



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA**

CURSO DE MESTRADO

ANA PAULA NUNES BRAZ FIGUEIREDO

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE A GRANDEZA VOLUME POR ALUNOS
DO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS CAMPOS
CONCEITUAIS**

RECIFE-PE

2013

ANA PAULA NUNES BRAZ FIGUEIREDO

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE A GRANDEZA VOLUME POR ALUNOS
DO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS CAMPOS
CONCEITUAIS**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de mestre, pelo Programa de Pós-
Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
da Universidade Federal de Pernambuco.

Orientadora: Prof^a Dr^a Paula Moreira Baltar
Bellemain

Co-orientadora: Prof^a Dr^a Rosinalda Aurora de Melo
Teles

RECIFE

2013

Catálogo na fonte
Bibliotecária Katia Tavares, CRB-4/1431

F475r Figueiredo, Ana Paula Nunes Braz.
Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da teoria dos campos conceituais / Ana Paula Nunes Braz Figueiredo. – Recife: O autor, 2013.
182 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2013.

Inclui Referências e Apêndices.

1. Educação Matemática. 2. Teoria dos Campos Conceituais. 3. Grandes e medidas. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Paula Moreira Baltar. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2013-027)



ALUNA

ANA PAULA NUNES BRAZ FIGUEIREDO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

“Resolução de problemas sobre a Grandeza Volume por alunos do Ensino Médio: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais.”

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Co- orientadora
Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Examinadora Interna
Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Examinadora Externa
Profa. Dra. Heloisa Flora Brasil Nóbrega Bastos

Recife, 20 de fevereiro de 2013.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me dar a oportunidade de conquistar esse objetivo que tanto almejava, com disposição e saúde, na presença de bons amigos.

Aos meus pais, Lindalva e Antonio Braz, exemplos de dedicação e perseverança, além do amor e educação que me cederam para continuar seguindo em frente diante das vicissitudes.

Ao meu marido, Ubiratan Figueiredo, exemplo de determinação e paciência, que sempre me apoiou e acreditou na minha capacidade.

Ao meu irmão, Ricardo Braz, a quem admiro e que sempre esteve disposto a ajudar, torcer, ensinar coisas acadêmicas, profissionais, de vida e de amizade.

Ao meu grande amigo Leonardo Moraes, colega de graduação e mestrado, pelas importantes contribuições que deu à realização desse trabalho.

Ao Grupo de Estudo Pró-Grandeza, pelo aprendizado e experiência construídos em conjunto, com dedicação, respeito e ética.

À minha professora orientadora, prof(a). Dra. Paula Baltar, que desde a graduação, sempre esteve disposta a me ajudar; para mim, tê-la como orientadora, foi uma grande honra, pois nada veio a me faltar, só a acrescentar com seus ensinamentos.

À minha co-orientadora, prof(a). Dra. Rosinalda Teles, grande amiga e profissional, que esteve presente nas horas mais necessitadas, orientando-me e me incentivando na busca de mais conhecimentos.

RESUMO

Este trabalho é um estudo exploratório sobre o modo como alunos do ensino médio lidam com problemas sobre volume. Neste estudo, o conceito de volume é investigado sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud e colaboradores. Adotamos como hipótese didática que volume deve ser considerado como grandeza. Tal hipótese é uma adaptação das pesquisas de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian sobre área de figuras planas. Volume é, portanto, considerado como um dos constituintes do campo conceitual das grandezas geométricas e como conceito, na perspectiva proposta por Vergnaud, ou seja, como tripé de três conjuntos indissociáveis: o conjunto das situações que lhe dão sentido, o conjunto dos invariantes sobre os quais se apoia a operacionalidade dos esquemas e o conjunto das representações simbólicas em jogo na apresentação e resolução das tarefas relativas ao volume. A parte experimental deste trabalho consistiu na aplicação de teste de sondagem e de entrevistas com alunos do terceiro ano do ensino médio de três instituições de ensino das redes privada, pública federal e pública estadual. A análise dos resultados foi desenvolvida relacionando aspectos presentes na revisão de literatura e na fundamentação teórica. Podemos observar que o campo numérico predomina em relação ao campo geométrico e das grandezas, na maioria das situações de volume abordadas e que situações de medida são as mais compreendidas pelos sujeitos. Os aspectos abordados nesta pesquisa apontam para lacunas e entraves de natureza epistemológica, como aqueles cuja origem está na complexidade das relações entre volume e outras grandezas físicas e geométricas (como massa e área respectivamente), com os conceitos de dimensionalidade e capacidade. Mas, por outro lado, os dados apontam para uma possível origem didática para esses entraves e lacunas, reforçando a hipótese levantada em pesquisas anteriores de que a ênfase excessiva no uso de fórmulas e nas situações de medida não parece dar conta da atribuição de um significado mais amplo para volume.

Palavras- chaves: Grandezas e medidas. Volume. Teoria dos Campos Conceituais.

ABSTRACT

This work is an exploratory study on how high school students deal with problems on volume. In this study, the concept of volume is investigated from the perspective of Conceptual Fields Theory developed by Gérard Vergnaud and colleagues. We adopt as didactic hypothesis that volume should be considered as greatness. This hypothesis is an adaptation of the research Régine Douady and Marie-Jeanne Perrin-Glorian about an area of plane figures. Volume is therefore considered as one of the constituents of the conceptual field of geometric quantities, and as a concept, in the perspective proposed by Vergnaud, namely as inseparable tripod of three sets: the set of situations that give it meaning, the set of invariant which rests the operation of the schemes and the set of symbolic representations at play in presentation and resolution of tasks related to the volume. The experimental part of this work consisted in the application of test survey and interviews with students in the third year of high school of three educational institutions of private networks, federal and state government. The analysis of results was developed relating aspects present in the literature review and theoretical framework. We can observe that the numeric field predominates over the geometric field and geometric quantities, in most situations of volume and addressed situations of measure that are far more understood by the subjects. The issues addressed in this research point to some gaps and barriers epistemological and those whose origins lie in the complexity of the relationship between volume and other geometric and physical quantities (such as mass and area respectively), with the concepts of dimensionality and ability. On the other one side, the data leads to a possible didactic origin to these barriers and gaps, reinforcing the hypothesis raised in previous research that the overemphasis on the use of formulas and situations of measure does not seem to account for the attribution of meaning for larger volume.

Keywords: Quantities and measurements. Volume. Theory of Conceptual Fields.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Relação entre objetos- Fonte: LIMA e BELLEMAIN, 2010, p. 174.	24
Figura 2- Compreensão de grandeza- Fonte: LIMA e BELLEMAIN, 2010, p. 175.	25
Figura 3- contagem do cubo do canto.....	39
Figura 4- Princípio de Cavalieri- Fonte - DANTE, 2010, p.436.....	42
Figura 5-Ficha do aluno-Fonte - Oliveira (2002, p. 68).	49
Figura 6- Extrato do protocolo do aluno ERI- Atividade Q3.	81
Figura 7- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q12c.....	81
Figura 8- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q11.	83
Figura 9- Extrato do protocolo do aluno CAM- Atividade Q12a.	83
Figura 10- Extrato do protocolo do aluno AKRS- Atividade Q9.	84
Figura 11- Extrato do protocolo do aluno CAM- Atividade Q2.	86
Figura 12 - Extrato do protocolo do aluno EFL- Atividade Q2.	87
Figura 13 - Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q2.....	88
Figura 14- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q3.....	89
Figura 15- Extrato do protocolo do aluno GMDV- Atividade Q3.....	90
Figura 16- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q5.....	90
Figura 17- Extrato do protocolo do aluno LAM- Atividade Q5.	91
Figura 18- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q6.....	91
Figura 19- Extrato do protocolo do aluno LAM- Atividade Q6.	92
Figura 20 - Extrato do protocolo do aluno ML- Atividade Q7.	92
Figura 21- Extrato do protocolo do aluno EFL- Atividade Q8.	93
Figura 22 - Extrato do protocolo do aluno GCV- Atividade Q8.....	94

Figura 23- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q9a.....	94
Figura 24 - Extrato do protocolo do aluno EFL- Atividade Q9.	95
Figura 25- Extrato do protocolo do aluno MCG- Atividade Q9b.....	95
Figura 26- Extrato do protocolo do aluno VIC- Atividade Q9c.	96
Figura 27- Extrato do protocolo do aluno ERSO- Atividade Q9c.....	96
Figura 28- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q9d e Q9e.....	97
Figura 29- Extrato do protocolo do aluno DTMM- Atividade Q9e.....	97
Figura 30- Extrato do protocolo do aluno GMDV- Atividade Q10.....	98
Figura 31- Extrato do protocolo do aluno PP- Atividade Q10.....	99
Figura 32- Extrato do protocolo do aluno JOR- Atividade Q11.....	100
Figura 33- Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q11.....	101
Figura 34- Extrato do protocolo do aluno GMDV- Atividade Q11.....	102
Figura 35- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q12a.....	103
Figura 36- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q12c.....	104
Figura 37- Extrato do protocolo do aluno GCV- Atividade Q12c.....	104
Figura 38- Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q12c.....	104
Figura 39- Extrato do protocolo do aluno BMBS- Atividade Q6.....	106
Figura 40- Extrato do protocolo do aluno JMPN- Atividade Q11.....	107
Figura 41- Extrato do protocolo do aluno CLA- Atividade Q12b.....	108
Figura 42- Extrato do protocolo do aluno LMF- Atividade Q1.....	109
Figura 43- Extrato do protocolo do aluno MBV- Atividade Q5.....	111
Figura 44- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q5.....	111
Figura 45- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q11.	112

Figura 46- Extrato do protocolo do aluno JS- Atividade Q4a.....	116
Figura 47- Extrato do protocolo do aluno LM- Atividade Q4a.	117
Figura 48- Extrato do protocolo do aluno LM- Atividade Q6.	117
Figura 49- Extrato do protocolo do aluno CAM- Atividade Q10.....	119
Figura 50- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q10.	119
Figura 51- Extrato do protocolo do aluno CV- Atividade Q10.....	120
Figura 52- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q6 e Q5.....	121
Figura 53- Extrato do protocolo do aluno EG- Atividade Q5.....	123
Figura 54- Extrato do protocolo do aluno MNOG- Atividade Q6.....	123
Figura 55- Extrato do protocolo do aluno MNOG- Atividade Q7.....	124
Figura 56- Extrato do protocolo do aluno MNOG- Atividade Q5.....	125
Figura 57- Extrato do protocolo do aluno LM- Atividade Q5.	125
Figura 58- Extrato do protocolo do aluno MBV- Atividade Q7.....	126
Figura 59- Extrato do protocolo do aluno LM- Atividade Q7.	127
Figura 60- Extrato do protocolo do aluno JS- Atividade Q7.....	128
Figura 61- Extrato do protocolo do aluno LUI- Atividade Q8.....	129
Figura 62- Extrato do protocolo do aluno JMPN- Atividade Q8.....	130
Figura 63- Extrato do protocolo do aluno CAM- Atividade Q8.....	131
Figura 64- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q6.	132
Figura 65- Extrato do protocolo do aluno LMF- Atividade Q4b e Q4c.....	133
Figura 66- Extrato do protocolo do aluno VIC- Atividade Q9.	134
Figura 67- Extrato do protocolo do aluno SAC- Atividade Q9.	135
Figura 68- Extrato do protocolo do aluno JOR- Atividade Q11.....	137

Figura 69- Extrato do protocolo do aluno CLA- Atividade Q11.	138
Figura 70 - Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q12a.....	139
Figura 71- Extrato do protocolo do aluno CLA- Atividade Q12a.	139
Figura 72- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q12a.....	140
Figura 73- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q12b.	141
Figura 74- Extrato do protocolo do aluno GLSS- Atividade Q12b.	141
Figura 75- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q12c.	142
Figura 76- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q12b.	142
Figura 77- Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q12c.....	142
Figura 78- Extrato do protocolo do aluno SAC- Atividade Q1.	144
Figura 79- Extrato do protocolo do aluno VGS- Atividade Q12b.....	145
Figura 80- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q1.	145
Figura 81- Extrato do protocolo do aluno RAS- Atividade Q3.	146
Figura 82- Extrato do protocolo do aluno CAM- Atividade Q12b.....	147
Figura 83- Extrato do protocolo do aluno EGB- Atividade Q8.	148
Figura 84- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q12c.....	149
Figura 85- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q12c.....	149
Figura 86- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q12c- Observação do TA5C..	150
Figura 87- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q11.	152
Figura 88- Extrato do protocolo do aluno VGS- Atividade Q12c.	155
Figura 89- Extrato do protocolo do aluno GLSS- Atividade Q11.	155
Figura 90- Extrato do protocolo do aluno FCA- Atividade Q6.	156
Figura 91- Extrato do protocolo do aluno EGB- Atividade Q6.	157

Figura 92- Extrato do protocolo do aluno MC- Atividade Q6.....	158
Figura 93- Extrato do protocolo do aluno MC- Atividade Q4a.	158
Figura 94- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q2.....	160
Figura 95- Extrato do protocolo do aluno EGB- Atividade Q5.	161
Figura 96- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q6.....	162
Figura 97- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q5.....	162

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1- Análise quantitativa de questões por situação.....	48
QUADRO 2- Percentual de acertos plenos	78
QUADRO 3- Distribuição das questões por percentual de acertos plenos	115
QUADRO 4- Quantitativo de alunos por resposta dada na Q10.....	118

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1- Relação entre a estratégia medida (com uso da fórmula) e outras estratégias.	105
GRÁFICO 2- Situações de comparação	113
GRÁFICO 3- Questão 4- situações de medida	114
GRÁFICO 4- Questões- situações de medida.....	115
GRÁFICO 5- Situações de produção.....	136
GRÁFICO 6- Ato de representar a fórmula de volume por questão.	154
GRÁFICO 7- Ato de representar por desenho o sólido por questão.	156

LISTA DE TABELAS

TABELA 1- Visão geral dos resultados	77
TABELA 2- Tipos de estratégias utilizadas pelos alunos na segunda questão.....	85
TABELA 3- Unidades de medida de volume utilizadas na segunda questão.....	159
TABELA 4- Unidades de medida representadas como de sendo de volume nas questões 5 e 6.	161

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
2 PROBLEMÁTICA	21
2.1 VOLUME COMO GRANDEZA.....	21
2.2 ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	27
2.3 PESQUISAS ANTERIORES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE VOLUME	29
2.4 RELAÇÕES ENTRE VOLUME E OUTROS CONCEITOS	34
2.5 ESTUDO DO CONCEITO DE VOLUME SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	36
2.5.1 Análise específica de cada tipo de situação.....	37
2.5.1.1 Situações de comparação.....	37
2.5.1.2 Situações de medida.....	38
2.5.1.2.1 Situações de Transformação de unidades.....	40
2.5.1.2.2 Situações de operacionalização de volumes.....	41
2.5.1.3 Situações de Produção	41
2.6 OBJETIVOS	42
2.6.1 Objetivo geral	42
2.6.2 Objetivos específicos	43
3 METODOLOGIA	44
3.1 PERCURSO METODOLÓGICO	44
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	76
4.1 UMA VISÃO GERAL DOS RESULTADOS	76
4.2 AS ESTRATÉGIAS QUE CONDUZIRAM A RESPOSTAS CERTAS	84

4.3 CONCEPÇÕES DE VOLUME E VOLUME COMO GRANDEZA	105
4.4 ESTUDO DAS SITUAÇÕES	112
4.5 INVARIANTES OPERATÓRIOS	143
4.6 AS REPRESENTAÇÕES.....	151
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	163
REFERÊNCIAS	167
APÊNDICE A- TESTE DE SONDAGEM	170
ANEXO A - QUESTÕES ORIGINAIS RETIRADAS DE VESTIBULARES, TRABALHOS ANTERIORES E DO LEMAT PARA ELABORAÇÃO DO TESTE DE SONDAGEM.	178
ANEXO B- QUESTÃO RETIRADA DO TRABALHO DE ANWANDTER-CUELLAR (2008).....	180
ANEXO C- QUESTÃO RETIRADA DO TRABALHO DE BARROS (2002).....	182

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por finalidade investigar o conceito de volume mobilizado por alunos do ensino médio, considerando volume como um dos constituintes do campo conceitual das grandezas geométricas. Desta forma, desenvolvemos nossa pesquisa baseados nos estudos sobre área de figuras planas como grandeza de Regine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian e adotando como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud e colaboradores.

Volume, assim como outras grandezas como massa, área, perímetro, tem um uso de grande significado social, pois está presente nas atividades do cotidiano. Torna-se relevante seu estudo dentro de um programa de matemática, não só por configurar possibilidade de aplicabilidade da disciplina na prática social, como também por possibilitar a integração entre os vários tópicos programáticos (sistema de numeração, medidas, operações com números racionais, espaço e forma) e entre outras disciplinas como a física e a química.

A grandeza volume é o nosso objeto de estudo que está inserido no campo conceitual que nós chamamos de campo das grandezas geométricas, o qual por sua vez, faz parte de um campo conceitual mais amplo das grandezas e medidas, que inclui, além das grandezas geométricas, a massa, o tempo e outras grandezas físicas.

Com a implantação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCN (BRASIL, 1998), os conteúdos matemáticos para o ensino fundamental foram agrupados em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Porém, no Ensino Médio, de acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002), os conteúdos matemáticos foram agrupados em três temas ou eixos estruturadores: Álgebra, que inclui números e funções, Geometria e medidas e Análise de dados. O conteúdo em foco na nossa pesquisa se situa na unidade temática métrica do eixo estruturador Geometria e medidas.

Geometria e medidas é um dos três temas estruturadores dentro da matemática, selecionados em relevância científica e cultural, que deve ser trabalhado no ensino médio. Esse tema apresenta como unidades temáticas: geometria plana, espacial, métrica e analítica. O ensino das propriedades métricas, envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes,

proposto pelos PCN+ (BRASIL, 2002) é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido, que não pode ignorar as relações geométricas em si, levando o aluno a desenvolver habilidades relativas a medidas e grandezas:

3.Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

- .• Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.

- .• Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos

- .•Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro(BRASIL, 2002, p.125).

O trabalho com grandezas geométricas foi marcado durante um longo período por uma ênfase exagerada na utilização de fórmulas e conversão de unidades, o que ainda se observa nos livros didáticos, de acordo com a avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011), para o ensino médio.

Nas coleções avaliadas pelo PNLD 2012 (BRASIL, 2011), a equipe de avaliação observou que problemas que envolvem volume ainda dão ênfase a aplicações da álgebra, o que permite ao aluno pouca visualização espacial para compreensão de volume. Sugere que seria interessante explorar outras perspectivas para representação dos objetos, pois algumas ilustrações apresentam falhas que dificultam a visualização, e ainda sugere o uso da modelagem, a fim de integrar a geometria a outros campos como grandezas e funções.

Nota-se, no tratamento da geometria espacial, a mesma tendência encontrada na apresentação da geometria plana no ensino fundamental: a ênfase na nomenclatura e nas classificações e a falta quase total de problemas genuínos. Por exemplo, os problemas sobre áreas e volumes recaem em monótonas aplicações da álgebra. ...As coleções aprovadas, com poucas exceções, não contribuem para o aperfeiçoamento das habilidades de desenho e de visualização de objetos geométricos. Nesse sentido, seria importante explorar diferentes perspectivas, projeções, cortes, planificações, entre outros recursos de representação dos objetos.... Após a apresentação dos volumes dos sólidos geométricos, deveriam ser incluídos problemas de modelagem, como, por exemplo, determinar a expressão que fornece, em função do tempo, o volume de água em um recipiente, no qual ela é vertida a uma taxa constante. Esse é um dos exemplos possíveis de uma boa integração entre geometria, grandezas e funções (BRASIL, 2011, p. 35).

Apesar de a fórmula ser uma ferramenta importante para o cálculo de volume e de outras grandezas geométricas, o seu uso de forma mecânica, sem a compreensão do seu sentido, e a aplicação exagerada de fórmulas para compreensão das grandezas têm se

mostrado ineficazes e geradores de entraves, como por exemplo, a omissão ou o uso inadequado de unidades de volume (OLIVEIRA, 2002).

A afirmação, dada acima, leva-nos a estabelecer a hipótese de que, por esse uso exagerado das fórmulas, os alunos trabalham de forma mecânica situações que envolvem o cálculo de volume utilizando a fórmula, e gera como uma das consequências, a incapacidade de resolver problemas de cálculo de volume, que exijam outros tipos de estratégia. Desta forma, não adquirem as competências em relação à volume no ensino médio, de acordo com o PCN+ (BRASIL, 2002).

...- reconhecer e utilizar símbolos, códigos e da linguagem matemática; ...

...- identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como (...) litros em metros cúbicos,...

...- reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre (...) os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, ...;

...- identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular (...) volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos;

...- identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza (BRASIL, 2002, p.114-116).

A análise de pesquisas anteriores, como de Barros (2002) e de Oliveira (2002), revelou diversos tipos de erros associados à expressão “os alunos não compreendem o princípio de conservação de volume”. Além disso, mostra a persistência das dificuldades conceituais em torno do conceito de volume, da distinção entre volume e capacidade, e entre outras grandezas como massa e peso. Também observaram que os alunos recorrem, na maioria dos casos, à utilização de fórmulas para calcular o volume. Porém tais estudos foram realizados com alunos do ensino fundamental, o que nos levou a nos interrogar se os entraves observados no ensino fundamental são superados no ensino médio.

Oliveira (2007) pode constatar que alunos do ensino médio têm dificuldades ao relacionar o conceito de volume com outros conceitos como de massa e densidade, que são considerados pelo autor, conceitos relevantes para a compreensão de volume.

Dessas constatações, surge a questão central da nossa pesquisa: como os alunos de ensino médio lidam com problemas sobre volume?

As escolhas da Teoria dos Campos Conceituais e da abordagem de volume como grandeza levam a interrogar quais os tipos de situações que contribuem para a construção de volume como uma grandeza, que condições permitem aos alunos mobilizar estratégias diversas, nas quais estão em jogo diferentes invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) mobilizados pelos sujeitos e qual a importância da utilização de representações simbólicas utilizadas nas questões, tanto explicitamente como implicitamente. Desta forma, pudemos obter um diagnóstico sobre o que os alunos do ensino médio compreendem a respeito do conceito de volume como grandeza.

Para a compreensão de volume como grandeza, fizemos uma analogia em relação ao conceito de área como grandeza, a partir da construção de quadros elaborados por Douady e Perrin-Glorian (1989), as quais distinguem três quadros para compreensão do conceito de área como grandeza: o quadro numérico, o quadro das grandezas e o quadro geométrico. Assim, distinguimos o quadro geométrico, numérico e das grandezas em relação a volume.

No capítulo 2 encontra-se a problemática constituída pela fundamentação teórica, revisão de literatura e objetivos; a fundamentação teórica está dividida em subcapítulos.

Inicialmente, discutimos elementos da Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud e a organização conceitual proposta por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian para área como grandeza, adaptada para o volume.

Em seguida, na revisão de literatura, especificamos os estudos recentes sobre volume, abordamos o conceito de volume relacionado a outros conceitos. Apresentamos ainda o estudo do conceito de volume sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, em que realizamos uma análise específica de cada situação de volume retirada por analogia da classificação de situações de área dada por Baltar (1996), abordando seus aspectos relevantes na análise e estratégias que podem ser utilizadas. Para finalizar o capítulo, apresentamos os objetivos geral e específicos.

O capítulo 3 descreve a metodologia, em que se encontram as características deste estudo, o percurso metodológico que foi tomado e a análise a priori das questões que foram utilizadas.

No capítulo 4, encontram-se os resultados e a discussão, distribuídos por subcapítulos, dando uma visão geral dos resultados e em cada subcapítulo seguinte, observando as estratégias, as situações de volume, o conceito de volume em relação a outros conceitos e suas concepções, os invariantes operatórios e as representações em jogo. E por último, as considerações finais, com conclusões a respeito da análise dos resultados obtidos na pesquisa, bem como possíveis repercussões.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo inicialmente abordaremos elementos da fundamentação teórica escolhida, que consiste na Teoria dos Campos Conceituais e organização conceitual em torno dos quadros para volume como grandeza e os elementos da revisão de literatura. Posteriormente realizamos uma discussão sobre os tipos de situações que dão sentido a volume e apresentamos os objetivos.

2.1 VOLUME COMO GRANDEZA

Para a análise do objeto de estudo levamos em consideração a classificação em quadros dada ao conceito de área por Douady e Perrin-Glorian (1989): quadro numérico, quadro geométrico e quadro das grandezas.

O quadro numérico refere-se ao conjunto dos números reais não negativos. O quadro geométrico, para o conceito de área, é constituído pelas figuras que possuem superfície no mundo físico, e o quadro das grandezas são as classes de equivalências das figuras planas de mesma área, e pode ser representado pelo número e pela unidade de medida, por exemplo, $2m^2$.

Partindo desta distinção entre os três quadros, Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 9-10) elaboraram e experimentaram uma engenharia didática baseada nas seguintes hipóteses: "*O desenvolvimento, no ensino, do conceito de área enquanto grandeza autônoma favorece o estabelecimento das relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico*" e "*Uma associação precoce da superfície a um número favorece o amálgama entre as diferentes grandezas em jogo, ou seja, à indissociabilidade entre área e perímetro.*"¹

¹ O texto é uma tradução livre do original publicado em francês.

Para a construção do conceito de área, é importante levar em consideração a classificação das concepções de área (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) em dois tipos – as concepções geométricas e as concepções numéricas.

Parece-nos que algumas dificuldades estão ligadas ao tratamento feito pelos alunos dos problemas de área seja do ponto de vista de superfície, seja do ponto de vista numérico. Por exemplo, uma diminuição de área é compreendida como uma diminuição de superfície mantendo sua forma e ocorre simultaneamente com a diminuição do perímetro: a área e o perímetro são, então, amalgamados à superfície e ligados a sua forma. O perímetro é entendido como o contorno, a área como o interior. No outro extremo, a área é um número. Permanece-se no campo do cálculo e apenas os elementos envolvidos no cálculo ganham destaque, como, por exemplo, as medidas de comprimento dos elementos constitutivos de superfícies e que entram nas fórmulas que fornecem a área. Aparecem, então regras do tipo: “somar as medidas de dois lados de um triângulo e multiplicar pela medida do terceiro lado” para calcular a área de um triângulo. Desta maneira, em relação à área, os alunos desenvolveriam uma “concepção forma” ligada ao quadro geométrico ou uma “concepção número” vinculada ao quadro numérico, ou as duas mas de maneira independente e eles tratariam os problemas sem estabelecer relações entre os dois pontos de vista. Ora, os problemas de área invocam de modo essencial relações entre os quadros geométrico e numérico. (DOUADY e PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 9)²

Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), os alunos desenvolvem uma concepção geométrica, a área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície; uma concepção numérica, segundo a qual só são considerados os elementos pertinentes para o cálculo; ou ambas, mas de forma isolada uma da outra. Uma das origens das dificuldades conceituais dos alunos é a dificuldade em relacionar os campos numérico e geométrico.

Melo e Bellemain (2008) realizaram um estudo que teve como objetivo analisar os indícios de concepção numérica e geométrica, mobilizados pelos alunos, para responder questões sobre comparação de áreas e de perímetros. Observaram a ênfase no aspecto numérico e a dificuldade em dissociar área de perímetro, e quanto ao quadro geométrico, a dificuldade em aceitar a equivalência em relação à área de figuras geométricas distintas, confirmando a análise realizada por Douady e Perrin-Glorian (1989) e Bellemain (2004), de que os alunos não inter-relacionam os quadros geométrico e numérico, trabalhando isoladamente e não simultaneamente, e não compreendem área e perímetro como grandezas.

² O texto é uma tradução livre do original publicado em francês.

Bellemain (2004) reforça o caráter explicativo da modelização de conhecimentos acerca de área, por meio das concepções numéricas e geométricas. Pode-se interpretar erros frequentes e persistentes observados na aprendizagem do conceito de área, como indícios de concepções numéricas e geométricas, as quais são sistemas que apresentam certa coerência interna, embora não correspondam ao significado desse conceito em Matemática:

O aluno que mobiliza uma concepção numérica, considera que a área é um número. Nesse caso, não há como justificar que uma mudança de unidade não altere a área de uma figura. Não há tampouco impedimentos à fabricação de fórmulas (que podem ser mais ou menos pertinentes do ponto de vista matemático), nas situações em que não se conhece outro modo de calcular a área de uma figura ou a expressar a área de uma figura em metros (BELLEMAIN, 2004, p. 4).

Podemos também citar o trabalho de Bellemain (2004) onde mostra que os usos da palavra área na língua portuguesa levam à confusão entre a figura ou região e sua área, caracterizando as concepções geométricas sobre área:

Quando se usa expressões como “área escolar”, “área de lazer”, “grande área de um campo de futebol” e tantas outras, faz-se alusão a um local e não a uma propriedade do mesmo. Desse ponto de vista, uma mudança de posição ou de forma alteram necessariamente a área, o que não corresponde à idéia de área em Matemática. Da mesma forma, no sentido de uma concepção geométrica, duas figuras que têm mesma área têm necessariamente mesmo perímetro, pois são idênticas; e aumentar a área de uma figura, pressupõe aumentar por homotetia o que leva necessariamente a um aumento do perímetro e reciprocamente (BELLEMAIN, 2004, p. 5).

Possivelmente podemos levantar hipóteses, por analogia, de que o aluno não estabelece uma distinção entre o sólido e o volume, ou seja, não consegue entender que sólidos distintos possam ter o mesmo volume, mobilizando uma concepção geométrica; bem como não estabelecem distinção entre o volume e suas medidas, obtidas em função da escolha de uma unidade de volume, manifestando uma concepção numérica, ou seja, o aluno considera volume como sendo um número abstrato, sem unidade e só os aspectos relevantes para o cálculo são considerados.

A concepção de volume como uma grandeza foi observada por Oliveira (2002), o qual defende que analogamente à área, deve-se considerar no ensino, volume como uma grandeza:

Assim, o volume de um sólido geométrico aparece como um objeto matemático distinto do sólido geométrico, pois, sólidos diferentes podem possuir o mesmo volume. Também se distingue do número que está associado a uma figura espacial

quando se escolhe um sólido unitário para medi-la, pois, mudar o sólido unitário altera a medida de volume, mas o volume da figura permanece o mesmo (OLIVEIRA, 2002, p. 23).

Assim como Oliveira (2002), adotamos o esquema conceitual de quadros construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989), e portanto consideramos o conceito de volume como sendo objetos do quadro das grandezas, os sólidos correspondem ao quadro geométrico e os números reais positivos referentes às medidas das grandezas correspondem a objetos do quadro numérico.

Então devemos considerar que, do mesmo modo que ocorre para a área, sólidos diferentes podem ser equivalentes em relação ao volume, o que leva à necessidade de distinguir o sólido e seu volume. Assim, como a mudança de unidade de volume provoca mudança na medida do volume, mas não no volume enquanto uma grandeza, o que justifica a necessidade de distinguir volume (que no nosso marco teórico é a grandeza) e medida de volume (que na nossa base teórica é um número). O par número/unidade é uma maneira de expressar o volume como grandeza.

De acordo com Lima e Bellemain (2010) há três componentes básicos a considerar no estudo da geometria e das grandezas geométricas: os objetos do mundo físico, as representações gráficas e as figuras geométricas. Portanto podemos dizer que temos três tipos de objetos que estão estreitamente inter-relacionados: objetos matemáticos, objetos físicos e objetos gráficos. Cada um desses objetos pode ser utilizado para representar os outros dois.

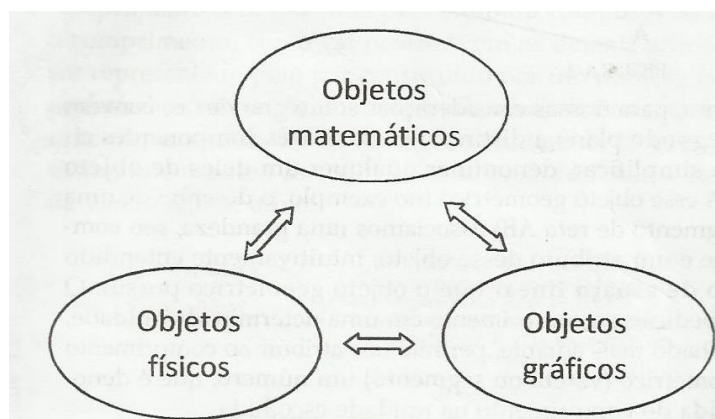


Figura 1- Relação entre objetos- Fonte: LIMA e BELLEMAIN, 2010, p. 174.

Pode-se entender por objetos físicos os objetos do mundo físico que podem ser visualizados e manipulados por nós, os objetos gráficos correspondem aos desenhos ou imagens desses objetos, e objetos matemáticos são modelos abstratos dos objetos do mundo físico que possuem determinadas propriedades matemáticas.

Tratando-se da grandeza volume, vamos considerar uma caixa de sapato, por exemplo. A este objeto do mundo físico, podemos associar seu desenho (objeto gráfico), e o conceito matemático de paralelepípedo (objeto matemático). Como vimos anteriormente, podemos denominar qualquer um deles de objeto geométrico.

Porém, para se trabalhar com grandezas, Lima e Bellemain (2010) consideram cada um dos componentes citados como sendo objeto geométrico e a esse objeto geométrico associam uma grandeza e a medida dessa grandeza. Assim, os conceitos em jogo podem ser organizados em três domínios: o do objeto geométrico, o da grandeza e o da medida da grandeza. Portanto, para compreensão desses conceitos é necessária a distinção e articulação de tais componentes, de forma simultânea.

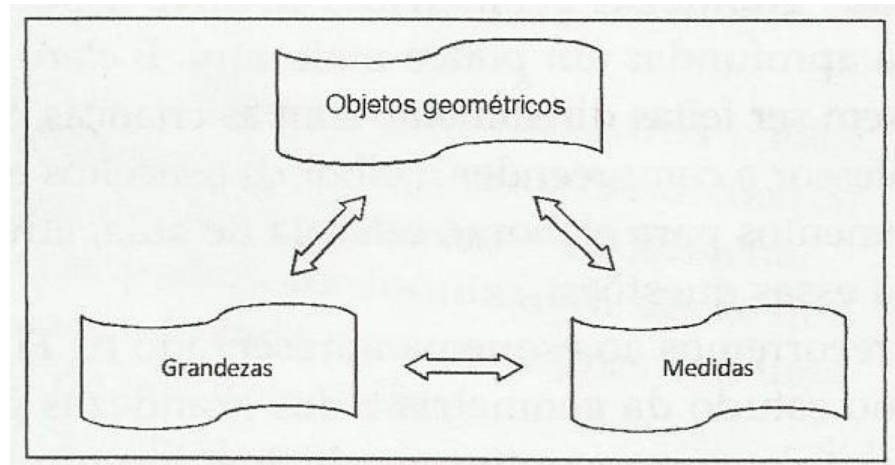


Figura 2- Compreensão de grandeza- Fonte: LIMA e BELLEMAIN, 2010, p. 175.

No caso de volume, que é a grandeza geométrica, estão associados o objeto geométrico que é representado pelo sólido e a sua medida representada pelos números reais não negativos.

Para a compreensão das grandezas geométricas é importante também verificar o processo de medição de grandezas e as unidades de medida, o qual não pode ser limitado à memorização de unidades padronizadas e à conversão mecanizada entre elas.

Para a medição de grandezas é necessária a escolha de uma unidade de medida de mesma espécie da grandeza a ser medida e que é conceitualmente arbitrária. Em certas situações, o uso de unidades não convencionais pode ser suficiente para resolver o problema. A aceitação desse caráter arbitrário é parte do processo de compreensão da grandeza. Podemos desta forma considerar como unidades de medida de volume o metro cúbico, o litro, mas para medir volume também podemos ter como unidades, por exemplo, o cubinho de 1cm de aresta, ou uma barra de sabão de coco, pois se conseguir preencher um recipiente com 20 barras de sabão de coco, então o volume desse recipiente será 20 barras de sabão de coco. O que não podemos é confundir unidades de medida de volume com unidades de medida de outras grandezas como área (metro quadrado), a massa (grama) e comprimento (metro).

Na literatura brasileira de educação matemática já existem trabalhos, como por exemplos, os desenvolvidos por Barros (2002) e Oliveira (2002), que têm atestado a relevância de se trabalhar os três quadros supracitados e estendido à abordagem para volume.

Seguindo a organização conceitual de grandezas geométricas estendida para volume, ao considerar como um objeto geométrico um objeto tridimensional, podemos associar várias grandezas a este objeto, como é o caso da grandeza volume. Ao reconhecer, por exemplo, um sólido como sendo um paralelepípedo, o sólido paralelepípedo faz parte do campo geométrico.

Ao medir o volume desse objeto, será necessário atribuir um número que irá compor o campo numérico, e uma unidade de medida escolhida para a medição, que irá compor o campo das grandezas geométricas. O quadro das grandezas vai se compor de classes de equivalência, ou seja, vai corresponder a um conjunto quociente composto a partir da relação de equivalência "ter mesmo volume".

Desta forma, podemos observar que para a construção de um conceito de grandeza geométrica é importante para o aluno saber relacionar os campos numérico e geométrico, e associá-los ao campo das grandezas.

2.2 ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Segundo Vergnaud (1990), o conhecimento está organizado em campos conceituais. O campo conceitual pode ser considerado uma unidade de estudo para dar sentido às dificuldades observadas na conceitualização do real. Assim, para a Teoria dos Campos Conceituais, a conceitualização é a essência do desenvolvimento cognitivo.

Para Vergnaud (1990), a constituição de um conceito depende de três dimensões do conhecimento, as quais estão inter-relacionadas. O conceito é, então, definido por:

$$C = \{S, I, R\}$$

Em que:

S = é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência);

I = é um conjunto de invariantes operatórios, mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução do problema (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), corresponde ao significado;

R = é um conjunto de representações simbólicas, utilizadas tanto para apresentação quanto para resolução do problema (significante).

Desta maneira, o conceito é constituído por situações de referência, por invariantes operatórios e sistemas de representação simbólica.

Isso implica que, para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente. Não se pode reduzir o significado nem aos significantes nem às situações. Assim, um único conceito não se refere a um só tipo de situação e uma única situação não pode ser analisada com um só conceito. Segundo Vergnaud (1990, p. 135), “um conceito não pode ser reduzido à sua definição se estamos interessados na sua aprendizagem e no seu ensino. É através de situações e de problemas que um conceito adquire sentido para o aluno.”

Para a compreensão de volume como grandeza, diante de uma situação de comparação de volume entre sólidos constituídos por cubinhos idênticos (situação), a estratégia eleita para o cálculo de volume, bem como os conceitos mobilizados para a resolução (invariantes

operatórios) dependerão da compreensão do sólido como uma figura espacial, tridimensional (a representação simbólica). Assim, observamos a presença da tríade de Vergnaud, para obtenção do conceito de volume.

Vergnaud (1990) discute a importância das situações para dar sentido a um conceito:

...o saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer de situações para dominar. [...] Por ‘problema’ é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução (VERGNAUD, 1990, p. 52).

Há várias pesquisas (OLIVEIRA, 2002; BARROS, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008) que tratam da importância de se trabalhar o conceito de volume através das três dimensões do conhecimento (situações, invariantes operatórios e representações) estabelecidas por Vergnaud. No trabalho de Anwandter-Cuellar (2008) foi apresentada uma classificação de situações para volume como situações de comparação, situações de medir volume de um sólido, situações de variações de volume e de área, situações de produção de sólidos a partir de volume dado, situações de produção de sólido com volume maior ou menor de um sólido dado, e situações de mudança de unidades.

Segundo Vergnaud (1990), esquema é a organização da conduta para certa classe de situações. Teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são invariantes operatórios, logo, são componentes essenciais dos esquemas, são os conhecimentos contidos nos esquemas.

Teorema-em-ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real. Um teorema-em-ação: “quando a massa de um corpo altera, o volume conseqüentemente altera no mesmo sentido”, sendo válido quando a densidade do corpo se mantém constante.

Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante. Esse conhecimento geralmente está implícito e o aluno tem dificuldades em explicá-lo ou expressá-lo, porém não significa que tal conhecimento não possa ser explicitado (MOREIRA, 2002).

Segundo Moreira (2002, p. 11) “Entre os mais importantes conceitos-em-ação desenvolvidos pelos alunos acham-se os de grandeza ...”.

Desta forma, o nosso objeto de estudo, volume, é uma grandeza geométrica que faz parte do quadro das grandezas, e pode ser mobilizado pelos sujeitos como conceito-em-ação.

Há várias formas de representação como números, figuras, fórmulas, unidades de medida, entre outras, que auxiliam em conjunto com os invariantes operatórios e as diversas situações, na obtenção do conceito de volume.

2.3 PESQUISAS ANTERIORES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE VOLUME

Oliveira (2002) em seu trabalho realizou um estudo de casos com quatro duplas de alunos de 5ª Série (atual 6º ano) do Ensino Fundamental, que consistiu em um diagnóstico exploratório de questões didáticas relativas ao conceito de volume, adotando a modelização didática das grandezas geométricas, proposta nos trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Bellemain e Lima (2002). No caso da grandeza volume, procurando articular o quadro de sólidos geométricos com o quadro das grandezas, observou entraves na articulação e dissociação entre volume e massa, entre volume e densidade, entre volume e capacidade, entre aspectos unidimensionais e tridimensionais do volume, e entre as figuras e as grandezas envolvidas.

Os mesmos entraves foram observados no estudo de Barros (2002) que procurou identificar em seu trabalho conceitos e procedimentos mobilizados por alunos frente a atividades envolvendo volume de sólidos geométricos e capacidade de recipientes, adotando também a modelização didática proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989). Para tanto, elaborou oito atividades que estavam relacionadas com a dimensionalidade da grandeza volume e aplicou em uma turma de 45 alunos da sétima série (oitavo ano do ensino fundamental) de uma escola municipal de Recife-PE.

Roldán (2003) estudou as concepções de 24 professores de escola primária do México quanto ao conceito de volume, através da aplicação de exercícios que tratavam da medição de volume de sólidos geométricos, tendo os professores materiais diversos a sua disposição para realizar a medição do volume; porém observou-se que a maioria só utilizava fórmulas para

calcular o volume pedido. Foi constatado que a maioria dos professores não sabe distinguir nem relacionar volume e capacidade, volume e peso, volume e área de um corpo.

Para Roldán (2003), a riqueza do conceito de volume cabe, entre outros fatores, à variedade de significados que podem associar à palavra volume, a complexidade das características físicas e geométricas dos objetos e as relações que guarda com outras propriedades dos corpos como capacidade e peso, além de permitir medir volume de maneira indireta, de diversas formas, além do uso de fórmulas, como por exemplo, a imersão de um sólido dentro de um recipiente com líquido no seu interior.

Anwandter-Cuellar (2008) investigou a aprendizagem do volume em sua dissertação de Master 2 (nível equivalente ao mestrado brasileiro) na França. Fundamentada na Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard e na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, essa caracterizou nove concepções de volume mobilizadas por alunos dos anos finais do ensino fundamental:

Volume delimitado: como sendo um espaço topológico delimitado por uma superfície;

Volume ocupado: é visto como um lugar ocupado por um corpo no espaço ou o espaço ocupado por um objeto colocado em relação ao seu ambiente;

Volume sólido: o volume coincide com o sólido que está sendo estudado, pode desenvolver o teorema-em-ação: se dois objetos têm mesmo volume, então eles são idênticos;

Volume número: o volume é visto como um número obtido por uma fórmula, sem qualquer relação com a grandeza;

Volume medida: o volume é considerado o número de unidades necessárias para preencher um sólido;

Volume grandeza: o volume é considerado uma grandeza;

Volume área: o volume é confundido com a área. Respostas como “volume é a superfície” ou “volume é a área de um objeto” mostra que há dependência entre os conceitos de área e volume, pode levar ao teorema-em-ação: “o volume de um sólido e a área da sua superfície variam na mesma direção”.

Volume deslocado: tal conceito vem do princípio de Arquimedes: “um corpo imerso em um fluido recebe um impulso verticalmente para cima, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado (este volume é igual ao volume imerso do corpo). Neste caso, o volume do objeto será igual à quantidade de água deslocada quando o objeto é imerso em água;

Volume interior: é a quantidade de matéria, no sentido físico, de que é constituído o objeto. Tanto nos objetos sólidos como na quantidade de material para preencher uma caixa, por exemplo. Neste sentido, é comum usar o termo capacidade.

Levando em consideração os entraves constatados no estudo de Barros (2002) e de Oliveira (2002), anteriormente citados, e considerando a Teoria dos Campos Conceituais, reflexões são levantadas acerca das seguintes questões: Quais são as situações que dão sentido ao conceito de volume? Como os alunos do ensino médio lidam com as situações que dão sentido a volume?

Barros (2002), em seu estudo, observou que situações-problema de comparação de volumes podem favorecer o aparecimento de maior variedade de concepções e procedimentos que não estão presentes em situações que envolvem apenas o cálculo de volume. Variadas situações foram trabalhadas junto aos sujeitos da pesquisa, dentre elas: situações de comparação e conservação de volume, como por exemplo, utilizando duas bolas de massa de modelar de mesmo volume, pedia para amassar uma delas e comparar os volumes finais. Situações de articulação e dissociação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas, como por exemplo, comparar volume de dois paralelepípedos retângulos distintos formados por cubos menores de mesmo tamanho. Para realizar a comparação entre eles, pode-se utilizar o processo de decomposição e composição da figura, uma maneira para se comparar sem medir. Além de trabalhar situações que envolvem a dimensionalidade da grandeza volume.

Oliveira (2002), em seu estudo de caso, trabalhou situações que envolviam conservação de volume, comparação de volume com grandezas massa e densidade, distinção entre volume e capacidade, situações que envolviam o emprego de medida com unidades não convencionais (como utilizar recipientes menores para calcular o volume de um recipiente maior e relacionar as medidas encontradas), articulação e dissociação entre os quadros geométrico, numérico e de grandezas. Por exemplo, em um de seus experimentos, colocou à disposição dos oito alunos, recipientes diferentes, com densidades diferentes (uma bola maciça, um pedaço de ferro, um copo plástico, uma bacia de plástico e uma vasilha prismática de plástico) e pediu para que os alunos colocassem os recipientes em ordem crescente de volume, inicialmente pelo método visual e mental, e posteriormente, pelo método experimental, com o uso de duas jarras contendo água em seu interior, para comprovarem suas respostas. Nesta atividade devem ser articulados os quadros geométrico e das grandezas,

sem necessidade do quadro numérico e investigar se os alunos compreendem a concepção de capacidade e de volume como sendo a mesma grandeza. Embora nenhum dos sujeitos tenha formado a sequência completa corretamente, a maioria considerou os volumes e as capacidades como sendo a mesma grandeza, pois apenas dois alunos realizaram a sequência separando os objetos em dois blocos (dos recipientes e dos sólidos maciços).

Capacidade é um conceito vinculado ao quadro das grandezas, pois se trata de um tipo específico de volume. É considerada como sendo o volume interno de um recipiente. Dessa maneira, capacidade é um conceito que só deve ser usado em sólidos ocos, pois apresentam espaço interno vazio. Assim, pode-se relacionar capacidade como sendo o volume interno do recipiente, e o volume total do recipiente como sendo a sua capacidade somada ao espaço ocupado pelas paredes do recipiente, caso elas (as paredes) tenham suas dimensões consideradas.

Oliveira (2007), em sua tese, realizou um estudo de caso com alunos do ensino médio e estudantes de licenciatura, com o objetivo de analisar a importância de grandezas físicas na construção do conceito de volume, utilizando como referenciais teóricos a Teoria dos Campos Conceituais e a Teoria dos Construtos Pessoais. Pode observar que se tratando de campo conceitual, os conceitos de medida, massa, peso, densidade, forma e dimensão se relacionam com a construção do conceito de volume, e que alunos que apresentaram domínio do conceito de densidade foram aqueles que apresentaram melhor desempenho diante das situações abordadas neste estudo.

Anwandter-Cuellar (2008) levando em consideração a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e realizando uma analogia com a pesquisa de Baltar (1996) sobre o conceito de área, apresentou uma classificação de problemas sobre o conceito de volume que foram identificados como:

- **Problemas de comparação;**
- **Problemas de medir volume de um sólido;**
- **Problemas de variações de volume e de área;**
- **Problemas de produção de sólidos a partir de volume dado;**
- **Problemas de produção de sólido com volume maior ou menor de um sólido dado;**
- **Problemas de mudança de unidades.**

Para cada tipo de problema, a autora explica e exemplifica como são mobilizados os conhecimentos em jogo. Por exemplo, para resolver os problemas de comparação podemos utilizar três procedimentos: numérico, geométrico e físico. O numérico pode ser através da fórmula, o geométrico pode ser através da inclusão e sobreposição de objetos, e o físico através da comparação de suas massas, sendo válido para comparar materiais homogêneos. Nos problemas de variações de volume e de área, podemos observar os efeitos de certas transformações com relação à medida transformada por um certo fator k , aplicado nas três dimensões de volume, passa a ser o invariante k^3 ; fato este devido a volume depender linearmente de cada dimensão (trilinearidade do volume).

Com base nas pesquisas de Morais e Bellemain (2010) sobre o tema, onde foram analisadas cinco coleções aprovadas no PNLD 2008 e observado o tratamento dado a volume nos livros de 6º ao 9º ano dessas coleções, pode-se constatar que volume ainda é pouco trabalhado nos anos finais do ensino fundamental; é dada muita ênfase à transformação de unidades, a medidas e à aplicação direta das fórmulas de volume. Entretanto, as situações de comparação (sobretudo sem medir), estimativas, atividades que propiciam a apropriação da conservação de volume, bem como a confrontação entre volume e massa e situações que trabalham a articulação/dissociação entre o sólido geométrico, a grandeza volume e a medida são pouco exploradas nas coleções analisadas.

Kaleff, Rui e Garcia (1996) realizaram uma pesquisa com estudantes do último ano do ensino médio, alunos universitários e professores de matemática sobre a habilidade de visualização geométrica, que se tratou da aplicação de questões com desenhos que representam sólidos construídos com empilhamento de cubos, para a contagem de cubos e cálculo do volume a partir dos desenhos. Os resultados mostraram que tanto os estudantes do ensino médio, quanto alunos universitários e professores de matemática tem dificuldades significativas na interpretação dos desenhos, levando a crer que os profissionais e universitários desconhecem as convenções para determinação de volume a partir de desenhos; possuem deficiências relativas a diversos conceitos matemáticos quanto à grandeza volume, pois o conceito de volume e a forma de um sólido geométrico eram geralmente confundidos; e apresentaram dificuldades para desenhar uma representação de um sólido geométrico em perspectiva cavaleira construído por cubinhos em madeira.

Desta forma, cabe-nos a questionar: Como os alunos do ensino médio lidam com as diferentes representações simbólicas diante das situações de volume? Quais representações são melhor compreendidas pelos alunos?

2.4 RELAÇÕES ENTRE VOLUME E OUTROS CONCEITOS

O conceito de volume pode ser entendido como por exemplo: o espaço que ocupa um corpo em relação a outros objetos, ou a quantidade de unidades que formam o corpo, ou o espaço ocupado ao submergir um objeto em um líquido, entre outras. Portanto, o conceito de volume está relacionado com outras propriedades dos corpos (físicas e químicas) e também com características físicas e geométricas dos objetos.

Devido a esta estreita relação, podem ocorrer dificuldades em distinguir e associar volume a grandezas físicas (massa, peso e densidade) e a grandezas geométricas como área e comprimento.

O conceito de massa, de acordo com a sua epistemologia, é um conceito de difícil apropriação, segundo Bachelard apud Oliveira (2007), o qual em seu estudo dividiu a evolução do conceito de massa em três níveis (estático, empírico, abstrato). No nível estático, a massa toma sentido de uma descrição, é a quantidade de matéria, em que pode haver concepções equivocadas com o conceito de volume, em acreditar que ao erguer objetos, considerem que apenas aqueles com volumes maiores tenham massa, ou que aqueles que tenham maior massa terão maior volume. No empírico, há necessidade de determinar mais precisamente a medida da massa através de instrumentos como a balança, e no terceiro nível o conceito torna-se mais abstrato, e passa a ser calculada a partir da segunda lei de Newton, em que define massa como o quociente entre força da gravidade (peso) e aceleração da gravidade, sendo neste nível importante a distinção entre os conceitos de massa e de peso, para evitar afirmações do tipo “O peso do objeto corresponde a 50 quilogramas”.

Outro fato já observado em estudos como o de Oliveira (2007) que dificulta a compreensão do conceito de volume como grandeza geométrica é ignorar a relação entre massa e volume, que remete ao conceito de densidade dos corpos, pois ao comparar dois ou

mais objetos, nem sempre o mais pesado será o de maior volume, a não ser que tais objetos sejam constituídos da mesma substância, pois terão a mesma densidade, e assim, massa e volume alteram na mesma proporção, ou seja, são diretamente proporcionais.

Há também confusão entre o conceito de volume e capacidade. Muitos estudos mostram que tais conceitos não são vistos como sendo uma única grandeza, e realizam a distinção do que é capacidade, relacionando aos sólidos ocos, e do que é volume, relacionando aos sólidos maciços. Fato este observado no estudo de Oliveira (2002), o qual será descrito posteriormente. Para Oliveira (2002) a capacidade é volume já que no contexto matemático, os sólidos ocos estudados são limitados por uma fronteira em que o seu volume é nulo, resultando assim o volume do sólido geométrico ser o mesmo que o volume interno desse sólido.

Segundo Vergnaud apud Oliveira (2002), para medir capacidade e volume utilizamos processos distintos, no caso de capacidade utilizamos a capacidade de um recipiente como unidade e medimos a capacidade do outro recipiente a partir da capacidade inicial. Tratando-se de corpos maciços, o volume pode ser calculado a partir da fórmula, como por exemplo, o cálculo de volume de um paralelepípedo, em que estão explícitas suas três arestas, pode utilizar como estratégia a aplicação da fórmula de volume. Assim, podemos relacionar o conceito de volume ao conceito de dimensionalidade, em que o volume considerado como sendo capacidade é uma grandeza unidimensional e o volume do sólido maciço é tridimensional.

Há também confusão entre a unidade de medida de volume com unidades de medida de outras grandezas geométricas, como comprimento e área, o que mostra dificuldade na compreensão do quadro das grandezas, proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989). A não compreensão de volume como grandeza tridimensional, leva o aluno ao erro referente à unidade de medida diante de situações que exigem o cálculo do volume, mostrando respostas do tipo: 1cm, por exemplo, o que seria comprimento, que é uma grandeza unidimensional, ou 2m^2 , por exemplo, o que seria área, que é uma grandeza bidimensional. Tais resultados podem revelar uma incompreensão da dimensionalidade das três grandezas geométricas em jogo, neste exemplo: comprimento (unidimensional), área (bidimensional) e volume (tridimensional).

2.5 ESTUDO DO CONCEITO DE VOLUME SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A escolha de adotar a Teoria dos Campos Conceituais leva a conceber volume como conceito e portanto como um tripé de três conjuntos indissociáveis: o conjunto das situações que dão sentido a volume, o conjunto os invariantes operatórios contidos nos esquemas e o conjunto das formas de representação simbólica em jogo nas situações relativas a volume. Diante disso, com base nas pesquisas anteriores sobre o tema e sobre temas conexos, como a aprendizagem do conceito de área de figuras planas, vamos construir uma tipologia de situações que potencialmente podem dar sentido a volume e submeter a uma análise de dados empíricos.

Os tipos de situações propostas nesta pesquisa são os baseados na classificação dada por Baltar (1996) para o conceito de área, que consistem em situações de medida, de comparação e de produção. A situação de medida tem como subtipos situações de transformação de unidade e de operacionalização de volume.

Esta classificação está também presente no trabalho desenvolvido por Moraes (2013), no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, o qual estuda o tema volume como grandeza nos livros didáticos do ensino médio. Ressaltamos também que estes trabalhos se articulam ao grupo de estudos Pró-Grandeza³, o qual se debruça sobre o ensino-aprendizagem das grandezas geométricas e suas medidas, mais particularmente comprimento, área e volume.

A tipologia dada por Anwandter-Cuellar (2008), em que também foi realizada uma analogia com a pesquisa de Baltar (1996) sobre o conceito de área, não foi a escolhida para este trabalho, por ter uma classificação maior em relação às situações que podem ser resumidas em uma única classificação. Como é o caso de problemas de produção, problemas com produção de sólido de mesmo volume que o sólido dado ou de volume menor/maior que o sólido dado, remetem a uma classificação de subcategorias de situações de produção. Já problemas de medir volume de um sólido; problemas de variações de volume e de área e

³ Grupo de pesquisa do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco liderado pelos professores Dr. Paulo Figueiredo Lima, Dr^a Paula Moreira Baltar Bellemain e Dr^a Rosinalda Teles.

problemas de mudança de unidades, são subcategorias de situações de medida, o que torna a análise mais simplificada e de melhor compreensão por parte do leitor.

2.5.1 Análise específica de cada tipo de situação

De acordo com a classificação escolhida, faremos uma apresentação sobre cada tipo de situação, destacando aspectos relevantes a serem observados durante a análise, bem como as estratégias possíveis mobilizadas pelos sujeitos.

2.5.1.1 Situações de comparação

Na situação mais simples, os problemas de comparação consistem em determinar, dados dois sólidos, se eles têm mesmo volume ou qual dos dois tem volume maior. Nos casos em que são apresentados mais de dois sólidos, trata-se de ordenar os sólidos, e nesse caso, intervém a transitividade da relação de ordem. Situações de comparação exigem do aluno a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas, levando em consideração a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989). Situações em que são comparados sólidos ocos ou maciços, ou realizar comparações estáticas ou dinâmicas, podem favorecer ou bloquear as estratégias mobilizadas pelos alunos.

Podemos observar como estratégias: visual (perceptiva), inclusão, decomposição-recomposição, imersão, medida e comparação das medidas, e comparação das massas.

Ao utilizar estratégias como a visual, inclusão e comparação de massas, o aspecto numérico não estará presente. Portanto, nas situações de comparação, o campo numérico nem sempre será mobilizado.

A estratégia visual consiste em comparar por meio da visão os objetos, e através de sua percepção, ordenar os objetos de acordo com o seu volume. Na inclusão, os alunos podem observar se um objeto terá maior volume que outro se este couber no interior do objeto de

maior volume. Neste caso, pelo menos um dos sólidos deverá ser oco. Na estratégia por decomposição-recomposição, tentamos decompor um dos objetos para formar (recompor) um objeto conhecido, ou parecido com o outro objeto a ser comparado, tornando assim a comparação mais fácil de ser entendida. Na imersão, precisamos de um recipiente com água no seu interior para imergir os objetos um a um e comparar o nível de água deixado por cada objeto submerso. O nível mais elevado será o nível correspondente ao objeto de maior volume. Na medida e comparação de medida, utiliza-se a fórmula de volume para calcular o volume dos objetos e assim compará-los. Comparação de massas consiste em comparar as massas dos objetos de mesma densidade. Logo, se tem maior massa, terá maior volume.

Oliveira (2002), em seu estudo, trabalhou com situações de comparação que exigiam do aluno estratégias como visual (perceptiva) e imersão. Em uma de suas atividades, aos alunos era pedido para comparar os volumes de dois bastões de massa de modelar de volumes iniciais iguais ao deformar um deles. Além das estratégias esperadas (imersão e visual), pode também identificar em um dos protocolos dos alunos a estratégia de comparação de massas, em que o aluno utilizou o argumento de que corpos de mesma densidade, se têm a mesma massa, terão o mesmo volume.

Aspectos importantes que devem ser observados diante de situações de comparação como ao se comparar sólidos em que envolve apenas comparação estática, ou seja, os sólidos não mudam de forma, ou casos em que há alteração na forma dos sólidos envolvidos (comparação dinâmica), casos em que há mais de dois sólidos a serem comparados, em que será necessário o conhecimento sobre transitividade, casos em que utilizam sólidos ocos e/ou maciços, envolvendo assim o conceito de capacidade além de volume.

2.5.1.2 Situações de medida

Situações de medida de volume permitem a articulação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas. Ao calcular o volume de um sólido, o aluno passa do quadro geométrico para o numérico, e ao reconhecer a medida como sendo da grandeza volume, passa para o quadro das grandezas.

Os alunos podem utilizar diferentes estratégias para resolverem problemas desse tipo, tais como: contagem de unidades (consiste em contar sólidos unitários), uso de fórmulas, princípio de Cavalieri, imersão, preenchimento (caso os sólidos a serem medidos sejam ocos, podemos medir a sua capacidade, preenchendo com um líquido e observando a quantidade de líquido que foi necessária para preenchê-lo) e transvazamento.

Barros (2002), em uma de suas atividades, apresenta ao aluno três figuras formadas por cubos de 1cm de arestas, para compará-los em relação ao seu volume. O aluno pode calcular o volume através da fórmula ou pela contagem de cubos presentes em cada figura. Temos que observar se o aluno, durante a contagem, considera o cubo do canto em todas as arestas, se duplica os cubos do canto se conta apenas os cubos visíveis.

Vergnaud apud Oliveira (2007), estudando o conceito de volume como uma grandeza física, observou dificuldades didáticas para a sua aprendizagem como o caso do “cubo do canto”. O aluno, diante de atividades como contagem de cubos para calcular o volume de uma figura geométrica formada por cubos, não inclui na sua contagem o cubo do canto, localizado no vértice, pois considera que estaria contando duas vezes o mesmo cubo. Por exemplo, considere o paralelepípedo representado na figura a seguir:

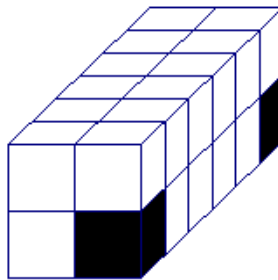


Figura 3- contagem do cubo do canto

Se o aluno considera para o comprimento 2 cubos, para a largura, 5 cubos e para a altura, 1cubo, ao invés de serem 2 cubos para o comprimento, 6 cubos para a largura e dois cubos para a altura. Ao ser questionado sobre o motivo de ter calculado o volume utilizando essas medidas, ele responde que não pode contar duas vezes o mesmo cubo.

O princípio de Cavalieri consiste em estabelecer que dois sólidos com a mesma altura têm volumes iguais se as secções planas de iguais alturas possuírem a mesma área. Desta forma, poderemos considerar que sólidos nesta condição terão mesmo volume, assim conhecendo o volume de um dos sólidos, teremos o volume dos outros.

A partir de trabalhos anteriores (OLIVEIRA, 2002; BARROS, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008) podemos observar como entraves: confusão entre as grandezas (natureza, instrumento de cálculo ou variação), uso inadequado de unidades ou ausência do uso de unidades, desconhecimento da fórmula, dificuldade na identificação das medidas a serem utilizadas no cálculo, dificuldades no cálculo numérico, dificuldades no manejo com números racionais.

Em situações de medida temos que levar em consideração se a fórmula a ser utilizada é fácil de ser reconhecida, se a presença/ausência do sólido ou da representação plana do sólido facilitou ou não a resolução, quanto à unidade de medida, se é de capacidade ou de volume, se há homogeneidade ou não das unidades de medida, se há necessidades de transformação ou de mudança de unidades de medida, quanto à natureza dos números, se são decimais ou inteiros, se os sólidos são ocos ou maciços, envolvendo o conceito de capacidade além do de volume, se os sólidos representados são retos ou oblíquos, para observar se as posições ou configurações dos sólidos mais usuais são mais compreendidos.

2.5.1.2.1 Situações de Transformação de unidades

São situações que exigem a mudança de unidades ou transformação de unidades.

Para a transformação de unidades de medida, o aluno dispõe da estratégia de medir o volume de um mesmo sólido usando unidades diferentes, como por exemplo: medir o volume de sólido formado por cubinhos de 1cm de aresta, pode ter como resposta o par número/unidade de medida de volume cubinhos ou o par número/unidade de medida cm^3 . Para a conversão de unidades, o aluno deverá utilizar a estratégia de converter uma unidade de volume em outra, ou seja, de uma unidade de medida para um de seus múltiplos ou submúltiplos, ou de uma unidade de medida de volume para uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa.

Outro aspecto a ser observado neste tipo de situação é a respeito da natureza dos números, pois os alunos poderão encontrar mais dificuldades diante dos números decimais.

2.5.1.2.2 Situações de operacionalização de volumes

Consiste em operações de adição e/ou subtração entre volumes.

Podem apresentar dificuldades nesse tipo de situação devido à homogeneidade ou não de unidades e à natureza dos números (naturais, racionais, reais), o que irá dificultar as estratégias utilizadas pelos alunos.

2.5.1.3 Situações de Produção

São situações que se caracterizam pela produção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume dado. Podendo ser: produção de um sólido com volume dado, produção de um sólido com volume menor ou maior, produção de um sólido de volume igual ao de outro sólido dado. Aspectos que podemos observar é quanto ao volume do sólido a ser formado a partir de outro sólido, em que pede-se de mesmo volume ou de volume maior ou menor, se os alunos conseguem calcular o volume do sólido a ser construído e se os alunos conseguem dissociar o sólido do volume, e construir sólidos diferentes do sólido dado, ou seja, por exemplo, se o sólido dado for um paralelepípedo retângulo se os alunos constroem sólidos diferentes como o cilindro, o cone, a esfera, entre outros.

Como estratégias, o aluno pode dispor: da composição, da decomposição-recomposição e do Princípio de Cavalieri.

Em uma de suas atividades, Anwandter-Cuellar (2008) exige do aluno a estratégia de composição ao pedir para construir sólidos diferentes com 36 cubinhos de 1cm de aresta. Porém, além dessa estratégia, o aluno pode dispor da decomposição-recomposição. Através da montagem do sólido formado por 36 cubinhos, para encontrar os sólidos diferentes com o mesmo volume, ou seja, com o mesmo número de cubinhos, o aluno poderá formar outros sólidos, decompondo e recompondo os cubinhos.

Podemos construir sólidos de mesmo volume seguindo o Princípio de Cavalieri. Para isso, os sólidos deverão ter a mesma altura e, quando seccionados em planos horizontais, apresentarem mesmas áreas correspondentes ao mesmo plano. Ver exemplo:

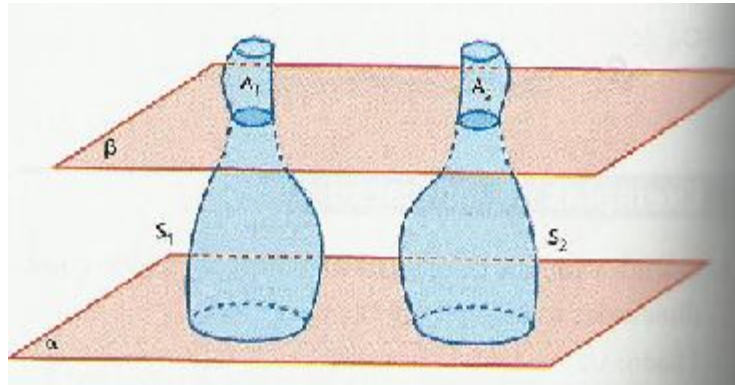


Figura 4- Princípio de Cavalieri- Fonte - DANTE, 2010, p.436

Observe que, de acordo com o Princípio de Cavalieri, os volumes das garrafas só serão os mesmos, caso as áreas das duas garrafas, em cada plano horizontal, α e β , forem iguais, ou seja $A_1 = A_2$ e $S_1 = S_2$. Porém, não só deverão ser iguais as áreas das secções correspondentes aos dois planos apresentados na figura 4, para considerar o mesmo volume das garrafas; pois, de acordo com o Princípio de Cavalieri, todo e qualquer plano horizontal, além de α e β , que corte as duas garrafas deverá sempre conter secções de áreas iguais das garrafas. Assim, podemos afirmar que as garrafas têm o mesmo volume.

2.6 OBJETIVOS

2.6.1 Objetivo geral

Analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, como alunos do ensino médio lidam com situações envolvendo a grandeza volume.

2.6.2 Objetivos específicos

-Caracterizar como alunos do ensino médio distinguem e articulam conhecimentos oriundos dos quadros geométrico, numérico e das grandezas na resolução de problemas envolvendo volume.

-Descrever como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação de volumes, medida de volume e produção de sólidos, com volume dado, volume maior/menor ou igual ao de outro sólido.

-Identificar invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) mobilizados por alunos de ensino médio, na resolução de problemas envolvendo volume.

-Caracterizar como os alunos do ensino médio lidam com as representações simbólicas em jogo na resolução de problemas envolvendo volume.

3 METODOLOGIA

Para Triviños (2011) estudos exploratórios são aqueles que permitem ao investigador aumentar a sua experiência, aprofundando seu estudo e adquirindo um maior conhecimento a respeito de um problema. Podem ainda servir para levantar possíveis problemas de pesquisa.

Recomenda-se o estudo exploratório quando há poucos conhecimentos sobre o problema a ser estudado. Por isso, optamos por esse tipo de abordagem, pois há poucos trabalhos desenvolvidos sobre esse tema, principalmente com o ensino médio.

O objetivo deste tipo de pesquisa baseia-se no aprimoramento do conhecimento ou descoberta de intuições, porém não tem a finalidade de levantar hipóteses a serem testadas no trabalho, segundo Rampazzo e Corrêa (2008):

Este tipo de pesquisa tem como principal objetivo o aprimoramento de idéias ou a descoberta de intuições (familiarizar-se com o fenômeno ou obter nova percepção do mesmo). Não elabora hipóteses a serem testadas no trabalho, restringindo-se à definição de objetivos e à busca de maiores informações sobre determinada temática (RAMPAZZO; CORRÊA, 2008, p. 72).

3.1 PERCURSO METODOLÓGICO

Foram utilizados dois instrumentos de coleta de dados: um teste de sondagem e uma entrevista. O teste de sondagem permite observar como cada aluno, em situação individual e sem consulta, lida com problemas de diversos tipos, envolvendo volume, além de permitir uma confrontação com a análise a priori, a qual nos fornece pistas de possíveis interpretações dos procedimentos dos alunos. Como a realização de entrevistas e a transcrição consomem muito tempo, a realização do teste permite ter mais resoluções de alunos, o que é relevante para um estudo exploratório. As entrevistas com os alunos objetivaram validar ou não as pistas e evidências sobre a construção do conceito do volume obtidas a partir da aplicação do teste de sondagem, para esclarecer as respostas dadas por eles no teste escrito, confirmando ou não a interpretação dada à resolução deles. Trabalhamos com um grupo de alunos do terceiro ano do ensino médio previamente selecionados, de escolas tanto da rede estadual,

federal e da rede particular de ensino da cidade de Recife-PE. Tanto o teste de sondagem quanto as entrevistas foram realizadas pela autora deste trabalho, durante o decorrer do terceiro ano do ensino médio dos sujeitos envolvidos. As entrevistas foram gravadas e transcritas para haver maior precisão em relação às explicações dadas pelos sujeitos.

A parte empírica da pesquisa foi realizada em seis etapas:

- Construção e análise *a priori* do teste de sondagem;
- Seleção das escolas e dos alunos a serem pesquisados,
- Resolução do teste de sondagem pelos alunos selecionados;
- Análise dos resultados do teste para seleção dos alunos para entrevista;
- Entrevistas com os alunos selecionados;
- Análise das respostas obtidas dos alunos e confrontação com a análise *a priori*.

Para construção do teste de sondagem, levamos em consideração os estudos de Barros (2002), Oliveira (2002) e Anwandter-Cuellar (2008), bem como exames de vestibulares, livro didático e atividades propostas pelo LEMAT (Laboratório de Ensino da Matemática da UFPE), a partir dos quais refletimos a respeito das situações que dão sentido ao conceito de volume.

Desta forma, agrupamos as atividades que foram aplicadas aos alunos de acordo com o tripé de Vergnaud (1990) para a obtenção de um conceito (situações, invariantes operatórios e representações simbólicas) e levamos em consideração a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Com o intuito de testar o instrumento a ser utilizado nesta pesquisa, foi realizado um estudo piloto com um grupo de alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola particular na cidade do Recife. A partir dos resultados obtidos no estudo piloto, modificamos algumas questões e retiramos outras, que tinham mesmo objetivo ou que mobilizavam as mesmas estratégias e teoremas-em-ação.

As escolas foram selecionadas por terem se mostrado receptivas para acolher a realização deste estudo, por serem escolas de referência no ensino médio deste município e por pertencerem a três redes de ensino – estadual, federal e privada. A escolha de selecionar escolas de três redes não foi motivada pela intenção de realizar nenhum estudo comparativo, mas por se tratar de um estudo exploratório, buscar obter procedimentos de resolução diversificados. Por isso, na análise dos dados não haverá qualquer identificação da rede à qual cada aluno pertence.

Como o tema volume geralmente é ensinado no fim do ano letivo do segundo ano do ensino médio, decidimos realizar nosso estudo com alunos do terceiro ano do ensino médio. Os exercícios propostos foram aplicados nas três escolas. Na escola da rede estadual, os exercícios foram aplicados com 16 alunos; na da rede particular, foram com 18 alunos; e na da rede federal, com 17 alunos. Inicialmente foi explicada a finalidade do teste aos alunos, que tiveram duas horas para resolução do mesmo; porém, como oito dos alunos da rede particular chegaram atrasados na sala de aula, não tiveram tempo para resolverem as questões Q3, Q9 e Q10, as quais correspondem às três últimas questões do teste de sondagem. O teste de sondagem foi elaborado com outra ordem de questões, para que uma questão não influenciasse de imediato a questão subsequente. Assim, a ordenação das questões foi Q1, Q6, Q5, Q7, Q4, Q2, Q11, Q12, Q8, Q9, Q10, Q3, para todos os testes de sondagem. Inicialmente a Q1 foi apresentada, que é uma questão de comparação, para observar como os alunos compreendem o conceito de volume, em seguida vêm as questões Q6, Q5 e Q7, para observar se os alunos sabem lidar com questões de situação de medida, que com apenas o uso da fórmula podem ser resolvidas. A Q4 é para observar se os alunos reconhecem os sólidos representados e se sabem identificar as estruturas necessárias para o cálculo de volume além da sua fórmula e posteriormente, questões que necessitam além do uso da fórmula de volume, de conversão de unidades; ou que podem ser resolvidas sem o uso da fórmula de volume. Tentando assim observar outras estratégias e propriedades empregadas.

O teste de sondagem foi aplicado em sala de aula, individualmente, sem consulta de material de apoio, apenas com a autora do trabalho para tirar alguma dúvida sobre o enunciado.

Foram selecionados para as entrevistas, 10 alunos dos que deixaram respostas incompletas, ou que apresentaram dificuldades diante de situações que exigiam do aluno a

articulação e distinção entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas, que não apresentaram justificativas nas respostas, de modo que a entrevista pudesse nos ajudar na análise a que objetivava esta pesquisa.

Durante as entrevistas, foram analisados os seguintes aspectos:

- Que tipos de representações podem auxiliar o aluno na resolução dos problemas;
- Quais teoremas-em-ação e conceitos-em-ação estão sendo mobilizados pelos alunos diante das diversas situações que abordam volume;
- A distinção e articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas (havia respostas para cálculo de volume em que o sólido era confundido com outro, mostrando dificuldades no quadro geométrico; ou em que não havia unidade de medida que representasse o volume, ou em que a fórmula de volume era confundida com a fórmula de área ou de comprimento, sugerindo que tais alunos não compreendem o quadro das grandezas; apresentando dificuldades no quadro numérico ao ter dificuldades no cálculo do volume).

Como as entrevistas foram realizadas? Inicialmente foram expostos os protocolos aos alunos selecionados para a entrevista, e pedia a eles que explicassem o modo como resolveram cada questão, uma a uma, esclarecendo as respostas dadas por eles no teste escrito, confirmando ou não a interpretação para a resolução deles. Para ajudar-lhes na explicação, era colocado a sua disposição material concreto, para observar se tal procedimento auxiliava tal aluno para chegar ou não à resolução correta da questão. Desta forma, tornaria possível a observação dos aspectos acima citados.

3.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DAS QUESTÕES

Diante das situações listadas nos trabalhos de Barros (2002), Oliveira (2002) e Anwandter-Cuellar (2008), selecionamos dentre questões de vestibulares, do Enem e de alguns trabalhos já citados, as questões que foram analisadas para a construção do teste de sondagem, instrumento de coleta de dados desta pesquisa e consideramos para este estudo a

classificação dos problemas em: problemas de comparação, de medida e de produção. Nota-se que situações de medida foram um número maior de atividades, pois necessitávamos de uma variedade de situações para verificar: se os alunos identificam corretamente a fórmula de volume dos diferentes sólidos geométricos, se reconhecem o sólido geométrico que a figura está, se mesmo desconhecendo a fórmula de volume, conseguem aplicá-la em situações em que a fórmula era dada e se sabem realizar a transformação de unidades (Q9 e Q10). Assim, observe no quadro a seguir, o agrupamento das questões de acordo com a classificação dos problemas a serem trabalhados:

	Comparação	Medida	Produção
Q1	X		
Q2	X		
Q3	X		
Q4		X	
Q5		X	
Q6		X	
Q7		X	
Q8		X	
Q9		X	
Q10		X	
Q11			X
Q12			X

Quadro 1- Análise quantitativa de questões por situação

PARTE 1- Situações de comparação

Há diferentes formas de se comparar volume, como por exemplo, através da contagem de cubinhos, pela decomposição e recomposição (Q2), utilizando imersão de objetos em depósito com líquido no seu interior, e verificando o nível de líquido a cada imersão para comparação (Q2), através da fórmula para calcular volume (Q3), pelo método visual, perceptivo (Q1).

Questão 1 Para a primeira questão, necessitamos de dois pedaços de massa de modelar de mesma quantidade de massa para serem comparados pelos alunos.

1) Você está com dois pedaços iguais de massa de modelar, forme com um deles uma esfera e com outro uma pizza e marque a alternativa correta:

- a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume.
- b) A esfera tem volume maior que a pizza.
- c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta:

Análise a priori:

Esta questão foi inspirada a partir de uma questão do trabalho de Oliveira (2002).

FICHA DO ALUNO
TAREFA 1

Você recebeu dois pedaços iguais de massa de modelar. Escolha um deles e amasse à vontade.

1 – Os dois pedaços de massa continuam com o mesmo volume?

☐ Não. Porque:

☐ Sim. Porque:

2 – Marque com um X a opção mais conveniente e justifique a sua resposta.

☐ O pedaço amassado tem volume maior do que o outro pedaço

☐ O pedaço amassado tem volume menor do que o outro pedaço

☐ Os dois pedaços têm o mesmo volume.

Figura 5-Ficha do aluno-Fonte - Oliveira (2002, p. 68).

Modificamos a forma dos dois objetos, pois no caso da pesquisa de Oliveira (2002), eram entrevistas e que havia, desde o início material a ser manipulado à disposição do aluno, enquanto que neste estudo, a situação é evocada pelo texto. O material a ser manipulado só foi colocado à disposição do aluno, durante a entrevista.

Esta questão trata da distinção entre o sólido geométrico e seu volume, em que o aluno deve imaginar a deformação de dois sólidos idênticos e a transformação de um sólido em uma pizza e do outro em uma esfera, pois durante o teste não era possível a manipulação

do material, que no caso era a massa de modelar; para resolver a questão, o aluno deve considerar o argumento de conservação de volume, dando indícios de domínio no quadro das grandezas.

A resposta certa é a letra a, os dois objetos formados têm o mesmo volume. Os alunos devem mobilizar o teorema-em-ação correto: “Sólidos de mesma massa e mesma densidade têm mesmo volume”, ao observar que houve invariância da massa e da densidade.

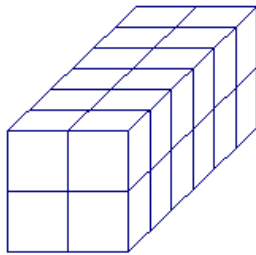
Por ser uma situação de comparação entre dois objetos, o aluno pode dispor de estratégias como: visual-perceptiva, durante o teste de sondagem e comparação de massas e imersão, durante a entrevista, pois foram colocados a seu dispor materiais para a imersão e massa de modelar apenas durante a entrevista.

Se os alunos não desenvolveram ainda o princípio de conservação de volume, podem mobilizar o teorema-em-ação errôneo do ponto de vista matemático: “O volume de um sólido se altera na mesma proporção que seus comprimentos”, podendo justificar como resposta certa a letra b desta forma: “a esfera tem volume maior por ter maior altura”; ou a letra c como correta assim: “a pizza tem volume maior por ter maior raio”. Como foi observado no trabalho de Oliveira (2002), houve teoremas-em-ação errôneos do tipo: “tem volume maior porque é mais comprido”, “o corpo que tem maior peso, tem maior volume”, “se altera a figura, altera a medida, então o volume é modificado”.

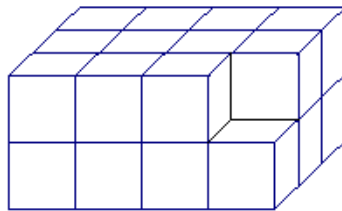
A ausência de outras representações simbólicas, como material concreto para ser manipulado, durante o teste de sondagem e a sua presença durante a entrevista, foi para observar a relevância da representação para compreensão da situação de comparação, caso algum sujeito responda uma letra durante o teste e adquira outra opinião durante a entrevista, diante dos materiais a serem manipulados. Ou seja, se caso o aluno tenha respondido a letra b como resposta e tenha justificado que a esfera tem volume maior que a pizza pois a esfera é maior. Diante do material concreto, pode utilizar a estratégia de imersão, para observar que o nível de água é o mesmo e assim responder a letra a, considerando agora que os volumes são iguais, independente da forma. Porém, o contrário poderá acontecer, por um procedimento mal executado, deixando cair um pouco d’água do recipiente plástico, não observar que o nível d’água é o mesmo ao imergir os dois objetos, um a um, e assim responder a letra b ou c, de acordo com o nível mais alto d’água observado.

Questão 2

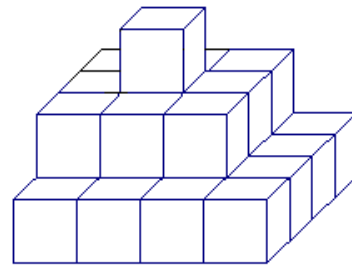
2) Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, há um cubo sob outro, até que fique visível o cubo do topo, e desta forma não há cubo suspenso e nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e marque a alternativa correta:



SÓLIDO A



SÓLIDO B



SÓLIDO C

- a) $V_a = V_b = V_c$
- b) $V_a < V_b < V_c$
- c) $V_a > V_b > V_c$
- d) $V_a = V_b > V_c$
- e) OUTROS

Justifique sua resposta:

Análise a priori:

Esta questão foi elaborada a partir da observação de duas questões, uma presente no trabalho de Barros (2002) e a outra no trabalho de Anwandter-Cuellar (2008); porém, foram modificadas na forma dos sólidos. Acrescentamos reentrâncias no sólido B e mudamos a posição do cubinho do nível mais superior do sólido C. Ao invés de estar no canto esquerdo, colocamos no centro, dificultando o cálculo de volume e assim pudemos identificar um número mais diversificado de estratégias de medida. A questão foi escolhida para verificar se os alunos sabem comparar volumes entre sólidos de diferentes formas. Modificamos as alternativas e acrescentamos a alternativa “outros” para que encontremos outras estratégias desenvolvidas pelos alunos que não foram contempladas na análise a priori. Porém, para que os alunos considerem a alternativa “outros” como uma real alternativa, foi dada como

resposta nesta questão, que é a primeira questão do teste de sondagem que apresenta alternativas, pois as questões anteriores não havia alternativas como resposta. Ao acrescentar uma alternativa em aberto (outros) pode tornar as alternativas anteriores como não sendo a resposta correta da questão, correspondendo a um valor obtido pelo aluno diferentemente das alternativas anteriores, não dando ao aluno a garantia de que se ele encontrar algum algoritmo que leve a alguma das alternativas, a partir delas, possa estar correta.

A questão trata da comparação entre os volumes de três blocos que estão representados em perspectiva cavaleira, ao contar os cubinhos de cada sólido, concluímos que: $V_a = 24$ cubinhos, $V_b = 23$ cubinhos, $V_c = 26$ cubinhos, e como cada cubinho tem volume igual a 1cm^3 , podemos escrever $V_a = 24\text{cm}^3$, $V_b = 23\text{cm}^3$ e $V_c = 26\text{cm}^3$. Então colocamos em ordem crescente de volume, os blocos B, A e C, nesta sequência, que não está representada em nenhuma das alternativas, logo, a resposta é a letra e. A formação dos blocos por cubinhos fornece ao aluno um instrumento de medida (cubinhos) para resolução da questão, o que torna o aluno capaz de realizar o procedimento de contagem de acordo com algumas das competências a serem adquiridas pelo aluno do ensino médio descrita nos PCN+ (BRASIL, 2002):

...Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica (BRASIL, 2002, p. 116).

Por dizer no enunciado da questão que os cubinhos têm 1 cm de aresta, fornece ao aluno duas possibilidades para a unidade de medida de volume dos sólidos apresentados: cubinhos ou o centímetro cúbico.

Como estratégias que podem ser utilizadas pelos alunos, podemos citar a decomposição-recomposição, medida e comparação das medidas. Na decomposição-recomposição, o aluno irá decompor o sólido em cubinhos e montar (compor) um outro sólido parecido com eles, para serem comparados. Por exemplo, posso tentar transformar o sólido C, no sólido A, com quatro fileiras de seis cubinhos dispostas duas a duas, uma em cima da outra, e verificamos que irão restar dois cubinhos do sólido C. Logo, concluímos que se o sólido C tem mais cubinhos que o sólido A, então tem maior volume. O mesmo faria com o

sólido B e observaria que ficou faltando um cubinho para montar o sólido A. Assim, teríamos a solução da questão, $V_c > V_a > V_b$.

A presença de reentrâncias nos blocos B e C, deixando de ser bloco retangular como o bloco A, pode dificultar a contagem dos blocos, levando o aluno ao erro. Caso mude as posições dos cubos por visualização, tentando transformar o sólido C, por exemplo, em um dos sólidos restantes, pode errar considerando os sólidos iguais. Desta forma, pode considerar também o mesmo volume para todos os sólidos, respondendo assim a letra a.

O aluno pode errar nos cálculos de contagem (adição e multiplicação), desconsiderar o cubinho do canto em uma das arestas, segundo Barros (2002) e Vergnaud apud Oliveira (2007) observaram, respondendo assim a letra b, contar apenas os cubinhos visíveis, desta forma responderia a letra c, ou duplicar o cubinho do canto, confundir volume com área de superfície, multiplicar as áreas das faces do sólido. Considerar que o sólido de maior volume é o sólido de maior altura, respondendo a letra d, já que o sólido C tem altura maior que os sólidos A e B, os quais têm mesma altura.

Questão 3- Variação quantitativa.

3) Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

- A) 20%
- B) 0,8%
- C) 60%
- D) 72,8%
- E) OUTROS.

Justifique sua resposta:

Análise a priori:

Esta questão foi retirada de um exame de vestibular ADVISE 2009 e alteramos as alternativas para observarmos erros quanto aos cálculos numéricos, acrescentando a alternativa “outros”, para dar possibilidades de resposta variadas. O objetivo de escolha desta questão foi observar se os alunos compreendem a concepção do volume relacionada com a sua tridimensionalidade em referência com o comprimento de suas arestas. A estratégia utilizada é a fórmula de volume.

De acordo com Barros (2002) e Anwandter-Cuellar (2008) a concepção da tridimensionalidade do volume depende do desenvolvimento da habilidade algébrica de transformação de semelhança, ou seja, se a razão de semelhança é k , ao modificar o comprimento da aresta de um sólido, então o volume do sólido é multiplicado por k^3 . Assim a resposta correta é a alternativa d, pois:

Como $V = a^3$, então: se aumentamos em 20% as arestas, logo:

$V' = (1,20 a)^3 = 1,728 a^3 = 1,728 V$, isso significa que o volume final aumentou de 72,8%.

Segundo Vergnaud (1990), a grandeza volume se insere no campo conceitual das estruturas multiplicativas e para a sua compreensão faz-se necessário a passagem de uma concepção aditiva da grandeza volume (como na contagem de cubinhos para calcular o volume) para a concepção multiplicativa que, segundo o autor supracitado, é um processo lento e difícil do desenvolvimento cognitivo do sujeito. Desta forma, podemos esperar que os alunos ainda adotem a concepção linear de volume, mobilizando o teorema-em-ação errôneo de que o volume de um sólido se altera na mesma proporção que seus comprimentos, ou seja, se a aresta aumentar de 20%, então o volume também aumenta de 20%, respondendo a alternativa a.

Entretanto, poderá também responder a alternativa c, que ao invés de elevar à terceira potência, desenvolve o princípio aditivo, somando o aumento das três arestas para encontrar o aumento do volume.

Poderá também errar no cálculo numérico e responder a letra b, elevando de maneira incorreta o aumento da aresta, que ao invés de ser $(1,2 a)^3$, eleva $(0,2 a)$, achando o valor de $0,008 a^3$, que para ele corresponde a 0,8%.

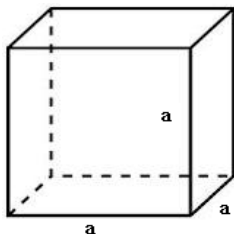
PARTE 2-Situações de Medida

Situações de medida de volume permitem a articulação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas. Ao calcular o volume de um sólido, o aluno passa do quadro geométrico para o numérico, e ao reconhecer a medida como sendo da grandeza volume, passa para o quadro das grandezas.

Questão 4

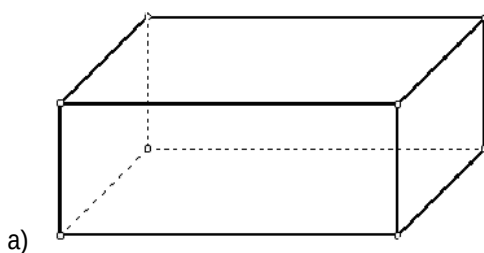
4) Identifique os sólidos abaixo, escrevendo seu nome, indique sobre a figura os comprimentos necessários e escreva a fórmula para calcular o volume de cada sólido (use as letras correspondentes na figura e na fórmula, como no exemplo abaixo).

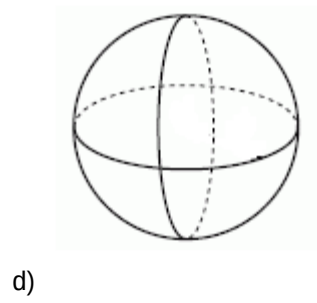
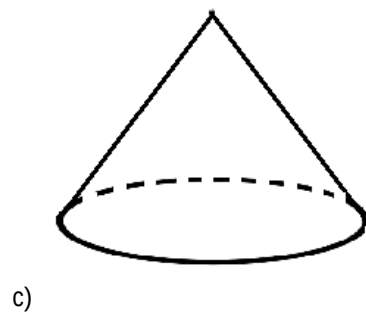
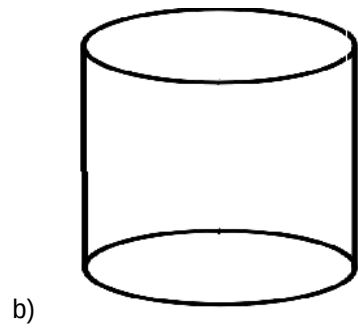
Exemplo:



Nome: cubo

Fórmula do volume: $v=a^3$

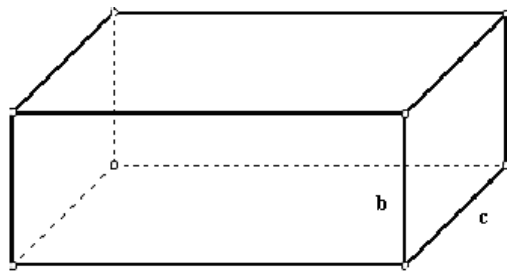




Análise a priori:

A questão foi de nossa autoria, para verificar se o aluno conhece os sólidos geométricos presentes, bem como a fórmula de seus respectivos volumes. Não abordamos nesta questão o aspecto numérico, pois não há necessidade de calcular o volume dos sólidos dados, já que o objetivo foi observar os aspectos referentes ao campo geométrico e das grandezas.

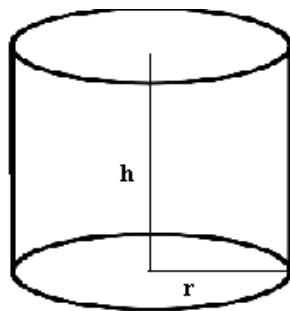
O aluno, ao reconhecer o sólido que está sendo representado em cada letra, identificar os elementos necessários para o cálculo de volume dos sólidos geométricos e escrever a fórmula do seu volume corretamente, estará articulando os quadros geométrico e das grandezas. Portanto, na letra a a resposta certa seria:



a)

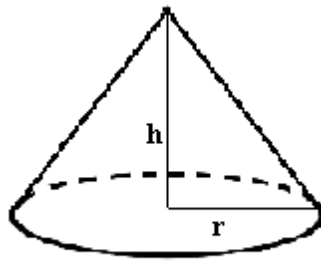
Nome: paralelepípedo

Fórmula de volume: $V = a.b.c$



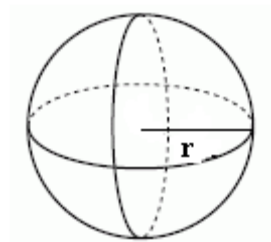
b) Nome: cilindro

Fórmula de volume: $V = \pi r^2 . h$



c) Nome: cone

Fórmula de volume: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$



d) Nome: esfera

Fórmula de volume: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$

Porém, se o aluno não reconhece os sólidos geométricos, é porque ele desconhece o quadro geométrico, e se não escreve corretamente a fórmula do volume para cada sólido é porque tem dificuldades no campo das grandezas. Assim, poderá acertar o nome do sólido, mas dar uma resposta errada para a fórmula de volume, como por exemplo, colocar para o paralelepípedo, a fórmula de volume como sendo:

$$V = a + b + c$$

Ou para o cilindro, a fórmula:

$$V = h \times r$$

Para o cone:

$$V = h \cdot r / 3$$

Para a esfera:

$$V = \frac{3}{4} \pi \cdot r \text{ ou } V = \frac{3}{4} \pi \cdot r^2 .$$

Pode ainda confundir a área da circunferência com o seu perímetro, e assim escrever para a fórmula do cilindro: $V = 2 \pi \cdot r \cdot h$ e para a fórmula do volume do cone: $V = \frac{1}{3} \cdot 2 \pi \cdot r \cdot h$. Mostrando assim dificuldades no campo das grandezas, ao confundir fórmulas de grandezas distintas (comprimento e área).

Questão 5

5) A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dada a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h . \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

Análise a priori:

Questão de autoria própria para observar se o aluno sabe interpretar a fórmula de volume para o cálculo do mesmo e se o aluno identifica a unidade de medida do volume obtido. Diferentemente da questão anterior, em que o aspecto geométrico era evidente, aqui apenas o aspecto numérico é observado, pois, embora seja uma questão sobre volume, trata-se essencialmente de lidar com a noção de variável e de cálculo numérico, com a mera aplicação da fórmula, que está explicitada. A ausência da figura, leva a um enfraquecimento do papel do quadro geométrico, embora ele não esteja totalmente ausente, pois o aluno precisa inferir que o cálculo da área da base quadrada da pirâmide se faz pelo quadrado do comprimento da base, reconhecendo a área de um quadrado.

A natureza dos números é fácil de se trabalhar (números naturais) e há homogeneidade da unidade (há apenas o centímetro como unidade de medida de comprimento). Formulamos a questão mostrando a fórmula de volume do sólido, para observar se os alunos sabem utilizá-la corretamente.

Porém, para resolução desta questão, fica evidente a independência da representação simbólica do sólido geométrico, pois se trata exclusivamente da interpretação da fórmula de volume e do uso correto das unidades de medida.

A estratégia favorecida pelos alunos para resolução desta questão é o emprego da fórmula de volume da pirâmide. Se o aluno consegue empregar corretamente a fórmula dada, chegará ao resultado de 50cm^3 , correspondendo ao volume da pirâmide em questão. Porém, se desconhece a fórmula da área da base da pirâmide, poderá considerar apenas o lado e a altura, ficando desta forma: $V = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 6 = 10$. Poderá também apenas multiplicar os valores dados, 5 e 6, sem utilizar a fórmula, e achar o resultado 30.

Entretanto, como estamos tratando volume como grandeza, não basta saber empregar a fórmula do volume da pirâmide, tem que indicar corretamente a unidade de medida, que neste caso é o cm^3 . Assim, pode haver respostas sem a unidade de medida, ou com unidade de medida de área (cm^2), ou de comprimento (cm), indicando que não há passagem do quadro numérico para o quadro das grandezas.

O aluno pode ter dificuldade em visualizar uma pirâmide, o que mostra dificuldades em relação ao quadro geométrico. Desta forma, o aluno também não compreenderá volume como uma grandeza geométrica.

Questão 6

6) Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?

Justifique sua resposta:

Análise a priori:

Trata-se de uma questão elaborada para este trabalho, sem presença da figura, de fórmula fácil de ser reconhecida, apresentando uniformidade das unidades de medida e utilizando medidas inteiras, não trazendo muitas dificuldades no campo numérico, apenas para observar se o aluno conhece a fórmula de volume do paralelepípedo retângulo, se sabe empregá-la e a unidade de medida correspondente ao volume obtido. A estratégia a ser empregada é a fórmula de volume do paralelepípedo.

Se o aluno conhece a fórmula do volume do paralelepípedo retângulo e sabe empregá-la corretamente, bem como indicando a unidade de medida relativa ao volume, realizará o produto $8\text{ m} \times 4\text{ m} \times 2\text{ m}$, chegando a resposta de 64 m^3 , acertando assim a questão. O que mostra que o aluno compreende a passagem entre os quadros propostos por Douady e Perrin-Glorian (1989).

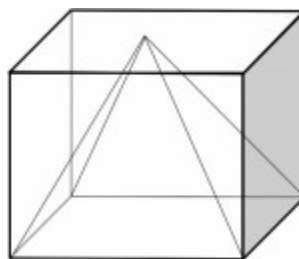
Porém, caso não conheça a fórmula do volume, poderá utilizar o princípio aditivo, e ao invés de multiplicar as medidas dadas, irá somar $(2 + 8 + 4)$, chegando ao resultado 14.

Pode haver respostas sem a unidade de medida, ou com unidade de medida de área (m^2), ou de comprimento (m), indicando que não há passagem do quadro numérico para o quadro das grandezas.

O aluno pode ter dificuldade em visualizar um paralelepípedo retângulo, o que mostra dificuldades em relação ao quadro geométrico. Desta forma, o aluno também não compreenderá volume como uma grandeza geométrica.

Questão 7

7) Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo aproximadamente 230 metros. Logo, o volume da pirâmide de Quéops é de aproximadamente (em milhões de metros cúbicos):



A. 200

B. 2,5

C. 370

D. 7,5

E. OUTROS

Análise a priori:

Esta questão foi retirada do exame de vestibular, com o objetivo de observar se o aluno compreende a fórmula de volume da pirâmide, da maneira representada (textualmente), e o papel da representação da figura geométrica para resolução da questão. Alteramos algumas alternativas da questão original, para observar os erros quanto ao campo numérico, citados posteriormente nesta análise.

Trata-se de uma situação de medida, em que a fórmula está descrita no enunciado, a partir de uma relação, mostra a representação do sólido inserido em outro sólido, o que pode levar a compreensão melhor da relação dada, e na identificação dos sólidos em questão, o que representa simbolicamente a pirâmide e o prisma. Há homogeneidade nas unidades de medida, porém a natureza dos números pode dificultar a resolução, por terem ordem de grandeza elevada. Como estratégia, o aluno dispõe da fórmula do volume da pirâmide ou da relação existente entre a fórmula do volume da pirâmide com a fórmula de volume do prisma, dada no enunciado.

O aluno que perceber a relação entre os volumes dados, e souber a fórmula de volume do prisma, calculando corretamente o produto da área da sua base quadrangular com a altura, irá encontrar o valor de 2,5 milhões de metros cúbicos, para o volume da pirâmide, aproximadamente, realizando o cálculo algébrico:

$$\text{Volume da pirâmide} = 1/3 \text{ volume do prisma}$$

$$V = 1/3 (\text{Área da base quadrangular} \times \text{altura})$$

$$V = 1/3 (230^2 \times 140)$$

$$V = 2\,468\,666,667 \text{ m}^3 \approx 2,5 \cdot 10^6 \text{ m}^3.$$

Se souber diretamente a fórmula de volume da pirâmide: $V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$. (onde: S_b é a área da base e h é a altura), também conseguirá o resultado supracitado, respondendo assim a alternativa correta, letra b.

Ao invés de multiplicar as grandezas em jogo, o aluno pode usar o princípio aditivo, e, somando as medidas desta forma: $230+230+140$, irá encontrar 600, em unidades de milhões de metros cúbicos, para o volume do prisma e consequentemente dividir por 3 para achar o volume da pirâmide de forma errada, neste caso o resultado seria 200 milhões de metros cúbicos, respondendo assim a letra a.

Usando também o princípio aditivo, pode encontrar os valores 370 milhões de metros cúbicos (caso só considere um dos lados da base quadrangular e a altura da pirâmide), somaria então $230+140$, respondendo assim a letra c.

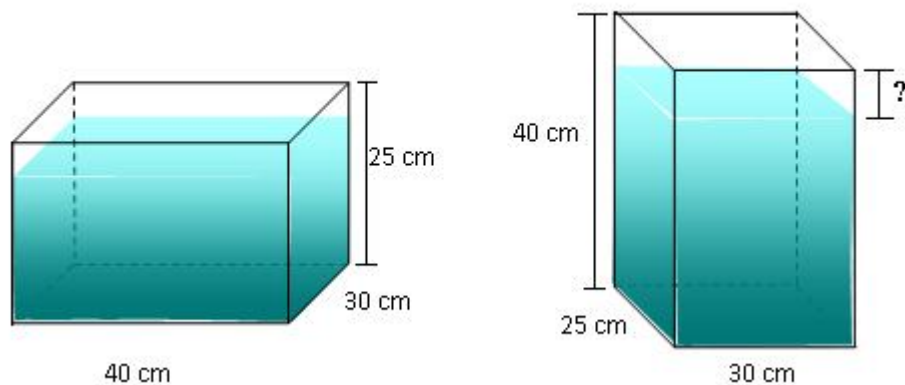
Porém, pode calcular o volume do prisma ($V = 230^2 \times 140$) e considerar o volume da pirâmide igual ao do prisma, como sendo 7,5 milhões de metros cúbicos, respondendo a letra d, sem entender a relação dada no enunciado, apresentando assim dificuldades no campo algébrico.

Caso considere os 600 milhões de metros cúbicos como sendo o volume da pirâmide, responderá a letra e.

Alguns alunos poderão ter dificuldades em compreender que a altura do prisma e sua base são as mesmas da pirâmide, como mostra o desenho, porém isso pode não ficar evidente para eles na representação do desenho, sendo o desenho uma representação que pode dificultar ao invés de auxiliar na resolução do problema.

Questão 8- Cálculo de comprimento.

8) Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



- A) 5cm.
- B) 32cm.
- C) 8cm.
- D) 24000cm^3 .
- E) Outros.

Justifique sua resposta:

Análise a priori:

Esta questão foi retirada do Laboratório de Educação Matemática de Universidade Federal de Pernambuco, LEMAT-UFPE (2011) para observar se os alunos compreendem o princípio de conservação do volume. Consiste numa situação de medida, em que o aluno deve compreender que é possível alterar medidas como comprimento das arestas, a área de uma superfície e manter constante o volume.

Não houve alteração do enunciado nem no desenho, porém na versão original, não havia alternativas. As alternativas foram acrescentadas propositalmente, para expressar erros possíveis previstos na análise a priori.

O aluno que perceber que o volume ocupado pelo líquido se conserva da mesma forma que o volume que falta para preencher toda a caixa, pode chegar à resposta correta, que seria 8cm, alternativa c. Nesse caso, o aluno estaria mobilizando o princípio da conservação de volume e desenvolvendo os seguintes cálculos algébricos:

$$\text{Volume da caixa 1 (C1)} = \text{volume da caixa 2 (C2)}$$

$$\text{Comprimento C1} \times \text{largura C1} \times \text{altura C1} = \text{Comprimento C2} \times \text{largura C2} \times \text{altura C2}$$

$$40 \times 30 \times 20 = 30 \times 25 \times h$$

Então, $h=32\text{cm}$. Logo, a medida do nível da água até a superfície superior da caixa será: $40\text{cm}-32\text{cm}=8\text{cm}$.

Outra forma seria considerar o volume de líquido que falta para preencher a caixa até o máximo constante, logo:

$$\text{Volume da caixa 1 a preencher (C'1)} = \text{volume da caixa 2 a preencher (C'2)}$$

$$\text{Comprimento C'1} \times \text{largura C'1} \times \text{altura C'1} = \text{Comprimento C'2} \times \text{largura C'2} \times \text{altura C'2}$$

$$40 \times 30 \times 5 = 30 \times 25 \times h'$$

$$h' = 8 \text{ cm.}$$

Tal atividade permite a dissociação entre o quadro geométrico (caixa de vidro é uma representação de um sólido geométrico) e o quadro das grandezas (volume).

Entre as concepções errôneas que poderiam ocorrer, podemos citar a falsa relação entre a conservação do volume com a conservação da altura do nível da água à superfície superior da caixa de vidro, mantendo o valor de 5cm, o que mostra que a representação do desenho não fica evidente para o aluno que as dimensões se alteram ao mudarem de posição (a altura, a largura e o comprimento da caixa mudam de valor numérico), respondendo assim a alternativa a.

Pode considerar a letra b correta, caso não tenha interpretado corretamente o enunciado da questão, achando que a medida pedida seria a altura correspondente ao nível de água da primeira situação, na qual a caixa está deitada.

Considerar como resposta certa a alternativa d, como sendo o volume da caixa na situação inicial, neste caso desenvolveria o cálculo algébrico seguinte:

$V = 40\text{cm} \times 30\text{cm} \times 20\text{cm} = 24\,000\text{cm}^3$. O que não estaria errado se a questão estivesse pedindo para calcular o volume, onde estaria articulando o quadro numérico com o das grandezas.

Tais respostas indicariam que os alunos não mobilizam o princípio de conservação de volume, não dissociam a grandeza volume da grandeza comprimento e não sabem identificar unidades básicas de medida de volume, que seriam capacidades do aluno adquiridas no ensino médio, de acordo com os PCN+(BRASIL, 2002).

Questão 9

9) Sabendo que 1L corresponde a 1 dm^3 , transforme:

- a) 2 m^3 em litros;
- b) 10 dl em dm^3 ;
- c) $0,001\text{ dm}^3$ em ml;
- d) 1 cm^3 em ml;
- e) 0,01 dl em cm^3 .

Justifique sua resposta:

Análise a priori:

Questão elaborada para este trabalho para observar se o aluno sabe transformar e/ou converter as unidades de medida de volume e capacidade.

Na letra a, a resposta correta é 2000 litros, o aluno deverá converter primeiro o m^3 em dm^3 , que dará 2 000 dm^3 , e assim usar a relação dita no enunciado, converter 2 000 dm^3 , em litros, como 1 litro corresponde a 1 dm^3 , como dito no enunciado, ou seja, 2 000 dm^3 corresponde a 2 000 litros. Na letra b, a resposta correta é 1 dm^3 ; ou seja, para converter 10 dl em dm^3 , temos que primeiramente converter 10 dl em litros, que dá 1 litro. Assim, observando a relação, 1 litro corresponde a 1 dm^3 . Na letra c, iremos converter 0,001 dm^3 em ml; primeiro convertamos 0,001 dm^3 em litros, vai dar 0,001 litros, pela relação. Agora convertamos 0,001 litros em ml, que dará 1ml como resposta. Na letra d, a conversão será de 1 cm^3 em ml. Converteremos 1 cm^3 em dm^3 , dará 0,001 dm^3 , agora converteremos 0,001 dm^3 em litros, dará 0,001 litros, e então 0,001 litros em ml, dará 1ml. Assim a resposta será 1ml. Logo observamos outra relação que surgiu desta conversão de unidades, 1 cm^3 corresponde a 1 ml; que pode ser utilizada em algumas respostas, diretamente, sem realização dos cálculos acima. Na letra e, a resposta certa é 1 cm^3 . Para converter 0,01 dl em cm^3 , primeiramente temos que converter 0,01 dl em litros, dará 0,001 litros. Agora, usando a relação, teremos que 0,001 litros corresponde a 0,001 dm^3 . E assim convertendo 0,001 dm^3 em cm^3 , dará 1 cm^3 .

Nesta questão, se o aluno não compreende a mudança de unidades e suas conversões, não conseguirá responder corretamente, trocando assim o metro por litro, fazendo transformações utilizando potências de base 10, de base 10^2 ao invés de 10^3 , quando trata-se da grandeza volume.

Outra dificuldade que poderá surgir no desenvolvimento da questão, é a respeito de operações com números racionais.

Questão 10

10) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8 m de comprimento, 5 m de largura e 120 cm de profundidade. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários:

A) 48 000 litros.

B) 48 litros.

C) 133 m^3 .

D) $14,2 \text{ m}^3$.

E) OUTROS.

Justifique sua resposta:

Análise a priori:

Esta questão é uma adaptação da questão retirada de um exame de vestibular da Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, no ano de 2008. No enunciado original, havia uma relação entre tempo e volume, a qual foi eliminada, pois fugia dos nossos objetivos. As alternativas foram alteradas e foi acrescentada a possibilidade “outros”, para observar outras estratégias errôneas de cálculo ou de transformação de unidades mobilizadas pelos alunos. Porém, selecionamos para este estudo tal questão com o intuito de observar se o aluno compreende volume como grandeza e sua relação com a unidade de medida, já que não havia homogeneidade das unidades de medida.

Trata-se de uma questão em que a fórmula é a estratégia a ser empregada, entretanto não está explicitada no enunciado, não há representação simbólica da fórmula nem do sólido paralelepípedo e há heterogeneidade das unidades de medida de comprimento. Esses fatores fazem com que o nível de dificuldade dessa questão seja mais elevado que o das questões anteriores de medida.

Para resolução desta questão, o aluno deve conhecer a fórmula de volume de um paralelepípedo retângulo, saber empregá-la, após realizar a transformação das unidades de medida. Portanto, o aluno passa do quadro numérico para o quadro das grandezas, proposto por Lima e Bellemain (2002), de acordo com Douady e Perrin-Glorian (1989).

Assim, os alunos podem desenvolver o cálculo numérico e análise dimensional:

$$V = 8\text{m} \times 5\text{m} \times 1,2\text{m} = 48\text{m}^3 = 48\,000\text{dm}^3 = 48\,000 \text{ litros.}$$

Assim a alternativa certa é a letra a.

O aluno pode acertar o cálculo numérico, pois conhece a fórmula de volume do paralelepípedo retângulo, mas não compreendendo a conversão de unidades de medida de

volume, poderá considerar correta a alternativa b, não articulando os quadros numérico com o das grandezas. Fato este que reflete um entrave relativo à capacidade do aluno de :

... -identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como litros em metros cúbicos, dentre outros exemplos...”, citado como uma das competências adquiridas pelo aluno no ensino médio para a grandeza volume, de acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 114).

Pode utilizar erroneamente o princípio aditivo para o cálculo do volume, e responder as alternativas c, caso some todas as medidas dadas sem realizar a conversão, ou seja, $8+5+120$.

Ou ainda utilizando o princípio aditivo, pode somar as medidas após converter 120 cm para 1,2m, desta forma: $8+5+1,2$, respondendo a letra d.

Outros valores errados podem ser encontrados, caso o aluno não consiga converter corretamente a unidade de comprimento e assim responda como alternativa a letra e.

Outra dificuldade em que pode levar o aluno a não encontrar uma resposta correta é a ausência de desenho representando o paralelepípedo retângulo e suas dimensões.

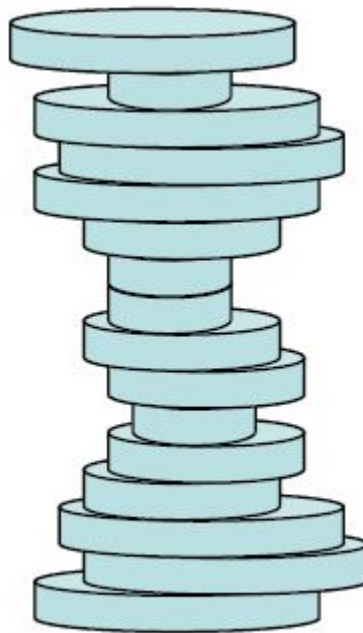
PARTE 4-Situações de Produção

Nas situações de produção há a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas, e deste para o geométrico, pois o aluno após conhecer a classe de equivalência para a grandeza volume do objeto dado, poderá construir um novo objeto, retornando assim ao quadro geométrico. Nessa passagem, o quadro numérico também pode intervir, sobretudo, em situações em que se pedem sólidos com volume menor ou maior que um volume dado.

As estratégias para a produção de um sólido a partir de seu volume podem ser por composição, decomposição-recomposição e utilizando o Princípio de Cavalieri.

Questão 11

11) O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de 2cm^3 , 4cm^3 e 8cm^3 respectivamente. Construa sólidos com $1/3$ do volume deste empilhamento. Saiba que os cilindros têm a mesma altura mas apresentam variação de raios.

**Análise a priori:**

Esta questão foi retirada do trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), pois trata-se de uma situação de produção que permite observar se o aluno mobiliza a ideia de independência do volume em relação ao objeto.

Nesta questão, para o aluno alcançar o seu objetivo, deve construir sólidos diferentemente do sólido exposto, com $1/3$ do volume. Deverá usar como estratégia a medida a partir da contagem dos volumes dos cilindros.

O aluno observa que há, de acordo com o desenho, 7 cilindros de 8 cm^3 , 5 cilindros de 4 cm^3 e 4 cilindros de 2 cm^3 , totalizando 84 cm^3 de volume. Pode observar também que existe equivalência entre os cilindros, ou seja:

1 cilindro de 8 cm^3 corresponde a 4 cilindros de 2 cm^3 .

2 cilindros de 4 cm^3 correspondem a 4 cilindros de 2 cm^3 .

Então, dividindo por 3 o volume da figura, teremos 28 cm^3 .

Portanto, para a construção do sólido pedido, de volume igual a 28 cm^3 , necessitamos de:

2 cilindros de 8 cm^3 , 1 cilindro de 4 cm^3 e 4 cilindros de 2 cm^3 .

Mas também podemos utilizar outros cilindros com volumes equivalentes para a construção do sólido. As combinações possíveis serão:

-3 cilindros de 8 cm^3 e 1 cilindro de 4 cm^3 ;

-ou 3 cilindros de 8 cm^3 e 2 cilindros de 2 cm^3 ;

-ou 2 cilindros de 8 cm^3 , 2 cilindros de 4 cm^3 e 2 cilindros de 2 cm^3 ;

-ou 2 cilindros de 8 cm^3 e 3 cilindros de 4 cm^3 ;

-ou 1 cilindro de 8 cm^3 , 4 cilindros de 4 cm^3 e 2 cilindros de 2 cm^3 ;

-ou 1 cilindro de 8 cm^3 e 3 cilindros de 4 cm^3 e 4 cilindros de 2 cm^3 ;

-ou 1 cilindro de 8 cm^3 e 5 cilindros de 4 cm^3 ;

-ou 5 cilindros de 4 cm^3 e 4 cilindros de 2 cm^3 .

Nesta questão o aluno pode utilizar outro instrumento de medida que são os cilindros, para sua resolução e pode também construir outros sólidos diferentes dos cilindros dados, porém com seu volume correspondendo à terça parte do volume do sólido desenhado, o que mostra a independência do volume com a forma do sólido, considerando o volume como uma

grandeza autônoma, o que concorda com algumas das competências almejadas nos PCN+ para o ensino médio:

...-reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura;

...-identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica.

...-escolher melhor unidade para representar uma grandeza (BRASIL, 2002, p. 116).

No trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), foi observado que a maioria do total de 89 alunos, 72%, calcularam o volume total e dividiram por 3, 17% não construíram o sólido, 28% construíram cilindros e outros 28% construíram paralelepípedos retângulos. Diante desses resultados, a autora pôde concluir que as concepções presentes nesta questão foram a de volume número, volume medida e volume grandeza, mostrando predominar o aspecto numérico na resolução da questão.

Alguns erros podem ser previstos para esta questão. Um primeiro é a contagem incorreta do volume do sólido a ser construído; o segundo é construir 3 sólidos com a mesma quantidade de cilindros de mesmo volume presentes na questão, e considerar o volume final do sólido construído como sendo apenas a soma dos volumes dos cilindros que participaram da construção de cada sólido, desconsiderando os cilindros que restaram da distribuição, ou seja, como há 7 cilindros de 8 cm^3 , 5 cilindros de 4 cm^3 e 4 cilindros de 2 cm^3 , para a construção de cada um dos 3 sólidos idênticos, utilizaremos: 2 cilindros de 8 cm^3 , 1 cilindro de 4 cm^3 e 1 cilindro de 2 cm^3 ; restando assim:

1 cilindro de 8 cm^3 , 2 cilindros de 4 cm^3 e 1 cilindro de 2 cm^3 .

Como o aluno não compreende a independência da grandeza volume com a figura geométrica, não saberá o que fazer com os cilindros restantes e poderá ignorá-los, respondendo como sólido resultante o sólido acima formado, ou seja, o sólido contendo 2

cilindros de 8 cm^3 , 1 cilindro de 4 cm^3 e 1 cilindro de 2 cm^3 . Esta forma de lidar com a divisão de números naturais refere-se à discretização da grandeza.

Questão 12

Esta questão foi retirada do trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), e só foi alterada devido à tradução, para trocar o personagem de Luc para João.

12) João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos.

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha?

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

Análise a priori:

Esta questão também foi retirada do trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), pois apresenta como objetivos a que buscamos: na letra a, observar se o aluno compreende a invariância do volume por decomposição e recomposição; na letra b, observar se o aluno compreende a invariância do volume por isometria; e na letra c, observar se o aluno compreende área e volume como grandezas distintas.

Para resolver o número de paralelepípedos retângulos que João poderá formar com 36 cubinhos, poderemos utilizar o método de tentativa-e-erro, ou decompor o número 36, levando em consideração o teorema-em-ação “o volume é o número de cubinhos necessários para preencher o sólido”, conforme o trabalho de Anwandter-Cuellar (2008). Assim poderemos formar 8 paralelepípedos retângulos, ao decompor o número 36 no produto de 3 números naturais. Considerando a medida de volume do paralelepípedo retângulo igual a 36 e sua unidade de medida sendo o cubinho de 1cm de aresta, cada paralelepípedo retângulo

formado poderá possuir em suas 3 dimensões (comprimento x largura x altura), a quantidade descrita abaixo:

Um paralelepípedo retângulo contendo $(36 \times 1 \times 1)$ de dimensões, outro contendo $(6 \times 6 \times 1)$ de dimensões, outro com $(6 \times 2 \times 3)$ de dimensões, outro com $(18 \times 2 \times 1)$ de dimensões, outro com $(9 \times 2 \times 2)$ de dimensões, outro com $(9 \times 4 \times 1)$ de dimensões, outro com $(12 \times 3 \times 1)$ de dimensões e outro com $(3 \times 3 \times 4)$ de dimensões.

Porém o aluno pode considerar diferentes posições de um mesmo paralelepípedo retângulo, formando sólidos de mesmo volume, porém com dimensões trocadas, ou seja, um sólido de medidas $(6 \times 2 \times 3)$ de dimensões e outro de medidas $(2 \times 6 \times 3)$ como sendo diferentes. Desta forma pode errar na quantidade de paralelepípedo retângulo formados, dando um valor acima do esperado.

No trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), pôde observar que houve predomínio do aspecto geométrico para resolução da questão, em que a maioria desenhou os paralelepípedos por tentativa-e-erro, e pela decomposição multiplicativa do número 36, porém houve também respostas relacionadas ao aspecto unicamente numérico, em que o paralelepípedo era definido pelas medidas de suas dimensões, porém não houve relação entre os aspectos geométrico e numérico.

Na letra b, a resposta correta é que os paralelepípedos terão o mesmo volume, assim, o aluno mobiliza o teorema-em-ação correto do ponto de vista matemático: “Sólidos compostos por outros sólidos, organizados diferentemente têm mesmo volume”, buscando justificativas do tipo: sólidos formados pela mesma quantidade de cubos de mesma dimensões, possuem o mesmo volume.” Como a decomposição e recomposição conserva o volume, considera correto o pensamento de João de que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume. Pode utilizar como estratégia o cálculo de volume por contagem de cubinhos ou pela fórmula.

Porém, se não respondeu corretamente a letra a, desenhando paralelepípedos contendo quantidades de cubinhos, no total, diferentes, logo, não considera o mesmo volume para os paralelepípedos, pois teriam os paralelepípedos volume diferentes, por conter quantidades de cubinhos diferentes. Assim, erra a questão, não concordando com o pensamento de João. Ou, também erra a questão se considerar o volume dependente da forma e da posição dos

paralelepípedos construídos no espaço, por exemplo, o de maior altura, teria maior volume, o que mostra a dificuldade em compreender a independência de volume com a forma e a posição do sólido no espaço.

Anwandter-Cuellar (2008) verificou que 38,71% dos alunos estudados, justificaram que os paralelepípedos possuíam o mesmo volume pois eram formados por cubos de volumes iguais. Observou em 29,03% das respostas o uso de fórmulas para justificar a resposta correta e alguns apresentaram dificuldades em comparar os sólidos devido a sua posição espacial.

Na letra c, como resposta correta, o aluno deve considerar que a área se altera, ao mudar as dimensões do paralelepípedo; como estratégia, pode calcular a área total dos paralelepípedos construídos somando as áreas de cada face ou pela multiplicação de suas dimensões.

Porém, o aluno pode desenvolver o teorema-em-ação: “sólidos de mesmo volume têm a mesma área”. Ao considerar este teorema como válido estará errando a questão, pois a área poderá variar de acordo com o paralelepípedo retângulo formado.

Quanto à letra c, Anwandter-Cuellar (2008) observou que a maioria justificou através do cálculo de área, a partir da multiplicação das dimensões encontradas na decomposição do número 36.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para análise dos resultados, levamos em consideração a classificação em quadros dada ao conceito de área por Douady e Perrin-Glorian (1989) e por ter como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, a análise será distribuída em partes referentes à tríade dada por Vergnaud (1990) na admissão do conceito.

- 1- Análise das estratégias;
- 2- Concepções de volume e volume como grandeza;
- 3- Como os alunos lidam com as situações que dão sentido a volume;
- 4- Invariantes operatórios mobilizados pelos alunos;
- 5- Representações simbólicas em jogo.

Para facilitar a compreensão da análise dos dados, inicialmente faremos uma análise geral para termos uma visão global dos resultados por questão dada.

4.1 UMA VISÃO GERAL DOS RESULTADOS

O resultado obtido, por situação de volume, com 51 alunos do ensino médio, sendo 18 alunos de uma escola da rede particular de ensino, 17 alunos de uma escola federal e 16 alunos de uma escola estadual de referência é explicitado nas tabelas a seguir. Foram considerados acertos plenos, os acertos propriamente ditos, ou seja, respostas referentes ao que realmente eram consideradas certas como respostas e com justificativas adequadas. As “outras respostas” referem-se às respostas certas sem justificativas ou com justificativas erradas ou inadequadas, além de respostas erradas. Quanto ao item “não respondeu” corresponde às questões deixadas “em branco” pelos alunos, ou seja, sem resposta.

A quarta questão apresentava quatro letras, com um sólido representado por uma figura em cada letra e era necessário o aluno reconhecer a figura, colocando o nome do sólido que a figura representa e além disso escrever a fórmula de volume e identificar na figura, os elementos (comprimentos) necessários para o cálculo de volume. Caracterizamos cada item desses com as letras F correspondendo à fórmula de volume, N correspondendo ao nome do

sólido e C correspondendo aos elementos. Desta forma, por exemplo, a questão denominada por Q4aF, significa que corresponde à fórmula de volume do sólido representado na letra a.

TABELA 1- Visão geral dos resultados

QUESTÃO	ACERTOS PLENOS	OUTRAS RESPOSTAS	NÃO RESPONDEU
Q1	7,84	82,36	9,80
Q2	66,67	29,41	3,92
Q3	39,53	53,49	6,98
Q4aF	66,67	9,80	23,53
Q4bF	47,06	23,53	29,41
Q4cF	43,14	15,69	41,18
Q4dF	39,22	25,49	35,29
Q4aN	64,71	27,45	7,84
Q4bN	90,20	1,96	7,84
Q4cN	90,20	0,00	9,80
Q4dN	84,31	3,92	11,76
Q4aC	49,02	13,73	37,25
Q4bC	43,14	13,73	43,14
Q4cC	35,29	15,69	49,02
Q4dC	19,61	21,57	58,82
Q5	58,83	35,29	5,88
Q6	64,71	23,53	11,76
Q7	49,02	41,18	9,80
Q8	39,22	49,02	11,76
Q9a	47,06	23,53	29,41
Q9b	31,37	25,49	43,14
Q9c	49,02	7,84	43,14
Q9d	45,10	17,64	37,25
Q9e	33,33	21,57	45,10
Q10	53,49	46,51	0,00
Q11	29,41	49,02	21,57
Q12a	6,97	55,78	37,25
Q12b	50,98	33,33	15,69
Q12c	27,45	56,86	13,72

LEGENDA DE PERCENTUAL DE RESPOSTAS DO TESTE DE SONDAGEM

- ACIMA DE 75%
- Entre 50% e 75%
- Entre 30% e 50%
- Abaixo de 30%

Os percentuais de acertos plenos dos 29 itens do teste de sondagem se distribuem da seguinte maneira:

Faixa	Quantidade de itens/questões	Percentual
Inferior a 30 %	5	17,24%
Entre 30 % e 50 %	14	48,27%
Entre 50 % e 75 %	7	24,14%
Superior a 75 %	3	10,35%
Total	29	100%

Quadro 2 - Percentual de acertos plenos

Aproximadamente 17 % dos itens só são respondidos corretamente por menos de 30% dos alunos, bem como aproximadamente 10% tem índice de acerto pleno de mais de 75%, por volta de 70% dos itens tem acertos entre 30% e 75%. Isso significa que a maioria dos alunos conseguiu resolver a metade do teste de sondagem– já que mais de metade dos itens do teste têm índice de acerto na faixa dos 50%. A partir desses resultados, podemos realizar a análise dos dados em grupos.

O primeiro grupo corresponde às questões que obtiveram maiores percentuais de acerto pleno e baixo índice de ausência de respostas, que foram quanto ao reconhecimento da figura do cone (Q4cN), do cilindro (Q4bN) e da esfera (Q4dN), com índices de acerto superiores a 80% e ausência de resposta inferior a 12%, mostrando compreensão do quadro geométrico em relação a esses sólidos; seguido das questões que obtiveram percentuais de acertos entre 50% e 75%, questões que com apenas o uso da fórmula de volume se encontrava o resultado (Q2, Q4aN, Q5, Q6, Q10), e a Q12b, que depende da compreensão da conservação de volume ao alterar a forma do sólido construído na questão de produção. Estas questões, menos de 16% dos alunos deixaram em branco, com exceção da questão 10, que nenhum aluno deixou sem resposta.

Dentre as questões que obtiveram percentuais de acerto entre 50% e 75%, está uma questão de comparação (Q2), que para se comparar os sólidos dados, o aluno pode dispor da fórmula para chegar à resposta desejada, contar cubinhos um a um, entre outras maneiras. Assim, sugere que talvez o elevado índice de acertos tenha sido devido às várias formas de

estratégias utilizadas pelos alunos para chegar aos resultados. Discutiremos posteriormente as estratégias utilizadas.

Um segundo grupo de questões pode ser destacado: aquelas que tiveram um índice razoável de respostas (entre 50% e 75%), mas também um índice relativamente alto de ausência de resposta (mais de 20%). Neste grupo está a questão Q4aF, que em relação às outras alternativas, que tratavam da fórmula de volume de outros sólidos, foi a que obteve melhores resultados. A Q4aF corresponde à fórmula do volume do paralelepípedo. Tais resultados podem dar indícios de que os alunos compreendem mais a fórmula de volume do paralelepípedo em relação aos outros sólidos abordados.

O terceiro grupo é o das questões com baixo índice de resposta plenamente correta, mas também baixo índice de ausência de resposta: ou seja, a ampla maioria dos alunos pelo menos tenta responder às questões, mas, menos da metade dos sujeitos dá uma resposta plenamente correta. Nesse grupo estão as questões Q1, Q3, Q7, Q8 e Q12c, cujos acertos plenos estão entre 30% e 50%, com exceção das Q1 e Q12c, que obtiveram índices de acertos plenos ainda mais baixos (7,84% e 29,41%, respectivamente), e os índices de ausência de resposta são inferiores a 16%.

Na Q1, em alguns protocolos considerados “outras respostas”, identificamos a dependência de volume com a forma do objeto, justificando ser a forma do objeto responsável pela conservação do volume dos objetos formados, observe algumas justificativas dadas: “Porque eles possuem formas semelhantes”, “Pois a pizza também tem a forma de uma esfera, sendo assim, ambos terão o mesmo volume”, relacionando volume com o tamanho do objeto: “pois os dois objetos têm os mesmos tamanhos, ou seja, são iguais, só que em formas diferentes”, o que mostra que o princípio de conservação de volume em relação à conservação da densidade e da massa do objeto ainda não está bem esclarecido para o aluno, observado no estudo de Barros (2002) e Oliveira (2002). Obtivemos como justificativas considerando ser a esfera volume maior que a pizza, levando em consideração a forma do objeto: “a pizza é uma figura plana, não tem volume”, “pois para fazer a pizza a massa foi dobrada em três partes”, “a esfera é uma forma tridimensional, a pizza não”. Trata-se de um entrave ligado a lidar com o objeto ideal ou com o real. Como a “altura” da pizza, em relação às suas demais dimensões poderia ser considerada desprezível, o aluno considera que “transformou” um sólido em uma figura bidimensional. Alguns protocolos buscaram a justificativa utilizando erroneamente a

fórmula de volume da esfera e da pizza, confundindo o volume da pizza com a área da circunferência: “Porque a fórmula do círculo da pizza é πr^2 e a da esfera πr^3 ”. Para justificar que a esfera tem volume menor que a pizza, os alunos consideraram ser o tamanho do objeto responsável pela alteração no volume, como nas justificativas: “Pois a pizza é maior que a esfera”, ou, “A esfera possui sua massa mais concentrada, possuindo menor tamanho que a pizza. Pelo volume depender do raio, e a esfera possuir menor tamanho, terá menor volume.”

O alto percentual de erros na questão Q3, aponta para lacunas existentes quanto à compreensão da concepção de volume a respeito da sua trilinearidade quanto ao comprimento das arestas do sólido, também compreendida como a tridimensionalidade do volume observada nos trabalhos de Barros (2002) e Anwandter-Cuellar (2008), além da constatação da dificuldade da passagem de uma concepção aditiva da grandeza volume (como na contagem de cubinhos para calcular o volume) para a concepção multiplicativa, observada por Vergnaud (1990). Como já foi dito, a passagem do campo aditivo para o campo multiplicativo é necessária para a compreensão de volume como grandeza, por fazer parte do campo das estruturas multiplicativas, segundo Vergnaud (1990).

Nesta questão, Q3, dos alunos que erraram, onze alunos ainda adotam a concepção linear de volume, desenvolvendo o teorema-em-ação errôneo de que “o volume de um sólido se altera na mesma proporção que seus comprimentos”, ou seja, se a aresta aumentar de 20%, então o volume também aumenta de 20%, respondendo a alternativa a. Houve respostas c, em que, ao invés de elevar à terceira potência, desenvolveram o princípio aditivo, somando o aumento das três arestas para encontrar o aumento do volume. Também houve erro no cálculo numérico respondendo a alternativa b, elevando de maneira incorreta o aumento da aresta, que ao invés de ser $(1,2 a)^3$, eleva $(0,2 a)$, achando o valor de $0,008 a^3$, que corresponde a 0,8%, fato este observado em quatro protocolos.

Dos 17 alunos que acertaram, 10 elevaram à terceira potência e 7 consideraram um valor para cada aresta, desenharam o sólido e aumentaram 20% calculando assim o volume, mostrando a importância da representação geométrica do sólido para auxiliar na resolução da questão. Ver figura 6.

Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado;

a) 20%
b) 0,8%
c) 60%
~~d) 72,8%~~
e) OUTROS

Justifique sua resposta:

Diagrama 1: $10 \times 20 \times 5 \rightarrow 1000 \text{ m}^3$
Diagrama 2: $12 \times 24 \times 6 \rightarrow 1728 \text{ m}^3$

Handwritten calculation:

$$1000 = 100\%$$

$$1728 = x$$

$$x = \frac{1728 \times 100}{1000}$$

$$x = 172,8\%$$

↓
aumento de 72,8%

Figura 6- Extrato do protocolo do aluno ERI- Atividade Q3.

As questões Q7 e Q8 obtiveram índice de acertos inferiores (49,02% e 39,22%, respectivamente) em relação às outras situações de medida, em que apenas com a fórmula se obtinha o resultado, além de ter índice de respostas inadequadas elevado (acima de 30%). Apesar de conter a representação do sólido, o resultado mostra que tais questões não só exigiam o conhecimento do campo numérico, mas envolviam outros aspectos que podem estar ligados e que dificultaram a resolução das questões.

Quanto à letra c, da questão 12, a maioria que acertou a questão, desenvolveu o teorema-em-ação: “se os cubos estão organizados de forma diferente, logo terão áreas das faces diferentes”, de acordo com o trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), observando assim que tais alunos compreendem área e volume como grandezas distintas. Observe o exemplo abaixo.

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

Não, pois essa grandeza vai depender da organização dos cubinhos
exemplo: $(2,2,9) \rightarrow 2 \cdot 4 + 4 \cdot 18 + 8 + 12 = 80 \text{ cm}^2$ / $(3,3,4) \rightarrow 3 \cdot 2 + 4 \cdot 12 + 18 + 48 = 66 \text{ cm}^2$

Figura 7- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q12c.

No último grupo estão as questões cujo índice de acerto pleno é inferior a 50% e o índice de ausência de resposta é superior a 20%. Nesse grupo destacam-se as questões de

situação de produção (Q11 e Q12a) e no reconhecimento das dimensões da esfera (Q4dC), cujos índices de acerto são inferiores a 30% e os índices de ausência de resposta são superiores a 35% (menos de 1/3 dos alunos responde corretamente e mais de 1/3 sequer fornece alguma resposta). Ainda nesse grupo estão as questões Q4bF, Q4cF, Q4dF, Q4aC, Q4bC, Q4cC, Q9a, Q9b, Q9c, Q9d e Q9e cujos índices de acerto pleno estão entre 30% e 50% e nas quais mais de 29% dos alunos deixaram em branco. Dados referentes à quarta questão apontam dificuldades na compreensão do quadro geométrico, por não reconhecerem as dimensões necessárias para o cálculo de volume e dificuldades no quadro das grandezas, por desconhecerem a fórmula de volume dos sólidos dados e quanto aos dados correspondentes às letras b, d e e da nona questão, dão indícios de que os alunos não compreendem a conversão de unidades de medida de volume.

Podemos observar, também, que as questões de produção, Q11 e Q12a, obtiveram índices elevados de erros (49,02% e 55,78%, respectivamente) além do índice elevado de não respostas (21,57% e 37,25%, respectivamente), o que mostra a dificuldade de compreensão diante deste tipo de situação em se tratando de volume.

Dos erros presentes na questão 11, houve alunos que desenharam outro sólido (paralelepípedos), mas com o mesmo volume do sólido dado, ou seja, com 84 cm^3 , o que mostra a não compreensão do enunciado da questão, mas que dá indícios de que os alunos compreendem volume como grandeza, de que sabem realizar a passagem entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas e compreendem volume como sendo independente da forma do sólido. Dois alunos não desenharam corretamente e cinco alunos não desenharam, embora tenham calculado o volume do sólido pedido corretamente e mostraram a unidade de medida de volume corretamente. Um calculou errado e também não desenhou.

Dois que erraram o cálculo de volume na Q11, conseguiram produzir um sólido correspondente ao terço do volume calculado erroneamente, o que leva a crer que estes alunos compreendem volume como grandeza, pois os mesmos, apesar de terem calculado erroneamente o volume do sólido inicial, calcularam de maneira correta o volume do sólido pedido, representaram corretamente a unidade de medida de volume e representaram corretamente o sólido correspondente ao volume calculado. Nota-se ainda em um dos protocolos, que o sólido produzido foi diferente do sólido dado na questão, mostrando que o aluno reconhece a independência do volume com a forma do sólido. Ver exemplo a seguir:

O baixo índice de acertos das letras b e e da nona questão pode indicar que os alunos têm dificuldades em trabalhar com números decimais e em realizar duas transformações seguidas, além de utilizar a correspondência dada no enunciado; já na letra b, os alunos mostraram desconhecer a correspondência de decilitro para litro.

Podemos observar no exemplo a seguir, que o aluno mobiliza corretamente o conceito-em-ação da relação existente entre as unidades de volume e de capacidade (representou a relação de correspondência entre 1 m^3 e 1000 L e entre 1 L e 1 dm^3), porém não consegue transformar o litro em seus submúltiplos, ao verificar que tal aluno desenvolveu a relação $1 \text{ dL} = 1.10 \text{ L} = 10 \text{ L}$. Ver exemplo a seguir:

Sabendo que 1 litro corresponde a 1 dm^3 , transforme:

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$ a) 2 m^3 em litros; 2000 l $1 \text{ l} = 1000 \text{ ml} = 1 \text{ dm}^3$

b) 10 dl em dm^3 ; 100 dm^3

$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$

$10.10 = X$

$X = 100 \text{ dm}^3$

Figura 10- Extrato do protocolo do aluno AKRS- Atividade Q9.

4.2 AS ESTRATÉGIAS QUE CONDUZIRAM A RESPOSTAS CERTAS

Abordamos neste subcapítulo as estratégias utilizadas pelos alunos que responderam corretamente às questões, para observar quais são mais mobilizadas pelos alunos que levam o aluno à compreensão de volume nas diversas situações.

Dos 51 alunos, apenas 7,84% dos alunos acertaram a primeira questão com justificativa adequada. Dos que acertaram, 75% utilizaram como estratégia a fórmula de densidade e 25% utilizaram a comparação de massas, no teste de sondagem. Durante a entrevista, pudemos observar a estratégia visual-perceptiva, pois estavam a sua disposição dois pedaços iguais de massa de modelar e um recipiente plástico transparente com água no seu interior; porém, não foi utilizada a estratégia de imersão. Os alunos, ao serem entrevistados, utilizaram a fórmula da densidade, relacionando massa e volume, para justificar suas respostas. Ver trecho de entrevista:

Aluno ERSO -*Esse aqui eu usei meio que o conceito de química, que densidade não é massa sobre volume?!..., ele diz que ia usar a mesma massa, então é a mesma densidade, como ia ser a mesma quantidade de massa, então, o volume tinha que ser o mesmo. Eu botei assim.*

Tal estratégia relaciona conceitos de grandezas distintas: massa, densidade e volume, como foram também referenciados no trabalho de Oliveira (2002). A sua compreensão dá indícios de que o sujeito compreende volume como grandeza.

Na segunda questão, dos 66,67% que acertaram, a estratégia mais utilizada pelos alunos foi a decomposição-recomposição, em que os alunos utilizaram a decomposição e recomposição do sólido para ajudar na visualização e cálculo do volume, seguida da estratégia de contagem de cubinhos por unidade. Ver tabela a seguir:

TABELA 2: Tipos de estratégias utilizadas pelos alunos na segunda questão

Estratégia	Alunos	%
cubinhos um a um	18	52,94
cubinhos por decomposição	20	58,82
mentalmente	2	5,88
cubinhos por composição subtraindo uma unidade	3	8,82
Fórmula de volume	7	20,59

Observe que os alunos que acertaram, utilizaram mais de uma estratégia para calcular o volume dos sólidos presentes. Vejamos o protocolo abaixo, e observe as estratégias utilizadas pelo aluno para calcular o volume de cada sólido.

Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, não há cubinhos faltando nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e responda a alternativa correta:

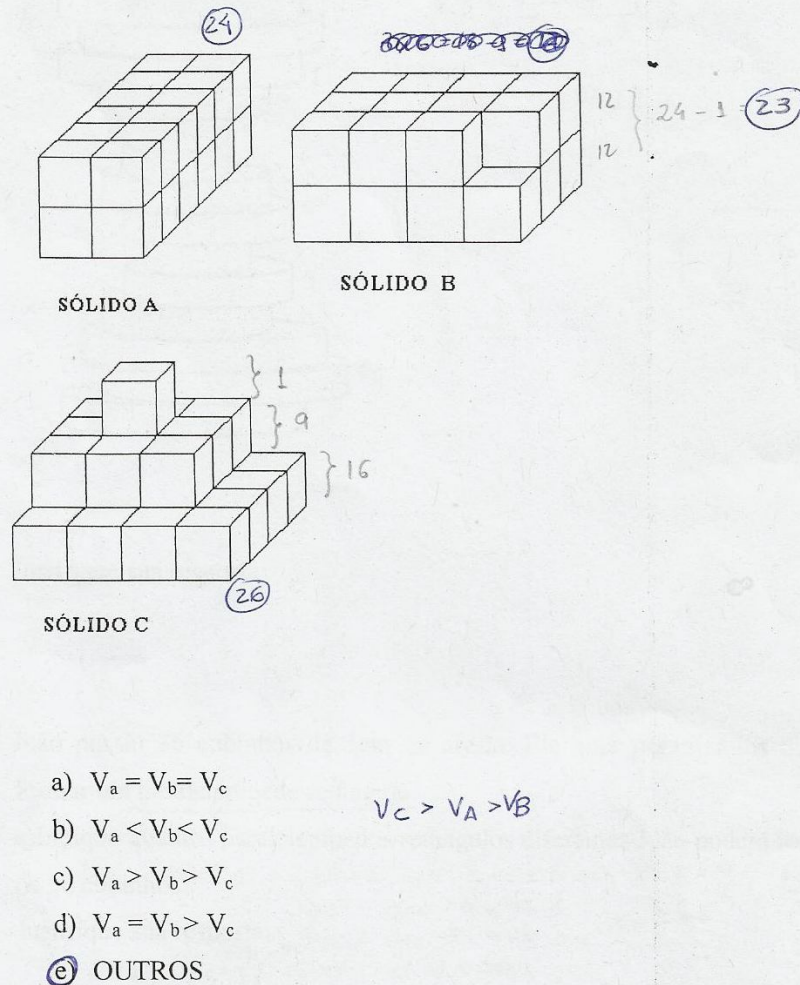
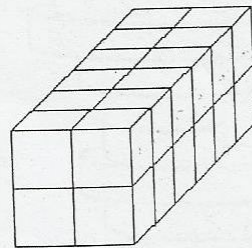


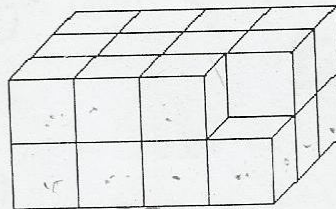
Figura 11- Extrato do protocolo do aluno CAM- Atividade Q2.

Nesse protocolo, podemos observar que o aluno, para calcular o volume do sólido B, utilizou a estratégia cubinhos por composição subtraindo uma unidade, para calcular o volume do sólido C utilizou a estratégia de decomposição e no sólido A, mentalmente. Observe outro exemplo:

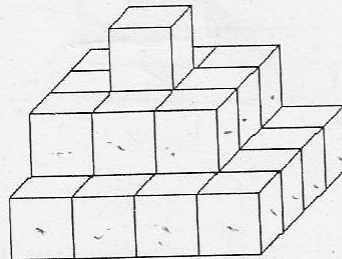
Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, não há cubinhos faltando nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e responda a alternativa correta:



24
SÓLIDO A



23
SÓLIDO B



26
SÓLIDO C

- a) $V_a = V_b = V_c$
 b) $V_a < V_b < V_c$
 c) $V_a > V_b > V_c$
 d) $V_a = V_b > V_c$

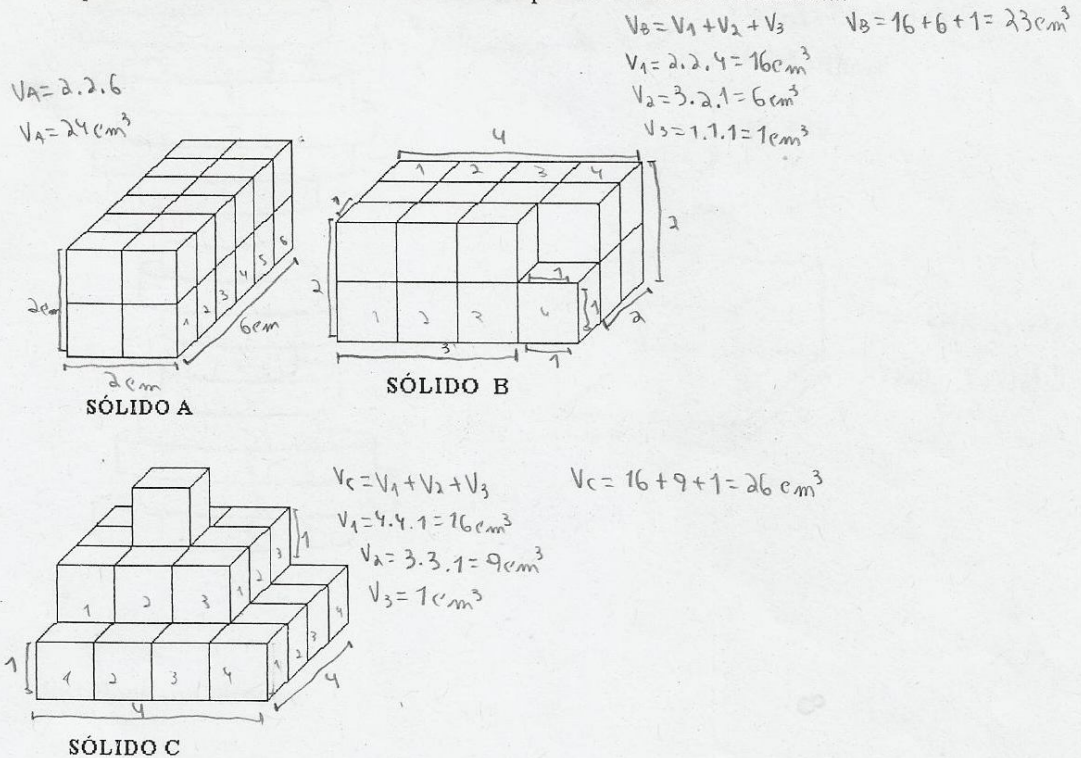
☒ OUTROS

Figura 12 - Extrato do protocolo do aluno EFL- Atividade Q2.

Esse aluno contou um a um os cubinhos do sólido A e do sólido B, e por decomposição, calculou o volume do sólido C. Outro exemplo de estratégia utilizada a seguir:

) Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, não há cubinhos faltando nem sobrando.

Compare o volume dos sólidos abaixo e responda a alternativa correta:



- a) $V_a = V_b = V_c$
- b) $V_a < V_b < V_c$
- c) $V_a > V_b > V_c$
- d) $V_a = V_b > V_c$
- ☒ OUTROS

Figura 13 - Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q2.

Nesse caso, o aluno além de decompor os sólidos B e C, calculou o volume a partir da fórmula de volume. Observe que os valores estão corretos, que a unidade de medida escolhida foi o cm^3 , evidenciando domínio no campo das grandezas, no campo geométrico, por reconhecer a figura, e no campo numérico, por calcular corretamente o volume de cada sólido.

A terceira questão obteve 39,53% de acertos plenos. Os alunos utilizaram a estratégia de medida e comparação de medida em todos os casos, porém 58,82% dos alunos que

acertaram, utilizaram o aumento da aresta elevado à terceira potência, como esperado na análise a priori. Observe o exemplo:

Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

a) 20%
b) 0,8%
c) 60%
~~d) 72,8%~~
e) OUTROS

Justifique sua resposta:

$V_{\text{anterior}} = a \cdot b \cdot c$
 $V_{\text{posterior}} = 1,2 \cdot a \cdot 1,2 \cdot b \cdot 1,2 \cdot c$
 $V_{\text{posterior}} = a \cdot b \cdot c \cdot (1,2)^3 = a \cdot b \cdot c \cdot 1,728$
 $\frac{V_p}{V_A} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot 1,728}{a \cdot b \cdot c} \Rightarrow V_p = V_A \cdot 1,728$
 houve um aumento de $0,728 \cdot V_A$, ou seja, de 72,8%.

$$\begin{array}{r} 1,44 \\ \times 1,2 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1,728 \end{array}$$

Figura 14- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q3.

Em 41,18% dos acertos, foi mobilizada a relação de porcentagem com o volume de um paralelepípedo construído pelo aluno, mostrando a importância da representação simbólica para resolução da questão. Para calcular o aumento percentual do volume, o aluno considerou valores fixos de arestas de um paralelepípedo e acrescentou o aumento de 20% nas arestas. Então, calculou os volumes do paralelepípedo antes e depois do aumento do tamanho das arestas e por fim, calculou o aumento percentual do volume. Observe o exemplo:

Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

a) 20%
b) 0,8%
c) 60%
~~d) 72,8%~~
e) OUTROS

Justifique sua resposta:

Handwritten calculations and diagrams:

Diagram 1: Rectangle with side x , volume x^3 .

Diagram 2: Rectangle with side $x + 0,2x$, volume $(1,2x)^3 = 1,728x^3$.

Vertical multiplication:

$$\begin{array}{r} 1,2 \\ \times 1,2 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 1,44 \\ \times 1,2 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1,728 \end{array}$$

Percentage calculation:

$$\begin{array}{r} x^3 \text{ --- } 100\% \\ 1,728x^3 \text{ --- } y\% \\ y\% = 172,8\% \\ - 100 \\ \hline \boxed{72,8\%} \end{array}$$

Figura 15- Extrato do protocolo do aluno GMDV- Atividade Q3.

A quinta questão, como a fórmula era explicitada no enunciado, foi a estratégia utilizada pelos alunos. Do total de alunos, 58,83% acertaram esta questão. 23,33% não realizaram a análise dimensional adequadamente. Na resolução do cálculo de volume, os números apresentam-se sem dimensões, ou seja, são adimensionais, e logo em seguida, colocam como resposta o número seguido de sua unidade de medida, tornando-o dimensional. Isto é inadequado diante da compreensão de análise dimensional, pois revela uma confusão entre um número e uma grandeza. Observe o exemplo:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

Handwritten calculation:

$$V = \frac{1}{3} \times 5^2 \times 6 \rightarrow 25 \times 2 = \boxed{50 \text{ cm}^3}$$

Figura 16- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q5.

Observe que, na resolução acima, a relação entre número e grandeza é inadequada, pois o aluno lida com números, mas fornece como resultado um volume acompanhado do par número/unidade de medida. Ou seja, o correto seria: $1/3 \times 6 \times 25 = 50$ e não 50 cm^3 , ou então realizando as operações diretamente com grandezas expressas por pares número/unidade de acordo com o protocolo abaixo:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

$$V = \frac{1 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{3}$$

$$V = 50 \text{ cm}^3$$

Figura 17- Extrato do protocolo do aluno LAM- Atividade Q5.

Na sexta questão, 64,71% acertaram a questão, mesmo não tendo no enunciado a fórmula de volume do paralelepípedo, todos resolveram a questão utilizando-a. Em um dos protocolos, cita o Princípio de Cavalieri como forma de demonstrar a fórmula de volume do prisma. Veja o protocolo a seguir:

Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?

Justifique sua resposta: o volume de um prisma (no caso, o paralelepípedo)

é calculado pelo produto da A_b (área da base) por h (altura).

$$V = A_b \cdot h = 4 \cdot 8 \cdot 2 = \underline{64 \text{ m}^3}$$

→ Pode ser demonstrado pelo princípio de Cavalieri.

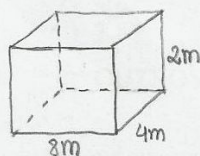


Figura 18- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q6.

Porém, mesmo citando o Princípio de Cavalieri, apenas utiliza a fórmula para calcular o volume do sólido dado. Porém, errou diante da gestão da unidade, ou seja, da relação entre

número e grandeza. Isto foi observado em 48,48% dos alunos que acertaram esta questão. Apenas um aluno utilizou adequadamente as unidades de medida. Ver a figura abaixo:

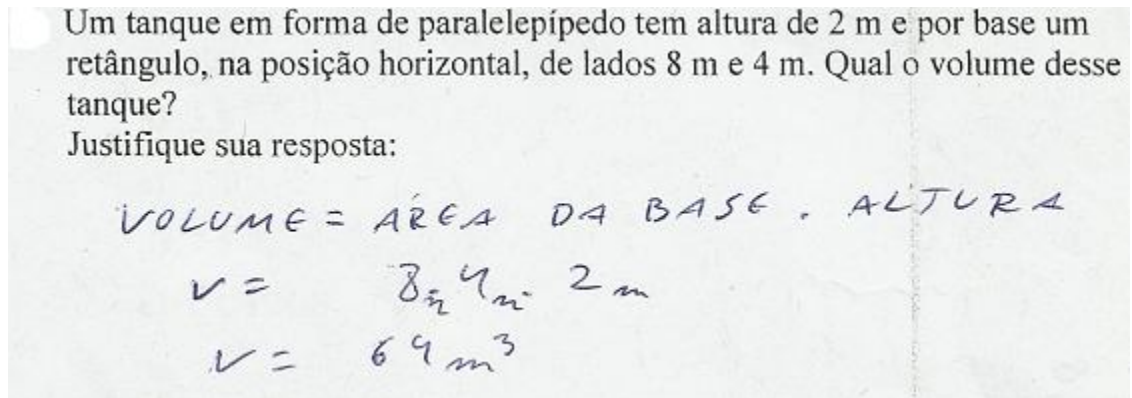


Figura 19- Extrato do protocolo do aluno LAM- Atividade Q6.

Na sétima questão, houve 49,02% de acertos, a estratégia empregada em todos os protocolos foi a fórmula de volume da pirâmide; embora em três protocolos, utilizaram a relação dada no enunciado para chegar à fórmula de volume da pirâmide. Observe o protocolo abaixo.

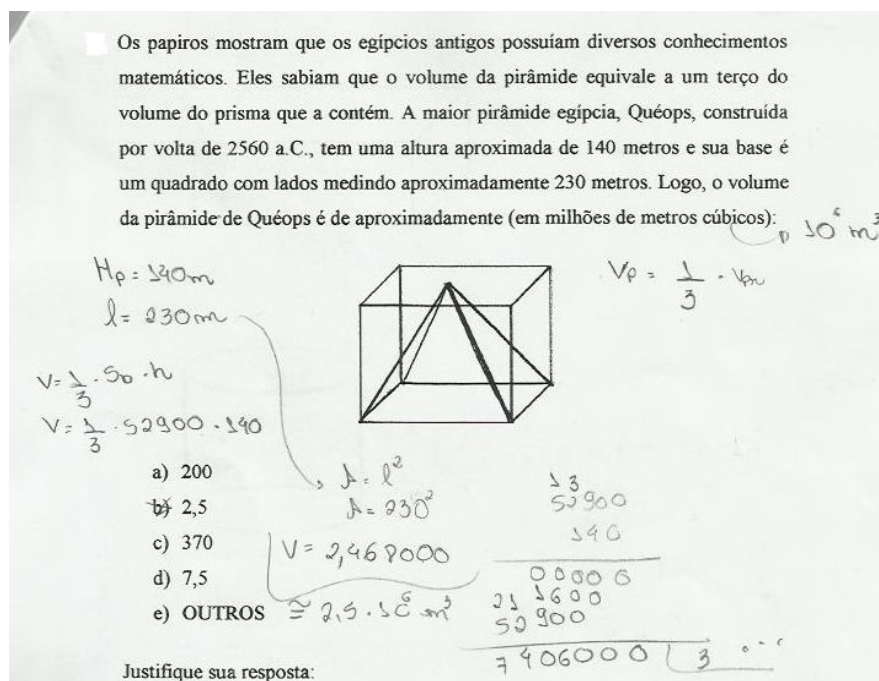


Figura 20 - Extrato do protocolo do aluno ML- Atividade Q7.

Na oitava questão, dos 39,22% dos acertos plenos, a estratégia mais utilizada foi a fórmula de volume (65%), em que calcularam inicialmente a medida da altura de água na

segunda posição da caixa de vidro, igualando as medidas dos volumes nas duas posições do objeto. Posteriormente, realizaram a subtração da altura da caixa com o nível de água da segunda posição, e assim, encontraram a resposta correta da questão. Ver protocolo seguir:

Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 30 \\ \hline 1200 \\ + 1200 \\ \hline 24000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24000 \overline{) 7500} \\ \underline{2250} \\ 1500 \\ \underline{1500} \\ 00 \end{array}$$

$$20 \times 30 \times 40 = 25 \times 30 \times Y$$

$$24000 = 750Y$$

$$Y = 32$$

$$40 - Y = R$$

$$40 - 32 = R \rightarrow R = 8$$

a) 5cm. b) 32cm. c) 8cm. d) 24000cm³. e) OUTROS.

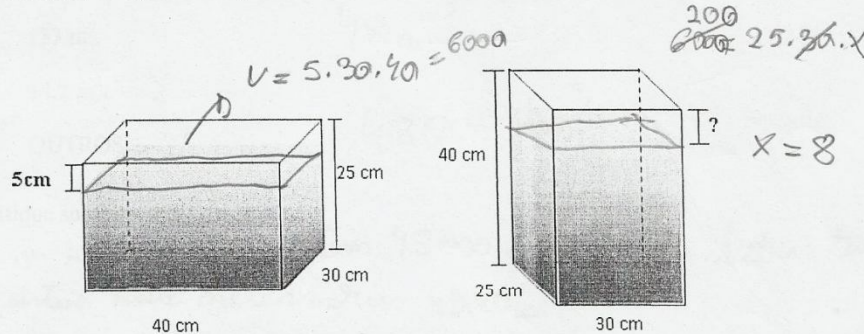
Justifique sua resposta:

O VOLUME NÃO MUDA, ENTÃO SO COBRIRÁ ATÉ 32cm DE ALTURA

Figura 21- Extrato do protocolo do aluno EFL- Atividade Q8.

Ou, ao compreender a conservação de volume nas duas posições da caixa, calcularam o volume que resta para preencher completamente a caixa na posição inicial, e depois, calcularam a medida desejada, igualando o volume inicial com o volume de água que resta para preencher também a caixa na segunda posição. Tal estratégia foi observada em 35% dos acertos. Ver exemplo abaixo:

Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



- a) 5cm.
- b) 32cm.
- ☒ c) 8cm.
- d) 24000cm^3 .
- e) OUTROS.

Justifique sua resposta:

o volume se mantém, mas como as dimensões se invertem a altura da coluna muda.

Figura 22 - Extrato do protocolo do aluno GCV- Atividade Q8.

Na nona questão, na letra a, 47,06% acertaram; porém, não conseguimos identificar a estratégia utilizada em 12,5% das respostas corretas. 54,17% resolveram pela relação 1 litro corresponde a 1 dm^3 , explicitada na questão. Observe o exemplo abaixo:

Sabendo que 1 litro corresponde a 1 dm^3 , transforme:

a) 2 m^3 em litros; $\rightarrow 2\text{ m}^3 = 2000\text{ dm}^3 = \boxed{2000\text{ L}}$

Figura 23- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q9a.

33,33% dos alunos usaram a relação 1 m^3 corresponde a 1000 litros. Ver figura a seguir:

a) 2 m^3 em litros; $- 2.1000 \text{ L} = 2000 \text{ L}$
 b) 10 dl em dm^3 ; $10 \cdot 0,1 \text{ L} = 1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$
 c) $0,001 \text{ dm}^3$ em ml ; $0,001 \cdot 1 \text{ L} = 0,001 \text{ L} = 1 \text{ ml}$
 d) 1 cm^3 em ml ; $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$
 e) $0,01 \text{ dl}$ em cm^3 . $0,01 \cdot 0,1 \text{ L} = 0,001 \text{ L} = 1 \text{ cm}^3$

Justifique sua resposta:

SENDO $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$
 $1 \text{ L} = 1000 \text{ ml} = 1000 \text{ cm}^3$
 $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$
 $1 \text{ dl} = 0,1 \text{ L}$

Figura 24 - Extrato do protocolo do aluno EFL- Atividade Q9.

Na letra b, da nona questão, 31,37% dos alunos acertaram a conversão da unidade de medida de volume, dos quais, 81,25% dos alunos transformaram inicialmente o decilitro para litro e depois, utilizando a relação exposta, converteram o litro em decímetro cúbico. Em 18,75% dos acertos, não foi possível identificar a estratégia empregada na resolução. Observe a figura a seguir, mostrando a relação de conversão de unidades de volume utilizada pelo aluno:

$\div 10$
 $\cancel{10} \text{ dl}$
 b) 10 dl em dm^3 ; $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$

Figura 25- Extrato do protocolo do aluno MCG- Atividade Q9b.

Na letra c da nona questão, 49,02% dos alunos acertaram. Desses, 60% realizaram a conversão utilizando a relação existente no enunciado; 8% utilizaram a relação 1 cm^3 corresponde à 1 ml e 8%, a relação 1 dm^3 corresponde a 1000 ml . Em 24% dos acertos, não foi possível identificar a estratégia empregada na resolução. Observe a figura a seguir:

10) Sabendo que 1 litro corresponde a 1 dm^3 , transforme:

- a) 2 m^3 em litros;
- b) 10 dl em dm^3 ;
- c) $0,001 \text{ dm}^3$ em ml ;
- d) 1 cm^3 em ml ;
- e) $0,01 \text{ dl}$ em cm^3 .

Justifique sua resposta:

Handwritten solutions and justifications:

- $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$
- $0,1 \text{ dm}^3 = 0,1 \text{ l}$
- $1 \text{ dl} = 0,1 \text{ l}$
- $1 \text{ l} = 10 \text{ dl}$
- $10 \text{ dl} = 1 \text{ dm}^3$
- $0,001 \text{ dm}^3 = 1 \text{ cm}^3$
- $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$
- $0,001 \text{ dm}^3 = 1 \text{ ml}$
- $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$
- $1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$
- $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$
- $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$
- $0,01 \text{ dl} = 1 \text{ ml}$
- $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$

Handwritten calculations for item c):

$$\frac{1}{1} = \frac{10^{-3}}{x}$$

$$x = 10^3$$

$$\frac{2 \cdot 10^0}{1 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^3$$

$$x = 2 \cdot 10^3 \text{ l}$$

Figura 26- Extrato do protocolo do aluno VIC- Atividade Q9c.

O aluno primeiro converteu dm^3 em cm^3 e utilizou a relação 1 cm^3 corresponde à 1 ml , para obter a resposta correta. Neste outro exemplo a seguir, o aluno utilizou a relação 1 dm^3 corresponde a 1000 ml . Observe o exemplo:

Handwritten solutions and justifications:

- $1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ ml}$
- $0,001 \text{ dm}^3 = x$
- $x = 1 \text{ ml}$
- $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$
- $0,01 \text{ dl} = 0,001 \text{ l}$
- $1 \text{ l} = 10^3 \text{ cm}^3$
- $0,001 \text{ l} = x$
- $x = 1 \text{ cm}^3$

Figura 27- Extrato do protocolo do aluno ERSO- Atividade Q9c.

Na letra d da nona questão, 45,10% acertaram a questão, 34,78% dos acertos resolveram diretamente pela relação 1 cm^3 corresponde a 1 ml , como podemos observar nos protocolos expostos nas figuras 26 e 27. Não foi possível identificar a estratégia empregada na

resolução em 30,44% dos acertos. 34,78% dos alunos que acertaram a questão, resolveram pela relação dada no enunciado. Observe o exemplo:

d) 1 cm^3 em ml; $\rightarrow 1 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ L} = \boxed{1 \text{ mL}}$

e) $0,01 \text{ dl}$ em cm^3 . $10^{-2} \text{ dl} = 10^{-3} \text{ L} = 10^{-3} \text{ dm}^3 = \boxed{1 \text{ cm}^3}$

Justifique sua resposta:

Figura 28- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q9d e Q9e.

Na letra e da nona questão, 33,33% acertaram a questão, a maioria dos alunos que acertaram, 41,18%, resolveram pela conversão de unidades utilizando a relação do enunciado (1 litro corresponde a 1 dm^3), conforme o protocolo acima, do aluno ACBSA. Apenas um dos alunos que acertaram, correspondendo a um percentual de 5,88%, utilizou a relação 1 litro corresponde a 10^3 cm^3 , observe a figura 27. Não foi possível identificar a estratégia empregada na resolução em 29,41% dos acertos. 23,53% utilizaram a relação 1 cm^3 corresponde a 1ml, veja o exemplo:

d) 1 cm^3 em ml; $1 \text{ cm}^3 = \boxed{1 \text{ mL}}$ (d)

e) $0,01 \text{ dl}$ em cm^3 . $0,01 \text{ dl} = 1 \text{ mL} = \boxed{1 \text{ cm}^3}$

Justifique sua resposta:

Figura 29- Extrato do protocolo do aluno DTMM- Atividade Q9e.

53,49% dos alunos acertaram a décima questão. A estratégia utilizada pela maioria dos que acertaram a décima questão, 86,96%, foi a utilização de fórmula de volume do paralelepípedo e a conversão de unidades, tanto de comprimento, quanto de volume em capacidade. Observe o protocolo a seguir:

1) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8m de comprimento, 5m de largura e 120cm de profundidade. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários:

a) 48 000 litros.

b) 48 litros.

c) 133 m^3 .

d) $14,2 \text{ m}^3$.

e) OUTROS.

Justifique sua resposta: O volume do paralelepípedo retângulo é calculado multiplicando-se suas dimensões; altura, comprimento e largura. Depois de calcular o volume em m^3 converte-o em litros. Para isso faz-se necessário saber que 1 m^3 comporta 1000 litros.

Figura 30- Extrato do protocolo do aluno GMDV- Atividade Q10.

O aluno acima desenvolveu corretamente a conversão das unidades, além de explicar corretamente a fórmula de volume do paralelepípedo retângulo que utilizou para calcular o volume desejado (capacidade do reservatório), o que evidencia a compreensão do aluno a respeito do campo das grandezas, pois reconhece as unidades de medida de volume e de comprimento e do campo numérico, pois calculou corretamente o volume.

A maioria transforma a unidade de profundidade em metros (78,26%); porém, 8,7% dos acertos transformaram todas as unidades de comprimento em decímetro, para facilitar a conversão da unidade de volume em litros (1 l corresponde a 1 dm^3).

) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8m de comprimento, 5m de largura e 120cm de profundidade. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários:

a) 48 000 litros.

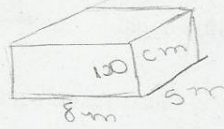
b) 48 litros.

c) 133 m^3 .

d) $14,2 \text{ m}^3$.

e) OUTROS.

Justifique sua resposta:



$$120 \text{ cm} = 12 \text{ dm}$$

$$8 \text{ m} = 80 \text{ dm}$$

$$5 \text{ m} = 50 \text{ dm}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$$

$$5 \times 8 \times 100 = 4000$$

$$\times 12$$

$$4 \times 12 \times 1000 =$$

$$48 \times 1000 =$$

$$48000 \text{ L}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \end{array}$$

Figura 31- Extrato do protocolo do aluno PP- Atividade Q10.

Para a transformação da unidade de volume, 47,83% realizaram a conversão a partir da relação 1 m^3 corresponde a 1 dm^3 ; 39,13% dos alunos realizaram a conversão a partir da relação 1 litro corresponde a 1 dm^3 . Não foi possível identificar a estratégia empregada na resolução em 13,04% dos acertos.

Nas situações de produção, como estratégias o aluno pode se dispor da composição e da decomposição-recomposição. Porém, podemos observar na décima primeira questão, que obteve um percentual de respostas corretas de 29,41%, a estratégia mais utilizada foi de decomposição-recomposição em novo empilhamento de cilindros (54,55%), seguido da composição em outro sólido (45,45%), no caso o paralelepípedo, que foi desenhado por todos que utilizaram esta estratégia. Porém, um dos alunos também desenhou um cilindro. Veja no exemplo:

✕ O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de 2cm^3 , 4cm^3 e 8cm^3 respectivamente. Construa um sólido com $\frac{1}{3}$ do volume deste empilhamento.

$60 + 24 = 84 \text{ cm}^3$

$84 \div 3 = 28$

28 cm^3

Justifique sua resposta:

$14 \times 2 = 28 \text{ cm}^3$

$A = 14 \text{ cm}^2$

2 cm

2 cm

7 cm

$7 \times 2 \times 2 = 28 \text{ cm}^3$

Figura 32- Extrato do protocolo do aluno JOR- Atividade Q11.

Tal aluno mostra que compreende a independência de volume com a forma do objeto, desenvolvendo a questão, desenhando outros sólidos com um terço do volume do empilhamento. Tal resolução demonstra que o aluno considera o volume como sendo uma grandeza autônoma, como observado no trabalho de Anwandter-Cuellar (2008).

Dois alunos utilizaram além da decomposição dos cilindros para o cálculo do volume do empilhamento, a fórmula de volume do paralelepípedo para construir o sólido. Observe a figura 32 e o exemplo abaixo, referentes aos dois protocolos:

O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de 2cm^3 , 4cm^3 e 8cm^3 respectivamente. Construa um sólido com $1/3$ do volume deste empilhamento.

7 cilindros de 8cm^3
 5 cilindros de 4cm^3
 4 cilindros de 2cm^3

$V_{\text{total}} = 7 \times 8 + 5 \times 4 + 4 \times 2$
 $V_{\text{total}} = 56 + 20 + 8$
 $V_{\text{total}} = 84\text{cm}^3$

$\frac{1}{3} \cdot 84 = 28$

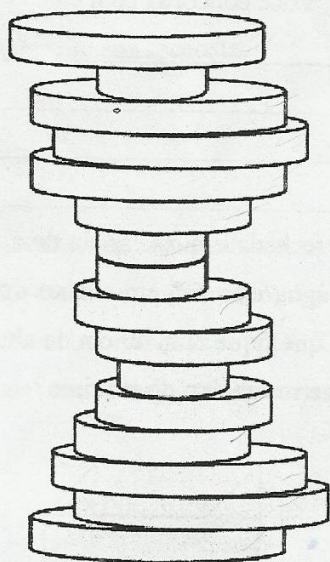
$V_{\text{PARALEPÍPEDO}} = 2 \times 2 \times 7 = 28\text{cm}^3$
 $28\text{cm}^3 = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{total}}$

Figura 33- Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q11.

Nesses dois protocolos acima, note que os alunos calcularam o volume do sólido construído; porém, não realizaram uma gestão adequada das unidades de medida. Nesse caso, o correto seria $14 \times 2 = 28$, e $2 \times 2 \times 7 = 28$ e não, 28cm^3 .

Como vimos, nesta questão, a maioria utilizou a decomposição-recomposição de empilhamento de cilindros (54,55% dos acertos). Observe o exemplo:

O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de 2cm^3 , 4cm^3 e 8cm^3 respectivamente. Construa um sólido com $1/3$ do volume deste empilhamento.



$$7 \text{ de } 8\text{cm}^3 = 56\text{cm}^3$$

$$4 \text{ de } 2\text{cm}^3 = 8\text{cm}^3$$

$$5 \text{ de } 4\text{cm}^3 = 20\text{cm}^3$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ + 28 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84\text{cm}^3 \\ \times 3 \\ \hline 252\text{cm}^3 \end{array}$$

$$2 \text{ de } 8\text{cm}^3 = 16$$

$$2 \text{ de } 4\text{cm}^3 = 8$$

$$2 \text{ de } 2\text{cm}^3 = 4$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 8 \\ + 4 \\ \hline 28\text{cm}^3 \end{array}$$

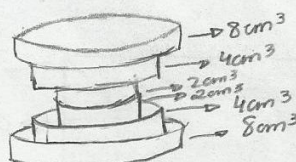


Figura 34- Extrato do protocolo do aluno GMDV- Atividade Q11.

O protocolo acima dá indícios de que o aluno mobilizou a relação de dependência do conceito de volume com a forma do objeto, não compreendendo a invariância de volume ao modificar a forma do objeto, não considerando o volume como grandeza autônoma, segundo Anwandter-Cuellar (2008).

Na décima segunda questão, letra a, apenas 6,97% dos alunos obtiveram respostas corretas e todos que acertaram, utilizaram a estratégia da decomposição do número 36, encontrando oito decomposições do número 36, conforme analisado por Anwandter-Cuellar (2008). Como os outros exemplos serão mostrados posteriormente ao tratarmos de estudo das situações, observe um dos exemplos:

Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. →  $V = a \cdot b \cdot c$ → O volume do paralelepípedo será sempre $A_b \cdot h$ → ou seja, a multiplicação de 3 valores. Já que estamos lidando com cubinhos, esses valores devem ser sempre inteiros positivos!

Justifique sua resposta: a. Resp: 8

Devemos achar todos as combinações de 3 números cujo produto resulta em 36!

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume. O que você acha?

Resposta! Ao usar sempre os 36 cubinhos, João garante que todos os políedros que ele formar terão exatamente 36 cm³ de volume.

Lista de divisões de 36 em três fatores inteiros positivos:

- 1 · 1 · 36 (I)
- 1 · 2 · 18 (II)
- 1 · 3 · 12 (III)
- 1 · 4 · 9 (IV)
- 1 · 6 · 6 (V)
- 2 · 3 · 6 (VI)
- 2 · 2 · 9 (VII)
- 3 · 3 · 4 (VIII)

Figura 35- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q12a.

Esse aluno, além de decompor o número 36 em seus divisores, mostra que reconhece a fórmula de volume do paralelepípedo e assim justifica o porquê de serem oito combinações de três números divisores de 36. Segundo Anwandter-Cuellar (2008), os alunos, ao acertarem essa questão utilizando esta estratégia de decomposição do número 36, mobilizaram o teorema-em-ação correto do ponto de vista matemático: “A medida do volume de um paralelepípedo é o produto das medidas de seus lados”.

Sobre a letra b dessa mesma questão, podemos verificar que a maioria dos alunos (50,98%) não apresenta dificuldades em compreender volume como grandeza, pois compreende que independente da forma dos paralelepípedos que serão construídos, o volume sempre será o mesmo. Como estratégia, a maioria dos que acertaram, 73,07%, utilizou a medida para o volume dos sólidos formados, justificando ser pela quantidade de cubinhos que se mantem constante (46,15%) ou pelo volume dos paralelepípedos ser sempre igual a 36cm^3 (26,92%).

Na letra c da décima segunda questão, 27,45% acertaram a questão, a fórmula de área foi utilizada como estratégia em 20% dos acertos, como podemos observar no protocolo a seguir:

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

*Não, pois essa grandeza vai depender da organização dos cubinhos.
p exemplo: $(2,2,9) \rightarrow 2 \cdot 4 + 4 \cdot 18 \rightarrow 8 + 72 = 80 \text{ cm}^2$ / $(3,3,4) \rightarrow 3 \cdot 2 + 4 \cdot 12 \rightarrow 18 + 48 \rightarrow 66 \text{ cm}^2$*

Figura 36- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q12c.

O aluno acima mobilizou a fórmula da área para calcular a área total de cada paralelepípedo formado e comparou as áreas, verificando que as mesmas não se mantem constantes. Outra estratégia utilizada, obtendo um percentual de 33,33% dos acertos, é pela visualização da organização dos cubinhos. Veja no exemplo:

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

Não, pois os cubos podem estar organizados de forma que em algum lugar mais faces expostas.

Figura 37- Extrato do protocolo do aluno GCV- Atividade Q12c.

Porém a maioria dos acertos, 46,67%, mobilizou a estratégia de visualização das dimensões (altura, largura e comprimento) dos sólidos formados. Observe o exemplo:

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

Não. As faces de diferentes paralelepípedos apresentam dimensões diferentes e conseqüentemente áreas diferentes.

Figura 38- Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q12c.

Resultados foram diferentes do observado no trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), no qual predominou a estratégia do uso da fórmula de área como justificativa, na letra c dessa questão, observe o gráfico abaixo:

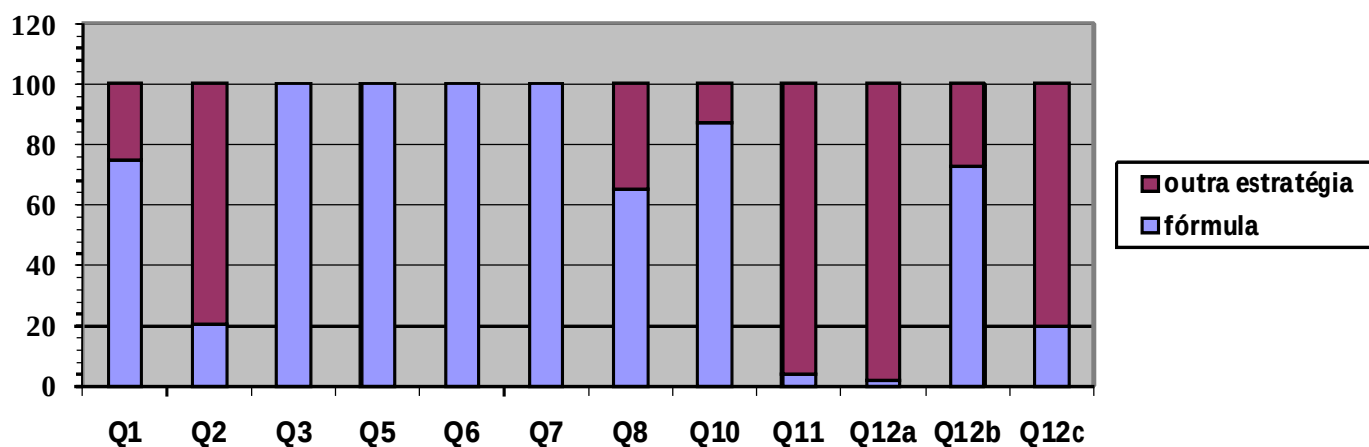


Gráfico 1 – Relação entre a estratégia medida (com uso da fórmula) e outras estratégias.

Podemos observar como estratégia eleita pelos alunos presente em todas as situações, a estratégia de medida, em que utilizavam a fórmula para calcular o volume, pois além das questões de situação de medida, as situações de produção e de comparação também podiam ser resolvidas utilizando esta estratégia. Porém, também identificamos outros tipos de estratégias referentes a cada tipo de situação que levaram o aluno ao acerto.

4.3 CONCEPÇÕES DE VOLUME E VOLUME COMO GRANDEZA

Para analisar as concepções mobilizadas pelos alunos sobre volume, utilizamos a tipologia das concepções sobre este conceito construída por Anwandter-Cuellar (2008), citada anteriormente.

No quadro Geométrico, a questão 1 nos dá indícios da mobilização de concepção de **volume ocupado**, com a justificativa: “Se os pedaços de massa de modelar são iguais eles com certeza tem a mesma massa e ocupam o mesmo lugar no espaço.” E também no trecho da entrevista abaixo, podemos observar indícios da mobilização da concepção volume ocupado:

Aluno CAM- “Nessa primeira questão, considere a esfera maior volume que a pizza, pois acho que a esfera ocupa um volume maior no espaço que a pizza.”

Quando o aluno desenvolve uma concepção de **volume número**, ele considera volume como um número, não mostrando a sua unidade de medida; conhece apenas uma forma de calcular o volume, através de uma fórmula, mesmo não sendo a fórmula correta, tenta manipular os números existentes, até que encontre uma fórmula nova e um resultado não válido do ponto de vista matemático, fato este observado em alguns protocolos de alunos, ver figura abaixo:

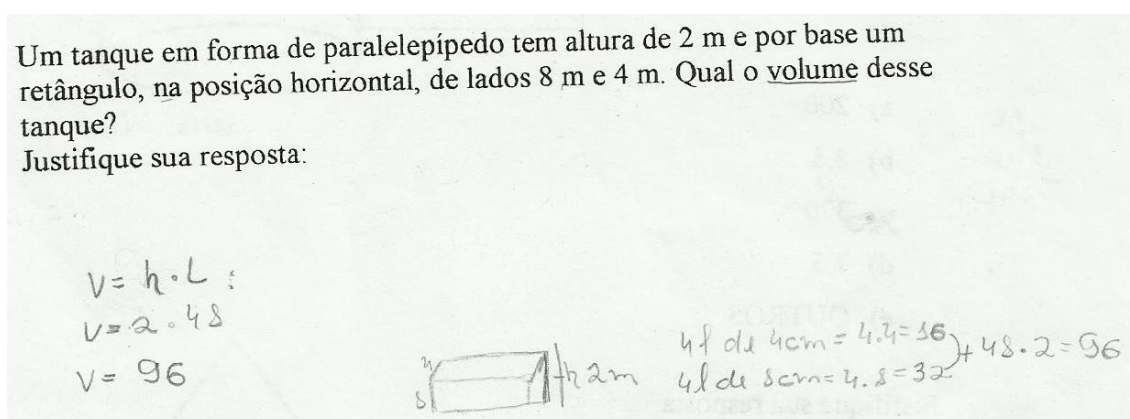


Figura 39- Extrato do protocolo do aluno BMBS- Atividade Q6.

Quando o aluno desenvolve uma concepção de **volume sólido** fica difícil compreender a invariância de volume ao modificar a forma do objeto, ou simplesmente mudar de posição o objeto, pois se alterou as arestas ou uma das dimensões, comprimento, altura e largura, ou deixou de ser um sólido para ser outro, logo o volume irá também se alterar. É o que podemos observar diante das questões em que a forma do objeto era modificada, no caso das massas de modelar, ou na mudança de posição do objeto, como é o caso da caixa de vidro ao mudar de posição, e nas questões de produção em que pedia-se ao aluno para construir a partir de um empilhamento de cilindros um sólido com um terço do volume do empilhamento. Ver exemplos de respostas dadas:

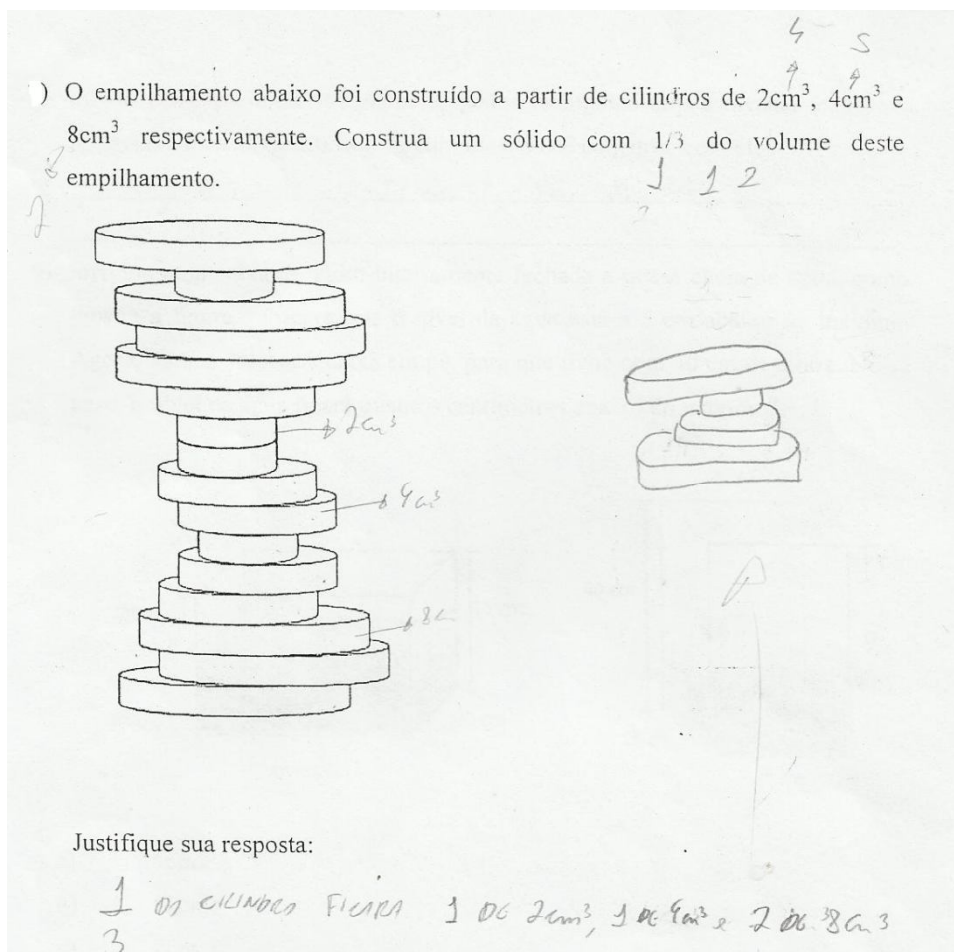


Figura 40- Extrato do protocolo do aluno JMPN- Atividade Q11.

Observe a explicação dada pelo aluno a respeito do protocolo acima:

Entrevistador- Nessa questão aqui, na verdade eu não entendi a quantidade de cilindros, que, como é um desenho que você tentou fazer tridimensional, não é?! Aí, eu queria assim, que você me dissesse quantos são, se são dois, ou se é um?

Aluno JMPN- Como tem aqui, é de 2cm tem quatro, aí de 2cm um terço é um só, aí de 4cm são cinco, aí vai ser um também, de 4cm , e o de 8cm , vai ser só dois, pois é um terço de cada.

Nesse exemplo, podemos observar a concepção volume sólido mobilizada pelo aluno, pois o mesmo não consegue calcular corretamente o volume correspondente a um terço do volume dado, devido a dependência de volume com o sólido, assim resolve fazendo a distribuição incorreta de cilindros para dar um terço do volume e não mostra autonomia de volume com a forma do objeto, pois não desenha outros sólidos, a não ser cilindros. A distribuição incorreta de cilindros nos dá indícios de que o aluno realiza a discretização da

grandeza. Como a quantidade de cilindros de cada tipo (2cm^3 , 4cm^3 , 8cm^3) não é de múltiplos de três, ele divide quatro por três, dá como resultado um e despreza o resto. Depois divide cinco por três, dá novamente 1 como resultado e despreza o resto e depois divide oito por três, dá dois como resultado e despreza novamente o resto. (Ele aparentemente conta oito cilindros de 8cm^3 ao invés de sete), mas de todo modo é interessante esse fato de ele lidar com a divisão nos naturais, que se trata da discretização da grandeza, como foi esperada na análise a priori.

Também é possível que o aluno mobilize uma concepção numérica, considerando volume como um número, sem considerar seu aspecto dimensional; por, também não compreender a mudança de unidades de volume e nem tampouco, outra forma de se calcular volume, a não ser pela fórmula.

Neste exemplo a seguir, identificamos a concepção **volume medida**, pois o aluno considerou o volume do sólido a partir da medida do volume de cada cubinho, que correspondem a 1cm^3 :

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume.

O que você acha?

Todos os paralelepípedos retângulos terão o mesmo volume, pois cada cubinho tem um volume de 1cm^3 .

Figura 41- Extrato do protocolo do aluno CLA- Atividade Q12b.

Ao considerar terem o mesmo volume, os sólidos diferentes construídos com 36 cubinhos na questão de produção (Q12a e Q12b), os alunos estão mobilizando a concepção **volume grandeza**, ou seja, considera as classes de equivalência da grandeza volume; portanto, volume é uma grandeza autônoma, independente do sólido e de sua forma. Ao mobilizar tal concepção, dá indícios de que o aluno compreenda volume como uma grandeza. Observe os exemplos dados pelas entrevistas, a seguir:

Aluno AKRS- “...Se são formados pelo mesmo número de sólidos iguais, tem o mesmo volume, se são formados pelo mesmo número de cubinhos, tem o mesmo volume...”

Assim como na fala do aluno abaixo:

Aluno ERSO-“ ...João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume. Acho que só vai ter o mesmo volume se usarem a mesma quantidade de cubinhos, não necessariamente, há vai, porque tem que usar os 36...”

Volume interior está relacionado ao conceito de capacidade bem como a quantidade de matéria que constitui o objeto. Identificamos a mobilização dessa concepção no trecho da entrevista a seguir, referindo-se à Q1:

Aluno CLA- “Esta questão resolvi pensando como as massas são iguais, então têm o mesmo volume inicialmente. Ao formar a esfera e a pizza, continuarão com o mesmo volume, a não ser que a esfera fosse oca, assim teria maior volume...”

Ao afirmar que se a esfera fosse oca, o seu volume seria maior, está mobilizando o conceito-em-ação de capacidade, que remete para a concepção de volume interior. Também podemos observar tal concepção, relacionando volume com a quantidade de matéria na justificativa do protocolo abaixo:

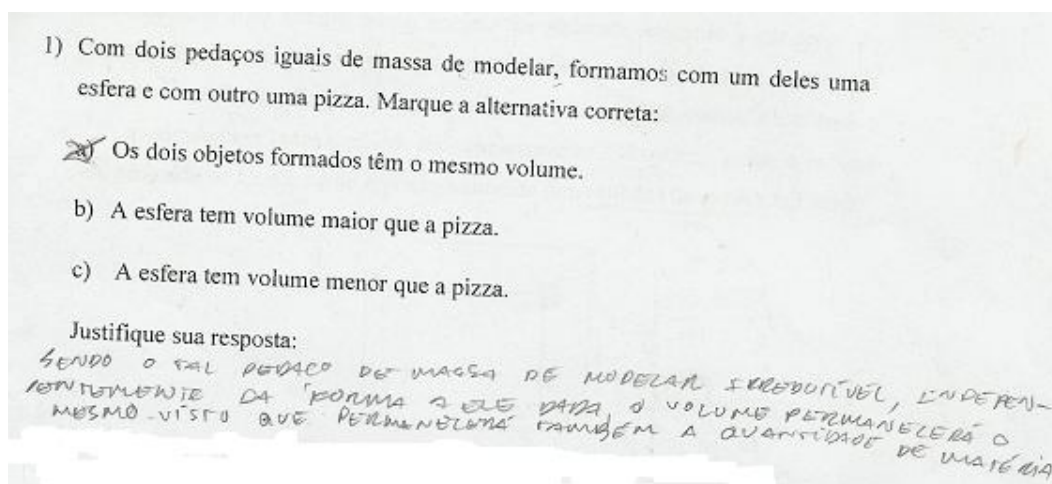


Figura 42- Extrato do protocolo do aluno LMF- Atividade Q1.

A concepção **volume área** é mobilizada ao confundir as grandezas volume com a área, como no exemplo a seguir, o aluno confunde a fórmula de volume com a de área, o que pode trazer dificuldades na compreensão da dissociação entre essas grandezas, bem como ao equívoco de estabelecer que o volume e a área se alteram nas mesmas proporções. Ver exemplo a seguir:

Aluno EM- “*é, essa primeira questão, é, quando ele diz que com dois pedaços de massa de modelar , vai fazer uma esfera e o outro vai fazer uma pizza. É, quando a gente vai fazer uma pizza, a gente tem então, a gente tem também uma circunferência, e o que é uma circunferência? A circunferência é um, é o contorno do círculo, e como a gente vai achar esse volume? Que está pedindo aqui em relação ao volume. O volume da esfera vai ser π , porque é uma figura geométrica, ela vai ser πr^2 sobre 4, já a da pizza, como é uma circunferência, vai ser πr^2 , logo, ...*”

Além das concepções dadas ao conceito de volume, podemos identificar, diante das respostas dos alunos, a relação existente entre volume e outras grandezas, que podem facilitar ou não a compreensão do conceito de volume.

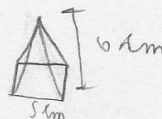
Nas respostas observadas na primeira questão, podemos identificar vários conceitos que estão relacionados com o de volume, de maneira equivocada ou não. Observe algumas justificativas dadas, quanto à sua relação com o conceito de massa: “pois foi usado mesma quantidade de massa para formá-los” ou “É utilizada a mesma massa, logo, o mesmo volume”. Quanto à sua relação com a figura geométrica, ou seja, com a forma e tamanho do objeto: “Porque eles possuem formas semelhantes”, “Pois a pizza é maior que a esfera”. Quanto à sua relação com o conceito de densidade: “Como se trata de um mesmo material (massa de modelar) e de pedaços iguais (massas iguais) então temos $d = m/v \rightarrow v = m/d$, como a massa e a densidade são iguais também os volumes que ocupam, independente do sólido que formam, uma vez que esses sólidos são maciços.”, “sendo a fórmula de volume $v = m/d$ e tendo a esfera e a pizza iguais massas e densidades, infere-se que o volume também será igual”. A relação de volume com o conceito densidade, segundo Oliveira (2007), é importante para a compreensão de volume como grandeza.

Com relação à dimensionalidade de volume, houve respostas em que o volume foi considerado uma grandeza adimensional, não apresentando unidade de medida correspondente, o que evidencia a concepção numérica de volume. Observe a figura abaixo:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:



$$V = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 6$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 30$$

$$V = \frac{30}{3}$$

$$V = 10$$

Figura 43- Extrato do protocolo do aluno MBV- Atividade Q5.

Foi observada também confusão entre a unidade de medida de volume com unidades de medida de outras grandezas geométricas como comprimento e área, o que mostra dificuldade na compreensão do quadro das grandezas proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989). No protocolo abaixo, o aluno confunde a unidade de medida de volume com a unidade de medida do comprimento. Ver exemplo:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 6$$

$$V = 1,66 \text{ cm}$$

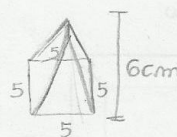


Figura 44- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q5.

Indícios de que o aluno quando percebe que sólidos diferentes podem ter mesmo volume, distingue volume e outras grandezas como massa, área e comprimento e utiliza adequadamente as unidades de volume e capacidade. As situações de produção podem dar indícios de compreensão de volume como grandeza, pois os alunos utilizam estratégias como

o cálculo de volume a partir da fórmula e estão livres a construir o sólido que desejarem, observando a autonomia do volume quanto à forma do objeto. Observe o exemplo:

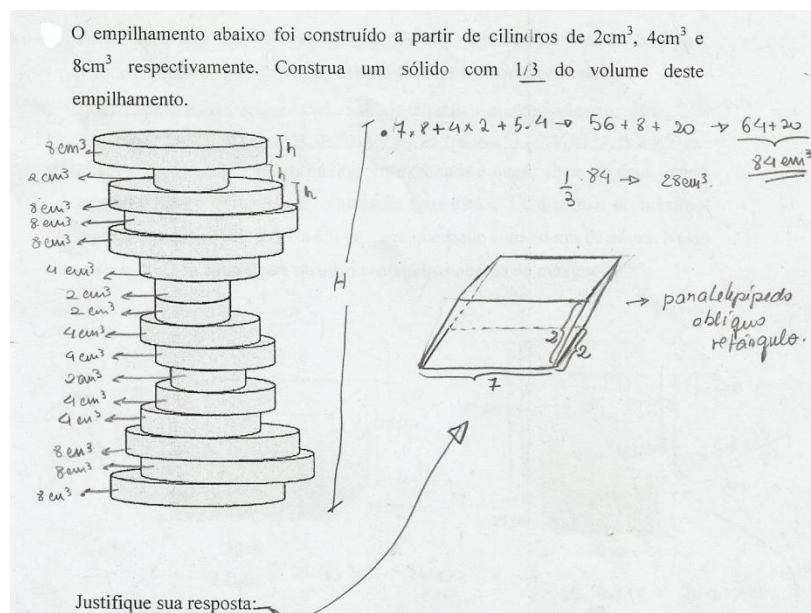


Figura 45- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q11.

Podemos identificar indícios de compreensão de volume como grandeza nesse protocolo, pois o aluno calculou corretamente o volume, desenhou um sólido diferente do empilhamento de cilindros e colocou a unidade de medida de volume corretamente, mostrando domínio nos campos numérico, geométrico e das grandezas; embora, ao invés de marcar a altura do prisma para calcular o volume, ele marcou os comprimentos das arestas.

4.4 ESTUDO DAS SITUAÇÕES

Consideramos para a nossa análise, três tipos de situações que dão sentido ao volume: de medida, de comparação e de produção.

As questões de comparação dadas aos alunos foram questões em que pudessem raciocinar sobre o conceito de volume em relação a outros conceitos, para observar se os alunos vão além dos cálculos diante dessa situação e se compreendem volume como grandeza.

Nas situações de comparação, observamos que, por ser estática, como no caso da questão 2, dos três sólidos formados por cubinhos de 1cm de aresta, é de mais fácil

compreensão que na comparação dinâmica, como nas questões 1 e 3, como evidencia o quantitativo de acertos obtidos na Q2 superior ao observado nas questões 1 e 3. Tal resultado aponta para dificuldades em compreender volume ao modificar a forma do objeto, o que pode ser resultado de aquisição de uma concepção de volume sólido observada por Anwandter-Cuellar (2008). Ver o gráfico a seguir:

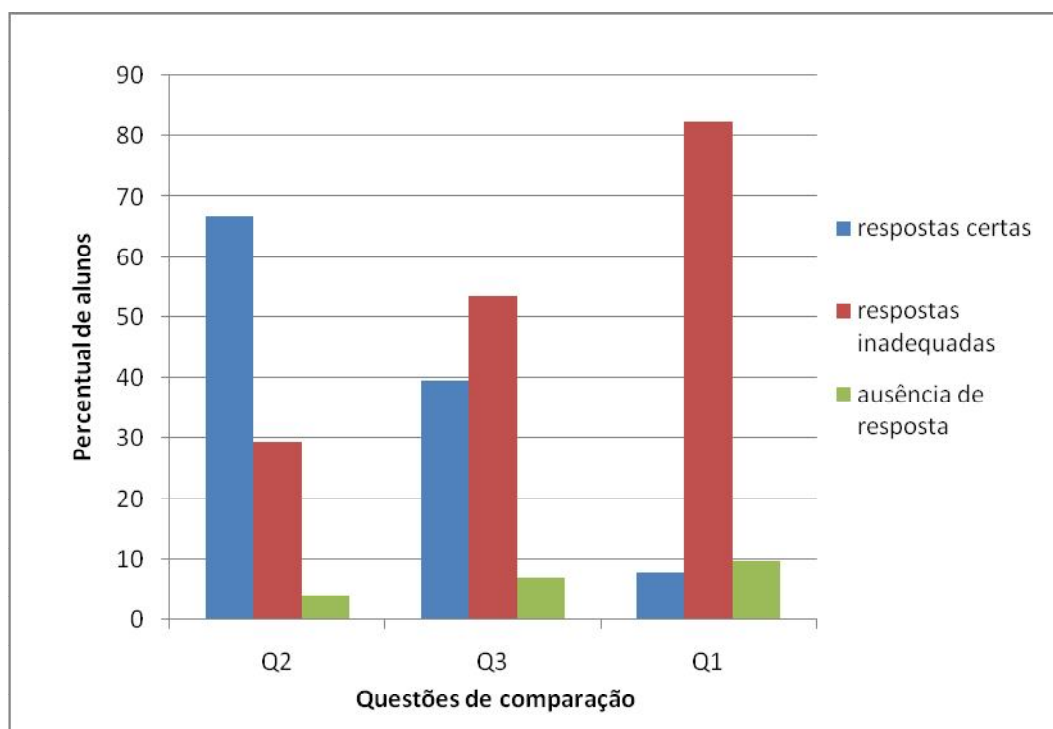


Gráfico 2- Situações de comparação

Quanto à transitividade, os alunos compreendem a relação entre mais de dois sólidos, colocando corretamente em ordem crescente de volume os sólidos dados da segunda questão, por isso o percentual elevado de respostas corretas.

Observamos que a terceira questão, que trata da concepção de tridimensionalidade de volume, observado nos trabalhos de Barros (2002) e Anwandter-Cuellar (2008), foi a questão de situação de comparação com baixo índice de resposta plenamente correta, 39,53%, mas também um índice elevado de respostas erradas, 53,49%.

Segundo Vergnaud (1990), para a compreensão de volume como grandeza tridimensional, faz-se necessário a passagem da concepção aditiva de volume, como no caso da questão de contagem de cubinhos, para a concepção multiplicativa de volume, que é uma concepção mais difícil de ser mobilizada, como podemos observar diante dos resultados.

A primeira questão, que era uma situação de comparação que dependia do conhecimento sobre outras grandezas, como massa e densidade, foi a questão que obteve

maior índice de respostas inadequadas (incluindo respostas certas com justificativas inadequadas e respostas erradas), 82,36%, e menor índice de acertos plenos, 7,84%. Segundo Oliveira (2007), a aquisição do conceito de densidade favorece a compreensão do conceito de volume como grandeza. Porém, o índice baixo de acertos plenos dá indícios de que a maioria dos alunos não adquiriu o conceito de densidade, e desta forma, dificulta a compreensão de volume como grandeza.

Situações de medida envolveram problemas em que o sólido era representado ou não, a fórmula era apresentada ou não, as unidades de medida eram uniformes ou não, para observarmos como os alunos lidam diante dessas situações, da mais elementar, com a mera aplicabilidade da fórmula e compreensão de volume como sendo uma grandeza ao identificar a correta unidade de medida, à mais complexa, em que necessita saber além da fórmula, a transformação de unidades. Portanto, só foram consideradas válidas as questões em que estavam explicitamente corretas as respostas, incluindo a unidade de medida. Observe os gráficos a seguir:

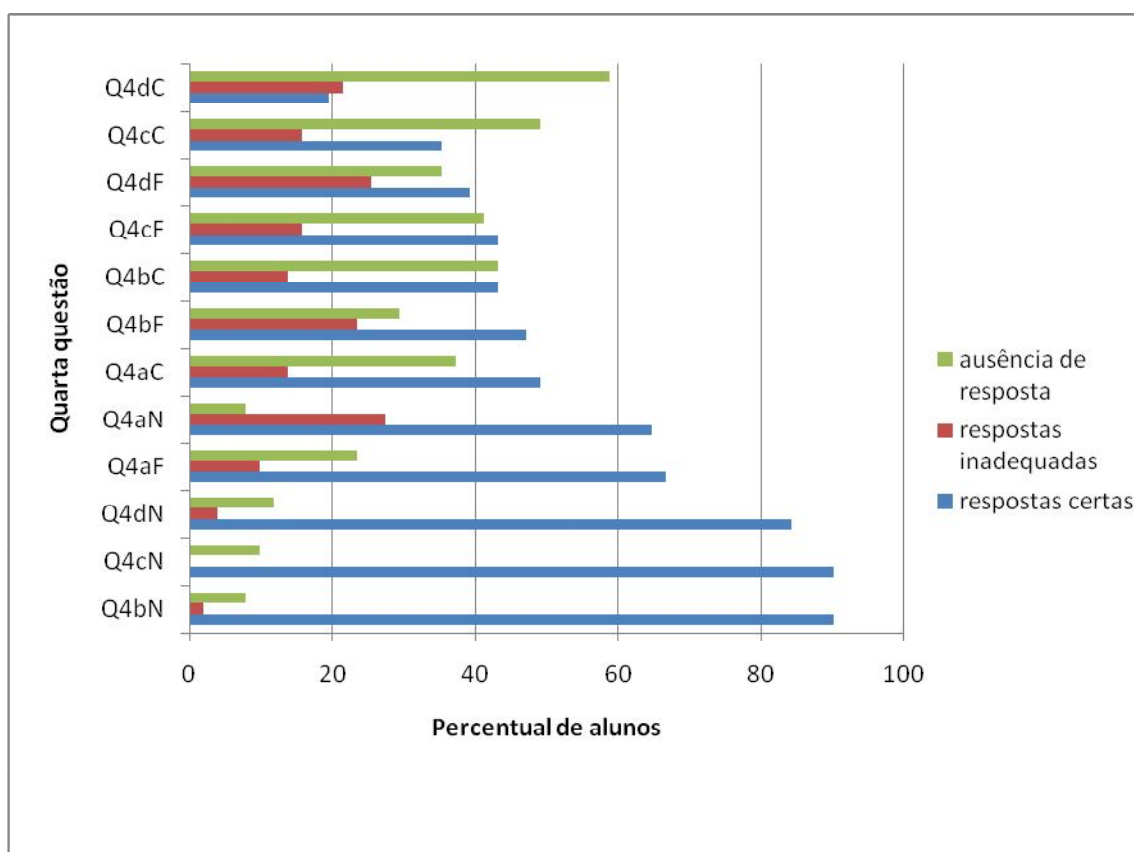


Gráfico 3- Questão 4- situações de medida

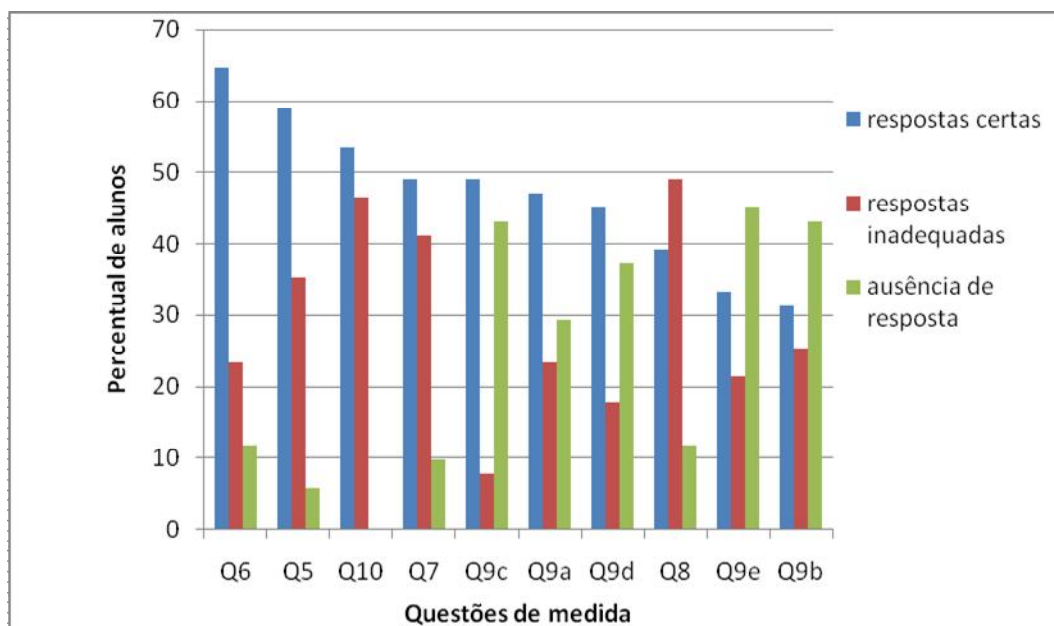


Gráfico 4- Questões- situações de medida

Podemos observar que das questões de situação de medida, as de reconhecimento da figura (Q4aN, Q4bN, Q4cN, Q4dN), da fórmula do paralelepípedo (Q4aF) e de questões de cálculo de volume do paralelepípedo (Q6 e Q10) e da pirâmide em que a fórmula de volume estava explicitada e que não havia necessidade de conversão de unidades de medida (Q5), foram as que obtiveram altos índices de acertos, acima de 50%, e baixo índice de ausência de respostas, abaixo de 30%. A Q10, que exigia a conversão da unidade, tanto de volume quanto de comprimento, além do uso da fórmula de volume do paralelepípedo, foi a que obteve menor percentual de acertos, 53,49%, comparados com os percentuais das outras questões deste grupo. Tal resultado dá indícios de que os alunos dominam a fórmula de volume do paralelepípedo e apresentam dificuldades na transformação de unidades. Observe o quadro abaixo:

Faixa de acertos plenos	Questões	Percentual
Inferior a 30%	Q1, Q4dC, Q11, Q12a, Q12c	17,24%
Entre 30% e 50%	Q3, Q4bF, Q4cF, Q4dF, Q4aC, Q4bC, Q4cC, Q7, Q8, Q9a, Q9b, Q9c, Q9d, Q9e	48,27%
Entre 50% e 75%	Q2, Q4aF, Q4aN, Q5, Q6, Q10, Q12b	24,14%
Superior a 75%	Q4bN, Q4cN, Q4dN	10,35%
Total	29	100%

Quadro 3- Distribuição das questões por percentual de acertos plenos

A maioria dos alunos reconhece a figura geométrica que o sólido desenhado representa, como mostram os resultados da questão Q4N. Na letra a, que era o paralelepípedo, obteve 64,71%; na letra b, que era o cilindro, obteve 90,20%; na letra c, que era o cone, obteve 90,20% e na letra d, que era a esfera, obteve 84,31%, de acertos plenos. Porém, alguns alunos confundem o paralelepípedo com figuras planas (um aluno confundiu com o paralelogramo e treze alunos confundiram com o retângulo). Ver figura a seguir:

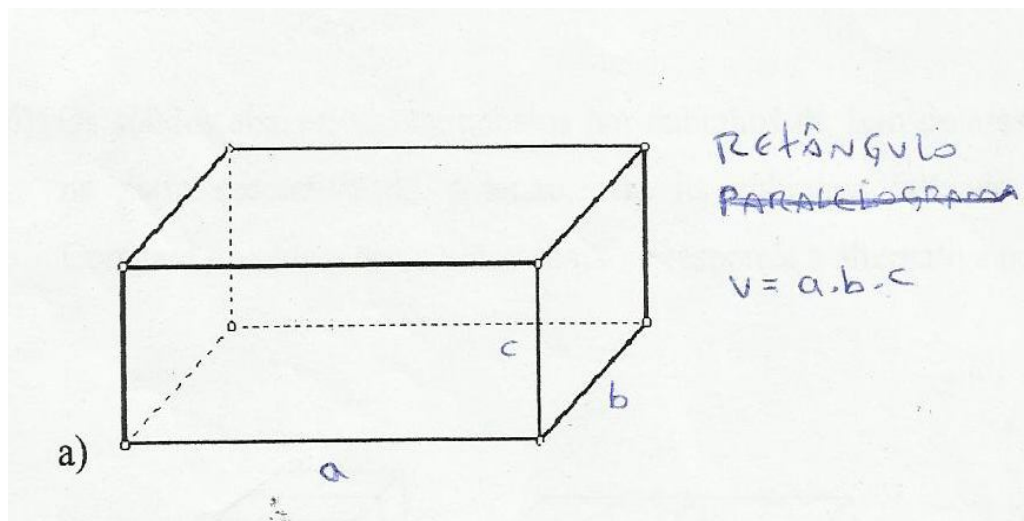


Figura 46- Extrato do protocolo do aluno JS- Atividade Q4a.

Observe que o aluno mesmo confundindo o sólido paralelepípedo com outras figuras geométricas como o retângulo, mostra que reconhece as dimensões necessárias para o cálculo do volume, bem como a fórmula de volume do paralelepípedo. Neste caso, dá indícios de que o aluno apenas tem dificuldades quanto à nomenclatura do objeto, não no aspecto geométrico. Caso apresentasse dificuldades no quadro geométrico, não identificaria as dimensões corretamente, e caso apresentasse dificuldades no campo das grandezas, poderia errar a fórmula de volume, confundindo com fórmulas de outras grandezas, como a fórmula de área. Porém, em outras resoluções podemos identificar dificuldades no quadro numérico e das grandezas. Observe o protocolo a seguir:

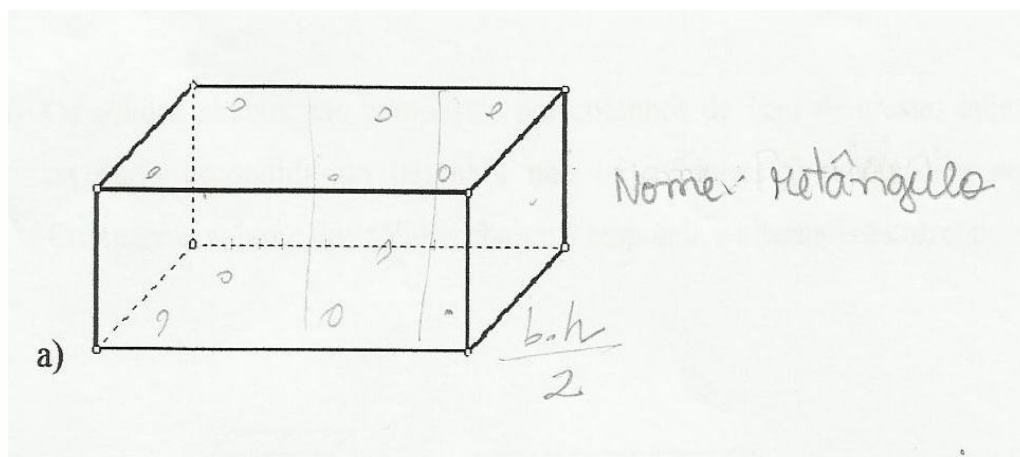


Figura 47- Extrato do protocolo do aluno LM- Atividade Q4a.

O aluno erra o nome do sólido que está sendo representado e a fórmula de volume deste sólido, além de não mostrar as dimensões necessárias para o cálculo de volume. Este mesmo aluno, em outras questões, reforça ainda mais indícios de que não compreende volume como grandeza, pois não articula os quadros geométrico, numérico e das grandezas, como visto nos trabalhos de Oliveira (2002) e Barros (2002). Observe na sexta questão, a aplicação da fórmula de área de um triângulo para o cálculo de volume do paralelepípedo, a ausência da unidade de medida de volume e a representação simbólica de um retângulo, evidenciando os aspectos acima abordados. Ver protocolo referente à sexta questão:

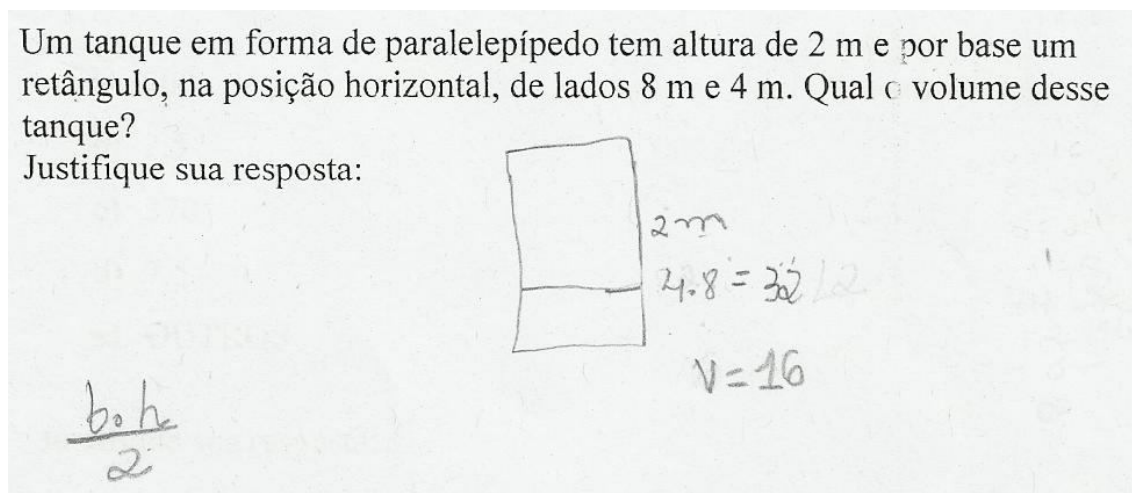


Figura 48- Extrato do protocolo do aluno LM- Atividade Q6.

Quanto às unidades de medida de capacidade ou de volume, as questões de situação de medida mostraram indícios de que os alunos compreendem a unidade de medida de volume e de capacidade, pois até nos casos em que não há uniformidade das unidades de medida de comprimento, como na Q10, mantiveram um elevado percentual de acertos (53,49%).

Alternativas	Quantidade de alunos	Não uniformizou as unidades de comprimento	Errou conversão de cm/m	Errou a conversão de m³/l	Não justificou
A	23	0	0	0	0
B	9	4	0	4	1
C	3	0	0	3	0
D	1	0	0	0	1
E	7	2	4	1	0
Total	43	6	4	8	2

Quadro 4 – Quantitativo de alunos por resposta dada na Q10.

Podemos observar que a maioria dos alunos acertou a questão, embora a maioria dos erros foi devido a não leitura das unidades, ao invés do não reconhecimento da fórmula de volume do paralelepípedo. De acordo com a análise a priori, alguns alunos mobilizaram a concepção aditiva para a grandeza volume, respondendo a alternativa c, mostrando o não reconhecimento da fórmula de volume do paralelepípedo; porém, 18 alunos erraram por ter dificuldades em converter as unidades de medida, ora de volume, ora de comprimento. Nesta questão, dois alunos erraram, pois não transformaram corretamente a unidade de medida de comprimento, embora acertaram a conversão da unidade de medida do volume. Observe um dos protocolos:

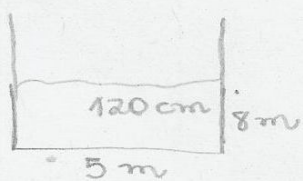
Dois alunos confundem a unidade de medida de volume com a de comprimento, além de desconhecer a fórmula para o cálculo de volume. Observe um dos protocolos:

11) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8m de comprimento, 5m de largura e 120cm de profundidade. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários:

a) 48 000 litros.
b) 48 litros.
c) 133 m^3 .
d) $14,2 \text{ m}^3$.
☒ e) OUTROS.

Justifique sua resposta:

Será 6m e 80cm.



Handwritten calculations and conversions:

$$120 = 1 \text{ m } 20 \text{ cm}$$

$$6 \text{ m e } 80 \text{ cm.}$$

Figura 51- Extrato do protocolo do aluno CV- Atividade Q10.

Assim como o outro aluno que confundiu a unidade de medida de volume com a de comprimento nesta questão, já citado anteriormente (refere-se ao aluno LM), este aluno CV, também dá indícios de que não compreende volume como grandeza, pois não conhece a fórmula de volume do sólido abordado, não identifica as unidades de medida de volume, apenas as unidades de medida de comprimento. Podemos observar também que o aluno revelou possível intenção de evitar trabalhar com números decimais, o que dá indícios de que tem dificuldades em operar com números racionais, pois decompôs o 120cm em 1 metro e 20cm, ao invés de transformar 120cm em 1,2m.

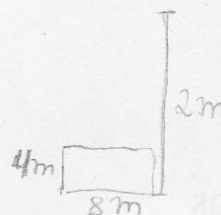
Outro aluno confundiu a unidade de medida de volume com a grandeza comprimento e a grandeza área, nas questões Q5, Q6 e Q7. Observe o protocolo referente às questões Q5 e Q6.

Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?

Justifique sua resposta:

$$4m + 2m = 6m$$

$$V = 6m$$



A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 6$$

$$V = 1,66 \text{ cm}$$

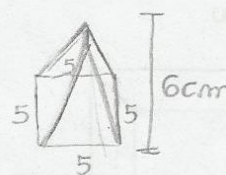


Figura 52- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q6 e Q5.

Observe o trecho da entrevista a seguir, que trata das questão Q5, inicialmente, e depois da questão Q7 desse mesmo aluno:

Entrevistador- *É. Aí no caso, você achou esse volume, esse valor e essa unidade. Que unidade é essa?*

Aluno LMSP- *cm.*

Entrevistador- *O centímetro também é outra unidade de medida pra volume?*

Aluno LMSP- *É.*

Entrevistador- *Nessa questão aqui, ele dá uma pirâmide, dentro de um prisma, certo? Aí ele pede pra calcular o volume dessa pirâmide, não é isso? E ele diz, oh!, que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. Certo? Aí como foi que você achou 370?*

Aluno LMSP- *Eu somei. Que foi aqui a altura aproximada, 140 e, 230 a forma dos lados. Só isso.*

Entrevistador- *E no caso aqui, teria unidade?*

Aluno LMSP- *Ficaria metros ao quadrado? Não. É. 370 m².*

Outro exemplo de não compreensão do campo das grandezas em relação a volume, no trecho da entrevista abaixo, com outro aluno:

Entrevistador- *Quando eu digo assim, volume de alguma coisa, eu digo alguma unidade?*

Aluno BMBS- *Unidade?*

Entrevistador- *Sim.*

Aluno BMBS- *Não!*

Entrevistador- *Então vamos lá! Por aqui você colocou 2 o quê?*

Aluno BMBS- *2 metros.*

Entrevistador- *2 metros, não é isso? E aqui, ficou?*

Aluno BMBS- *Em centímetros.*

Entrevistador- *Teria que ser o quê?*

Aluno BMBS- *Metros, né?*

Entrevistador- *Metros também! E na resposta de volume, teria alguma unidade?*

Aluno BMBS- *Então é metros!*

Inicialmente, o aluno considera volume como uma grandeza adimensional, ao observar as unidades de outra grandeza, no caso os comprimentos das arestas do paralelepípedo, referente à sexta questão, passa a considerar a mesma unidade de medida para volume, mostrando que tem dificuldades no campo das grandezas, por não conhecer as unidades de medida de volume e por confundir volume com comprimento.

Na quinta questão, dois alunos não identificaram as unidades de medida de volume nas respostas certas, dando indícios de mobilizar a concepção de volume número, de acordo com a classificação de concepções de volume de Anwandter-Cuellar (2008). Veja exemplo:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

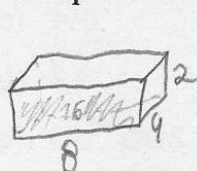
$$V = \frac{25 \cdot 6}{3} \rightarrow \boxed{V = 50}$$

Figura 53- Extrato do protocolo do aluno EG- Atividade Q5.

Observe que esse aluno do protocolo acima, reconhece a fórmula de volume, calcula corretamente, mas não identifica a unidade de medida de volume, o que demonstra dificuldades no campo das grandezas. O outro aluno que não identificou a unidade de medida de volume na quinta questão, também não considera as unidades de volume na sexta questão. Observe a figura a seguir:

- 2) Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?

Justifique sua resposta:



$$8 \times 4 \times 2 = \boxed{64}$$

em litros

64

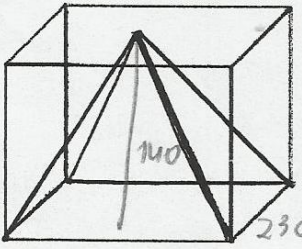
Figura 54- Extrato do protocolo do aluno MNOG- Atividade Q6.

Este aluno dá indícios de mobilizar a concepção volume número, classificada por Anwandter-Cuellar (2008), ao não identificar a unidade de medida de volume. Porém na sétima questão, o aluno MNOG identifica a unidade de volume (m^3), que está explicitada no enunciado da questão.

Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo aproximadamente 230 metros. Logo, o volume da pirâmide de Quéops é de aproximadamente (em milhões de metros cúbicos):

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} 140 \cdot 52900$$



a) 200
 b) 2,5
 c) 370
 d) 7,5
☒ e) OUTROS

Justifique sua resposta:

Handwritten calculations showing the volume calculation:

$$52900 \times 140 = 7406000$$

$$\frac{7406000}{3} = 2468666,67$$

$$2468666,67 \approx 2,5 \times 10^6 \text{ m}^3$$

Figura 55- Extrato do protocolo do aluno MNOG- Atividade Q7.

Nesta questão, o aluno tem dificuldades em resolver por se tratar de Algarismos de ordem de grandeza elevada, milhões, como visto na análise a priori. Tal dificuldade foi observada em 10 alunos que erraram a sétima questão, sendo que um dos alunos errou também a fórmula de volume que será comentado mais adiante. Porém, o aluno MNOG mostra que sabe aplicar a fórmula de volume da pirâmide, assim como na sexta questão. Observe o protocolo referente à Q5:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

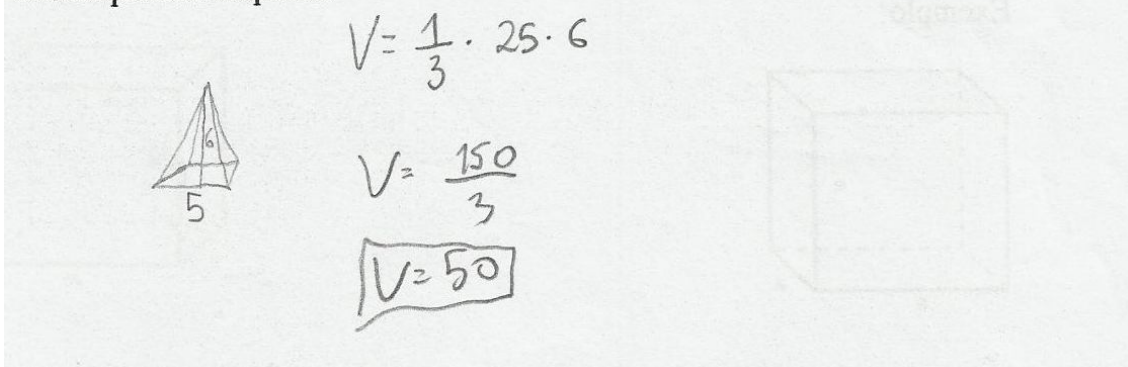


Figura 56- Extrato do protocolo do aluno MNOG- Atividade Q5.

Diante desta questão, além da ausência de unidades de medida de volume, podemos observar a dificuldade dos alunos de lidar com a fórmula de volume de uma pirâmide, por conter a fórmula de área da sua base quadrangular, fato este observado em dois protocolos. Ver exemplo a seguir:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

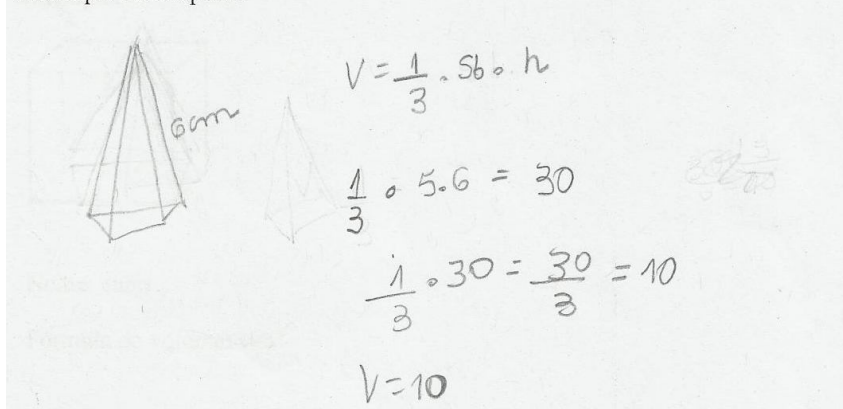
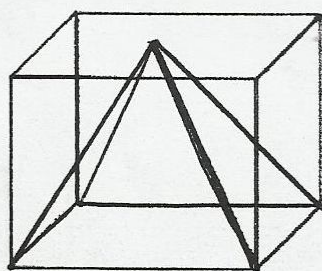


Figura 57- Extrato do protocolo do aluno LM- Atividade Q5.

Observamos que o aluno LM não considera a área da base, e calcula o volume multiplicando o lado do quadrado pela altura da pirâmide, ao invés de calcular a área do quadrado e multiplicar pela a altura da pirâmide. Na sétima questão também podemos observar o mesmo erro presente na resolução de outro aluno. Ver figura:

Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo aproximadamente 230 metros. Logo, o volume da pirâmide de Quéops é de aproximadamente (em milhões de metros cúbicos):



- a) 200
- b) 2,5
- c) 370
- d) 7,5
- e) **OUTROS**

$$V = \frac{1}{3} \cdot 140 \cdot 230$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 32200$$

$$V = \frac{32200}{3}$$

$$V =$$

$$\begin{array}{r} 230 \\ \times 140 \\ \hline 000 \\ 920 \\ 230 \\ \hline 32200 \end{array}$$

Justifique sua resposta:

Figura 58- Extrato do protocolo do aluno MBV- Atividade Q7.

Além de errar a fórmula do volume da pirâmide, o aluno tem dificuldades quanto a lidar com números de ordem de grandeza elevada, como observado na análise a priori.

As questões de situação de medida com baixo índice de resposta plenamente correta, entre 30% e 50%, mas também baixo índice de ausência de resposta, abaixo de 20%, foram as Q7 e Q8.

Na sétima questão, 21,57% dos alunos tiveram dificuldades quanto ao cálculo numérico e 17,67% erraram aspectos quanto à fórmula de volume e da área da base da pirâmide, pois oito alunos desconhecem a fórmula do volume da pirâmide, sendo que quatro realizaram o princípio aditivo e três alunos apenas multiplicaram os valores dados na questão para calcular o volume. Ver exemplo a seguir:

Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo aproximadamente 230 metros. Logo, o volume da pirâmide de Quéops é de aproximadamente (em milhões de metros cúbicos):

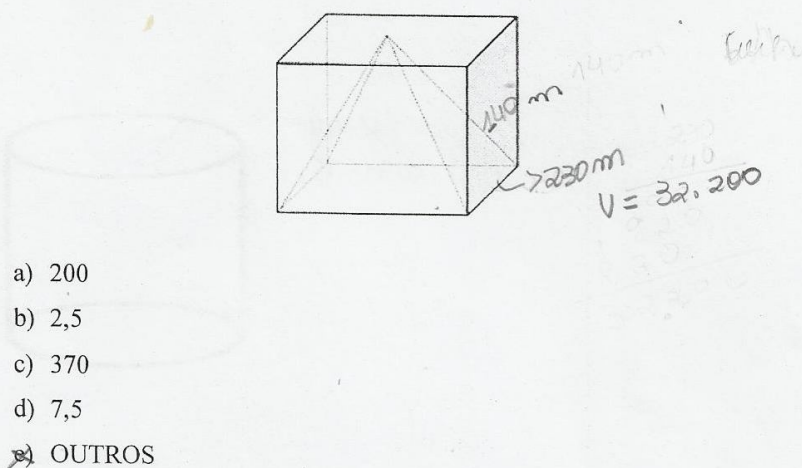


Figura 59- Extrato do protocolo do aluno LM- Atividade Q7.

Um aluno apresentou dificuldades em calcular o volume ao se deparar com números decimais ou inteiros de ordem de grandeza elevada, o que remete a lacunas no campo dos números e operações. Assim, mobilizou o princípio aditivo, respondendo a alternativa c, como era esperado na análise a priori. Ver exemplo:

- c) Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo aproximadamente 230 metros. Logo, o volume da pirâmide de Quéops é de aproximadamente (em milhões de metros cúbicos):

$$\begin{array}{r} 230 \\ \times 230 \\ \hline 6900 \\ 46000 \\ \hline 52900 \end{array}$$

a) 200

b) 2,5

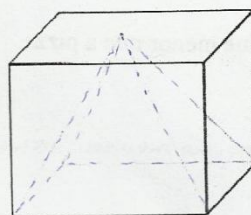
c) 370

d) 7,5

e) OUTROS

Justifique sua resposta:

SEI NÃO!



$$\begin{array}{r} 57513 \\ 27 \overline{) 15416} \\ 25 \\ 20 \end{array}$$

$$\frac{575000}{3} = \frac{575}{3} \cdot 10^3$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 75 \\ \times 2 \\ \hline 525 \\ 75 \\ \hline 600 \end{array}$$

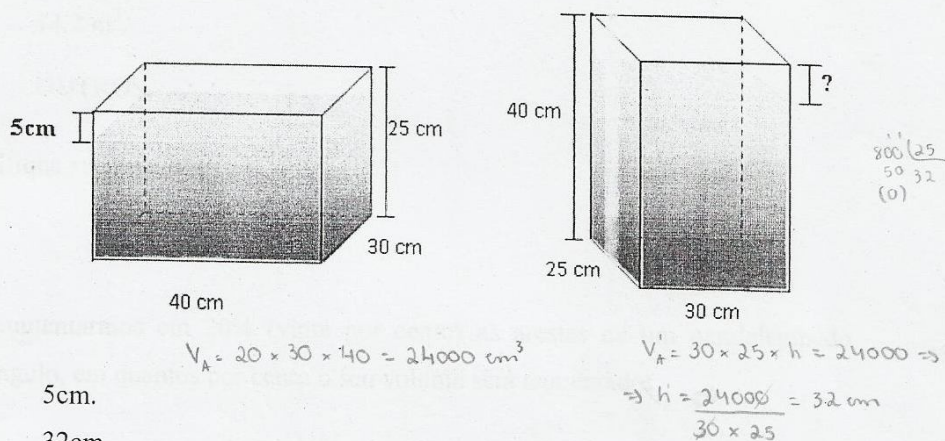
Figura 60- Extrato do protocolo do aluno JS- Atividade Q7.

O aluno calculou errado a multiplicação de 230 por 230, e posteriormente o resultado dessa multiplicação por 140, mostrando dificuldades no campo numérico, apesar de estar realizando os passos na sequência correta para o cálculo de volume, mostrando reconhecer a fórmula de volume.

Os sólidos ocultos, como observado na oitava questão, envolvendo o conceito de capacidade, os alunos não apresentaram dificuldades em calcular o volume, obtendo um percentual de acertos de 39,22%. Seis alunos (11,76%) acertaram a questão, mas não justificaram, e o mesmo percentual de alunos não responderam a questão.

Quatro alunos (7,84%) responderam erroneamente a alternativa b, correspondendo à medida da altura ocupada pelo líquido na caixa de vidro, 32 cm, como observado na análise a priori. Ver exemplo:

- 9) Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



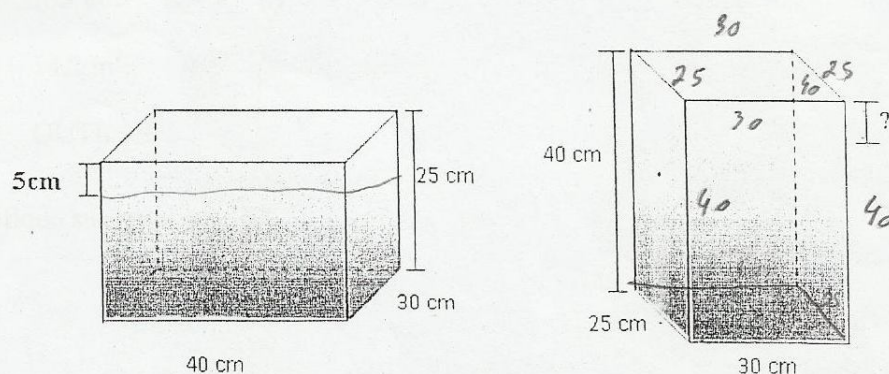
- a) 5cm.
 b) 32cm.
 c) 8cm.
 d) 24000cm³.
 e) OUTROS.

Justifique sua resposta:

Figura 61- Extrato do protocolo do aluno LUI- Atividade Q8.

Treze alunos (25,49%) tiveram dificuldades em compreender que ao conservar o volume, não implica em conservar as medidas do comprimento, largura e altura, ao modificar a posição do sólido, respondendo a alternativa a. Ver figura:

Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



- a) 5cm.
 b) 32cm.
 c) 8cm.
 d) 24000cm^3 .
 e) OUTROS.

Justifique sua resposta:

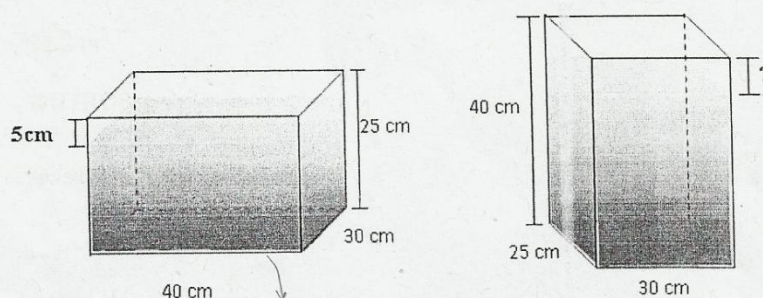
POIS A QUANTIDADE DE ÁGUA É A MESMA

Figura 62- Extrato do protocolo do aluno JPMN- Atividade Q8.

Observe que o aluno tenta resolver a questão através da figura, colocando os valores das dimensões e conclui que se o volume de água não se altera, então o nível de água permanece o mesmo. O aluno não percebe que o nível de água corresponde à medida do comprimento de uma das arestas, ao se calcular a capacidade restante de água para preencher completamente o recipiente, dando indícios de ter mobilizado o teorema-em-ação: Se dois sólidos tem mesmo volume, então eles são idênticos.

Alguns acertam na fórmula de volume do sólido da questão, mas erram no cálculo, mostrando dificuldades no campo numérico. Ver exemplo a seguir:

Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



- a) 5cm.
b) 32cm.
c) 8cm.
d) 24000cm³.
e) OUTROS.

Justifique sua resposta:

$$V_L = 40 \cdot 30 \cdot 20$$

$$V_L = 120 \cdot 20$$

$$V_L = 2400 \text{ cm}^3$$

$$V_C = 30 \cdot 25 \cdot 40$$

$$V_C = 120 \cdot 25$$

$$V_C = 3000 \text{ cm}^3$$

$$V_C - V_L = 3000 - 2400$$

$$V_C - V_L = 600 \text{ cm}^3$$

$$V_C - V_L = 30 \cdot 25 \cdot x \rightarrow \text{altura}$$

$$600 = 30 \cdot 25 \cdot x$$

$$x = 600 \div 750$$

$$x = 0,8 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 12 \\ \hline 250 \\ 1250 \\ \hline 1500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 25 \\ \hline 150 \\ 600 \\ \hline 750 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 600 \overline{) 750} \\ 0,8 \\ \underline{0,8} \\ 750 \\ \underline{750} \\ 0 \end{array}$$

Figura 63- Extrato do protocolo do aluno CAM- Atividade Q8.

Observe que no protocolo acima, o aluno erra nos cálculos da medida de volume, ao multiplicar 40 por 30 e acaba errando os volumes, ao invés de ser 24 000 cm³ considera 2400cm³ e ao invés de 30 000 cm³ considera 3 000 cm³.

Outro exemplo de dificuldade no campo numérico, quanto à situação de medida, o aluno mostra que conhece a fórmula, mas erra nos cálculos de volume do paralelepípedo, veja o exemplo:

Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?

Justifique sua resposta: volume é calculado por área da base. Altura, logo:

$$V = 8 \cdot 4 \cdot 2$$

$$V = 184 \text{ m}^3$$

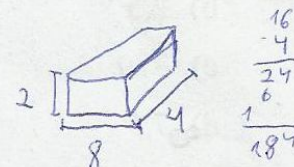


Figura 64- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q6.

Observe a multiplicação 16 por 4, efetuada por ele, no protocolo acima, que considera como resposta do volume 184 m^3 . Neste caso, o aluno compreende volume como grandeza e o campo geométrico, pois representou corretamente o sólido e suas dimensões, apresentou corretamente a unidade de medida, apenas errou no cálculo, mostrando lacunas no campo numérico.

No último grupo estão as questões de situação de medida cujo índice de acerto pleno é inferior a 50% e o índice de ausência de resposta é superior a 20%. Nesse grupo destaca-se a questão de reconhecimento das dimensões da esfera (Q4dC), cujo índice de acerto foi de 19,61% e o índice de ausência de resposta foi de 58,82%. Ainda nesse grupo estão as questões Q4bF, Q4cF, Q4dF, Q4aC, Q4bC, Q4cC, Q9b, Q9d e Q9e cujos índices de acerto pleno estão entre 30% e 50% e nas quais mais de 29% dos alunos deixaram em branco.

Dados referentes à quarta questão apontam dificuldades na compreensão do quadro geométrico, por não reconhecerem as dimensões necessárias para o cálculo de volume e dificuldades no quadro das grandezas, por desconhecerem a fórmula de volume dos sólidos dados, confundindo com fórmulas de outras grandezas, como área, por exemplo.

Como podemos observar no gráfico 3 da página 114, as questões de transformação de unidades (Q9) foram as questões que obtiveram maior percentual de ausência de resposta entre as situações de medida, com exceção da Q4dC, seguida das questões de reconhecimento da fórmula de volume dos sólidos cone, esfera e cilindro, o que reforça ainda mais indícios de

que os alunos não compreendem situações de medida que envolvam conversão de unidades e outros sólidos diferentemente do paralelepípedo.

Quase a metade dos alunos não indicou sobre a figura os comprimentos necessários para o cálculo de volume, principalmente no cone (49,02%) e na esfera (58,82%), o que mostra lacunas no quadro geométrico, por apresentarem dificuldades em identificar, sobre a figura, os elementos geométricos cujos comprimentos estão em jogo no cálculo do volume.

Houve em protocolos de alunos a confusão entre a fórmula de área do círculo com o seu perímetro, respondendo assim para a fórmula do volume do cilindro, por exemplo, $v=2\pi rh$ e do cone, $v=1/3 \cdot 2\pi rh$. Ver figura abaixo.

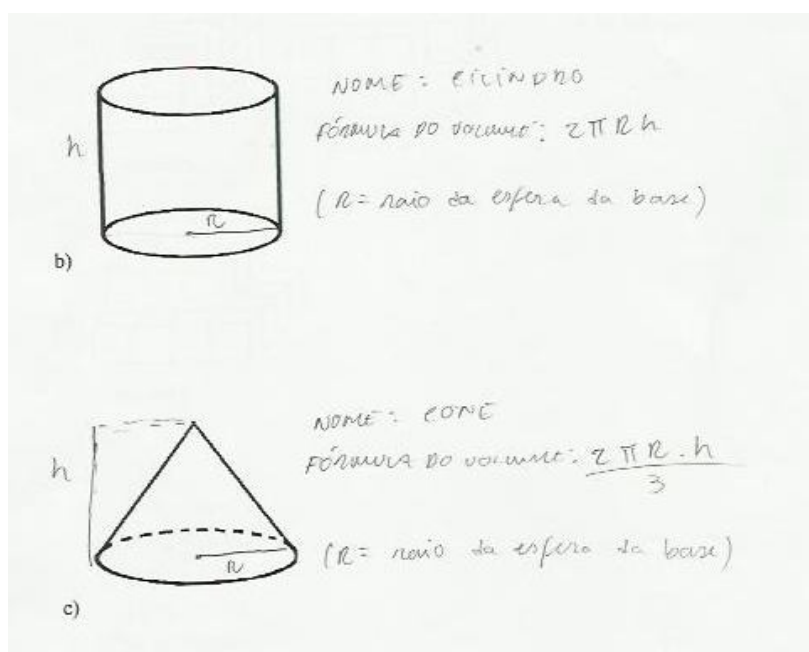


Figura 65- Extrato do protocolo do aluno LMF- Atividade Q4b e Q4c.

Tais resultados explicitam lacunas diante do quadro das grandezas, por não reconhecer a fórmula de volume ou confundi-la com a fórmula do comprimento da circunferência.

Os alunos, diante da questão de transformação de unidade, erraram mais a alternativa a, com índice de erros de 23,53%, a alternativa b, com índice de erros de 25,49% e a alternativa e, com índice de erros de 21,57%, em relação à alternativa c, com índice de erros de 7,84% e elevado percentual de respostas certas, 49,02%, e à alternativa d, com percentual de acertos também elevado, 45,10%. As alternativas d e e, tratavam-se de uma transformação

que envolvia uma relação entre grandezas de volume e de capacidade conhecida pelos alunos, a relação: 1cm^3 corresponde a 1ml. Então, na alternativa “e” era só conhecer a relação, que não precisava de transformar as unidades. Conhecendo tal relação, ficava mais fácil transformar as unidades da letra d. Ver exemplo:

10) Sabendo que 1 litro corresponde a 1dm^3 , transforme:

a) 2m^3 em litros;
 b) 10 dl em dm^3 ;
 c) $0,001\text{dm}^3$ em ml;
 d) 1cm^3 em ml;
 e) $0,01\text{dl}$ em cm^3 .

Justifique sua resposta:

a) 2000 l
 b) 1dm^3
 c) 1 ml
 d) 1 ml
 e) 1cm^3

Handwritten notes and calculations:

$1\text{dm}^3 = 1\text{l}$
 $0,1\text{dm}^3 = 0,1\text{l}$
 $1\text{dl} = 0,1\text{l}$
 $1\text{l} = 10\text{dl}$
 $10\text{dl} = 1\text{dm}^3$

$0,001\text{dm}^3 = 1\text{cm}^3$
 $1\text{cm}^3 = 1\text{ml}$
 $0,001\text{dm}^3 = 1\text{ml}$

$1\text{cm}^3 = 1\text{ml}$

$0,01\text{dl} = 1\text{ml}$
 $1\text{ml} = 1\text{cm}^3$

Other handwritten notes:

$1\text{dm}^3 = 1.10^{-3}\text{m}^3$
 $1\text{l} = 1.10^{-3}\text{m}^3$
 $1\text{dm}^3 = 1000\text{cm}^3$
 $1 = x.10^{-3}$
 $\frac{2.10^0}{1.10^{-3}} = 2.10^3$
 $x = 2.10^3\text{l}$

Figura 66- Extrato do protocolo do aluno VIC- Atividade Q9.

Porém, os que não conheciam tal relação, acertaram a transformação utilizando a relação dada no enunciado: 1 litro corresponde a 1dm^3 . Observe no protocolo a seguir que o aluno compreende a relação 1 litro corresponde a 1dm^3 e acerta a letra a da questão, mas não reconhece a relação 1cm^3 corresponde a 1ml, trocando-a pela relação 1m^3 corresponde a 1ml, errando desta forma as letras c, d e e.

10) Sabendo que 1 litro corresponde a 1 dm^3 , transforme:

- a) 2 m^3 em litros;
- b) 10 dl em dm^3 ;
- c) $0,001 \text{ dm}^3$ em ml ;
- d) 1 cm^3 em ml ;
- e) $0,01 \text{ dl}$ em cm^3 .

Justifique sua resposta:

a) $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ m}^3$
 $1000 \cancel{\text{m}^3} = 1 \text{ l}$
 $2 \cancel{\text{m}^3} = x$
 $x = 2 \text{ ml} = 2000 \text{ l}$

b) $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$
 $x \cancel{\text{dm}^3} = 10$
 $x = 10 \text{ dm}^3$

c) $1 \text{ m}^3 = 1 \text{ ml}$
 $1 \text{ m}^3 = 0,001 \text{ dm}^3$
 $0,001 \text{ dm}^3 = 1 \text{ ml}$

d) $1 \text{ m}^3 = 1 \text{ ml}$
 $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$
 $10^6 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$
 $1 \text{ cm}^3 = x$
 $x = 0,000001 \text{ cm}^3$

e) $0,01 \text{ dl} = 0,01 \text{ l}$
 $100 \text{ ml} = x$
 $10^{-6} \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$
 $x = 0,0001 \text{ cm}^3$

Figura 67- Extrato do protocolo do aluno SAC- Atividade Q9.

Quanto à letra b, por descuido, o aluno considerou 10 dl como sendo 10 litros, errando a questão. Porém, tal aluno mostra que conhece as unidades de volume e de capacidade necessárias para as transformações exigidas, bem como as estratégias que deve mobilizar para resolver tais situações de transformação.

Um dos alunos justifica durante a entrevista a sua dificuldade nas questões que envolvem transformações de unidades de medida de volume, como na Q9, alegando não saber transformar determinadas unidades de medida, por não estar habituado a trabalhar com elas. Observe o extrato da entrevista:

Entrevistador- *Você desconhece essa unidade, é isso?*

Aluno RBM- *É porque eu não, é, exato, porque é uma coisa que eu não uso usualmente, assim, eu já vi mas como é uma coisa que eu não costumo exercitar.*

Entrevistador- *Certo, mas você sabe os múltiplos e submúltiplos do metro? E do metro cúbico, do litro?*

Aluno RBM- *Assim, eu peço nessa hora. Que é uma coisa básica que talvez eu, como o fato de só utilizar certos tipos de unidades, eu não olho pra outras e acabo perdendo questões.*

As situações de produção Q11 e Q12a, obtiveram índices de acertos abaixo de 30% e elevado índice de ausência de respostas, acima de 20%. Tais questões necessitavam da

construção de um sólido. Portanto, devido aos poucos acertos e ao elevado percentual de ausência de resposta e de respostas inadequadas nesse tipo de situação, os resultados apontam indícios de que os alunos não conseguem calcular o volume do sólido a ser construído e que os alunos não conseguem dissociar o sólido do volume e construir sólidos diferentes do sólido dado.

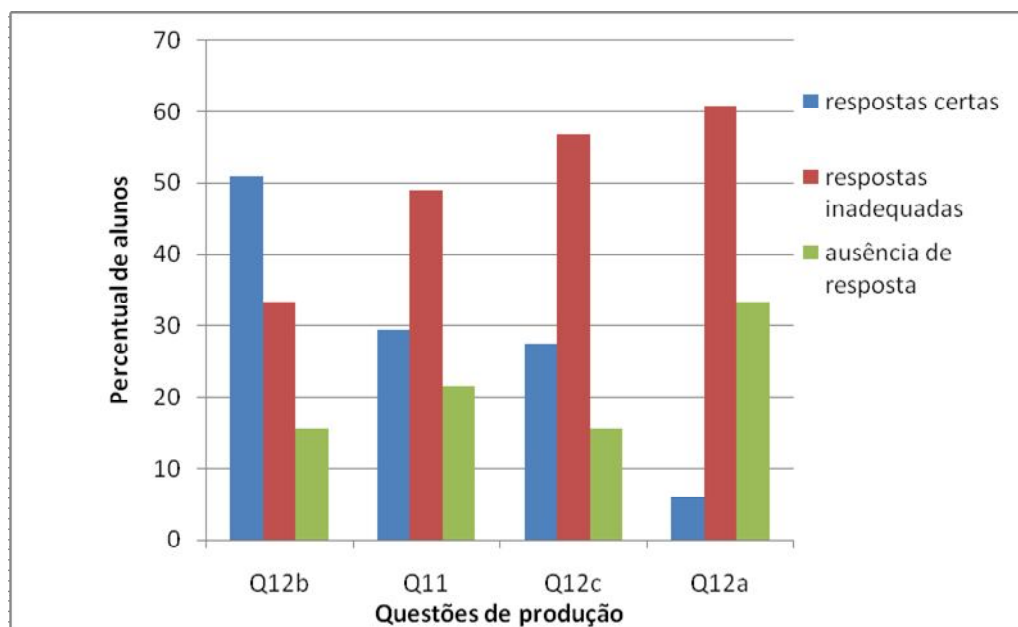


Gráfico 5-Situações de produção

Na décima primeira questão, era dado o sólido para construir outro sólido com um terço do seu volume, apenas quinze alunos (29,41%) conseguiram calcular o volume do sólido e construir o sólido com um terço do volume calculado. Sete alunos que acertaram, construíram empilhamentos de cilindros, mostrando dependência do volume com a forma do objeto, segundo observado no estudo de Anwandter-Cuellar (2008). Um dos alunos construiu um cilindro, além de um paralelepípedo. Observe o exemplo:

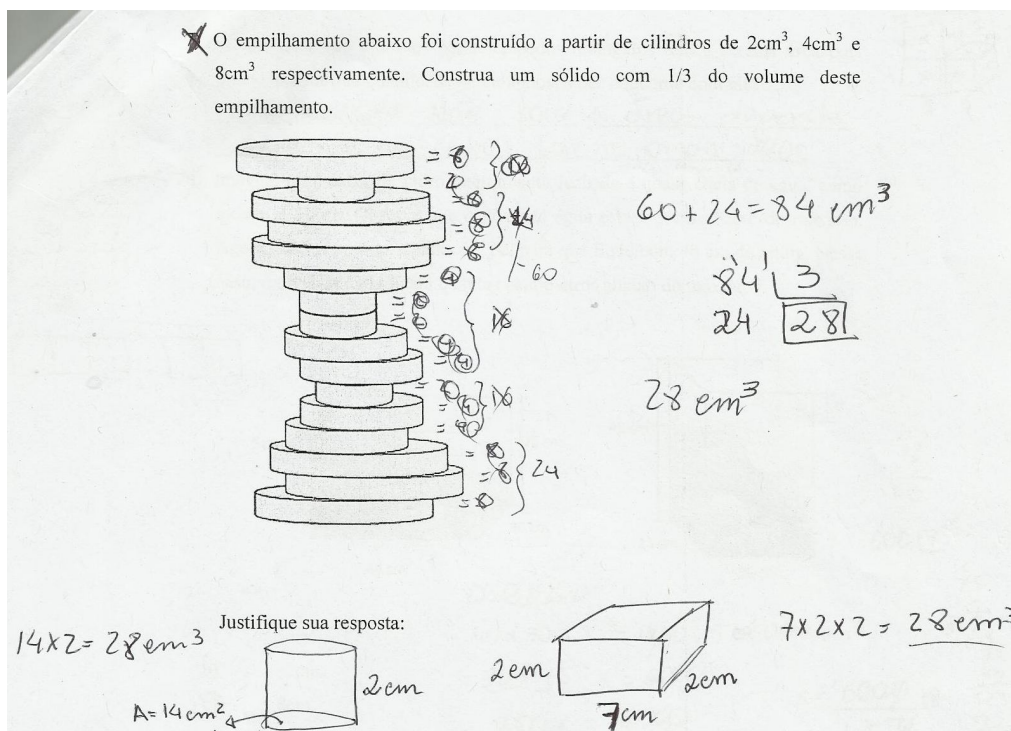


Figura 68- Extrato do protocolo do aluno JOR- Atividade Q11.

Três alunos construíram a pirâmide mas, um deles durante a entrevista, alegou que não seria possível construir sólidos como o cilindro, o cone e a esfera. Observe a justificativa dada por um dos alunos:

“Entrevistador- Nessa questão aqui da produção do sólido, você pensou nessa figura, nesse sólido, não é isso? Teria outro diferente que você poderia construir, ou não?”

Aluno AKRS -Com o cone eu acho que não iria dar exato, porque a gente teria que multiplicar pelo valor de π . Como o valor de π não é exato, não iria dar 28. O cilindro também multiplica por π , então acho que não. (dá uma pausa para pensar). Há! Já a pirâmide podia ser. (fica pensativa) Porque se tivesse uma pirâmide de base quadrada iria funcionar como o paralelepípedo porque...(fica pensativa), digamos que a base fosse dois e a altura da pirâmide fosse sete. Mas o volume da pirâmide é um terço. Então, não dá 28, não sei, (fica pensativa), então tinha que ter uma pirâmide de base quadrada, de lado 2 e a altura ao invés de ser 7 seria 21, aí ia dar certo o volume.”

Diante do que foi exposto na entrevista, mostra-nos que o aluno tem dificuldades quanto a lidar com os números irracionais e se prende ao quadro numérico, não observando que seria possível construir outros sólidos, mesmo que na fórmula de seu volume contenha o

número irracional π . Porém, tal aspecto não será aprofundado neste estudo, o que sugerimos abordá-lo em uma pesquisa posterior.

Alguns ainda insistem em calcular o volume do sólido a ser construído, utilizando a fórmula do volume do cone, já que o sólido da questão é um empilhamento de diversos cilindros e acreditam que o sólido a ser construído é um cone, errando a questão. Observe abaixo:

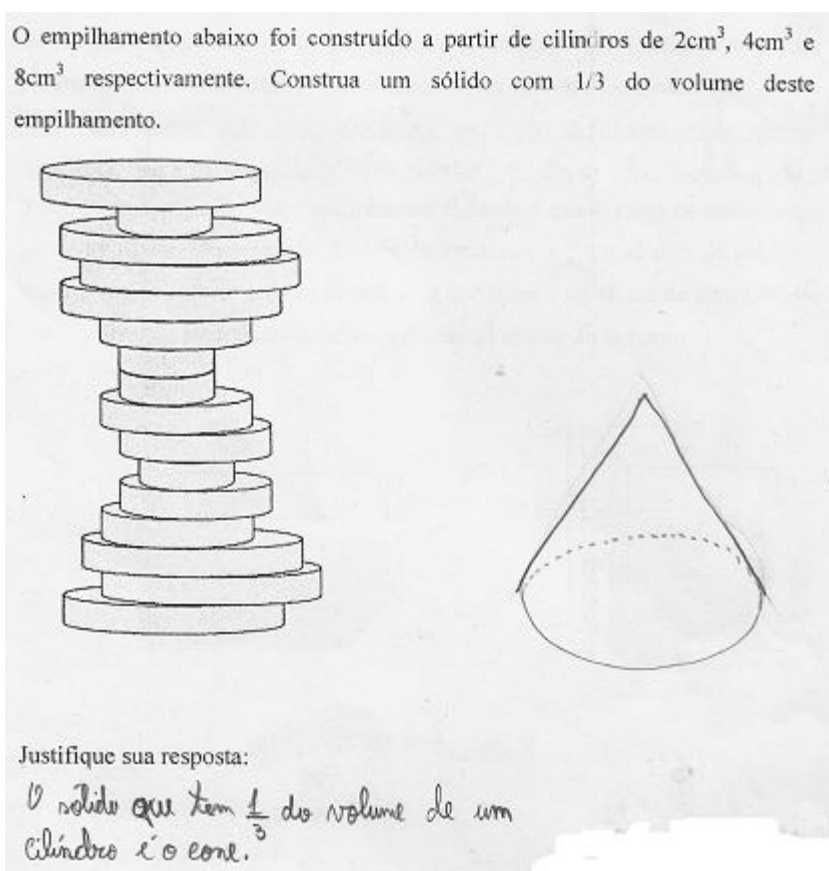


Figura 69- Extrato do protocolo do aluno CLA- Atividade Q11.

Fato este observado no protocolo acima, remete à concepção volume número segundo a classificação de Anwandter-Cuellar (2008), pois o aluno mobiliza a fórmula de volume do cone para construir o sólido com um terço do volume do empilhamento de cilindros.

A questão Q12a, em que era dado o volume para serem construídos com cubinhos sólidos diferentes, foi a que mais obteve respostas inadequadas deste grupo de situações (55,78%), o que mostra a dificuldade dos alunos em decompor o número 36, para encontrar os

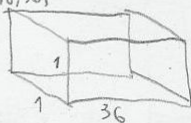
sólidos de mesmo volume. Apenas três alunos realizaram a montagem dos sólidos corretamente. Ver figura abaixo.

João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos.

Justifique sua resposta:

8 paralelepípedos.



$36 = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$V = a \times b \times c = 36 \text{ cm}^3$

$V_1 = 1 \times 1 \times 36 = 36 \text{ cm}^3$ $V_6 = 2 \times 2 \times 9 = 36 \text{ cm}^3$

$V_2 = 1 \times 2 \times 18 = 36 \text{ cm}^3$ $V_7 = 2 \times 3 \times 6 = 36 \text{ cm}^3$

$V_3 = 1 \times 3 \times 12 = 36 \text{ cm}^3$ $V_8 = 4 \times 3 \times 3 = 36 \text{ cm}^3$

$V_4 = 1 \times 4 \times 9 = 36 \text{ cm}^3$

$V_5 = 1 \times 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^3$

Figura 70 - Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q12a

Observe em outro protocolo, como o aluno encontrou as combinações possíveis para montar os paralelepípedos, decompondo o número 36 em seus divisores, porém representa o sólido mobilizando a concepção de volume medida, pois desenhou um sólido formado por cubinhos, considerando a unidade de medida de volume, o cubinho:

João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos.

Justifique sua resposta:

$R = 8$ paralelepípedos retângulos

$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36 \rightarrow 1$

$36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 \rightarrow 1$

$36 = 1 \cdot 3 \cdot 12 \rightarrow 1$

$36 = 1 \cdot 4 \cdot 9 \rightarrow 1$

$36 = 1 \cdot 6 \cdot 6 \rightarrow 1$

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 9 \rightarrow 1$

$36 = 2 \cdot 3 \cdot 6 \rightarrow 1$

$36 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow 1$

$36 = 3 \cdot 2 \cdot 6 \rightarrow 1$



Figura 71- Extrato do protocolo do aluno CLA- Atividade Q12a.

Em outro protocolo, podemos observar a concepção volume número em jogo, pois a fórmula de volume é explicitada tanto por enunciado quanto por representação gráfica.

Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

8) João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. → 

Justifique sua resposta: Resp: 8

Handwritten notes: $V = a \cdot b \cdot c$ → O volume do paralelepípedo será sempre $A_b \cdot h$ → ou seja, a multiplicação de 3 valores. Já que estamos lidando com cubinhos, esses valores devem ser sempre inteiros (justificamos).

Handwritten notes: Devemos achar todos as combinações de 3 números cujo produto resulte em 36!

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume. O que você acha?

Handwritten list of factorizations for 36:

- 1 · 1 · 36 (I)
- 1 · 2 · 18 (II)
- 1 · 3 · 12 (III)
- 1 · 4 · 9 (IV)
- 1 · 6 · 6 (V)
- 2 · 3 · 6 (VI)
- 2 · 2 · 9 (VII)
- 3 · 3 · 4 (VIII)

Figura 72- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q12a.

Dos erros, treze alunos buscaram nos divisores as combinações possíveis, porém erraram na quantidade de combinações. Outros erros indicam que os alunos buscaram dividir em partes iguais os 36 cubinhos e acharam respostas diversas, como 3, 4, 6, 12 e 18 paralelepípedos, o que aponta para a interpretação incorreta do enunciado da questão.

O aluno pode considerar diferentes posições de um mesmo paralelepípedo retângulo, formando sólidos de mesmo volume, porém com dimensões trocadas, ou seja, um sólido de medidas (6 x 2 x 3) de dimensões e outro de medidas (2 x 6 x 3) como sendo diferentes. Desta forma pode errar na quantidade de paralelepípedo retângulo formados, dando um valor acima do esperado, como foi observado em uma das respostas, na qual um aluno considerou 10 paralelepípedos formados, conforme visto na análise a priori.

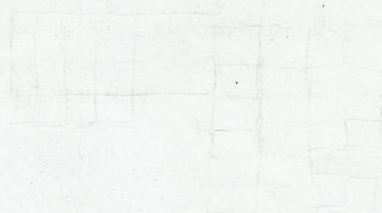
As questões Q12b e Q12c foram questões de produção, que estavam relacionadas com o conceito de volume a partir da construção de sólidos. A Q12b tratava da compreensão da independência de volume com a forma do sólido a ser construído e na Q12c relacionava com a área da superfície externa. De acordo com os resultados obtidos, podemos observar no gráfico que a Q12b foi melhor compreendida pelos alunos, mostrando percentual de acertos igual a 50,98%, o que evidencia que os alunos compreendem volume como uma grandeza autônoma, independente da forma do objeto a ser construído com a mesma quantidade de cubinhos de 1cm de aresta cada, de acordo com Anwandter-Cuellar (2008). Em tal questão, dos 17 alunos que erraram, correspondendo a um percentual de erros igual a 33,33%, ou não resolveram a Q12a, correspondendo a 7 alunos; ou resolveram dividindo o número 36, por um

número divisor, dando como resposta o resultado não esperado na análise a priori. Observe o exemplo:

8) João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos.

Justifique sua resposta:



b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume.

O que você acha?

Acho que não, pois a quantidade de volume depende da forma que ele irá montar cada paralelepípedo, (com mais cubinhos na horizontal ou vice-versa)

Figura 73- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q12b.

Tal resultado aponta para a relevância da relação existente entre a produção do sólido (Q12a) e a compreensão de conservação de volume (Q12b), visto no trabalho de Anwandter-Cuellar (2008). Os alunos que acertaram a questão Q12a, ou que tentaram resolver pela decomposição do número 36 e assim obtinham as dimensões possíveis, mas não conseguiram encontrar as 8 combinações da resposta correta, acertaram a questão Q12b, o que dá indícios de que os mesmos compreendem a independência de volume quanto à forma do objeto e de que mobilizaram o teorema-em-ação correto do ponto de vista matemático: “Sólidos compostos por outros sólidos, organizados diferentemente têm mesmo volume”.

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume.

O que você acha?

Sim! Pois o volume dos 36 cubinhos permanecerá o mesmo, o que mudará será a organização dos cubinhos.

Figura 74- Extrato do protocolo do aluno GLSS- Atividade Q12b.

Porém, a questão Q12c obteve um índice mais baixo de respostas certas, em relação à Q12b, por tratar da relação entre duas grandezas, volume e área. Os alunos podem ter mobilizado o teorema-em-ação errôneo do ponto de vista matemático: “Sólidos de mesmo volume têm a mesma área”, segundo observado no trabalho de Anwandter-Cuellar (2008). Observe o exemplo:

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

Sim, pois possuem a mesma quantidade sempre

Figura 75- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q12c.

O aluno relacionou a quantidade de cubinhos com a conservação da área, assim como fez com a questão Q12b.

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume. O que você acha?

Porque ele usa a mesma quantidade de cubinhos sempre

Figura 76- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q12b.

Porém, não compreende que compor sólidos diferentes com mesma quantidade de cubinhos unitários é algo que conserva volume e que não conserva a área da superfície dos possíveis sólidos construídos. Observe o protocolo abaixo:

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

Não. As faces de diferentes paralelepípedos apresentam dimensões diferentes e conseqüentemente áreas diferentes.

Figura 77- Extrato do protocolo do aluno FLA- Atividade Q12c.

“As faces” a que o aluno se refere são a superfície exposta de cubinhos ao formar os paralelepípedos. O aluno compreende a relação entre a grandeza área com a forma do objeto construído.

4.5 INVARIANTES OPERATÓRIOS

Teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são os invariantes operatórios que compõem os esquemas, são os conhecimentos contidos nos esquemas, os quais consistem na organização da conduta para certa classe de situações (VERGNAUD, 1990).

Como já foi dito, teorema-em-ação é uma proposição considerada pelos sujeitos como verdadeira. Podemos observar indícios de mobilização de vários teoremas-em-ação possivelmente desenvolvidos pelos alunos diante das respostas dadas para cada situação. Eles permitem interpretar procedimentos corretos, mesmo que os sujeitos não sejam capazes de explicar, e também erros. Para isso, foi preciso explicitar através de codificação os teoremas-em-ação corretos do ponto de vista da matemática acadêmica e os que não são. Assim, codificamos TAC os teoremas-em-ação corretos do ponto de vista da matemática acadêmica e denominamos TAE para teoremas-em-ação errôneos do ponto de vista da matemática acadêmica. Desta forma listamos os teoremas-em-ação mobilizados pelos alunos diante das resoluções das questões e durante as entrevistas.

TA1C “Sólidos de mesma massa e mesma densidade têm mesmo volume”

Na situação de comparação, em que eram comparados dois pedaços de massa de modelar modificados em uma esfera e o outro numa pizza, obtivemos como justificativas: “se a massa é igual e provavelmente tem a mesma densidade, então terá o mesmo volume”, “mesmo material, mesma medida, apenas dimensões diferentes”, o que podemos observar em tais protocolos que os alunos compreendem o princípio de conservação de volume relacionado com a invariância da massa e da densidade do objeto, como observado no trabalho de Barros (2002). Observe o protocolo a seguir:

1) Com dois pedaços iguais de massa de modelar, formamos: com um deles uma esfera e com outro uma pizza. Marque a alternativa correta:

- ☒ a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume.
- b) A esfera tem volume maior que a pizza.
- c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta: sendo a fórmula de volume $V = \frac{m}{\rho}$ e tendo a esfera e a pizza iguais massas e densidades, infere-se que o volume também será igual.

Figura 78- Extrato do protocolo do aluno SAC- Atividade Q1.

Segundo Oliveira (2007), a compreensão do conceito de densidade é importante para a aquisição do conceito de volume. Desta forma, a mobilização desse TA1C dá indícios de que o aluno compreende o conceito de volume, relacionado a outros conceitos.

TA1E: “Sólidos diferentes têm necessariamente volumes diferentes”

Em algumas respostas da primeira questão, identificamos a dependência de volume com a forma do objeto, justificando ser a forma do objeto responsável pela conservação ou não do volume dos objetos formados, segundo a justificativa: “Pois a pizza também tem a forma de uma esfera, sendo assim, ambos terão o mesmo volume”. Entre as respostas corretas, justificativas erradas, relacionando a forma do objeto com a conservação do volume: “Porque eles possuem formas semelhantes”, relacionando volume com o tamanho do objeto: “tem o mesmo volume, pois os dois objetos têm os mesmos tamanhos ou seja são iguais, só que em formas diferentes”, o que mostra que o princípio de conservação de volume em relação a conservação da densidade e da massa do objeto ainda não está bem esclarecido ao aluno.

O teorema-em-ação TA1E também foi mobilizado por seis alunos na Q12b, ao relacionar volume com a forma dos objetos construídos com a mesma quantidade de cubinhos de 1cm de aresta cada. Observe o protocolo a seguir:

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume.

O que você acha?

Não, pois serão construídos cubinhos diferentes

Figura 79- Extrato do protocolo do aluno VGS- Atividade Q12b.

TA2E: Se dois sólidos têm a mesma massa, então têm o mesmo volume.

Observe o protocolo a seguir que mostra como esse teorema-em-ação TA2E foi mobilizado:

1) Com dois pedaços iguais de massa de modelar, formamos com um deles uma esfera e com outro uma pizza. Marque a alternativa correta:

☒ Os dois objetos formados têm o mesmo volume.

b) A esfera tem volume maior que a pizza.

c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta: *É utilizada a mesma massa, logo, mesmo volume*

Figura 80- Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q1.

O que levou ao índice elevado de erros nesta questão, 82,36%, foi os alunos terem justificado a alternativa correta desta forma representada no protocolo acima, mobilizando esse teorema-em-ação TA2E. Fato este também observado no trabalho de Barros (2002). Em respostas desse tipo, não podemos saber se implicitamente o aluno mobilizou a ideia de que os dois objetos formados têm a mesma densidade ou se esse aspecto não é considerado; pois, pela Teoria dos Campos Conceituais, o sujeito pode mobilizar algum conhecimento que não é capaz de explicitar. Para pensar que essa resposta estaria realmente errada, precisaria ter materiais de densidades diferentes e ver se o critério único da massa é usado; porém, como não foi justificada adequadamente, resposta desse tipo foi considerada errada.

TA3E: O volume de um sólido se altera na mesma proporção que seus comprimentos.

Em outra situação de comparação, em que havia a necessidade de compreensão da trilinearidade do volume, dos 25 alunos que erraram, onze alunos ainda adotam a concepção linear de volume, desenvolvendo o teorema-em-ação errôneo de que o volume altera na mesma proporção que a aresta, ou seja, se a aresta aumentar de 20%, então o volume também aumenta de 20%. Veja protocolo a seguir:

Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

☒ a) 20%

b) 0,8%

c) 60%

d) 72,8%

e) OUTROS

Justifique sua resposta:

Pois aumentará proporcionalmente

Figura 81- Extrato do protocolo do aluno RAS- Atividade Q3.

O aluno, ao mobilizar o teorema-em-ação TA3E, não percebe que “volume é uma função trilinear com relação ao comprimento de suas arestas que partem de um mesmo vértice (comprimento, largura e altura)”. (BARROS, 2002, p.94)

TA2C: Sólidos compostos por outros sólidos, organizados diferentemente, têm mesmo volume.

Na questão em que pede para formar com 36 cubinhos de mesmo volume cada, paralelepípedos diferentes, os sujeitos podem mobilizar o teorema-em-ação TA2C, ao considerar que todos os paralelepípedos formados terão o mesmo volume. Observe o exemplo:

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume.

O que você acha?

É verdade, pois mesmo que mude a ~~posição~~ disposição dos cubinhos, o resultado sempre será o mesmo.

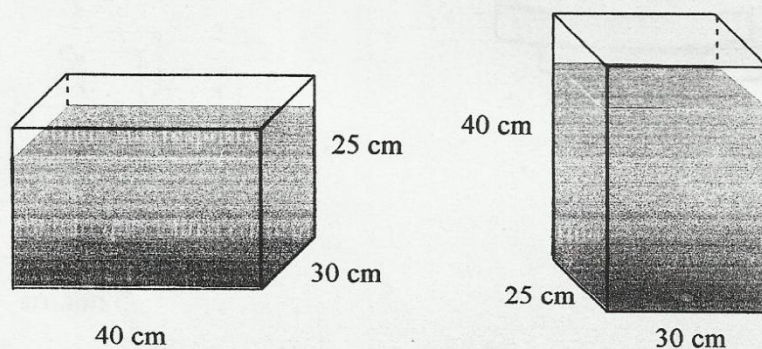
Figura 82- Extrato do protocolo do aluno CAM- Atividade Q12b.

Observamos no protocolo acima, que o aluno considera o mesmo volume para todos os sólidos formados, independente da sua forma de organização de cubinhos.

TA4E: Se dois sólidos têm mesmo volume, então eles são idênticos.

Ao mobilizar o teorema-em-ação TA3E, o sujeito pode considerar que as dimensões de um sólido não podem se alterar, já que o volume permanece o mesmo. É o que observamos no protocolo a seguir:

Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



- a) 5cm.
- b) 32cm.
- c) 8cm.
- d) 24000cm^3 .
- e) OUTROS.

$$V_1 = 25 \times 40 \times 30$$

$$V_1 = 25 \times 1200$$

$$V_1 = 30.000 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = 40 \times 25 \times 30$$

$$V_2 = 30.000 \text{ cm}^3$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 12 \\ \hline 300 \end{array}$$

Justifique sua resposta: O volume da água é o mesmo.

Figura 83- Extrato do protocolo do aluno EGB- Atividade Q8.

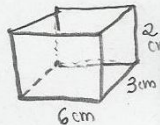
Ao considerar que as dimensões não se alteram por manter o mesmo volume, o aluno conclui que o nível da água permanece o mesmo, dando indícios de mobilizar o teorema-em-ação TA4E. Segundo Anwandter-Cuellar (2008), esse teorema-em-ação TA4E está relacionado com a concepção de volume sólido, classificada em seu estudo.

TA3C: As áreas das superfícies de sólidos de mesmo volume não são necessariamente iguais.

O teorema-em-ação TA3C pode ser mobilizado na situação de produção, ao relacionar a grandeza área com a grandeza volume, como no exemplo a seguir:

$A_T = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4$
 $A_T = 18 + 24 + 24$
 $A_T = 66 \text{ cm}^2$

$A_T = 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3$
 $A_T = 36 + 24 + 12$
 $A_T = 72 \text{ cm}^2$

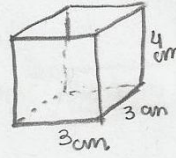
mo: 

$A_T = 72 \text{ cm}^2$
 $V = 36 \text{ cm}^3$

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

Não, pois a área total do prisma não se mantém constante só por causa do volume

Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



$A_T = 66 \text{ cm}^2$
 $V = 36 \text{ cm}^3$

Figura 84- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q12c.

Observe que o aluno mobiliza claramente o teorema-em-ação TA3C, ao justificar a letra c da décima segunda questão, além de mostrar exemplos de sólidos com mesmo volume e com áreas diferentes.

TA4C: Volume e área são grandezas distintas.

Em situações de produção, ao relacionar área com a produção dos sólidos, a maioria que acertou a questão, pode ter mobilizado o teorema-em-ação TA4C. Um deles justificou: “se os cubos estão organizados de forma diferente, logo terão áreas das faces diferentes”, observando assim que tais alunos compreendem área e volume como grandezas distintas. Observe o exemplo abaixo.

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

Não, pois essa grandeza vai depender da organização dos cubinhos
exemplo: $(2,2,9) \rightarrow 2 \cdot 4 + 4 \cdot 18 + 8 + 12 = 20 \text{ cm}^2$ / $(3,3,4) \rightarrow 3 \cdot 2 + 4 \cdot 12 \rightarrow 18 + 48 = 66 \text{ cm}^2$

Figura 85- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q12c.

TA5E: Sólidos de mesmo volume têm a mesma área.

Porém 10 alunos podem ter mobilizado o teorema-em-ação errôneo acima, o que levou ao erro, pois a área poderá variar de acordo com o paralelepípedo retângulo formado na décima segunda questão. Veja o trecho da entrevista a seguir:

Aluno RBM- “...É, João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele? Sim, porque, por exemplo, se eu pego 36 cubinhos e uma coluna e eu tiro daqui e coloco aqui para fazer duas colunas de 18, eu vou tirar a área daqui mas vou colocar aqui, então, é meio que, o que eu vou tirar daqui compensa aqui, também porque é o mesmo tamanho de cubinhos, se fossem cubinhos diferentes, a área poderia mudar, mas como é o mesmo tamanho dos cubinhos, então o volume e a área seriam o mesmo...”

No protocolo acima, observamos a relação dada pelo aluno entre tamanho dos cubinhos e as grandezas área e volume; então, o aluno considera que, como os cubinhos são de mesmo tamanho, logo os sólidos formados por eles terão mesmo volume e mesma área.

Os alunos que mobilizaram esse teorema-em-ação, TA5E, mobilizam a concepção de volume área segundo Anwandter-Cuellar (2008).

TA5C: A medida de volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de seus lados.

Este teorema-em-ação foi o mais mobilizado nas situações de medida que necessitavam do cálculo de volume do paralelepípedo retângulo. Porém, nas situações de produção abordadas, também observamos a mobilização do TA5C. Observe o exemplo:

Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

8) João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos. → $V = a \cdot b \cdot c$ → O volume do paralelepípedo será sempre $A_b \cdot h$ → ou seja, a multiplicação de 3 valores. Já que estamos lidando com cubinhos, esses valores devem ser sempre inteiros positivos!

Justifique sua resposta: $a \cdot b$

Rsp: 8

Devemos achar todas as combinações de 3 números cujo produto resulte em 36!

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume. O que você acha?

Handwritten list of factorizations of 36:

- 1 · 1 · 36 (I)
- 1 · 2 · 18 (II)
- 1 · 3 · 12 (III)
- 1 · 4 · 9 (IV)
- 1 · 6 · 6 (V)
- 2 · 3 · 6 (VI)
- 2 · 2 · 9 (VII)
- 3 · 3 · 4 (VIII)

Figura 86- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q12c- Observação do TA5C.

O aluno mobilizou o teorema-em-ação TA5C, realizando a decomposição do número 36 em divisores inteiros e assim conseguiu chegar à resposta certa, como observado no estudo de Anwandter-Cuellar (2008).

4.6 AS REPRESENTAÇÕES

Os números, as figuras, as fórmulas, as unidades de medida, entre outras, são formas de representação de volume. Desta forma, procuramos abordar nas questões diversos tipos de representações, para observarmos a sua necessidade ou não para compreensão da questão e resolução da mesma. Por isso, em algumas questões a fórmula é dada e em outras não, em algumas questões a figura acompanha o enunciado textual em outras não, os números são inteiros ou racionais, as unidades de medida são de volume ou de capacidade, ou podem ser dadas em dois tipos: cubinhos ou cm^3 .

Analisando o gráfico 3, da página 114, podemos observar que a questão cinco, em que a fórmula do volume da pirâmide era explicitada, que apresentou índice de acertos de 58,83%, não obteve destaque em relação aos resultados se comparado com as outras questões em que a fórmula não era exposta; porém, necessitava dela para calcular o volume, como nas questões Q6, com percentual de acertos de 64,71%, e Q10, com percentual de acertos de 53,49%, o que dá indícios de que os alunos reconhecem a fórmula de volume do paralelepípedo e reconhecem a fórmula de volume da pirâmide, mostrando a sua correta aplicação.

Quanto à presença de figura, as questões Q2, Q4, Q7, Q8 e Q11 representavam o sólido por meio da figura, enquanto que nas questões restantes, o sólido não era representado graficamente. Porém os resultados apontam para não relevância da presença/ausência da figura nas situações de medida; porém, a presença/ausência do sólido nas situações de produção, assim como outros aspectos presentes a serem observados em pesquisas posteriores, pode influenciar o baixo índice de acertos nesse tipo de situação.

No caso da décima primeira questão, o sólido era representado por um empilhamento de cilindros, obteve 30% de respostas válidas; porém, alguns alunos não compreenderam como calcular o volume do empilhamento, utilizando outras estratégias vistas anteriormente, como por exemplo, dividindo a figura em três partes ou considerando o empilhamento um

sólido único, no caso um cilindro, e desenhando um cone que tem um terço do volume do cilindro, errando a questão. Outros não consideraram o volume como sendo dependente da forma do sólido original, desenhando apenas outras formas de empilhamentos de cilindros contendo um terço do volume do empilhamento inicial, fato este observado no trabalho de Anwandter-Cuellar (2008). Observe o protocolo a seguir:

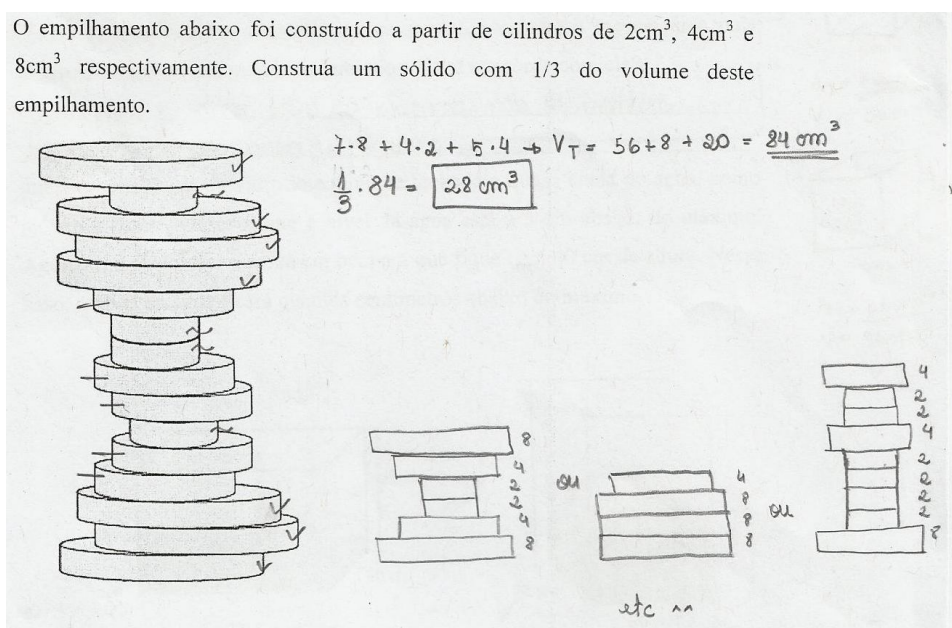


Figura 87- Extrato do protocolo do aluno ACBSA- Atividade Q11.

O protocolo acima, dá indícios que o aluno mobiliza a concepção volume sólido, da classificação dada por Anwandter-Cuellar (2008), por só representar graficamente sólidos constituídos pelo empilhamento de cilindros assim como está representado na questão.

No caso da décima segunda questão, a falta da representação gráfica do sólido pode ter levado ao baixo índice de acertos e elevado índice de respostas ausentes, o que dá indícios de que os alunos não compreenderam o enunciado, resolvendo de forma inadequada a construção dos sólidos constituídos por 36 cubinhos. Muitos consideraram a partição de forma equitativa do número 36, apresentando como resposta valores diversos como 3, 4, 6, 12 e 18 paralelepípedos construídos. Observe o trecho da entrevista abaixo:

Aluno LMSP- “(pausa) A letra A, realmente eu não sei. Tem várias formas de fazer, não é, cubinhos, é saber quantos ele ia fazendo.

Entrevistador- *Não, eu quero que você me diga como foi que você entendeu essa letra a? Como foi que você entendeu? Como era que você iria fazer?*

Aluno LMSP- *Eu ia sair desenhando os paralelepípedos.*

Entrevistador- *Mas, vamos usar os cubinhos, certo! Mas aí se eu tivesse lhe dado ao invés de 36, tivesse lhe dado 12 cubinhos.*

Aluno LMSP- *(pausa manipulando os cubinhos) Eles são parecidos, né?*

Entrevistador- *Iam ser 6 diferentes?*

Aluno LMSP- *Não, são todos iguais!*

Entrevistador- *Ele pediu pra você fazer com os 36, você está dividindo em vários pedaços. É pra fazer com esses 12, um paralelepípedo, certo?*

Aluno LMSP- *É pra fazer com tudinho?*

Entrevistador- *Com tudinho. Com esses 12 você faz um paralelepípedo. Depois desmonta e faz outro diferente, tá entendendo?*

Aluno LMSP- *Há tá, ele queria que eu fizesse de um por um?*

Entrevistador- *É! (pausa) Esse é um, não é? Um exemplo, então vamos lá. Outras dimensões, quais são as dimensões, oh! Tem quantos quadradinhos na, nessa dimensão?*

Aluno LMSP- *Dois.*

Entrevistador- *Nessa dimensão?*

Aluno LMSP- *Seis.*

Entrevistador- *E nessa dimensão?*

Aluno LMSP- *Um.*

Entrevistador- *Então teria como dimensão, você disse, dois, um e seis. Então forme outra agora.*

Aluno LMSP- *Eu vou ter que fazer um por um?*

Entrevistador- *Não, a gente só vai tentar, testar alguns.*

Aluno LMSP- *(o aluno resolve em silêncio) Pronto!...*”

Nesse trecho da entrevista percebemos que o aluno não compreendeu o enunciado da questão e só utilizando uma forma de representação, o material concreto formado por cubinhos de mesmas dimensões, e durante a sua manipulação, foi que o aluno conseguiu compreender o que o enunciado pedia e chegar à construção correta do sólido.

As representações usadas nos protocolos pelos alunos foram a fórmula de volume, as figuras, os números e a unidades de medida. Quanto à fórmula, observamos no gráfico as questões que a fórmula era explicitada pelo aluno. As questões Q9 e Q12b, não houve esse tipo de representação, pois a Q9 se tratava de transformação de unidades e a Q12b, da compreensão de independência de volume com a forma do objeto, já construído na Q12a. Ver gráfico a seguir:

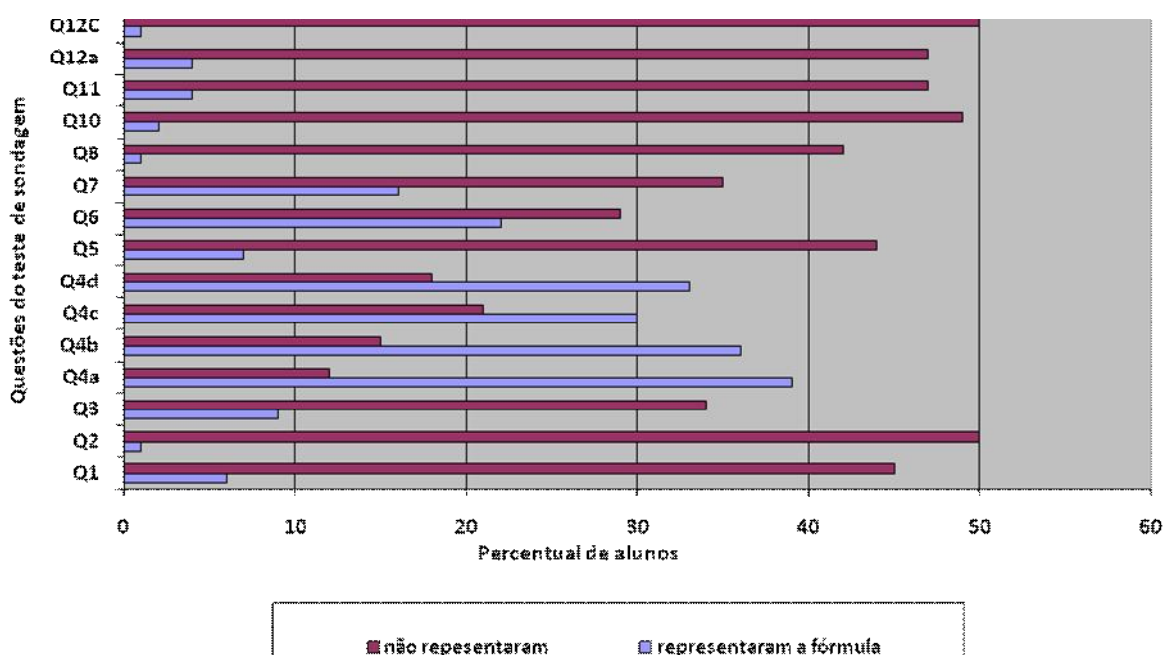


Gráfico 6- Ato de representar a fórmula de volume por questão.

Podemos observar que, até mesmo nas questões em que não necessariamente necessitasse da fórmula para o cálculo de volume, alguns recorreram à fórmula para justificar a construção do sólido, como na letra c da décima segunda questão. Ver exemplo a seguir:

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

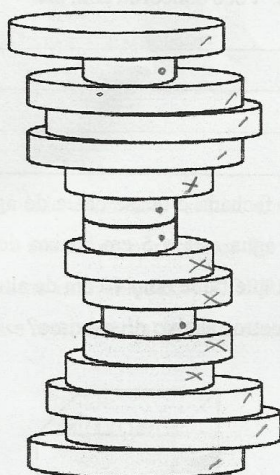
$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$, Sim
A fórmula nostra.

Figura 88- Extrato do protocolo do aluno VGS- Atividade Q12c.

Embora tenha errado a questão, o aluno representa a fórmula de área de um trapézio para justificar a sua resposta, o que mostra a mobilização da concepção área número presente no trabalho de Anwandter-Cuellar (2008).

Outro exemplo de representação de fórmula, em que não necessariamente precisaria da fórmula para resolver a questão. Observe a figura:

O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de 2cm^3 , 4cm^3 e 8cm^3 respectivamente. Construa um sólido com $\frac{1}{3}$ do volume deste empilhamento.

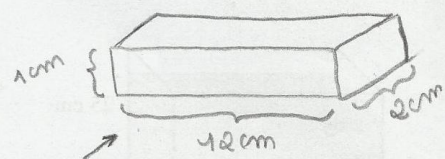


$2\text{cm}^3 \rightarrow \text{menor} \rightarrow 4$
 $4\text{cm}^3 \rightarrow \text{médio} \rightarrow 5$
 $8\text{cm}^3 \rightarrow \text{grande} \rightarrow 4$

$V_{\text{total}} \Rightarrow 2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4$
 $V_T = 8 + 20 + 32$
 $V_T = 60\text{cm}^3$

$\frac{1}{3} \text{ de } 60\text{cm}^3 = 20\text{cm}^3$

$\begin{array}{r} 1 \\ 56 \\ 20 \\ 8 \\ \hline 84 \\ - 64 \\ \hline 20 \end{array}$



Justifique sua resposta:

$A_p = A_b \cdot h$
 $= 24 \cdot 1$
 $= 24\text{cm}^3$

Figura 89- Extrato do protocolo do aluno GLSS- Atividade Q11.

Nesta questão, o aluno poderia resolver decompondo o sólido dado para calcular o seu volume e construir um sólido com um terço do volume encontrado, sem utilizar a fórmula de volume. Porém, tal aluno construiu um sólido diferente e justificou a sua construção com a representação da fórmula de volume do paralelepípedo, mostrando independência da grandeza

volume com a forma do objeto, de acordo com o esperado na análise a priori e segundo o trabalho de Anwandter-Cuellar (2008).

Desenhos também foram utilizados na maioria das questões como podemos observar no gráfico a seguir:

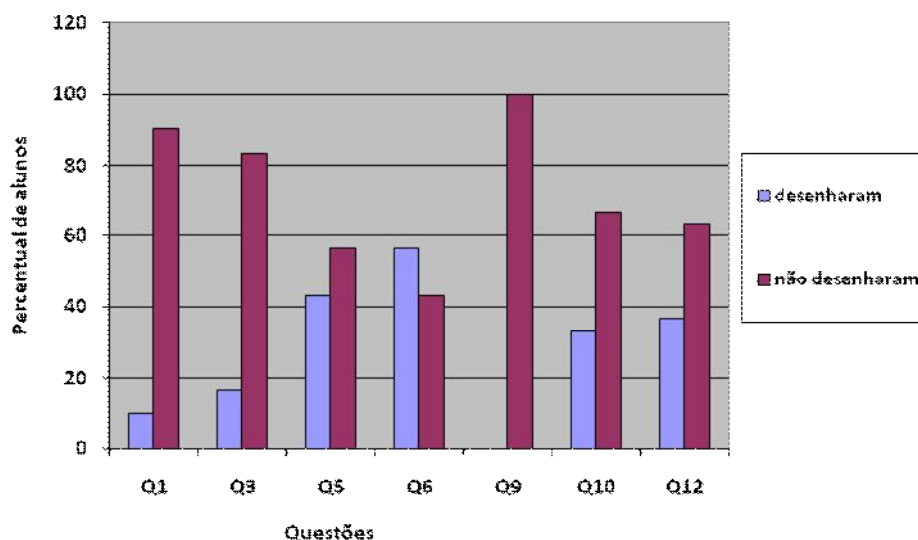


Gráfico 7- Ato de representar por desenho o sólido por questão.

Nas questões em que não havia a figura geométrica, alguns alunos buscavam representar o sólido por meio de desenhos, apesar de apresentarem, em alguns casos, confusão entre o paralelepípedo com figuras planas, como o exemplo a seguir, em que um dos alunos confundiu com o cilindro, na sexta questão. Veja o exemplo:

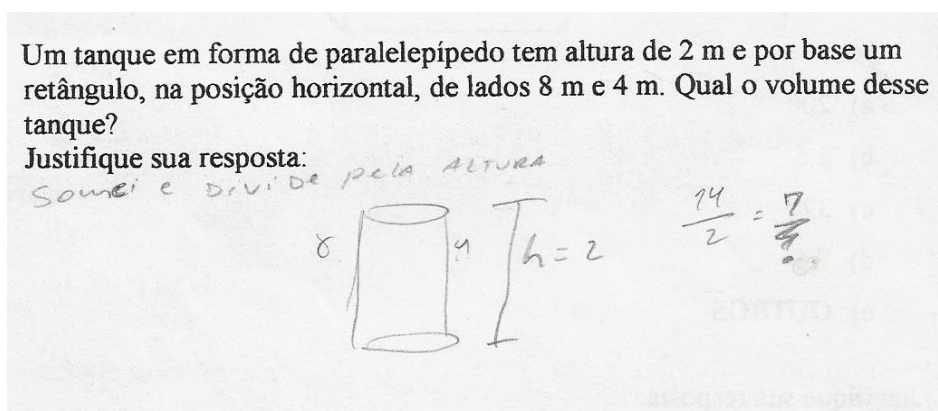


Figura 90- Extrato do protocolo do aluno FCA- Atividade Q6.

No exemplo acima, o aluno não representava corretamente o sólido da questão e mostra dificuldades no campo das grandezas, pois desconhece a fórmula de volume, ao explicitar uma forma incorreta de se calcular o volume. Tal confusão entre o sólido e a sua forma geométrica foi observada nos estudos de Barros (2002), de Oliveira (2002) e de Kaleff, Rui e Garcia (1996). Nesta mesma questão houve oito alunos que desenharam o retângulo, um aluno que desenhou um prisma de base triangular e um aluno desenhou um trapézio. Ver exemplos a seguir:

Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?

Justifique sua resposta:

$h = 2\text{ m}$

$V = h \cdot A_B$

$V = 2 \cdot \frac{b \times h}{2}$

$V = 2 \cdot \frac{8 \cdot 4}{2} = 32\text{ m}^2$

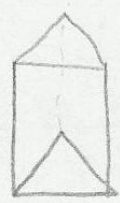


Figura 91- Extrato do protocolo do aluno EGB- Atividade Q6.

Tais alunos dão indícios de não compreenderem o campo geométrico, pois confundem sólidos tridimensionais, como o paralelepípedo, com sólidos bidimensionais, ou confunde o paralelepípedo com outros sólidos tridimensionais, como os citados anteriormente. Porém, um aluno desenhou um trapézio em cima de um retângulo, mas acertou os cálculos e a fórmula de volume do paralelepípedo, pode ter representado o paralelepípedo desta forma por não conseguir desenhar figuras que representem sólidos tridimensionais. Ver figura:

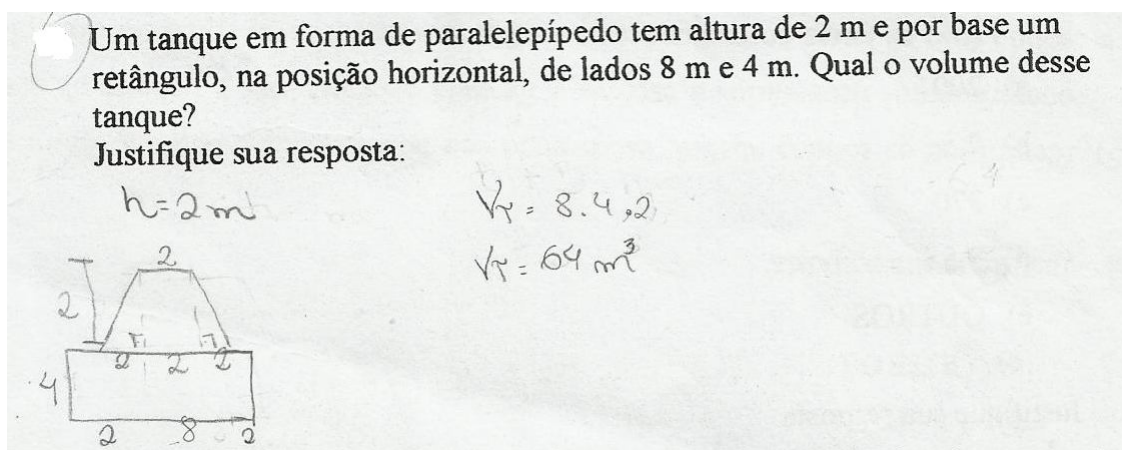


Figura 92- Extrato do protocolo do aluno MC- Atividade Q6.

Neste caso não podemos considerar que tal aluno apresenta dificuldades no campo geométrico, pois até no reconhecimento do sólido, o mesmo aluno identificou o sólido corretamente, representou a fórmula de volume e as arestas corretamente, o que dá indícios de que este aluno compreende volume como grandeza, apenas apresenta dificuldades no ato de desenhar figuras tridimensionais. Ver protocolo a seguir:

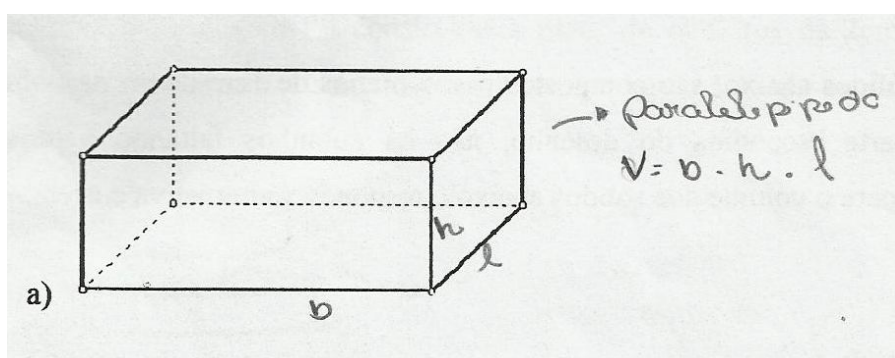


Figura 93- Extrato do protocolo do aluno MC- Atividade Q4a.

A sexta questão foi a que mais os alunos representaram o sólido através do desenho, seguido da quinta questão, dentre as questões que não era apresentada a representação gráfica do sólido. Porém, observamos que a maioria dos alunos não utilizou a representação geométrica do sólido, o que pode dar indícios de que alguns dos alunos não compreendem o campo geométrico para volume ou que não necessitam de representação a mais nas questões para a compreensão de volume, de acordo com o estudo de Kaleff, Rui e Garcia (1996).

Quanto à natureza dos números representados, nas questões em que apenas eram abordados números inteiros, obtiveram melhores resultados do que nas questões em que havia

necessidade de operar números racionais, como já foi dito anteriormente. Até nas questões de produção, um dos alunos não conseguiu construir sólidos como o cilindro e o cone, por ter em sua fórmula um número irracional, o π , como já foi comentado anteriormente. Ver trecho da entrevista abaixo:

“Entrevistador- *Nessa questão aqui da produção do sólido, você pensou nessa figura, nesse sólido, não é isso? Teria outro diferente que você poderia construir, ou não?*

Aluno AKRS -*Com o cone eu acho que não iria dar exato, porque a gente teria que multiplicar pelo valor de π . Como o valor de π não é exato, não iria dar 28. O cilindro também multiplica por π , então acho que não.*”

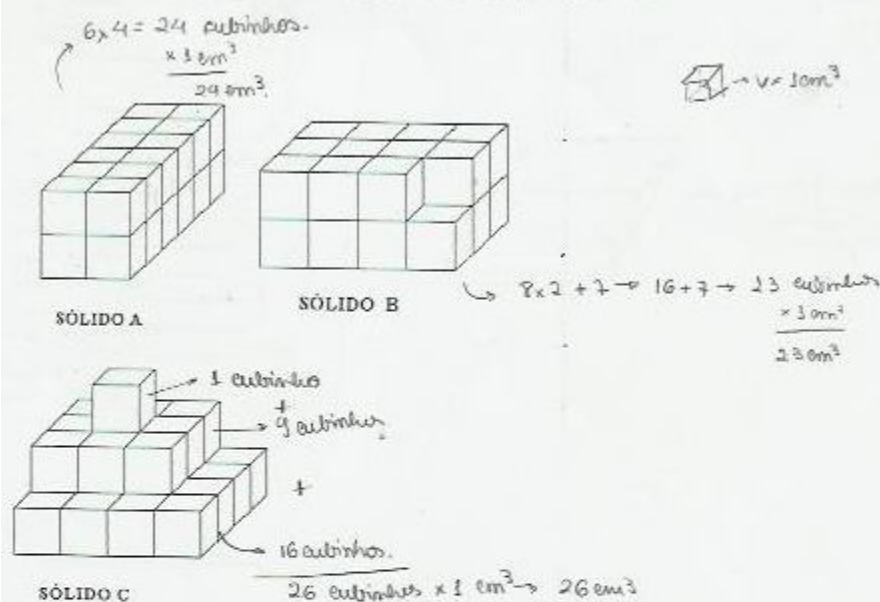
Em se tratando de volume, havia situações em que o aluno poderia representar a unidade de medida de volume em dois tipos: cubinhos ou o cm^3 . Como é o caso da segunda questão, em que a maioria não representou a unidade de medida de volume, caracterizando uma concepção de volume número, de acordo com a classificação de concepções de volume de Anwandter-Cuellar (2008). Observe a tabela a seguir:

TABELA 3: Unidades de medida de volume utilizadas na segunda questão.

UNIDADES DE MEDIDA	CUBINHOS	Cm^3	AUSÊNCIA DE UNIDADES DE MEDIDA	ERRO NA UNIDADE DE MEDIDA
ALUNOS	8	11	31	1

Todavia, podemos verificar a presença das duas unidades de medida: cubinhos e o centímetro cúbico, em alguns protocolos. Observe figura a seguir.

Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, não há cubinhos faltando nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e responda a alternativa correta:



- a) $V_a = V_b = V_c$
- b) $V_a < V_b < V_c$
- c) $V_a > V_b > V_c$
- d) $V_a = V_b > V_c$
- ☒ OUTROS

Justifique sua resposta:

$$V_b < V_a < V_c$$

Figura 94- Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q2.

A presença de unidades de medida de volume referencia o domínio no campo das grandezas por parte do sujeito, que assim mostra desenvolver a concepção de volume medida, segundo Anwandter-Cuellar (2008). O fato de reconhecer duas unidades de volume, uma unidimensional (cubinhos) e outra tridimensional (cm^3), foi discutido nos estudos de Oliveira (2002) e Barros (2002).

Nas questões Q5 e Q6 como não havia alternativas indicando a unidade de medida de volume, foram questões em que a presença da unidade de medida de volume representada pelo aluno pode dar indícios de compreensão de volume como grandeza. Observe na tabela a seguir:

TABELA 4: Unidades de medida representadas como de sendo de volume nas questões 5 e 6.

UNIDADES DE MEDIDA	m ³	Cm ³	Cm ²	m	Cm	AUSÊNCIA DE UNIDADES DE MEDIDA	TOTAL
Q5	3	34	1	0	2	11	51
Q6	37	0	0	2	0	12	51

A quinta questão tem como unidade de medida correta o m³; e a sexta questão, o cm³. Desta forma, quanto à unidade de medida de volume, a maioria dos alunos acertou a quinta e a sexta questão; porém, um aluno confundiu a unidade de volume com a unidade de medida de área (cm²) e outros dois alunos confundiram com a unidade de medida de comprimento (cm), na quinta questão. Observe no exemplo abaixo, o aluno que confundiu volume com área, em relação às unidades de medida, na quinta questão:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

$V = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 6$

$V = \frac{150}{3}$

$V = 50 \text{ cm}^2$

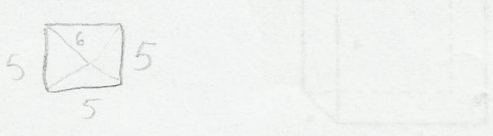


Figura 95- Extrato do protocolo do aluno EGB- Atividade Q5.

Esse mesmo aluno do exemplo acima, foi um dos que confundiu as unidades de medida de volume e de comprimento na sexta questão (observe na figura 91, página 157). Outro aluno também errou a unidade de medida de volume, confundido com a unidade de medida de comprimento na sexta questão. Ver figura a seguir:

Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?

Justifique sua resposta:

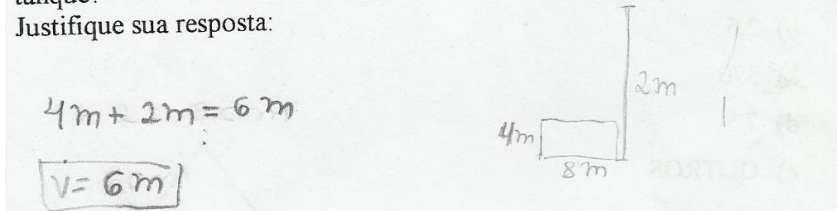


Figura 96- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q6.

Tal aluno também errou a unidade de medida de volume, confundido com a unidade de medida de comprimento na quinta questão. Observe o protocolo:

A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

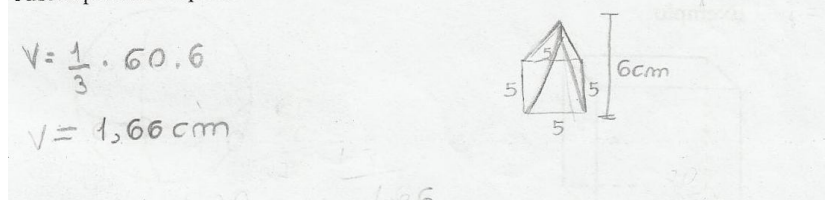


Figura 97- Extrato do protocolo do aluno LMSP- Atividade Q5.

Podemos observar que tais alunos não compreendem volume como grandeza, pois confundem com outras grandezas como comprimento e área, ao representar a unidade de medida, como foi observado no trabalho de Barros (2002).

Porém, do total de alunos, a maioria representou corretamente as unidades de medida de volume, um dos elementos necessários para a compreensão de volume como grandeza.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, realizou-se um estudo exploratório, com o objetivo de analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, como alunos do ensino médio lidam com situações envolvendo a grandeza volume.

Adotamos a modelização da área como grandeza, com base em Douady e Perrin-Glorian (1998), adaptada para o volume, o que consiste em considerar volume como uma grandeza geométrica.

Vimos a relevância das concepções geométrica e numérica adquiridas e mobilizadas pelos sujeitos para a compreensão de grandeza e da dissociação e articulação dos quadros geométrico, numérico e das grandezas elaborados por Douady e Perrin-Glorian. Porém, como o trabalho de Douady e Perrin-Glorian era sobre área, buscamos outros trabalhos, que fizeram a analogia com volume, como os de Barros (2002), Oliveira (2002) e o de Anwandter-Cuellar (2008).

Para realização deste estudo, foram utilizados dois instrumentos de coleta de dados: um teste de sondagem e uma entrevista. Trabalhamos com um grupo de alunos do terceiro ano do ensino médio, de escolas tanto da rede estadual, federal e da rede particular de ensino da cidade de Recife-PE, no total de 51 alunos. A escolha das escolas foi essencialmente pela disposição dos docentes em acolher a pesquisa e são de referência no estado. O teste de sondagem foi aplicado em sala de aula, individualmente, sem consulta de material de apoio, apenas com a autora do trabalho para tirar alguma dúvida sobre o enunciado. As entrevistas foram realizadas com 10 alunos, selecionados das três instituições de ensino, gravadas e documentadas para posterior análise. O teste de sondagem continha 12 questões, envolvendo as situações de volume. Os tipos de situações propostas nesta pesquisa foram baseados na classificação dada por Baltar (1996) para o conceito de área, que consistem em situações de medição, de comparação e de produção. Juntamente com Moraes (2013), consideramos subcategorias de situações de medida: transformação de unidade e a operacionalização de volume. Desta forma, fizemos uma analogia para situações de volume. Uma análise a priori foi realizada sobre as questões, o que nos forneceu pistas de interpretações dos procedimentos dos alunos.

Buscando responder aos nossos objetivos, realizamos um estudo das situações, para observar como os alunos lidam com cada tipo de situação, e a partir das respostas, realizar um estudo comparativo, observando aspectos de cada questão, como as estratégias mais utilizadas, teoremas-em-ação e uso das representações.

Para caracterizar como alunos do ensino médio distinguem e articulam conhecimentos oriundos dos quadros geométrico, numérico e das grandezas na resolução de problemas envolvendo volume, que foi o nosso primeiro objetivo específico, observamos algumas concepções sobre volume mobilizadas pelos alunos, de acordo com a tipologia das situações de Anwandter-Cuellar (2008). Tais concepções foram: volume sólido, volume número, volume medida, volume grandeza, volume ocupado, volume área e volume interno. Dentre essas concepções, as que predominaram foram as de volume número e de volume medida, o que evidencia a força do aspecto numérico na compreensão do conceito de volume, para os sujeitos investigados. Quanto ao aspecto geométrico, as concepções volume sólido e volume objeto foram evidenciadas; e ao aspecto das grandezas, a concepção volume grandeza e volume área foram mobilizadas. A mobilização de algumas concepções provoca dificuldades em distinguir e articular os quadros geométrico, numérico e das grandezas. Nas situações analisadas, observamos indícios de manifestações de concepções volume sólido, volume número, volume medida e volume área, as quais foram utilizadas no trabalho para interpretar alguns erros ou lacunas na resolução das questões propostas no teste ou na entrevista.

O segundo objetivo específico foi descrever como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação de volumes, medida de volume e produção de sólidos, com volume dado, volume maior/menor ou igual ao de outro sólido.

Das situações, as situações de medida foram as que mais obtiveram acertos, indicando serem as situações que os alunos mais compreendem volume como grandeza. A estratégia mais utilizada pelos alunos é a fórmula, pois até em situações em que poderiam ser utilizadas outras estratégias, a fórmula era mobilizada. A fórmula de volume mais reconhecida foi a do paralelepípedo. Os alunos representam corretamente as unidades de medida de volume; porém, não conseguem converter corretamente as unidades de volume e de capacidade.

As situações de comparação estáticas, em que o sólido não é deformado nem trocada a sua posição no espaço, são mais compreendidas do que as situações de comparação

dinâmicas. A estratégia do uso da fórmula de volume também é utilizada para comparar as medidas encontradas.

As situações de produção foram as que apresentaram mais dificuldade de resolução, mostrando que os alunos têm dificuldades em compreender volume como grandeza autônoma, independente da forma e do tamanho e que não conseguem construir sólidos, com volume dado ou com volume maior/menor ou igual ao de outro sólido.

Para responder ao objetivo específico seguinte: identificar invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) mobilizados por alunos de ensino médio, na resolução de problemas envolvendo volume, mostramos exemplos de teoremas-em-ação falsos e verdadeiros do ponto de vista matemático que foram mobilizados pelos alunos durante a resolução das questões.

Teoremas-em-ação falsos do ponto de vista matemático, como por exemplo: “Se dois sólidos têm mesmo volume, então eles são idênticos”; “Sólidos diferentes têm necessariamente volumes diferentes”, foram mobilizados pelos alunos mostrando não compreender volume como grandeza independente da forma, dando indícios de que os alunos apresentam dificuldades no campo geométrico.

Houve também a mobilização de teoremas-em-ação verdadeiros do ponto de vista matemático, como por exemplo: “Volume e área são grandezas distintas”, “Sólidos de mesma massa e mesma densidade têm mesmo volume”; que deram indícios de que os alunos compreendem volume como sendo uma grandeza independente do objeto.

Para caracterizar como os alunos do ensino médio lidam com as representações simbólicas em jogo na resolução de problemas envolvendo volume, observamos quais representações foram utilizadas pelos alunos.

As representações utilizadas pelos alunos foram a fórmula, o desenho do sólido, a unidade de medida de volume e os números. A presença de algum tipo de representação, como no caso da fórmula e do desenho, mesmo em questões em que não era solicitado o seu uso, foi evidenciada em alguns protocolos observados, o que dá pistas para trabalhos futuros sobre a importância desses tipos de representação e sua influência na compreensão de volume como grandeza.

Diante do que foi observado, podemos concluir que os alunos do ensino médio compreendem melhor situações de volume em que o aspecto numérico está em jogo, como nas situações de medida. Diante de situações em que necessitam dissociar e articular os quadros numérico, geométrico e das grandezas, como nas situações de produção, apresentam dificuldades, quer seja no campo numérico, quer seja no campo geométrico ou no campo das grandezas. Além do mais, para aquisição do conceito de volume, o aluno adquire outros conceitos que estão interligados, como de massa, de densidade, de dimensão; e as concepções de volume vistas neste trabalho.

Porém, como vimos, vários aspectos estão relacionados à compreensão de volume como grandeza, e alguns foram abordados nesta pesquisa. Entretanto, há necessidade de aprofundar tais aspectos a partir de futuras pesquisas que possam trabalhar volume quanto ao aspecto numérico, observando a influência dos números, como no caso o número π ; no aspecto geométrico, trabalhando vários sólidos (ocos e preenchidos, retos e oblíquos) e utilizando materiais concretos e outras formas de representar os sólidos geométricos, para permitir a utilização de outras estratégias e mobilização de outros teoremas-em-ação que possam ser observáveis. No campo das grandezas, trabalhar volume relacionando com outras grandezas geométricas, como área e comprimento.

Esperamos que esta pesquisa possa contribuir para o ensino de volume como grandeza, para tornar a sua abordagem, assim como o das grandezas, mais freqüente em sala de aula, que seja mais diversificada em termos de situações de volume, deixando o assunto de ser repetitivo; e com o uso de menos fórmulas, como é freqüente nas práticas educacionais, para que o aluno possa construir o conceito de volume de forma adequada do ponto de vista matemático.

REFERÊNCIAS

ANWANDTER-CUELLAR, Nathalie. **Étude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume**. FRANÇA. 2008. 96f. Dissertação (Mestrado)- Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Education et Formation. Université Montpellier 2. 2008.

BALTAR, Paula Moreira. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARROS, José Severino de. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório**. Dissertação (Mestrado em Educação)-- Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **Estudo de situação relativa ao conceito de área**. In: Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino- ENDIPE , 10, 2000, Rio de Janeiro. **Anais ...** 2000.

_____. **Estudo de situações problema relativas ao conceito de área**. In: Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino- ENDIPE , 15, 2004, Curitiba. **Anais ...** Curitiba: PUCPR, 2004. 12p.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; LIMA, Paulo Figueiredo. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental**. Natal: Editora da SBHMat, 2002. v. 1. 134p .

BRASIL. **Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília , DF, 20 de dezembro de 1996. Disponível em: < <http://www.jusbrasil.com.br/legislacao/anotada/2701001/art-35-da-lei-de-diretrizes-e-bases-lei-9394-96>>. Acesso em: 15 jan. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental**. Brasília, 1998.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 2002b.

_____.Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática / Brasília, 2011.**

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 3 ed. São Paulo: Ática. 2010. Vol. único.

DOUADY, Regine; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**.1989. v. 20, n. 4, pp.387-424.

GUIMARÃES, Rosângela de Resende. **Um estudo do pensamento geométrico de professores das séries iniciais do ensino fundamental segundo o modelo de Van Hiele**. 2006. 143f. Trabalho de Conclusão do Curso de Especialização (Especialização em Matemática para professores) -- Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2006. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Rosangela.pdf>. Acesso em: 9 mai. 2012.

KALEFF, Ana Maria; REI, Dulce Monteiro; GARCIA, Simone dos Santos. **Como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos**. In: Campinas: Zetetikê [online]. 1996.vol.4, n.6 . pp. 135-152. ISSN 2176-1744. <http://www.fe.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/search/advancedResults>>.

LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **Grandezas e Medidas**. In: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. (Org.). Matemática: Ensino Fundamental (Série Explorando o ensino). Brasília: Ministério da Educação: Secretaria da Educação Básica, 2010, v. 17, p. 167-200.

MELO, Marcos André Pereira de; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **Identificando concepções numéricas e geométricas na resolução de um problema de área e perímetro**. In: 2 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática-SIPEMAT, 2, 2008. Recife. **Anais ...** 2008.

MORAIS, Leonardo Bernardo de; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **Análise da abordagem do conceito de volume nos livros didáticos de matemática para os anos finais do ensino fundamental sob a ótica da teoria dos campos conceituais**. In: Congresso de Iniciação Científica - Conic, UFPE, 18, 2010. Recife. **Anais ...** 2010.

MOREIRA, Marcos Antonio. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Porto Alegre: Investigações em Ensino de Ciências [online]. 2002.(UFRGS), Porto Alegre, vol. 7, n.1, PP. . http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf

OLIVEIRA, Glauco Reinaldo Ferreira de . **Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso**. 2002. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação) -- Programa de Pós-Graduação em Educação.Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.

_____. **Investigação do papel das grandezas físicas na construção do conceito de volume**. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2007.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências**. Campinas: Zetetikê [online]. 1993. vol.4, n.6 . pp. 7-18. ISSN 2176-1744. <http://www.fe.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/search/advancedResults>.

RAMPAZZO, Sonia Elisete; CORRÊA, Fernanda Zanin Mota. **Desmitificando a metodologia científica : guia prático para produção de trabalhos acadêmicos**. 1 ed. Erechim: Habis, 2008. 199p.

ROLDÁN, Mariana Saiz. **Algunos objetos mentales relacionados com El concepto volumen de maestros de primaria.** México:Revista Mexicana de investigación educativa. [online]. 2003. vol. 8, n. 018. p. 447-478. ISSN 1405-6666.
<http://www.comie.org.mx/v1/revista/visualizador.php?articulo=ART00379&criterio=http://www.comie.org.mx/documentos/rmie/v08/n018/pdf/rmiev08n18scC00n01es.pdf>

TRIVIÑOS. Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. 1 ed. São Paulo: Atlas. 2011.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels.** Recherches en Didactique des Mathématiques – RDM, v. 10, n° 2, 3. pp. 133 – 170, Grenoble, 1990.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade;** Tradução de Maria Lucia Faria Moro. 1 ed. Curitiba: UFPR, 2009.

APÊNDICE A- TESTE DE SONDAGEM**FICHA DO ALUNO**

- 1) Com dois pedaços iguais de massa de modelar, formamos com um deles uma esfera e com outro uma pizza. Marque a alternativa correta:
- d) Os dois objetos formados têm o mesmo volume.
 - e) A esfera tem volume maior que a pizza.
 - f) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta:

- 2) Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?

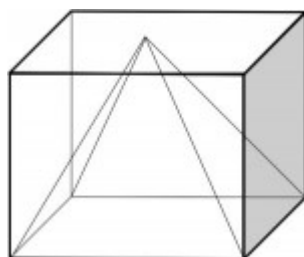
Justifique sua resposta:

- 3) A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dado a fórmula do volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h. \text{ (onde: } S_b \text{ é a área da base e } h \text{ é a altura)}$$

Justifique sua resposta:

- 4) Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo aproximadamente 230 metros. Logo, o volume da pirâmide de Quéops é de aproximadamente (em milhões de metros cúbicos):

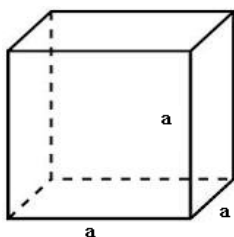


- a) 200
- b) 2,5
- c) 370
- d) 7,5
- e) OUTROS

Justifique sua resposta:

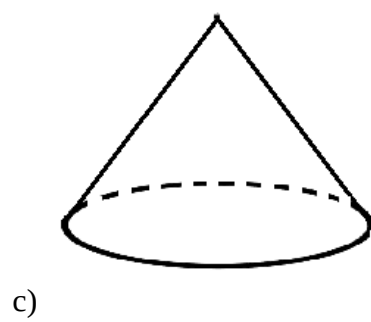
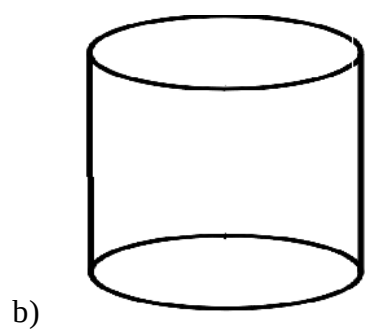
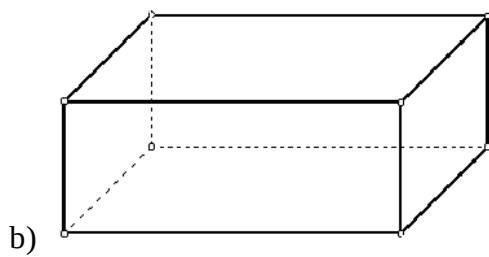
- 5) Identifique os sólidos abaixo, escrevendo seu nome, indique sobre a figura os comprimentos necessários e escreva a fórmula para calcular o volume de cada sólido (use as letras correspondentes na figura e na fórmula, como no exemplo, abaixo).

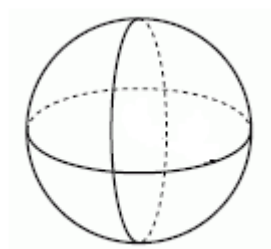
Exemplo:



Nome: cubo

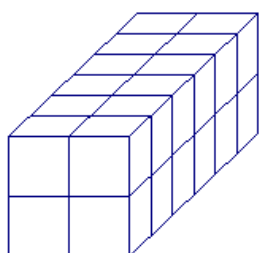
Fórmula do volume: $v=a^3$



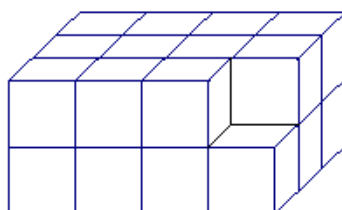


d)

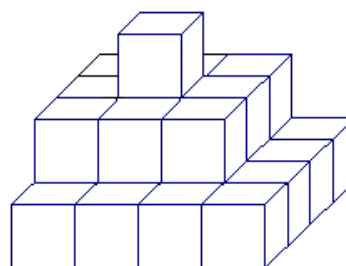
- 6) Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, não há cubinhos faltando nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e responda a alternativa correta:



SÓLIDO A



SÓLIDO B

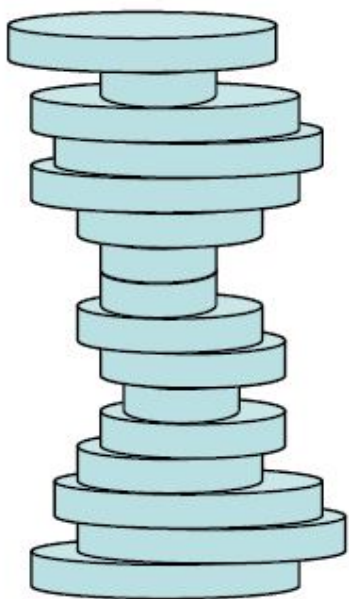


SÓLIDO C

- a) $V_a = V_b = V_c$
- b) $V_a < V_b < V_c$
- c) $V_a > V_b > V_c$
- d) $V_a = V_b > V_c$
- e) OUTROS

Justifique sua resposta:

-
-
- 7) O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de 2cm^3 , 4cm^3 e 8cm^3 respectivamente. Construa um sólido com $1/3$ do volume deste empilhamento.



Justifique sua resposta:

- 8) João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

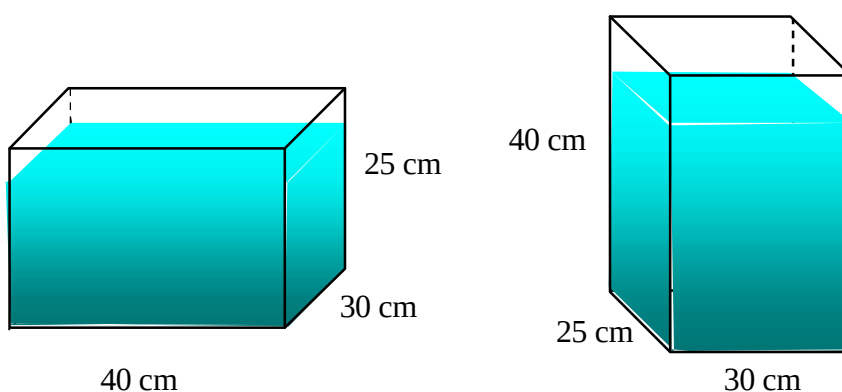
a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos.

Justifique sua resposta:

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume. O que você acha?

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

- 9) Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



- a) 5cm.
- b) 32cm.
- c) 8cm.
- d) 24000cm^3 .
- e) OUTROS.

Justifique sua resposta:

10) Sabendo que 1 litro corresponde a 1 dm^3 , transforme:

- a) 2 m^3 em litros;
- b) 10 dl em dm^3 ;
- c) $0,001 \text{ dm}^3$ em ml;
- d) 1 cm^3 em ml;
- e) 0,01 dl em cm^3 .

Justifique sua resposta:

11) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8m de comprimento, 5m de largura e 120cm de profundidade. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários:

- a) 48 000 litros.
- b) 48 litros.
- c) 133 m^3 .
- d) $14,2 \text{ m}^3$.
- e) OUTROS.

Justifique sua resposta:

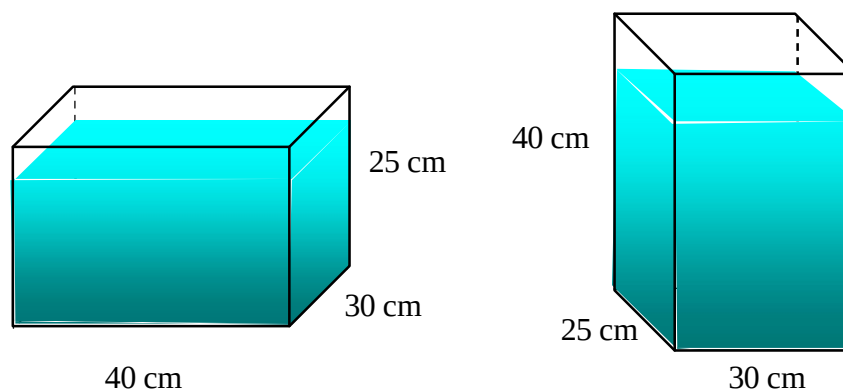
12) Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

- a) 20%
- b) 0,8%
- c) 60%
- d) 72,8%
- e) OUTROS

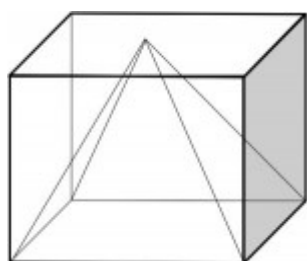
Justifique sua resposta:

**ANEXO A - QUESTÕES ORIGINAIS RETIRADAS DE VESTIBULARES,
TRABALHOS ANTERIORES E DO LEMAT PARA ELABORAÇÃO DO TESTE DE
SONDAGEM.**

(LEMAT-UFPE) Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5 cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40 cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?



(FUVEST 2009) Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo aproximadamente 230 metros. Logo, o volume da pirâmide de Quéops é de aproximadamente (em milhões de metros cúbicos):



A) ☐ 1,2

B) ☐ 2,5

C) ☐ 5

D) ☐ 7,5

E) ☐ 15

(UFMG 2008) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8 m de comprimento, 5 m de largura e 120 cm de profundidade. Bombeia-se água para dentro desse reservatório, inicialmente vazio, a uma taxa de 2 litros por segundo. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários:

A) ☐ 40 min .

B) ☐ 240 min .

C) ☐ 400 min .

D) ☐ 480 min .

(ADVISE 2009) Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

A) ☐ 20%

B) ☐ 33,1%

C) ☐ 60%

D) ☐ 72,8%

E) ☐ 80%

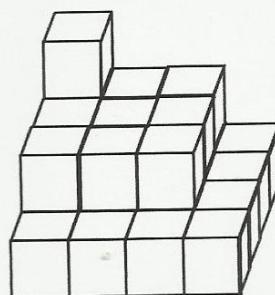
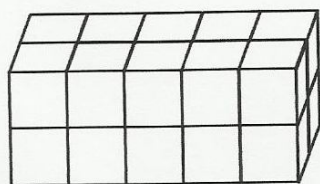
ANEXO B - QUESTÕES RETIRADAS DO TRABALHO DE ANWANDTER-CUELLAR (2008).

Pág. 74:

8.6 PROBLEME 2

Compare le volume des solides suivants : sont-ils plus petits, plus grands ou égaux, les uns par rapport aux autres ? Argumente ta réponse.

Deux empilements sans trous de cubes égaux de 1 cm d'arête.

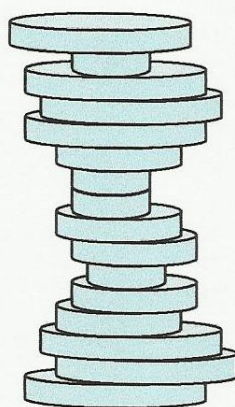


Questão retirada do trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), p. 80.

8.8 PROBLEME 4

L'empilement suivant est construit à partir de cylindres de 2 cm^3 , 4 cm^3 et 8 cm^3 respectivement.

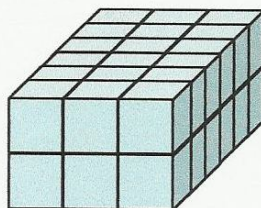
Construisez un solide dont le volume soit égal à un tiers du volume de l'empilement.



Questão retirada do trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), p. 84-85.

9.2 LE PROBLEME OUVERT

Luc possède 36 petits cubes de 1 cm d'arête. Il veut les arranger de façon à former des parallélépipèdes rectangles comme indiqué ci-dessous :

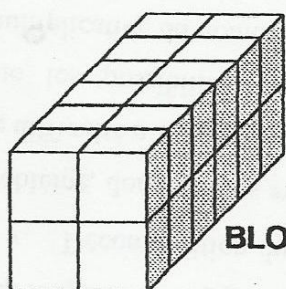


ANEXO C- QUESTÃO RETIRADA DO TRABALHO DE BARROS (2002), p. 75

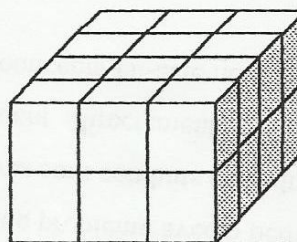
FICHA DO ALUNO

ATIVIDADE 3

Com blocos retangulares pequenos do mesmo tamanho, formamos dois blocos grandes conforme o desenho:



BLOCO A



BLOCO B

Marque um X na resposta certa:

- ☐ o bloco A tem volume maior do que o bloco B
- ☐ o bloco A tem volume menor do que o bloco B
- ☐ os blocos A e B têm o mesmo volume.

Escreva uma justificativa para a sua resposta.