossecante e cotangente
Capítulo 04	Seno, cosseno e tangente da soma de arcos; seno, cosseno e tangente do arco duplo
Capítulo 05	Funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente; cálculo da área de um triângulo
Capítulo 06	Matrizes: definição, tipos especiais, igualdade, adição, subtração, Multiplicação
Capítulo 07	Equação linear; sistema de equações lineares: definição, solução, classificação, resolução
Capítulo 08	Determinantes; sistemas lineares e determinantes; sistema linear Homogêneo
Capítulo 09	Análise combinatória: princípio fundamental da contagem, princípio aditivo da contagem, fatorial
Capítulo 10	Métodos de contagem: arranjos, permutações e combinação simples; binômio de Newton
Capítulo 11	Probabilidade: definição, propriedades; adição de probabilidades; probabilidade condicional; multiplicação de probabilidades
Capítulo 12	Geometria de posição: noções básicas, posições relativas entre elementos do espaço, perpendicularidade, projeção ortogonal, ângulos no espaço; poliedros
Capítulo 13	Prismas; paralelepípedo e cubo: área e volume; prismas e pirâmide: área e volume; tronco de pirâmide
Capítulo 14	Corpos redondos: introdução; cilindro, cone circular e esfera: elementos, área e volume

Tabela 5 - Fonte: Bando de dados do pesquisador

Por último segue a tabela 6 do 3º Ano do Ensino Médio contendo 09 capítulos – 200 páginas. Nela, são abordados os seguintes conteúdos:

VOLUME 3	
Capítulo 01	Estatística: conceitos preliminares, distribuição de frequências, tabelas e gráficos, média, moda, mediana, desvio médio, variância, desvio padrão
Capítulo 02	Distância entre dois pontos; ponto médio de segmentos; reta: determinação, inclinação, coeficiente angular
Capítulo 03	Formas de equação da reta: equação geral, equação reduzida, equações paramétricas
Capítulo 04	Distância entre ponto e reta; área de um triângulo; alinhamento de três pontos; inequações do 1º grau
Capítulo 05	Equações da circunferência: reduzida, geral; posições relativas de ponto e reta com a circunferência

Capítulo 06	Cônicas: visualização, origem, definição; elipse, hipérbole e parábola: construção, equação reduzida
Capítulo 07	Números complexos: forma algébrica e operações, representação geométrica, módulo, forma trigonométrica e operações
Capítulo 08	Polinômios: definição, operações; fração polinomial; divisão de polinômios por binômios do 1º grau: teorema do resto, teorema de D'Alembert, dispositivo de Briot-Ruffini
Capítulo 09	Equações polinomiais: definição, teorema fundamental da álgebra, teorema da decomposição, teorema das raízes imaginárias, teorema das raízes racionais, relações de Girard
Capítulo 10	Potenciação e radiciação; função exponencial: definição, gráfico; equação e inequação exponencial
Capítulo 11	Logaritmo: propriedades; função logarítmica: propriedades; equação e inequação logarítmica.

Tabela 6 - Fonte: Bando de dados do pesquisador

Da extensa lista de conteúdos abordados na Coleção A, vamos nos deter apenas nos conteúdos de: números racionais; grandezas e medidas; estatística e probabilidade. Esses são os conteúdos dos diversos blocos sobre os quais nos detivemos em nossa fundamentação teórica.

O primeiro tema, os números racionais, é tratado especificamente no volume 1 da coleção, quando são apresentados os conjuntos numéricos dos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Tais conjuntos numéricos são apresentados como modelos para resolver problemas tanto no contexto social quanto na própria Matemática.

Na sequência do texto analisado escolhe-se apresentar os números racionais segundo sua interpretação de quociente de dois inteiros, um deles, o divisor, diferente de zero:

Conjunto dos números racionais

O número fracionário surge da divisão não exata de dois inteiros, por exemplo: 1:4. Não há nenhum número inteiro que represente o resultado dessa divisão. Já no **conjunto dos números racionais**, o resultado da divisão 1:4 pode ser

representado por $\frac{1}{4}$ (COLEÇÃO A, p.27).

Segue-se a definição formal dos números racionais, com uso da simbologia matemática:

Número racional é todo aquele que pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros, o segundo não

nulo. Indicamos o conjunto de todos os números racionais pela letra $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{Z} \text{ e } b \in \mathbf{Z}^* \right\}. \text{ (COLEÇÃO A, p. 27).}$$

Na obra, prossegue-se com a apresentação de exemplos de números racionais representados por frações ordinárias e por números com um número finito de casas decimais.

Na sequência da Coleção A, são mencionadas propriedades dos racionais; relativamente à adição, subtração, multiplicação e divisão. As relações de inclusão do conjunto dos naturais no conjunto dos inteiros e deste no conjunto dos racionais é discutida, mostrando-se tais relações por meio de diagramas de Venn.

Nos textos seguintes da seção dedicada aos racionais, a atenção é voltada para o estudo da representação decimal finita e da representação decimal infinita (dízima) dos números racionais. Mostra-se que estas últimas devem ser dízimas periódicas, concluindo-se com a afirmação: “os números racionais são todos os números com representação finita (podendo ser inteiros) e todas as dízimas periódicas” (COLEÇÃO A, p. 28).

Essa afirmação prepara o terreno para a abordagem dos números irracionais. De fato, se pudermos conceber uma representação decimal infinita e não periódica esta não seria a representação de um número não racional, ou, como se diz usualmente, **irracional**¹².

Na seção seguinte do livro, abordam-se os números irracionais, com o seguinte texto introdutório:

Conjunto dos números irracionais

Até meados do século VI a. C., no auge do Pitagorismo, acreditava-se que os números inteiros (positivos) e as razões entre eles, hoje chamados números racionais, fossem suficientes para resolver qualquer problema que envolvesse medições, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do ser humano.

¹² Os irracionais podem ser observados mais claramente durante medições de exatidão e precisão quando resulta principalmente de erros aleatórios, os quais têm seu principal indicador o desvio padrão de uma amostra, ou conjunto de medições (GUEDES, 2011).

No entanto, alguns problemas, provavelmente propostos pelos pitagóricos, puseram por terra essa ideia. Um desses problemas é o seguinte:

Qual é a medida d da diagonal de um quadrado de lado unitário?

Qual é a medida d da diagonal de um quadrado de lado unitário? (COLEÇÃO A, p. 30).

Voltamos nossa atenção para a descrição da abordagem dos conteúdos de estatística e probabilidade na Coleção A. Esses conteúdos apresentam-se, especificamente, em dois momentos da obra.

No volume 2, capítulo 11, são estudados os conceitos básicos de probabilidade: definição, propriedades; adição de probabilidades; probabilidade condicional; multiplicação de probabilidades.

No volume 3, capítulo 1, são abordados tópicos de estatística: conceitos preliminares, distribuição de frequências, tabelas e gráficos, média, moda, mediana, desvio médio, variância, desvio padrão, contudo cada conteúdo é abordado de forma abstrata, distante de aplicações com a metrologia.

Como vimos, os números racionais foram apresentados não como resultado de medições de grandezas, mas como um conceito que surge no âmbito da operação matemática de divisão entre inteiros. Embora em todo o restante da Coleção A sejam empregada, com muita frequência, os números racionais como medida de grandezas, na apresentação inicial do conceito tal interpretação está ausente.

Dessa forma, isso se configura como uma transposição didática inadequada, que pode dificultar a aprendizagem em especial dos alunos envolvidos nos cursos profissionalizantes, em que a disciplina Metrologia seja um componente importante.

A abordagem dos irracionais é precedida da discussão da representação decimal dos racionais. De modo natural, os irracionais poderiam ser introduzidos como dízimas não periódicas. No entanto, apela-se para o problema clássico dos pitagóricos.

Essa abordagem merece reparos por dois motivos: em primeiro lugar, empregam-se as expressões “*medida d*” e “*lado unitário*” sem menção à unidade de comprimento. Isso induz à ideia de que os comprimentos em foco

são números e não grandezas. Além disso, o caráter de medição abstrata que é essencial para discussão da questão pitagórica não fica evidenciado.

Noutros termos, o problema da incomensurabilidade da diagonal em relação ao lado do quadrado só surge no âmbito abstrato. No contexto dos problemas práticos das medições empíricas, os racionais são, sim, suficientes, ao contrário do que se sugere no livro.

Quanto aos conteúdos do campo da estatística e probabilidade, recorreremos ao Guia do PNLD 2015, para uma avaliação geral desses conteúdos:

Apropriadamente, as ideias de incerteza em experimentos aleatórios, de espaço amostral e de espaço amostral equiprovável, são exploradas antes de se definir a probabilidade de um experimento e de serem discutidas suas diferentes formas de representação: fracionária, decimal e percentual. Tal procedimento colabora para a compreensão do pensamento probabilístico.

O estudo de estatística inicia-se, corretamente, com a apresentação das etapas de planejamento e execução de uma pesquisa estatística. Porém, não há atividades que visem desenvolver no aluno procedimentos de coleta e organização de dados. Há ausência de propostas de atividades que utilizem recursos computacionais, como planilhas eletrônicas e calculadoras científicas. (BRASIL, 2015, p. 45).

A despeito dessa avaliação positiva do estudo dos conteúdos de estatística e probabilidade feito na Coleção A, do ponto de vista da transposição didática dos conteúdos de grandezas e medidas é muito insatisfatória.

De fato, observa-se uma ausência de conexão dos conteúdos estudados na obra com os que são centrais no campo da medição de grandezas. Por exemplo, os resultados das medições não são citados com exemplo de eventos incertos, as ideias de precisão e de exatidão das medições também não são abordadas, como também o conceito de algarismos significativos.

Essas deficiências revelam falhas na transposição didática dos conceitos que são focalizados neste trabalho indicam que podem ocorrer

dificuldades de mediação dos saberes envolvidos no processo da formação básica e profissional.

9.2. Análise da Coleção B: Física

Trata-se de um conjunto de três volumes, destinados aos 1º, 2º e 3º anos do ensino médio, respectivamente.

Os três volumes possuem organização comum: divisão em unidades e capítulos; abertura com questões iniciais que procuram apresentar o conteúdo a ser estudado, textos explicativos, experimentos, atividades e exercícios resolvidos e propostos. Na metodologia adotada, procura-se contextualizar os temas da Física e trazer à discussão questões do cotidiano.

Do ponto de vista dos conteúdos, a obra inclui tópicos que têm sido abordados usualmente no ensino médio, como podemos observar na tabela 7 que consta os itens do sumário a seguir.

A tabela 7 corresponde ao 1º Ano do Ensino Médio contendo 04 capítulos – 320 páginas. Nela, são abordados os seguintes conteúdos:

VOLUME 1	
Unidade 1 – Apresentação da Física	
Capítulo 1	Física: uma ciência da natureza
Capítulo 2	Grandezas e sistema de unidades
Unidade 2 – O estudo dos movimentos	
Capítulo 3	Movimentos em uma dimensão
Capítulo 4	Movimentos em duas dimensões
Capítulo 5	As leis de Newton para os movimentos
Capítulo 6	Aplicações das leis de Newton
Unidade 3 – Energia e as leis da conservação	
Capítulo 7	Energia, trabalho e potência
Capítulo 8	Quantidade de movimento
Capítulo 9	O Sistema Solar e a Terra.
Unidade 4 – O homem e as máquinas	
Capítulo 10	Estática dos corpos rígidos – máquinas simples
Capítulo 11	Fluídos

Tabela 7 - Fonte: Bando de dados do pesquisador.

Na sequência segue a tabela 8 corresponde ao 2º Ano do Ensino Médio contendo 04 capítulos – 312 páginas. Nela, são abordados os seguintes conteúdos:

VOLUME 2	
Unidade 1 – O calor e suas consequências	
Capítulo 1	Temperatura e calor
Capítulo 2	Calorimetria
Unidade 2 – Energia e meio ambiente	
Capítulo 3	Primeira lei da Termodinâmica
Capítulo 4	Segunda lei da Termodinâmica
Capítulo 5	Fontes de energia e impactos ambientais
Unidade 3 – Ondulatória	
Capítulo 6	Ondas mecânicas
Capítulo 7	Acústica
Unidade 4 – Óptica e informação	
Capítulo 8	Luz e reflexão luminosa
Capítulo 9	Refração luminosa
Capítulo 10	Sons, imagens e informação

Tabela 8 - Fonte: Bando de dados do pesquisador.

Por fim a tabela 9 que corresponde ao 3º Ano do Ensino Médio contendo 04 capítulos – 296 páginas. Nela, são abordados os seguintes conteúdos:

VOLUME 3	
Unidade 1 – Fenômenos elétricos em condutores	
Capítulo 1	Energia e corrente elétrica
Capítulo 2	Os circuitos elétricos nas residências
Capítulo 3	Geradores e receptores elétricos
Unidade 2 – Ações elétricas a distância	
Capítulo 1	Campo elétrico
Capítulo 2	Cargas elétricas em condutores
Capítulo 3	Campos e forças de natureza magnética
Unidade 3 – Fenômenos eletromagnéticos e a sociedade moderna	
Capítulo 1	Indução eletromagnética
Capítulo 2	Ondas eletromagnéticas
Unidade 4 – O muito pequeno e o muito grande	

Capítulo 1	Os pilares da Física moderna
Capítulo 2	Física nuclear
Capítulo 3	Cosmologia e partículas elementares

Tabela 9 - Fonte: Bando de dados do pesquisador.

Uma análise preliminar da Coleção B revela que, em todos os volumes, estão presentes as grandezas que são estudadas no campo da Física, tais como: Grandezas e seu sistema de unidades, conceitos e fenômenos. Assim, poderemos dizer que as grandezas permeiam toda a obra.

A despeito disso, apenas em um capítulo, no volume 1, é dedicada atenção específica ao campo das grandezas e medidas. Por isso, vamos nos concentrar na análise desse capítulo, intitulado *Grandezas e Sistemas de Unidades*.

O capítulo é iniciado com a seção *A importância das medições e das unidades*, em que podemos ler:

Da alta precisão exigida em um laboratório à simplicidade da compra de uma roupa, nosso convívio com as grandezas e os sistemas de unidades de medidas tornou-se inevitável. Por isso aprender o significado correto dessas medidas é fundamental para o nosso dia a dia.

[...]

Assim, quando dizemos alguém diz “uma sala tem 3 metros de altura” ou “durmo 8 horas por dia”, temos uma ideia exata das grandezas mencionadas: altura e intervalo de tempo. Os valores 3 e 8 correspondem a um certo número de vezes para uma quantidade padrão: o metro no primeiro caso, e a hora no segundo.

Uma quantidade padrão recebe o nome de **unidade**. A unidade é a quantidade específica que serve de comparação entre grandezas de mesma espécie. De um modo geral podemos definir como **grandeza** tudo aquilo que podemos comparar a um padrão efetuando uma medição.

Ao efetuarmos a medição de uma grandeza, o resultado obtido deve ser sempre apresentado por um número seguido de uma unidade.

Medidas como o comprimento, a largura, ou a espessura de um livro por exemplo, são expressas geralmente em centímetros; já as dimensões de um terreno residencial são dadas em metros, as distâncias entre cidades são expressas em quilômetros, e as distâncias astronômicas em anos-luz. Observe que uma mesma grandeza, no caso o comprimento pode ser expressa com unidades diferentes (centímetro, metro, quilômetro e ano-luz) dependendo da situação. (COLEÇÃO B, p. 31).

A seção seguinte do livro trata da *Notação Científica*, um modo convencional de escrita dos números racionais. Todo número racional pode ser escrito na forma: $ax10^n$ em que a é um número racional maior ou igual a 1 e menor do que 10.

Em seguida, vem à seção *Sistema Internacional de Unidades (SI)*, que se inicia com o texto:

Com o avanço das ciências veio a necessidade de se agruparem as unidades, formando sistemas, unificando os métodos de trabalho em todo o mundo. Atualmente, o mais usado é o Sistema Internacional de Unidades, conhecido como SI, padronizado em 1960 na 11^a Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM), tendo como base o antigo Sistema MKS (metro, quilograma, segundo). Hoje o SI é o sistema oficial adotado na maioria dos países – incluindo o Brasil, que aderiu a ele em 1962.

O embrião do SI foi o Sistema Métrico Decimal, criado em 1792, durante a Revolução Francesa, e adotado no Brasil em 1862 (COLEÇÃO B, p. 36).

As duas seções seguintes são dedicadas a *Medidas de comprimento, área e volume* e a *Medidas de massa e de tempo*.

O tópico seguinte *Ordem de grandeza e Estimativas* nos remete a uma importante maneira de exprimir de modo aproximado o resultado de uma medição:

Em muitos casos, é suficiente uma noção aproximada do número que exprime o valor de uma grandeza. Por exemplo, os cálculos dos cientistas indicam valores entre 10 bilhões e 20 bilhões de anos para a idade do Universo. Segundo a teoria do *big-bang*, o Universo teve início há cerca de 15 bilhões de anos, ou seja, a idade do Universo é $1,5 \times 10^{10}$ anos. Como o valor apresentado é uma estimativa, podemos usar somente a potência de 10. Nesse caso, dizemos que a idade do Universo é da ordem de 10^{10} anos. Em outras palavras, a **ordem de grandeza (OG)** da idade do Universo, em anos, é 10^{10} .

Qualquer que seja o número x correspondente a uma medida, seu módulo estará entre duas potências inteiras e consecutivas de 10, ou seja: $10^n \leq |x| < 10^{n+1}$. (COLEÇÃO B, p. 45).

Na última seção do capítulo são apresentados o *Precisão nas medições: algarismos significativos*. Como texto síntese dessa seção, podemos citar:

As medidas de comprimento obtidas com um **micrômetro** apresentam uma precisão 100 vezes maior do que as efetuadas com uma régua. Portanto, o resultado de uma medição deve ser apresentado com uma quantidade de algarismos que expresse a precisão do aparelho utilizado para sua determinação. Assim, uma medida igual a *2,00cm* não deve ser escrita como *2,0cm* ou como *2cm*. (COLEÇÃO B, p.47).

Na sequência do texto, procura-se esclarecer o sentido da última frase da citação acima. Toma-se o exemplo da medição de um comprimento com uma escala que graduada em centímetros e milímetros. Nesse caso, diz-se:

Assim, expressamos a altura do copo como **7,35 cm**. Não há sentido em expressar essa medida além da segunda casa decimal, pois a última casa (algarismo 5) já é incerta. Portanto a medida realizada só tem sentido se a expressarmos com três algarismos. A medida tem, portanto, três **algarismos significativos**, sendo dois algarismos corretos (7 e 3) e um algarismo duvidoso (5). (COLEÇÃO B, p. 47).

Nessa seção diz-se, ainda:

Não podemos esquecer que, por melhor que seja o aparelho, qualquer medição que fizermos estará sujeita a erros. Por exemplo, se alguns estudantes fizerem, isoladamente, a medição do comprimento do copo [...], é possível que os resultados não sejam iguais. As discrepâncias se referem principalmente ao algarismo duvidoso. Mas, por que isso acontece?

Em primeiro lugar, vamos descartar os chamados erros acidentais, isto é, aqueles que se devem ao descuido da pessoa que efetua a medição. Tais erros podem ser evitados – basta que a pessoa que realize o procedimento tome as devidas precauções. Existe outro tipo de erro, chamado de erro sistemático. Que é inerente ao aparelho de medição. Por mais cuidado que a pessoa tenha, ela não consegue evita-los, pois esse tipo de erro está relacionado à limitação do aparelho (COLEÇÃO B, p. 48).

Ao analisarmos os textos extraídos da Coleção B à luz de nossa fundamentação teórica, observamos que, de fato, os tópicos abordados estão estreitamente relacionados com o saber estabelecido no campo da medição

de grandezas. A apresentação desses conteúdos cumpre de modo satisfatório a transposição didática desse saber.

Contudo, como os tópicos citados estão concentrados no volume 1, é de se esperar que o estudante envolvido nesse modelo de ensino, volte a esse capítulo ao longo de sua formação no ensino médio e, também, na sua formação profissional. Além disso, podemos indicar alguns pontos em que há certa confusão no emprego do termo ‘medida’ que tem, quase sempre, o significado de grandeza, mas, que em alguns pontos, significa apenas o número que mede a grandeza.

E mais, no conjunto de erros não é mencionado o erro proveniente da incerteza inerente ao processo de medição. Perde-se, assim, um vínculo importante entre os fenômenos e os conceitos da Física e os conceitos abstratos usados na Matemática.

Nesse sentido é fundamental estimar o erro oriundo de uma medição, pois é de suma importância entender a diferença entre o valor medido de uma grandeza e o valor de referência do que se mede, obviamente, o significado do resultado.

9.3. Análise das apostilas de Metrologia

Analisaremos duas apostilas utilizadas na disciplina de Metrologia dos cursos do PRONATEC. Na verdade, como há várias turmas nesses cursos, por vezes são utilizadas diferentes edições da apostila, com algumas diferenças entre elas.

Escolhemos duas edições para nossa análise. A primeira a ser analisada é a Apostila A. Nesse texto, são abordados os conteúdos listados na tabela 10 que contém os itens do sumário.

Segue a tabela 10, correspondente a apostila A, qual contém 04 capítulos – 100 páginas. Nela, são abordados os seguintes conteúdos:

SUMÁRIO	
1	Conceitos fundamentais e terminologia empregados na metrologia dimensional

2	Unidades dimensionais lineares
3	Régua graduada (tipos, usos, graduações e exercício)
4	Paquímetros (tipos, usos, graduações e exercícios)
5	Micrômetros (tipos, usos, graduações e exercícios)
6	Relógios Comparadores
7	Goniômetros
8	Verificador de folgas
9	Transformação de medidas
10	Tolerância

Tabela 10 - Fonte: Bando de dados do pesquisador.

Nos parágrafos seguintes, são discutidos aqueles tópicos do sumário acima apresentado que estão diretamente ligados ao foco do presente trabalho.

9.3.1 Metrologia: conceitos fundamentais e terminologia

Nessa parte da apostila, são apresentadas apenas definições de conceitos básicos de metrologia. Dentre os conceitos definidos, escolhemos aqueles mais relacionados com os objetivos deste trabalho (APOSTILA, p. 5):

Metrologia

É a ciência que estuda as medições. Trata da quantificação e grandezas físicas. Antes de quantificarmos a grandeza, temos que conhecer os métodos, os erros, as unidades de medida, os padrões utilizados na dinâmica do sistema de medição, partindo, então, para dimensionar determinada coisa ou objeto (APOSTILA A).

Medição

É sequência de ações para se determinar a quantificação, isto é, dimensionar o valor, podendo ser através de ensaios, testes, análises, comparações, etc. O resultado de uma medição é, em geral, numérico, podendo ser o valor observado, lido, medido, registrado, etc (APOSTILA A, p. 5).

Medida

É a leitura do resultado numérico propriamente dito ou a informação obtida através da medição. É através da medida que se qualifica um produto, ou qualquer das fases de um processo. E será com base na confiabilidade da medida que se tomarão ações sobre a conformidade de determinada característica (APOSTILA A, p. 5).

Precisão

A precisão é dada pela dispersão de valores dos resultados em torno de um ponto de referência, em outras palavras, é a variabilidade que o instrumento ou equipamento nos oferece, quando é comparado com um padrão. Geralmente, a precisão é calculada com base na estatística (APOSTILA A, p. 6)

Exatidão

É o erro sistemático máximo, ou seja, a distância máxima dos valores em torno de um ponto de referência conhecido (APOSTILA A, p. 6).

Incerteza de medida

É o dado mais complexo existente em um sistema de metrologia. Ele envolve o somatório de cálculo de todas as incertezas das variáveis no processo de medição, dentre elas destacam-se os padrões, os instrumentos, as pessoas, os procedimentos, o ambiente e as peças a serem medidas (APOSTILA A, p. 9).

Além desses conceitos, encontram-se as definições de instrumento, equipamento, resolução, estabilidade, rastreabilidade, calibração, ajuste e lacre, entre outros. Desses conceitos, destacamos aqueles mais relacionados com este trabalho.

Na apostila, como vemos, são apresentadas apenas definições. Trata-se, assim, de um texto informativo. No que segue, comentamos as definições destacadas nos parágrafos anteriores deste trabalho.

A primeira, de **Metrologia**, coincide, em linhas gerais, com a que se adota no VIM (IMETRO). No entanto, emprega-se o termo ‘dimensão’ em um sentido vago e mais próximo da linguagem do cotidiano: ‘dimensionar um objeto’ com o sentido de ‘medir uma grandeza associada a um objeto’. Descuida-se do papel pedagógico que dever perseguir textos didáticos destinados ao público alvo em foco nesta pesquisa, que é contribuir para que o estudante adquira a linguagem técnico-científica. Como podemos ler no Capítulo 4, o termo ‘dimensão’ diz respeito ao tipo de grandeza, mais precisamente do modo como a grandeza se exprime em termos das grandezas de base do Sistema Internacional.

O segundo termo definido, **medição**, também é, no geral, coerente com a terminologia metrológica. Apenas, emprega-se a expressão “*dimensionar o valor*”, em que “dimensionar” é tomado da linguagem do cotidiano, no sentido de “medir”. Incorre-se, dessa forma na inadequação indicada acima.

Em seguida, vem o termo **medida**, definido de modo coerente com a conceituação esboçada nos capítulos 4 e 5 desta dissertação.

Com as definições dos termos **precisão**, **exatidão** e **incerteza de medida** procuram-se relacionar os resultados das medições com o conceito de valor de referência em torno do qual esses resultados se dispersam em diferentes graus. A estatística é mencionada como um suporte teórico importante para o tratamento dos dados resultantes das medições, o que é uma boa indicação.

O que se pode criticar é modo excessivamente resumido como os conceitos são abordados, a ausência de exemplos para clarificar os conceitos invocados, todos eles bastante complexos. Também, observa-se que a relação desses conceitos com outros; como valor verdadeiro, erro de medição não são abordados. Por exemplo, o erro sistemático é mencionado na definição de exatidão, mas não é definido no texto.

9.3.2 Unidades dimensionais lineares

Nesta parte, inicia-se por afirmar:

As unidades de medidas dimensionais representam valores de referência que permitem:

- expressar as dimensões de objetos (realização de leituras de desenhos mecânicos);
- confeccionar e, em seguida, controlar as dimensões desses objetos (utilização de aparelhos e instrumentos de medidas).

Exemplo: A altura da Torre Eiffel é de 300 metros; a espessura de uma folha de papel para cigarros é de 30 micrômetros.

- A Torre Eiffel e a folha de papel são objetos;
- a altura e a espessura são grandezas;
- 300 metros e 30 micrômetros são unidades (APOSTILA A, p. 11).

Na sequência da Apostila A, apresenta-se o sistema métrico decimal, um histórico do metro padrão e sua definição atual, com base na velocidade da luz: “o metro é a distância percorrida pela luz, no vácuo, no intervalo de tempo de 1/299.792.458 de segundo” (APOSTILA A, p.12).

Em seguida, são apresentados os múltiplos e submúltiplos do metro. Encerra-se essa parte da Apostila A com uma descrição sumária das unidades das unidades de comprimento dos sistemas inglês e americanos. Justifica-se a menção a esses sistemas pelo seu uso na indústria mecânica, ou metal-mecânica.

Em nossa análise, observamos que o emprego dos termos “dimensional” e “dimensão” não é claro. Em primeiro lugar, na expressão “unidade de medida dimensional” o termo ‘dimensional’ é supérfluo, pois toda unidade de medida¹³, que é uma grandeza, possui uma dimensão, de acordo com o que dissemos no Capítulo 4 deste trabalho.

Em segundo lugar, na expressão “as dimensões de objetos” o termo ‘dimensões’ é usado no sentido usual de comprimentos considerados em objetos: comprimento, altura, largura, etc. Vemos que se trata de sentidos distintos para os termos em foco. Isso pode dificultar a compreensão desse conteúdo.

Além disso, a afirmação: “*300 metros e 30 micrômetros são unidades*” é errônea. De fato, o que temos ali são representações de duas quantidades ou os valores de duas grandezas medidas, respectivamente, nas unidades de comprimento metro e micrômetro.

9.3.3 Instrumentos de medição: a régua graduada

Nessa parte da Apostila A, é apresentada a régua graduada como um instrumento de medição muito comum e apropriado para obter resultados que não exijam grande precisão.

É feita uma descrição minuciosa da régua graduada, também denominada de escala. Nessa descrição incluem-se as réguas graduadas em centímetro e milímetros e também em polegadas. São mostrados muitos tipos de escala e, também, várias imagens de medição de comprimentos em objetos. Há, ainda, recomendações para a conservação e o manuseio adequado das réguas graduadas.

¹³ Segundo o VIM 1.9 uma unidade de medida é uma grandeza escalar, definida e adotada por convenção, com a qual qualquer outra grandeza da mesma natureza pode ser comparada para exprimir a relação das duas grandezas sob a forma de um número (INMETRO, 2012).

Contudo, não são discutidas questões referentes aos conceitos metroológicos definidos no início da Apostila A. O texto reduz-se, assim, a um manual de descrição e uso da escala.

9.3.4 Instrumentos de medição: o paquímetro

Destinado à realização de medições de comprimento em que se demanda maior precisão, o paquímetro é descrito em detalhes na Apostila A. O conteúdo apresentado na apostila tem muito em comum com os capítulos 3 e 5 desta dissertação, motivo pelo qual não são feitos, neste ponto, comentários adicionais sobre a parte da Apostila A dedicada ao paquímetro.

Passemos, agora, a analisar a Apostila B da disciplina Metrologia. Os conteúdos abordados nesse texto seguem descritos na tabela 11 que, corresponde à apostila B, a qual contém 04 capítulos – 101 páginas. Nela, são abordados os seguintes conteúdos:

SUMÁRIO	
Apresentação	
Metrologia: conceitos fundamentais e terminologia	
Matemática Aplicada	
Instrumentos de medição	
	Régua graduada (tipos, usos, graduações e exercício)
	Paquímetros (tipos, usos, graduações e exercícios)
	Micrômetros (tipos, usos, graduações e exercícios)
	Relógios Comparadores
	Goniômetros
	Verificador de folgas
	Torquímetro
Transformação de medidas	
Concluindo	
Referências	

Tabela 11 - Fonte: Bando de dados do pesquisador.

De modo análogo ao que fizemos com relação à sabenta anterior, discutimos apenas os conteúdos diretamente ligados aos objetivos deste

trabalho. Além disso, pelo fato de que as duas apostilas diferem pouco, uma da outra, serão evitadas repetições na nossa análise.

No que se refere aos conceitos fundamentais e à terminologia empregados na metrologia, a análise feita sobre a Apostila A aplica-se, do mesmo modo, à Apostila B. Igualmente, a análise dos segmentos da Apostila B dedicados à apresentação da régua graduada e do paquímetro são as mesmas que fizemos para a Apostila A. Resta-nos, assim, analisar a parte da Apostila B que não faz parte da Apostila A, a saber, a breve seção sobre as frações.

9.4. Matemática aplicada

Nessa seção, trata-se do conceito de **fração**. Inicia-se por uma apresentação do conceito em sua interpretação de parte de um todo. Em seguida, mencionam-se a representação geométrica de uma fração bem como suas formas: ordinária e decimal. Seguem-se instruções para a realização das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre frações.

Nossa análise começa por indicar uma discrepância entre a interpretação de fração adotada no texto e aquela que é mais próxima do conteúdo central da apostila que é o de medição de grandezas.

Além disso, os aspectos conceituais relativos às frações como uma das interpretações do sistema numérico dos racionais não são trabalhados. Em particular, na abordagem das operações com frações, o texto reduz-se a instruções de como realizar essas operações, sem nenhuma justificativa mais elaborada.

Para concluir, a análise das duas apostilas da disciplina Metrologia permite-nos constatar uma dissonância entre o saber estabelecido com respeito a grandezas, medição de grandezas, incerteza das medições etc, e o que se pretende ensinar por meio das Apostilas A e B. Noutras palavras, uma lacuna no processo de transposição didática do saber em foco.

Em função disso, segue o quadro 01 relacionando os conceitos analisados as coleções e apostilas investigadas.

CONCEITOS ANALISADOS	COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS MATEMÁTICA	COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS FÍSICA	APOSTILAS: A e B
Grandeza e Medidas	Os números racionais são tratados especificamente no volume 1 da coleção. Tais conjuntos numéricos são apresentados como modelos para resolver problemas tanto no contexto social quanto na própria Matemática.	A despeito disso, apenas em um capítulo, no volume 1, é dedicada atenção específica ao campo das grandezas e medidas.	São apresentadas apenas definições de conceitos básicos de metrologia.
Número racional	Na obra, prossegue-se com a apresentação de exemplos de números racionais representados por frações ordinárias e por números com um número finito de casas decimais.	Trata a <i>Notação Científica</i> , um modo convencional de escrita dos números racionais.	Apenas apresentações de problemas propostos.
Probabilidade e estatística	No volume 2, capítulo 11, são estudados os conceitos básicos de probabilidade. No volume 3, capítulo 1, são abordados tópicos de estatística	Trata de questões de erros de medição usando o conteúdo de estatística, mas sem correlacioná-lo. Não existe correlação com a probabilidade.	Nada consta.

Quadro 01¹⁴ - Fonte: Adaptado pelo pesquisador.

¹⁴ O referido quadro resumo foi uma sugestão da Professora Rosinalda Telles – examinadora da banca de defesa dessa dissertação, a qual agradecemos a valiosa contribuição.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em princípio acreditávamos que a importância desta pesquisa estava apenas no esclarecimento do tema sobre o ensino de medição de comprimentos aos professores, alunos e pesquisadores. Depois disso, aos jovens e adultos trabalhadores que buscam no ensino propedêutico e na educação profissionalizante uma formação capaz de conduzi-los a entender sua posição na escola e no trabalho, bem como, numa real preparação para o mundo profissionalizante na atual conjuntura.

Contudo, depois das releituras sobre o tema, surgiram algumas situações que nos colocou a complementar tais hipóteses, como por exemplo: a necessidade de desvelar a matemática inserida nos instrumentos para medição de comprimentos, bem como, expor um resumo sobre os marcos institucionais que norteiam a legislação educacional e profissional desde os primórdios desse país. Sobre isso, pudemos de forma resumida, discutir os principais períodos da evolução da educação profissional brasileira.

Nesse sentido, foi possível contribuir apresentando um breve relato sobre os primórdios da educação profissional do Brasil, o sistema “S” e sua integração com outros sistemas de ensinos.

Ao relatar duas instituições distintas, situamos a Escola Pública e o Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial como instituições integradas na formação dos estudantes envolvidos no Programa Nacional de Ensino Tecnológico.

Adotando o marco teórico da transposição didática escolhemos analisar o material didático disponível para os estudantes que participam, simultaneamente, do ensino médio regular e de um curso profissionalizante do PRONATEC. Dentre esse material didático optamos pela análise dos livros de Matemática e de Física e de duas apostilas da disciplina Metrologia, que integram o currículo do curso profissionalizante selecionado neste trabalho.

Tomamos, desde o início, como foco o ensino da medição de comprimentos com o uso do paquímetro. Nossa escolha, justificada no corpo deste trabalho, essencialmente reside na importância desse instrumento de medida, em particular nas práticas industriais, e conseqüentemente, nos

cursos profissionalizantes. No entanto, procuramos abordar esse ensino em uma perspectiva mais ampla que se inicia pelo levantamento do saber estabelecido no campo das grandezas e da medição de grandezas. Isso nos levou à distinção básica entre mensurando, medição e medida. Além disso, ao conceito básico de incerteza das medições.

A análise dos dados colhidos revelou que há vários pontos frágeis na transposição didática dos conceitos visados por nós nesta investigação. Tais pontos foram descritos no Capítulo 8 deste trabalho e incluem a ausência de discussão de conceitos matemáticos centrais do campo das grandezas e medidas.

Configura-se, dessa maneira, um distanciamento entre o saber a ser ensinar na escola pública e no curso profissionalizante quando tomamos por base o saber de referência: grandezas e medição de grandezas. Em particular, observamos que o estudo de instrumentos de medição de comprimentos, entre eles o paquímetro, não é abordado no ensino médio regular.

Verificamos que, na coleção de Matemática analisada, recorre-se muito pouco a atividades de medição de comprimentos e que, como dissemos; o paquímetro não é mencionado. Na coleção de Física, a despeito de tratar da medição de comprimento, também o paquímetro não é mencionado. Do lado das apostilas de Metrologia, estuda-se a medição com instrumentos de medida, em particular, o paquímetro, mas a formação teórica é esquecida.

Reconhecemos que os conceitos focalizados neste trabalho são complexos do ponto de vista de sua formulação teórica e, também, da transposição didática desses conceitos. Isso implica que os resultados deste trabalho devam ser aprofundados em novas pesquisas. Uma direção que poderia tomar tais investigações seria o aprofundamento das especificidades do ensino tecnológico em face das exigências teóricas dos conteúdos de suas disciplinas.

Noutras palavras: como teorizar em uma disciplina de Metrologia em um curso profissionalizante? Noutra direção, caberia investigar as lacunas, especialmente, na disciplina Matemática no que se refere à medição de grandezas e dos conceitos e instrumentos a ela associados.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, Gaston. **Conhecimento comum e conhecimento científico**. **Tempo Brasileiro**. São Paulo, n.28, p.27, jan./mar. 1972.

BELLEMAIN, P.M.B., Lima, P.F., **Um olhar sobre o tema grandezas e medidas no Ensino Fundamental**, Caminhos da Educação Matemática, Ano III, no. 3, pp. 4-18, Aracaju, 2010.

BELLEMAIN, P.M.B., Nicole Rodrigues Fernandes. José Maurício Figueiredo Lima. Rosinalda Aurora de Melo Teles. Número racional e seus diferentes significados. In: **Simpósio Internacioanl de Pesquisa em Educação Matemática - CIPEMAT**, 2008, Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE - Recife.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar, Paulo Figueiredo Lima. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental**. Ed. Geral John Fossa – SBHMata, Rio Grande do Norte – Natal, 2002.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar, Paulo Figueiredo Lima. **Grandezas e medidas**, in Brasil, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Coleção Explorando o Ensino, No. 17, Brasília, 2010.

BRASIL, Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação: Lei (9394/96)**. Apresentação de Carlos Roberto Jamil Cury. Rio de Janeiro: DP & A, 2005.

BRASIL. *Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Grandezas e Medidas***. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014. 80 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS. PNLD 2015. Física: ensino médio**. – Brasília. Secretaria de Educação Básica, 2014. 108p.

BRASIL. Ministério da Educação. **GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS. PNLD 2015. Matemática: ensino médio**. – Brasília. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014. 108p.

BRITO, Hugo Leite de Farias, et al. **Uso do tamoxifeno no tratamento de quelóide e cicatrizes hipertróficas**. In: Revista Brasileira de Cirurgia Plástica, 2010, Aracajú – Sergipe/SE.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

CÂMARA, Marcelo dos Santos. et al. INVESTIGANDO OS FENÔMENOS DIDÁTICOS NO ENSINO DE ÁLGEBRA: ESTUDOS DO GRUPO DE PESQUISA DA UFPE. In: **IX Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM**, IX, 2007, Belo Horizonte - MG.

CAMARGO, Paulo. A Educação Profissional e os caminhos do Ensino Médio. **Revista EDUCATRIX, São Paulo, nº 06 1º semestre de 2014**. Disponível em: <http://www.moderna.com.br/educatrix/ed6/educatrix6.html>. Acesso em: 22 de Janeiro de 2014.

CONEJERO, A. S.. “**A importância da metrologia**”. Disponível em: <http://www2.desenvolvimento.gov.br/arquivo/publicacoes/sti/indBraOpoDesafio/coletanea/metrologia/Artigo3-AntonioConejero.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2009.

CHEVALLARD, Y. (1991). **La Transposition Didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble, la pensée sauvage, 1991.

CRUDO, Matilde Araki. **Os Aprendizes do Arsenal de Guerra de Mato Grosso: Trabalho Infantil e Educação**. Tese de Doutorado, Instituto de Educação – IE – Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT, 1999.

DIAS, José Luciano de Mattos. **Medida, normalização e qualidade; aspectos da história da metrologia no Brasil**. Rio de Janeiro: Ilustrações, 1998. 292 p.

DOUADY, R. **Jeux de Quadres et dialectique outil object. Recherches en didactique des mathématiques**. v. 7. n. 2, 1986.

DUARTE, Jorge, João Filho e Walter Barrella. Revista Ceciliana. **ISSN – 1517-6363**, nº 32 de 2011.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 1ª Edição - SBM, Rio de Janeiro, 2010.

FONSECA, Celso Suckow. **História do Ensino Industrial no Brasil**. Rio de Janeiro: Escola Técnica, 1961.

GUEDES, Pedro. **Metrologia Industrial**. Portugal – Liboa. Ed. ETEP, 2011.

INMETRO, **Vocabulário Internacional de metrologia: Conceitos fundamentais e gerais e termos associados** (VIM, 2012). Duque de Caxias. Rio de Janeiro, 2012.

LAVILLE, Christian. Jean Dionne. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Tradução Heloíza Monteiro e Francisco Settineri. Ed. UFMG, Belo Horizonte, 2007.

NETO, João Cirílo da Silva. **Contribuições da metrologia em Cursos de Engenharia**. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, XXXIX, 2011, Blumenau Santa Catarina.

PAIS, Luis Carlos et al. **Educação Matemática: uma introdução** – 2. ed. – São Paulo: Ática: Educ, 2002.

SANTOS, Maria E. V. M dos. As concepções alternativas dos alunos à luz bachelardiana. In: **Mudança conceitual em sala de aula, um desafio pedagógico**. Ed. Horizonte, Lisboa/Portugal, 1991, p. 128-164.

SENAI. DE/PE, **METROLOGIA APLICADA**, RECIFE, SENAI/DITEC/DET, 1998.

SENAI. DE/PE, **METROLOGIA APLICADA**, RECIFE, SENAI/DITEC/DET, 2013.

TRIVIÑOS, Augusto Nivaldo Silva. **Introdução á pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. 1. ed. Atlas, São Paulo, 2012.

VERRET, M. (1975) **Le temps des études**. Paris: Paris V/H. Champion (Tese de doutorado).

VUOLO, José Henrique. **Fundamentos da Teoria de Erros**, Ed. Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1992.

SITES E DOCUMENTOS EM PDF RELACIONADOS:

Disponível em: <http://www.gente.eti.br/edumatec/>. Acesso em: 28 de Nov de 2014.

Disponível em: <http://www.inep.gov.br/>. Acesso em: 27 de Nov de 2014.

Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>. Acesso em: 28 de Nov de 2014.

Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Quatro_Pilares_da_Educacao. Acesso em: 28 de Nov de 2014.

Disponível em: http://www.furb.br/proen/new/docs/Enciclopedia_Pedagogia.PDF. Acesso em: 28 de Nov de 2014.

Disponível em: <http://pronatec.mec.gov.br/institucional-90037/o-que-e-o-pronatec>. Acesso em: 25 de março de 2015.

ANEXO

NÚMEROS RACIONAIS

1. O Fundamental

A leitura do capítulo do livro de Ferreria (2010) trás-nos a uma dicotomia do ensino dos racionais nos sistemas de ensino básico e superior numa questão de ordem – ensino fundamental aprende-se que o número racional estabelece-se pela *razão* entre dois números inteiros. Tendo como parâmetro que a expressão usada para razão esteja filiada ao significado de *divisão*.

Enquanto que no ensino superior as demonstrações estão filiadas ao conjunto dos números inteiros - $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b) | a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$. Com base no conjunto dos números racionais e em suas propriedades algébricas. Para isso, remete-se ao uso do conceito de equivalência como construção dos racionais.

Sobretudo não iremos realizar demonstrações sobre tais teoremas, pois partiremos para um contexto dos números interiores naquilo que já está estabelecido como axiomas e/ou postulados conforme:

$$\mathbb{Q} = \frac{(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)}{\sim} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Segundo Ferreira (2010) no ensino fundamental aprendemos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, mesmo ciente que essa afirmativa não tenha sentido, pois para o aturo; em seu ponto de vista infere sobre os elementos de $\mathbb{Q}$ sendo classes de equivalência de pares de inteiros, então estes são passados a ser de natureza diferente dos inteiros.

Contudo Ferreira (2010) concorda que exista uma aplicação injetora de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ que o torna subconjunto do próprio $\mathbb{R}$ causando assim, uma espécie de preservação das operações aritméticas nos envolventes. Esse fato conduz, dessa forma, que a imagem de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ seja *uma cópia algébrica de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$* .

Seguindo a sequência demonstrativa Ferreria (2010) que compõe o passo seguinte, este trata da relação de ordem e a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ no

sentido de sua definição, relação, compatibilidade de ordem, lei da tricotomia e função. Com isso, o autor conclui sua sequência demonstrativa apresentando o resultado pelo conjunto $i(\mathbb{N}) = \left\{ \frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Como sendo uma cópia algébrica de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$.

Analogamente segue-se a proposição lógica que a imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$, demonstra que $\mathbb{N}$ é infinito, tomando-se por base que $\mathbb{Q}$ contém uma cópia de $\mathbb{N}$. Esse processo taltológico trás uma conversa com as seguintes proposições: a imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$ comprova que $\mathbb{N}$ é infinito, então $\mathbb{Q}$ é enumerável, pois todo subconjunto infinito de $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Na sequência Ferreira (2010) usa-se do Teorema Fundamental da Aritmética como aporte condicional pelo enunciado: *todos número natural maior do que 1 pode ser expresso como produto de números primos*¹⁵ no intuito de demonstrar as demais proposições (FERREIRA, 2010, p. 70).

Assim Ferreira (2010) finaliza sua proposição tomando-se por suporte os números racionais escritos na forma irredutível $\frac{a}{b}, (a, b > 0)$. Essa proposição lhe garante que a função: $f: \mathbb{N}_+^* \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f\left(\frac{m}{n}\right) = 2^m \cdot 3^n$ é injetora tendo como imagem um subconjunto infinito de $\mathbb{Q}$.

¹⁵ Número natural primo é todo número natural maior do que 1 que só admita como divisores ele próprio e o 1.