

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA  
CURSO DE MESTRADO

MIRELLA CYSNEIROS LANDIM VALENÇA

**SIMETRIA DE REFLEXÃO:  
UMA ANÁLISE DE MEDIAÇÕES COM GEOMETRIA DINÂMICA A DISTÂNCIA**

RECIFE/PE

2014

MIRELLA CYSNEIROS LANDIM VALENÇA

**SIMETRIA DE REFLEXÃO:  
UMA ANÁLISE DE MEDIAÇÕES COM GEOMETRIA DINÂMICA A  
DISTÂNCIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnologia.

Orientadora: Profa. Dra. Verônica Gitirana.

RECIFE

2014

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

V152s	<p>Valença, Mirella Cysneiros Landim. Simetria de reflexão: uma análise de mediações com geometria dinâmica a distância/ Mirella Cysneiros Landim Valença. – Recife: O autor, 2014. 134 f.: il. ; 30 cm.</p> <p>Orientadora: Verônica Gitirana Gomes Ferreira. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2014. Inclui Referências e Apêndices.</p> <p>1. Educação a distância. 2. Tecnologia educacional. 3. UFPE - Pós-graduação. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. II. Título.</p> <p>371.5 CDD (22. ed.)</p>	UFPE (CE2014-29)
-------	--	------------------

MIRELLA CYSNEIROS LANDIM VALENÇA

**SIMETRIA DE REFLEXÃO: UMA ANÁLISE DE MEDIAÇÕES COM  
GEOMETRIA DINÂMICA A DISTÂNCIA**

Dissertação ou Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnologia.

Aprovada em: 11/03/2014.

Banca Examinadora:

---

Profa. Dra. Verônica Gitirana (orientadora) - UFPE  
1º Examinador/ Presidente

---

Prof. Dr. Franck Bellemain– UFPE  
2º Examinador

---

Profa. Dra. Mônica Karrer – UNIBAN/Anhanguera  
3º Examinador

*... ao Mestre de todos os Mestres.*

## AGRADECIMENTOS

*Meu Deus, o que seria de mim sem tua grande ajuda. Nos piores momentos me senti em teus braços e sempre comigo estavas, nunca me abandonaste, nem por um segundo. Não digo Confio em Ti, mas digo, quero ser merecedora de tua confiança!*

*São poucos os professores que amam a sua profissão, no entanto tenho um respeito muito especial à professora Doutora Verônica Gitirana, que não hesitou nem por um momento em ser minha orientadora, uma verdadeira Mestra. Sua generosidade em dividir conhecimentos vai além das fronteiras do humano e sua paciência é admirável. Obrigada professora, não deixe o mundo lhe corromper.*

*A todos que compõe o Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE.*

*Ao meu pai Everaldo (in memoriam) por tanto amor e carinho. Sei que de onde está ele me ajudou muito. Por ter nascido em uma vida muito modesta sempre desejou e lutou pelas conquistas dos filhos nos estudos. Eu te amo, papai! E digo: por trás de um grande Pai existe uma grande Mãe. Eu também te amo mamãe, não sei viver sem seu amor.*

*A toda minha família: Marcos, Marconni, Marcello, Mayra, Giannina, Alessandro, Adriana, Georgette(titia), Pietra, Vinícius, enfim, todos.*

*Um agradecimento especial a todos os “NÃO” que recebi, pois me ensinaram o valor de um “SIM”.*

*Namastê!*

*“Ninguém é tão ignorante que não tenha algo a ensinar. Ninguém é tão sábio que não tenha algo a aprender”*

*(Blaiser Pascal)*

## RESUMO

Esta pesquisa analisa as possibilidades e limites para a mediação didática de uma situação de aprendizagem especialmente construída para a aprendizagem colaborativa do conceito de simetria de reflexão por meio da integração da tecnologia computacional, em particular, dos *softwares* de *Geometria Dinâmica* (GD) com compartilhamento à distância (usando como ferramenta o *Tabulæ Colaborativo*). Para a construção da situação, realizamos previamente um estudo diagnóstico sobre o conhecimento de simetria de reflexão de estudantes do ensino superior, utilizando régua/compasso, no qual identificamos semelhanças e diferenças entre os conhecimentos prévios, corretos ou errôneos, em um grupo de 15 estudantes da disciplina Desenho Geométrico. Com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, identificamos teoremas-em-ação que foram mobilizados na realização das tarefas do estudo diagnóstico. A partir de tal estudo, algumas variáveis didáticas foram elencadas para serem utilizadas na construção da situação de aprendizagem. Os conceitos de CSCL (Aprendizagem Colaborativa Suportada por Computador) foram também utilizados para a construção da situação com o viés colaborativo. Uma segunda etapa metodológica consistiu, portanto, da **concepção e análise a priori** da situação de aprendizagem colaborativa, seguida da **experimentação** com um grupo de três professores de Matemática das redes de ensino e um Professor Mediador (de uma universidade pública). Uma sequência de atividades em quatro etapas foi especialmente desenvolvida, incentivando a criatividade na elaboração de um logotipo a partir do uso de Reflexões, individualmente, compartilhamento de forma cooperativa. Seguindo de etapa de etapa de construção livre, em grupo, de um logotipo, de forma colaborativa, e por fim uma etapa final de construção de um logotipo original. A tela do computador do mediador foi capturada em uma gravação que trazia todas as interações visíveis ao mediador feitas por todos os participantes da experimentação. As escritas no *chat* do *Tabulæ* foram resgatadas em um arquivo para a análise. Os dados foram analisados por um método de análise de conteúdo, em que buscamos identificar as mediações didáticas, assim como outros tipos de interações. Os resultados mostram que a diferença significativa da mediação didática a distância se dá quando a atividade promove uma participação colaborativa dos componentes. Nesses casos, os estudantes passam inclusive a atuar como mediadores. Além disso, a participação das interações com o software *Tabulæ* ter sido essencial nas decisões de mediações didáticas realizadas.

**Palavras-chave:** Educação Online. Aprendizagem Colaborativa. Geometria Dinâmica. Simetria de Reflexão.

## ABSTRACT

This research analyzes the possibilities and limitations for didactic mediation of a learning situation, specially built, for collaborative learning of the concept of reflection symmetry through computer technology integration, in particular of Dynamic Geometry software with distant share of geometric construction (using Tabulæ Collaborative). For the construction of the situation previously conducted a diagnostic study on the knowledge of reflection symmetry of higher education students, using ruler and compass, in which we identify similarities and differences between previous, correct or erroneous, knowledge in a group of 15 students Geometric Design of discipline. Based on the Theory of Conceptual Fields (Verгдаud), we identified theorems-in-action that mobilized by the students in carrying out the diagnostic study tasks. From this study, we identified some didactic variables to build a sequence of learning situations. We used the concept of CSCL (Computer Supported Collaborative Learning) was to construct the situation with the collaborative bias. A second methodological step consisted of the design and a priori analysis of the situation of collaborative learning, then experimenting it with a group of three mathematics teachers of public school teacher and one Mediator (a public university lecturer). A sequence of activities within four steps was developed, especially encouraging creativity in designing a logotype from use of reflections. The first step was an individually construction of the logotype, cooperatively sharing. Following the free construction of the logotype, a step of collaborative construction phase happened. Finally, a step of building the original logotype took place. The computer screen caught allow all mediator interactions visible. We rescued the interactions written in the chat of Tabulæ in a file for analysis and completed it by a description of the images. The content analysis was conducted seeking to identify the didactic mediation, as well as other types of interactions. The results show that the significant difference of the distance teaching mediation occurs when the activity promotes a collaborative participation of components. In such cases, students spend even to act as mediators. Moreover, the share of interactions with the software Tabulæ have been essential in making the teaching mediations conducted.

**Keywords:** Online Education. Collaborative learning. Dynamic Geometry. Reflection Symmetry. Didactic Mediation

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Tela de acesso ao programa Tabulæ Colaborativo.....	39
Figura 2: Tela do Tabulæ Colaborativo copiada durante fase do teste diagnóstico ..	40
Figura 3: Tela da Atividade com as instruções para os alunos .....	41
Figura 4: Exemplo de translação vertical de um pentágono no plano .....	44
Figura 5: Reflexão do ponto E em torno da reta s (eixo de simetria) .....	45
Figura 6: Um dos eixos de simetria de um pentágono regular .....	46
Figura 7: Problema 16 proposto em Lima (2006, Anexo XX) .....	49
Figura 8: Exemplo de problema de construção de figuras simétricas .....	50
Figura 9: Problema de construção de eixo(s) de simetria .....	52
Figura 10: Problema de identificação de eixo(s) de simetria .....	53
Figura 11: Atividade 1 - Completar a figura simétrica.....	62
Figura 12: Atividade 2 - Construção de figuras simétricas .....	62
Figura 13: Atividade 7 - Localização e construção de eixo(s) de simetria.....	63
Figura 14: Atividade 8 - Identificação de eixo(s) de simetria .....	63
Figura 15: Concepção simetria ortogonal (simetria de reflexão) .....	68
Figura 16: Logotipo do Banco Federal Argentino .....	71
Figura 17: Geratriz do Logotipo da atividade experimental .....	72
Figura 18: Instruções enviadas a cada etapa para os estudantes .....	73
Figura 19: Arquivo em PDF com as orientações da Etapa I.....	74
Figura 20: Arquivo em PDF com as orientações da Etapa II e Etapa III .....	75
Figura 21: Geratriz, Geratriz com eixo, Reflexão em torno do eixo.....	77
Figura 22: LOGOS possíveis de serem obtidos utilizando eixos horizontais e verticais .....	78
Figura 23: LOGOS possíveis de serem obtidos utilizando um eixo oblíquo .....	79
Figura 24: LOGOS possíveis de serem obtidos utilizando como eixo o prolongamento de um dos segmentos que foram a geratriz.....	79
Figura 25: LOGOS possíveis com o eixo oblíquo na posição prevista para obter a quarta parte do logo.....	80
Figura 26: LOGOS possíveis de serem obtidos movendo-se os eixos horizontais e verticais.....	81
Figura 27: Tela de acesso ao programa Tabulæ Colaborativo.....	87
Figura 28: Tela do programa Tabulæ Colaborativo – Etapa I .....	87

Figura 29: Tela da Atividade com as instruções para os alunos .....	88
Figura 30: Tela do Roteiro da atividade para os alunos .....	88
Figura 31: Tela dos Membros participantes da atividade .....	88
Figura 32: Caixa de mensagens.....	89
Figura 33: Arquivo e defesa do Aluno1 .....	90
Figura 34: Arquivo e defesa do Aluno2 .....	90
Figura 35: Arquivo e defesa do Aluno1 .....	91
Figura 36: Produção final do grupo .....	93
Figura 37: passos dos alunos na geração de uma LOGO .....	94
Figura 38: Obtenção de um quarto da figura a partir da geratriz, antes e depois da pintura.....	95
Figura 39: Obtenção da LOGO após ajeitar um quarto da figura. ....	95
Figura 40: imagens na tela que geram a dúvida no mediador.....	101
Figura 41: Tela em que o Aluno 1 se identifica como autor da ação de colocar a 2ª geratriz na tela .....	101
Figura 42: Sequência de telas com a exploração feita pelo mediador. ....	103
Figura 43: Trecho inicial do episódio em que mediador investiga concepção do aluno 2.....	107
Figura 44: Trecho final do episódio em que mediador investiga concepção do aluno 2 .....	108
Figura 45: Mediação entre mediador e aluno 3 sobre invariância (parte inicial) ....	109
Figura 46: Mediação entre mediador e aluno 3 sobre invariância (parte final) .....	110
Figura 47: Construção apresentada pelo Aluno 1 .....	110
Figura 48: Trecho do episódio de apresentação da produção do Aluno 1 .....	111
Figura 49: Início de episódio para a construção da LOGO na etapa III.....	112
Figura 50: Final do episódio com interação de todos os estudantes.....	113
Figura 51: Exemplo de episódio de mediação didática da etapa III em que as ações no software é essencial à mediação .....	117
Figura 52: Geração de um quarto da figura por reflexão.....	121

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Quantidade de Cursos na Modalidade EAD no Brasil de 2000 a 2006.....	27
Gráfico 2: Evolução do número de matriculados 2004 a 2012 em Cursos na Modalidade presencial e EAD no Brasil.....	27
Gráfico 3: Quantidade de Matrículas na Modalidade EAD, em cursos de graduação, no Brasil de 2000 a 2006 .....	28
Gráfico 4: Crescimento do número de publicações em periódico indexados pelas bases ISI Web, ERIC (CSA), PsycINFO e Wilson Web entre 1988 e 2007 .....	37
Gráfico 5: Distribuição percentual dos episódios nas etapas por objetivo da interação .....	97
Gráfico 6: Distribuição dos episódios de mediações didáticas da etapa II quanto aos sujeitos participantes .....	105
Gráfico 7: Distribuição das mediações da III Etapa quanto aos participantes .....	114
Gráfico 8: Distribuição das mediações da Etapa IV quanto aos participantes .....	119
Gráfico 9: Frequência de Falas em ação por etapa e por estudantes.....	122
Gráfico 10: Distribuição percentual das “Falas em Ação” por etapa e por sujeito ...	122
Gráfico 11: Distribuição da participação nos episódios por etapa .....	123
Gráfico 12: Distribuição percentual dos episódios por tipo de participantes em cada etapa.....	124
Gráfico 13: Participação das ações com o software colaborativo nos episódios ....	124
Gráfico 14: Percentagem de episódios de cada etapa em que as ações no software participaram promovendo o diferencial .....	125

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Estudos e etapas realizadas na pesquisa .....	60
Quadro 2: Teoremas-em-ação mobilizados no teste diagnóstico.....	64
Quadro 3: Teoremas-em-ação mobilizados na Atividade 01.....	65
Quadro 4 Teoremas-em-ação mobilizados na Atividade 02.....	66
Quadro 5: Teoremas-em-ação mobilizados na Atividade 07.....	67
Quadro 6: Teoremas-em-ação mobilizados na Atividade 08.....	67
Quadro 7: Variáveis e propriedades que darão suporte à elaboração da atividade ..	69
Quadro 8: Distribuição das etapas da sequência de atividades.....	73
Quadro 9:As ações no Tabulae em cada episódio da etapa I.....	102
Quadro 10: As ações no Tabulæ em cada episódio da etapa II.....	105
Quadro 11: As ações no Tabulae em cada episódio da etapa III.....	116
Quadro 12:As ações no Tabulae em cada episódio da etapa IV.....	120

## LISTA DE TABELAS

#Tabela 1: Distribuição das falas em ação e episódios em relação aos objetivos da interação e aos encontros .....	96
#Tabela 2: Distribuição das falas em ação e episódios de mediação didática, quanto a mediação computacional e mediação de conteúdo matemático .....	97
#Tabela 3: Distribuição das falas em ação de mediação didática na etapa I .....	99
#Tabela 4: Distribuição das falas em ação por sujeito de episódios na etapa I .....	100
#Tabela 5: Distribuição das “falas em ação” de mediação didática na etapa II .....	104
#Tabela 6: Distribuição das referências de episódios na etapa II .....	104
#Tabela 7: Distribuição das falas em ação de mediação didática na etapa III .....	111
#Tabela 8: Distribuição das referências de episódios na etapa III .....	113
#Tabela 9: Distribuição das referências de mediação didática na etapa IV .....	117
#Tabela 10: Distribuição das referências de episódios na etapa IV .....	118

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>20</b>
<hr/>	
<b>1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>24</b>
<hr/>	
<b>1.1. O COMPUTADOR NA MEDIAÇÃO DIDÁTICA DA MATEMÁTICA</b>	<b>24</b>
<b>1.2. A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA</b>	<b>26</b>
1.2.1. RESULTADOS ALCANÇADOS PELA EAD NO BRASIL	26
1.2.2. MEDIAÇÃO EM EAD	28
1.2.3. MEDIAÇÃO DO PROFESSOR DIANTE DAS SITUAÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM	31
<b>1.3. GEOMETRIA DINÂMICA</b>	<b>33</b>
<b>1.4. CSCL – APRENDIZAGEM COLABORATIVA SUPOSTADA PELO COMPUTADOR</b>	<b>34</b>
1.4.1. SITUAÇÕES DE ENSINO: PROMOVEDO A COLABORAÇÃO	36
1.4.2. AMBIENTES PARA O TRABALHO COLABORATIVO COM A GEOMETRIA DINÂMICA – TABULAE COLABORATIVO	38
<b>1.5. TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS – GERARD VERGNAUD</b>	<b>41</b>
<b>1.6. TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS</b>	<b>43</b>
<b>1.7. ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS</b>	<b>47</b>
<b>1.8. SIMETRIA DE REFLEXÃO: UMA REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>48</b>
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA</b>	<b>55</b>
<hr/>	
<b>2.1. A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO</b>	<b>55</b>
<b>2.2. ANÁLISE DE CONTEÚDO</b>	<b>56</b>
<b>2.3. WEBQDA – SOFTWARE DE APOIO À ANÁLISE QUALITATIVA</b>	<b>58</b>
<b>3. MÉTODO</b>	<b>60</b>
<hr/>	
<b>3.1. TESTE DIAGNÓSTICO</b>	<b>61</b>
3.1.1. ANÁLISE DO TESTE DIAGNÓSTICO A PARTIR DE TEOREMAS-EM-AÇÃO	63
3.1.2. VARIÁVEIS DIDÁTICAS SELECIONADAS PARA A EXPERIMENTAÇÃO	68
<b>3.2. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DO EXPERIMENTO</b>	<b>69</b>
3.2.1. SUJEITOS	69

3.2.2. ATIVIDADE EXPERIMENTAL	70
3.2.3. ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES	76
<b>3.3. COLETA E ANÁLISE DOS DADOS</b>	<b>83</b>
<b>4. ANÁLISE DOS DADOS</b>	<b>86</b>
<hr/>	
<b>4.1. DESCRIÇÃO ANALÍTICA DOS ENCONTROS VIVENCIADOS</b>	<b>86</b>
4.1.1. DESCRIÇÃO ANALÍTICA DA ETAPA I	86
4.1.2. DESCRIÇÃO ANALÍTICA DA ETAPA II	91
4.1.2. DESCRIÇÃO ANALÍTICA DA ETAPA III	92
4.1.2. DESCRIÇÃO ANALÍTICA DA ETAPA IV	93
<b>4.2. ANÁLISE DAS MEDIAÇÕES E AS SESSÕES</b>	<b>95</b>
4.3.1. ETAPA I – ATIVIDADE INDIVIDUAL – GERAÇÃO DE LOGOTIPO A PARTIR DE UMA GERATRIZ	99
4.3.2. ETAPA II – DISCUSSÃO COLETIVA – DISCUSSÃO COLETIVA DOS LOGOTIPOS GERADOS NA ETAPA I	103
4.3.3. ETAPA III – ATIVIDADE COLETIVA – GERAÇÃO DE UM LOGOTIPO A PARTIR DE INTERAÇÃO E DISCUSSÕES DO GRUPO – AÇÃO COLABORATIVA	111
4.3.4. ETAPA IV – DESAFIO COLETIVO – GERAÇÃO DE UM LOGOTIPO A PARTIR DA VISUALIZAÇÃO DO LOGOTIPO ORIGINAL DO BANCO (FIGURA 3) – AÇÃO COLABORATIVA	117
4.3.5 EVOLUÇÃO DAS MEDIAÇÕES DIDÁTICA NO DECORRER DAS ETAPAS DA SEQUÊNCIA	122
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>126</b>
<hr/>	
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>131</b>
<hr/>	

## INTRODUÇÃO

Essa pesquisa visa analisar mediações didáticas com o uso do software de Geometria Dinâmica Tabulæ Colaborativo sobre Simetria de Reflexão em ambientes virtuais colaborativos para a Educação a Distância.

A mesma insere-se no contexto do estudo das condições de integração da tecnologia computacional mediada por *softwares* de Geometria Dinâmica (GD), particularmente no caso da modalidade a distância. A integração de tecnologia no ensino deve sempre pensar na possibilidade de desenvolver/adaptar a tecnologia à pesquisa e não somente adaptar a pesquisa à tecnologia.

Quando falamos da construção de conhecimentos, significa dizer que nosso quadro geral de reflexão é o construtivismo com base nos estudos do psicólogo suíço Jean Piaget (1987). Anunciar que um estudo situa-se em um quadro construtivista não esclarece hoje muito sobre nossa perspectiva de integração da tecnologia. Mas o que achamos particularmente importante é que a construção de conhecimento do aluno ocorre na sua atividade e em uma atividade que envolve os objetos de conhecimentos em construção. No caso particular da integração da tecnologia GD, isso significa simplesmente que a tecnologia deverá favorecer e facilitar a atividade do sujeito e sua interação com objetos de conhecimentos. No caso da Matemática, e provavelmente na maioria das disciplinas, a resolução de problema é um motor privilegiado da atividade do aluno. No entanto, a resolução de problema não é a única forma de provocar atividades produtoras de conhecimento, as interações sociais (entre alunos, entre alunos e professores,...) têm também essa contribuição.

É importante destacar que, de forma geral, os conhecimentos têm uma dimensão social, inclusive os conhecimentos das ciências exatas. Os conflitos sejam cognitivos (problemas) ou sócio-cognitivos (interações sociais) são, na atividade do aluno, motores à evolução/construção de conhecimentos pelo mesmo.

No contexto do ensino a distância, nossa compreensão da aprendizagem continua a mesma no sentido que a integração da tecnologia a distância, como a presencial, deve favorecer a atividade do aluno e uma atividade que envolve conhecimentos. O diferencial com o ensino a distância vem das funcionalidades de comunicação oferecidas que permitem disponibilizar ou recolher informações (o

essencial da internet oferecida hoje) e que permitem também uma interação entre usuários distantes, interação assíncrona (email, fórum, news, entre outros) e cada vez mais uma interação síncrona (chat).

Hoje, a maioria dos sistemas de ensino a distância oferecem funcionalidades aproveitando a capacidade de comunicação em rede, enriquecendo as possibilidades de atividades para o ensino a distância. Por exemplo, o Moodle (<http://moodle.org>), que é um dos ambientes virtuais de ensino e aprendizagem de EAD oferece sistema de autoria de material didático, até mesmo com a possibilidade de autoria múltipla (wiki), fórum, chat, sistema de autoria de questionário de avaliação e outros.

Entretanto, o essencial das interações é utilizar uma via textual. Quando elementos gráficos ou símbolos matemáticos estão envolvidos na interação, eles são em um formato “bitmap”, ou seja, não incluem uma semântica que poderia permitir que eles fossem os elementos das interações. Existem algumas poucas possibilidades de uma interação com desenho a mão livre com os whiteboards, mas são desenhos simples e os sistemas, permitindo essa interação gráfica, não dão acesso às ações da interação (para explorá-las, por exemplo).

Em um desse sistema, permitindo interações a distância, é necessário definir cenários de utilização. Para retomar as palavras de Artigue comentando o funcionamento, aparentemente ideal, de uma aula com computadores: na atividade rica em interação de alunos utilizando computadores, quais são as matemáticas em jogo? Qual é o papel das retroações na regulação da atividade?

... les élèves en petits groupes, sont actifs devant les machines, chaque groupe travaillant a son rythme. Ils reçoivent en permanence des feed-back qui doivent permettre un apprentissage par adaptation au milieu conforme à la théorie. Tout semble idéal... Mais que se passe-t'il réellement au delà de cette apparence: Quelles sont les mathématiques en jeu dans l'activité de l'élève devant la machine ? Quel rôle jouent les feed-back dans la régulation de cette activité ?(Artigue, 1990, p.18)

São questões que em geral ficam a cargo do professor que deve elaborar, acompanhar e finalizar as atividades em ambientes computacionais para que haja, efetivamente, construção de conhecimentos para o aluno existindo princípios desenvolvidos pelas reflexões teóricas sobre a integração da tecnologia computacional no ensino.

No caso do ensino a distância, a atividade não é somente regulada, em parte,

pelos feedbacks dos envolvidos, mas também pelos feedbacks dos outros usuários do sistema. Além disso, o professor não tem a mesma disponibilidade que em uma situação de ensino presencial. As pesquisas em torno do Computer Supported Collaborative Learning CSCL trazem um quadro teórico de reflexão e metodologias para construir e gerenciar atividades em *sistema de aprendizagem colaborativa*.

Por fim, são as pesquisas sobre a mediação da Geometria Dinâmica, Teoria dos Campos Conceituais e CSCL que fornecem o embasamento teórico da nossa reflexão sobre a integração da tecnologia computacional no ensino na modalidade a distância.

Optamos por utilizar alguns elementos da Engenharia Didática como aporte metodológico, a saber: estudos preliminares, construção e análise a priori de uma sequência, experimentação da sequência. Realizamos um estudo qualitativo cuja finalidade principal foi analisar mediações didáticas de um ambiente de Geometria Dinâmica para a construção de conhecimentos relacionados à Simetria de Reflexão.

Buscamos então responder às seguintes questões:

- ✚ Um software de Geometria Dinâmica contribui para uma melhor mediação didática na abordagem de Simetria de Reflexão?
- ✚ Como se dão as mediações didáticas realizadas a partir das diferentes interações entre professores, alunos e artefatos computacionais, mediados por um sistema colaborativo como o Tabulæ Colaborativo?
- ✚ Como as possibilidades de interação por meio de representações matemáticas permite que os sujeitos desenvolvam ou aperfeiçoem as mediações didáticas?

Temos como hipótese que a mediação didática na geometria, em particular a simetria de reflexão, é auxiliada nos cursos a distância quando trabalha-se a convergência entre ambientes de compartilhamento e ambientes de Geometria Dinâmica, devido ao fato do professor poder ver a construção geométrica do aluno e o aluno também poder ver a ação do professor sobre o conhecimento ao mesmo tempo que discute pela escrita as ideias.

Este projeto está organizado em um primeiro capítulo em que se fundamentam os principais conceitos que dão suporte à construção teórica do objeto. Um segundo capítulo fundamenta as metodologias de coleta e de análise dos

dados. Segue-se um capítulo em que se apresenta e discute o método adotado. A análise dos dados é feita capítulo posterior. Por fim, um capítulo traz as considerações finais ao qual seguem as referências bibliográficas e os anexos.

## **1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Nesse capítulo buscamos construir teoricamente o objeto de estudo. Iniciamos, portanto, discutindo a tecnologia na educação, a Educação a Distância, as linguagens matemáticas e as teorias de ensino e aprendizagem que oferecem suporte à nossa pesquisa.

### **1.1. O COMPUTADOR NA MEDIAÇÃO DIDÁTICA DA MATEMÁTICA**

Com a tecnologia computacional surgiram outras formas de se construir o conhecimento por meio de novas ações e retroações na interação com os objetos de conhecimentos. Nosso foco é relativo às contribuições do computador na mediação didática entre professor e aluno, assim como sua interação com o objeto na construção de novos conhecimentos.

As atividades cognitivas requisitadas pelo conhecimento matemático têm uma particularidade importante relativamente a outras áreas de conhecimentos. Um conceito matemático é um objeto abstrato que para ser explorado, comunicado, e mesmo construído é necessário representá-lo (BELLEMAIN, 2010). É por meio do conceito representado que agimos sobre ele. Além disso, os sistemas semióticos de representação são variados e tem um papel importante no conhecimento matemático (DUVAL, 2005). Em geral, as atividades matemáticas e científicas necessitam da mobilização simultânea de vários registros de representação e conseqüentemente, a construção de conhecimentos pelo aluno necessita da manipulação simultânea desses registros.

Nesse ponto de vista, o estudo das condições de integração da tecnologia computacional para favorecer a construção de conhecimento dos alunos transformar-se, na nossa visão, no estudo (e elaboração) das condições que favorecem a atividade do aluno e do professor (interação social, resolução de problemas, simulações, etc) envolvendo conhecimentos por meio de suas representações por sistemas semióticos de representação.

A interação do aluno com o meio na didática da matemática, linha francesa, tem a seguinte descrição:

O aluno aprende por adaptação a um ambiente que é um fator de contradições, dificuldades, desequilíbrio, assim como faz a sociedade humana. Este conhecimento, o resultado da acomodação do aluno, manifestada por novas respostas são evidências de aprendizagem. (tradução nossa) (BROUSSEAU, 1986, p.48-49)<sup>1</sup>

Nessa perspectiva, uma das possíveis integrações da tecnologia computacional é o desenvolvimento de ambientes que permitam a organização e criação de um meio, que favoreça o aluno à construção de conhecimentos. Salientam-se, principalmente, as possibilidades de ampliar o processo de comunicação com professor e colegas, incluindo a troca de mensagens com diferentes formas de representar um conceito.

Outra contribuição importante da resolução de problemas no computador é de poder aproveitar o desempenho (computacional e gráfico) da máquina para introduzir outros registros semióticos de representação (geometria dinâmica, por exemplo).

O papel do professor, assim como o papel do aluno na sala de aula, é transformado com a integração da tecnologia. Essa mudança não é apenas do fato da presença da tecnologia, mas é consequência das mudanças nas formas de aprendizagem que a integração da tecnologia provoca ou sugere.

Os papéis entre um professor dando uma aula magistral e um professor administrando uma atividade de resolução de problema em GD são bastante diferentes. Da mesma forma, os alunos nessas duas situações passam de uma atitude passiva para uma atitude ativa:

As teorias construtivistas da aprendizagem que entraram no mundo da educação na melhoria da imagem da classe chamada "ativa", uma classe onde o professor é principalmente conselheiro facilitador..., uma classe onde todos se ativa e trabalha em ritmo. À primeira vista, é esta imagem melhorada que retorna uma sessão onde os alunos de matemática trabalhar em pequenos grupos na frente de consoles de computador. (Tradução nossa) (ARTIGUE, 1990, p.18).<sup>2</sup>

Essas mudanças têm consequências positivas sobre as aprendizagens

<sup>1</sup> L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve d'apprentissage.

<sup>2</sup> Les théories constructivistes de l'apprentissage ont pénétré le monde scolaire en valorisant l'image de la classe dite « active », une classe où l'enseignant est avant tout animateur, conseiller..., une classe où chacun est actif et travaille à son rythme. A première vue, c'est justement cette image valorisée que renvoie une séance de mathématique où les élèves travaillent en petits groupes devant des consoles informatiques.

mostrando os aportes da integração da tecnologia computacional, mas necessitam, em contrapartida, de uma reforma profunda do funcionamento da sala de aula e do ensino em geral e do desenvolvimento de ferramentas tecnológicas que possam auxiliar o professor no seu papel.

Por exemplo, existe uma frustração, um desconforto, do professor que passa de uma situação de aula tradicional, na qual ele controla a atenção dos alunos e acredita também controlar as aprendizagens dos mesmos, a uma situação na qual a atenção dos alunos é completamente focalizada no computador, com o professor tendo pouco acesso às aprendizagens efetivas. As interações do sujeito com o problema são alimentadas e reguladas pelas retroações do problema. Com o computador, fica relativamente fácil criar situações nas quais o aluno é autônomo durante a atividade.

Nesse sentido, essas pesquisas (ROCHA, 2012; ANDRADE, 2010) nas quais o ensino e a aprendizagem são mediados pela tecnologia computacional necessitam de uma reflexão sobre as possibilidades de mediações didáticas em situações em que a interação é mediada pela internet que por sua vez filtra o tipo de representação e linguagem utilizada na comunicação.

## **1.2. A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA**

A Educação a Distância (EAD) vem se difundindo rapidamente mediante o uso das tecnologias de comunicação disponível na internet. É uma modalidade de ensino que vem sendo paulatinamente ampliada em formações superiores, especialmente em um contexto como o do Brasil que é bastante extenso territorialmente e que se tem grande déficit de professores em diversas regiões.

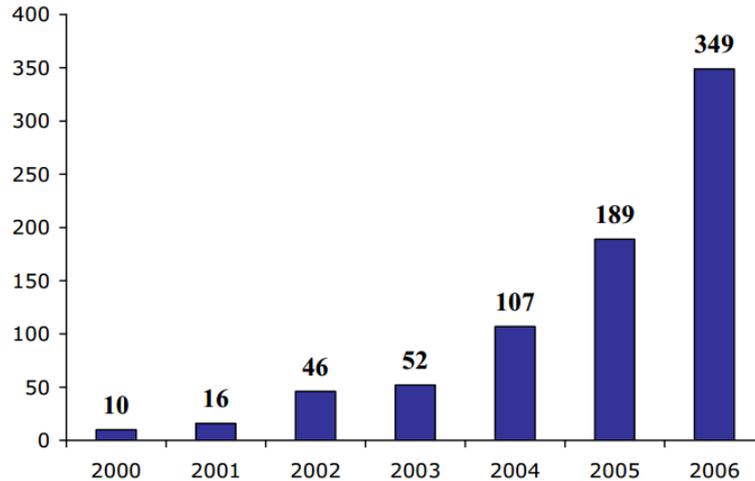
O acesso ao conhecimento, independente do tempo ou espaço, é um dos grandes motivadores desse desenvolvimento. A EAD vem quebrando alguns paradigmas estabelecidos quanto à produção de saber e a sua socialização.

### **1.2.1. Resultados alcançados pela EAD no Brasil**

É perceptível o crescimento do número de Cursos/Instituições de Ensino Superior no Brasil na modalidade a distância conforme dados do censo do INEP em

2006.

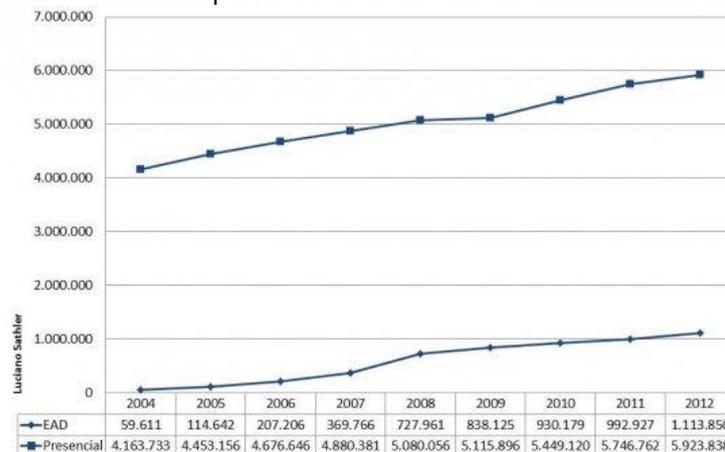
Gráfico 1: Quantidade de Cursos na Modalidade EAD no Brasil de 2000 a 2006



Fonte: Inep/MEC

O Censo de Educação Superior 2012 divulgado pelo MEC indica que ultrapassamos a marca de um milhão de alunos matriculados em cursos de graduação na modalidade a distância - EaD. Crescimento de 59.611 estudantes em 2004 para 1.113.850 em 2012.

Gráfico 2: Evolução do número de matriculados 2004 a 2012 em Cursos na Modalidade presencial e EAD no Brasil



Fonte: Inep/MEC<sup>3</sup>

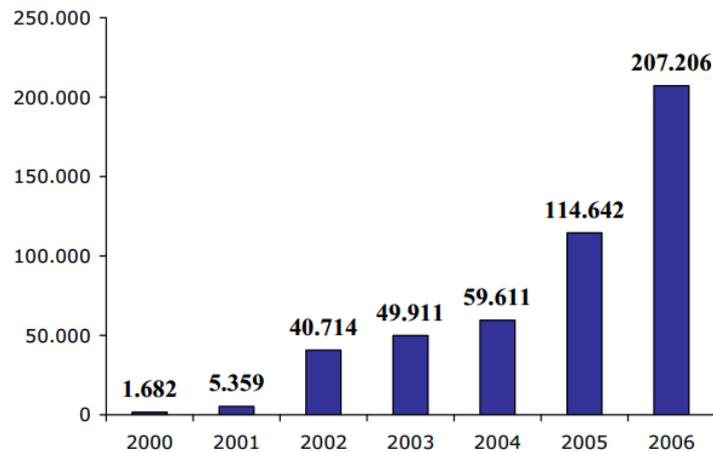
Entre os anos de 2011 a 2012 tivemos um aumento de 12,2% comparado aos 3,1% de matrículas em cursos a distância e presencial respectivamente.

Outro dado interessante é quanto ao crescimento do número de matrículas nos cursos à distância, apesar da oferta ser maior que a demanda. É possível

<sup>3</sup> <http://corporate.canaltech.com.br/coluna/educacao/EAD-o-oceano-azul-na-educacao/>

concluir que o número de matrículas em cursos de graduação na modalidade a distância registrou no período um crescimento superior a 200%.

Gráfico 3: Quantidade de Matrículas na Modalidade EAD, em cursos de graduação, no Brasil de 2000 a 2006



Fonte: Inep/MEC

Se por um lado as demandas e a evolução tecnológica têm permitido o aumento de matrículas e formação de graduação nessa modalidade de ensino; por outro, muita pesquisa é necessária para um melhor aproveitamento e formação do profissional nessa modalidade. O atendimento ao aluno, muitas vezes, é prejudicado pelas limitações criadas na comunicação.

### 1.2.2. Mediação em EAD

Com o desenvolvimento da EAD, houve também a busca por quebrar em seu contexto o paradigma do ensino e aprendizagem pautados na transmissão. Busca-se uma proposta no diálogo e na participação mediados por diversos instrumentos. Instrumentos esses que veem pouco a pouco se desenvolvendo e ampliando a velocidade de transmissão, as linguagens de comunicação (como escrita, falada, representada simbolicamente), a quantidade de pessoas envolvidas e o compartilhamento da construção de objetos.

A mais de uma década, vem se trabalhando no desenvolvimento de Ambientes Virtuais de Aprendizagem, dentre os quais podemos citar o Moodle (DOUGIAMAS; 2004). Nesses ambientes, grupos têm a possibilidade de uma interação com o professor-educador ou demais colegas por meio de ferramentas de comunicação existentes, como o Chat e o Fórum,

Os ambientes digitais de aprendizagem são sistemas computacionais disponíveis na internet, destinados ao suporte de atividades mediadas pelas tecnologias de informação e comunicação. Permitem integrar múltiplas mídias, linguagens e recursos, apresentar informações de maneira organizada, desenvolver interações entre pessoas e objetos de conhecimento, elaborar e socializar produções, tendo em vista atingir determinados objetivos. As atividades se desenvolvem no tempo, ritmo de trabalho e espaço em que cada participante se localiza, de acordo com uma intencionalidade explícita e um planejamento prévio denominado design educacional, o qual constitui a espinha dorsal das atividades a realizar, sendo revisto e reelaborado continuamente no andamento da atividade. (ALMEIDA, 2003, p. 331)

Esses espaços virtuais de aprendizagem, segundo Almeida (2003), oferecem condições para a interação (síncrona e assíncrona). A hipertextualidade é um facilitador da cooperação da aprendizagem entre os participantes e a flexibilidade na operação possibilita estratégias de aprendizagem personalizadas.

Nesse contexto de interação, que envolve uma mediação por meio de interfaces, é importante considerar as linguagens pelo meio das quais nos comunicamos. Por exemplo, discutir um problema geométrico sem possibilidade de trocar de forma síncrona desenhos e construções geométricas, exige do grupo transpor todas as informações que a imagem permite para a linguagem materna e a decodificação dessas informações. Esse processo é carregado de erros. É nesse sentido que a ampliação dos meios de comunicação exigem a inclusão de novas linguagens na comunicação, principalmente as linguagens (representações) correlatas ao saber em foco, como a linguagem algébrica, o sistema do desenho geométrico, o sistema simbólico da geometria, etc.

Diversas são as pesquisas que vêm investigando o uso e integração de ferramentas que permitam a interação por meio dessas linguagens (BELLEMAIN *et al*, 2010). O grupo LEMATEC (EDUMATEC-UFPE) vem desenvolvendo pesquisas em torno do desenvolvimento e uso desses artefatos de mediação para o ensino e aprendizagem da Matemática. Rocha (2012) investigou o uso da linguagem algébrica em chats e fóruns na mediação da aprendizagem da álgebra, Andrade (2010) analisou as interações permitidas pelo software *vetores* de aprendizagem colaborativa desenvolvido por Bellemain *et al* (2010).

Rocha (2012) analisou o tratamento algébrico em um contexto de ensino a distância online, com três pares de licenciandos de matemática respondendo a uma

atividade com uso das linguagens escrita e algébrica. Seus dados revelam a necessidade de ajustes nas ferramentas de edição algébrica presentes em recursos de interação assíncronos, como o fórum, para serem utilizados em interações síncronas, como o *Chat*. Um dos aspectos primordiais apontado é a necessidade que as ferramentas de edição simbólica para os *chats* se adequem agilidade própria da interação via *chat*.

Andrade (2010), por sua vez, ao buscar analisar os requisitos para softwares que deem suporte ao trabalho colaborativo com a ideia de dependência linear da Álgebra Linear. Em seu estudo, foi realizado o levantamento das dificuldades de estudantes, a identificação dos requisitos, a produção de um protótipo de software de interação colaborativa com a ideia de vetores, denominado *Vetores* (BELLEMAIN et al, 2010), e a validação do mesmo por análise das interações com os estudantes. O estudo aponta a necessidade de considerar as dificuldades dos estudantes nas tarefas de conversão de registros semióticos para elicitação dos requisitos de um software dessa natureza.

Nossa pesquisa se incorpora ao desenvolvimento do grupo, buscando analisar as mediações didáticas permitidas em um ambiente virtual colaborativo, a partir de uma situação de ensino que explore o conceito de simetria de reflexão, e permita a comunicação por meio de diversas linguagens, dentre elas as representações matemáticas. As situações valorizam a colaboração entre estudantes para solução de problemas que envolvam aspectos da simetria de reflexão utilizando de forma compartilhada o software de geometria dinâmica.

O educador, o ambiente educacional e suas tecnologias fazem parte desse processo educativo como mediadores, orientadores e condutores do conhecimento, incentivando o trabalho colaborativo dos participantes, aumentando a autoconfiança, a autoestima e a integração no grupo.

Numa visão em que a EAD se torna um modelo facilitador na educação, Rosini (2007, p.65) nos aponta que “nesse contexto, o professor é incentivado a tornar-se um instigador da inteligência coletiva de seus alunos em vez de um fornecedor direto de conhecimentos”. O instigar a inteligência perpassa pela mediação, assim como e principalmente, pelo desenvolvimento da proposta de atividade. Numa proposta colaborativa do processo de ensino-aprendizagem, a situação elaborada precisa promover interação, colaboração e comunicação assim como a participação de todos envolvidos nesse processo.

Dessa maneira, o educador do século XXI assume muita responsabilidade, pois, além de formar e informar, ele terá a função de incentivar os estudantes a obter uma aprendizagem mais participativa e evolutiva, conservando o compromisso ético e social.

Corrêa (2007, p.11) nos aponta que:

o grande desafio é gerar materiais que criem desafios cognitivos para os alunos, que promovam atividades significativas de aprendizagens, enfim, que promovam o desenvolvimento de novas competências necessárias ao campo da ação.

Além do planejamento da atividade, em um momento de prática, o professor promove mediações que assumem duas naturezas distintas, as pedagógicas – pautadas em interações com os estudantes com diversos objetivos, que não perpassam pelo conteúdo e as didáticas – interações voltadas para a exploração do conteúdo foco do curso. Há ainda ações voltadas a gestão da sala de aula, em que o professor organiza e disponibiliza o material, reorganiza, registra presenças e ausências (LINS, 2010).

### **1.2.3. Mediação do professor diante das situações de ensino e aprendizagem**

Entendemos a atitude, o comportamento do professor que se coloca como um facilitador da aprendizagem, que se apresenta com a disposição de ser uma ponte entre o aprendiz e sua aprendizagem – não uma ponte estática, mas uma ponte “rolante”, que ativamente colabora para que o aprendiz chegue aos seus objetivos. É a forma de se apresentar e tratar um conteúdo ou tema que ajude o aprendiz a coletar informações, relacioná-las, organizá-las, manipulá-las, discuti-las e debatê-las com seus colegas, com o professor e com outras pessoas (interaprendizagem), até chegar a produzir um conhecimento que seja significativo para ele, conhecimento que se incorpore ao seu mundo intelectual e vivencial, e que o ajude a compreender sua realidade humana e social, e mesmo a interferir nela. (MORAN et al, 2009, pp. 144-145).

Em uma proposta de mediação colaborativa, o professor deve confiar no aluno e acreditar que ele tem a capacidade de assumir responsabilidades nesse processo. Basta instigá-lo; realimentá-lo com perguntas orientadoras, desencadeando e incentivando reflexões; fazer pontes com outras situações análogas; estimular o sentimento colaborativo compartilhando seus conhecimentos,

dúvidas e aquisições.

Bellemain (2010, p.4), em suas pesquisas relacionadas à concepção e desenvolvimento de ambientes para a aprendizagem de Matemática e Ciências (Ciências online), nos relata que o professor tem por papel:

contextualizar os novos conhecimentos que o aprendiz deve adquirir na elaboração de uma situação a-didática que dá sentido, para o aluno, a esses conhecimentos. Contextualizar não significa necessariamente explorar situações da vida cotidiana do aluno. Trata-se de elaborar situações problemas nas quais o aprendiz reconhece antigos conhecimentos que ele pode utilizar.

Para Valente (1995, p.161-162) o ensino por meio do computador pode se realizar sob diferentes abordagens, que se situam e “oscilam entre dois grandes polos”:

Num dos polos, tem-se **o controle do ensino pelo computador**, o qual é previamente programado através (sic) de um software, denominado instrução auxiliada por computador, que transmite informações ao aluno ou verifica o volume de conhecimentos adquiridos sobre determinado assunto. (...) O professor torna-se um mero espectador do processo da exploração do software pelo aluno. No outro polo, **o controle do processo é do aluno**, que utiliza determinado software para ensinar o computador a resolver um problema ou executar uma sequência de ações para produzir certos resultados ou efeitos. O aluno “ensina” o computador representando a forma como pensa a resolução do problema ou o caminho para produzir os resultados desejados. Aqui a abordagem é a resolução de problemas e a construção de conhecimentos, sendo o computador uma ferramenta tutorada pelo aluno que o ensina a “fazer”, cabendo ao aluno a função de “saber fazer-fazer”. O professor tem um importante papel como agente promotor do processo de aprendizagem do aluno, que constrói o conhecimento num ambiente que o desafia e o motiva para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e a descoberta de novos conceitos.

Devemos considerar que é difícil encontrar dois professores que trabalhem em ambientes virtuais, por exemplo, o ambiente LOGO, e que concordem absolutamente sobre todas as funções que o professor deve desempenhar, mas segundo Valente (1995) essas divergências são salutares no sentido de manter vivas pesquisas nesse tema, além de evitar a criação de uma lista de atributos e funções para o professor tornando essa lista uma receita.

### 1.3. GEOMETRIA DINÂMICA

Esta pesquisa propõe atividades em um ambiente de Geometria Dinâmica, oferecendo ferramentas para que o aluno possa demonstrar resultados geométricos utilizando-se de recursos computacionais. Importante discutir, nesse sentido, o conceito de geometria dinâmica, assim como pesquisas com seu uso.

Os primeiros softwares desenvolvidos para o trabalho com a Geometria Dinâmica foi o Cabri-Géomètre (LABORDE, LABORDE, BELLEMAIN, 1988) e o Geometer Sketchpad. (JACKIW, KLOTZ, SCHATTSCHEIDER, 1989). Os autores perceberam a possibilidade de criar computacionalmente uma estrutura geométrica que, com base em conceitos primitivos e relação entre eles, pudessem realizar construções geométricas. Construções essas que permitem que os objetos geométricos sejam dinamicamente modificados mantendo-se as propriedades utilizadas nas construções. Possibilitou-se, portanto, ampliar a representação das figuras por meio de um desenho que mostra um representante da figura, para representar a figura por meio de desenhos que se podem dinamicamente serem alterados, obtendo a classe de exemplos da figura.

Tendo em vista as suas potencialidades, a Geometria Dinâmica se constitui em uma ferramenta que cria condições de uma aprendizagem na perspectiva construtivista, pois tem a possibilidade da construção significativa dos conceitos, no qual os alunos passam a assumir uma postura investigativa, incentivado a produzir seus próprios conhecimentos, em situações de interpretação, análise, generalização, experimentação e demonstração, conforme nos aponta Gravina e Santarosa (1998, p.1):

É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de 'fatos', geralmente na forma de definições e propriedades.

Bellemain (2001, pp.13-14) afirma que "A geometria dinâmica permite considerar e *conceber* uma representação de objetos matemáticos abstratos em várias configurações, podendo modificar as suas posições". O aprender Matemática fazendo Matemática, do nosso ponto de vista, é uma relação dinâmica, interativa, prática, participativa e que responde ao seu objetivo quando o conteúdo a se

trabalhar está envolvido nesse processo numa cumplicidade entre o ensino e a aprendizagem. Como observa Brandão e Isotani (2003, p. 1487), num antigo ditado atribuído a Confúcio: “O aluno ouve e esquece, vê e se lembra, mas só compreende quando faz”.

Princípios da Geometria Dinâmica descritos por Gravina (1996, p.6) de programas que se opõe aos do tipo CAI (Computer Assisted Instruction):

... são relacionados a ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através (sic) de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento.

#### **1.4. CSCL – APRENDIZAGEM COLABORATIVA SUPOSTADA PELO COMPUTADOR**

Apoiamos nossa pesquisa nas teorias da CSCL – Computer Supported Collaborative Learning – que se entende por um ramo emergente das ciências da aprendizagem que estuda como as pessoas podem aprender em grupo, de uma forma colaborativa, com o auxílio do computador e seus recursos tecnológicos.

Colaboração, mediação pelo computador e modalidade a distância, vem sendo enfatizada nas ciências da aprendizagem mundo a fora. Entretanto, a habilidade de combinar essas ideias no enriquecimento da Educação é um desafio ao qual à CSCL se propõe a investigar.

A aprendizagem colaborativa, na mais ampla definição, conforme Dillenboug (1999) é uma situação em que duas ou mais pessoas aprendem ou tentam aprender algo juntas. Na caracterização da colaboração feita por Roschelle e Teasley (1995), a aprendizagem ocorre socialmente, as atividades nas quais eles estão envolvidos não são realizadas individualmente, mas sim, integradas ao grupo, com negociação e compartilhamento social do que é entendido pelos demais.

Diante de inúmeras pesquisas educacionais envolvendo a colaboração, temos a preocupação de estudar e analisar como a tecnologia, em particular o computador, poderá auxiliar nesse complexo sistema de aprendizagem.

A aprendizagem, segundo a Epistemologia Genética de Piaget, depende de um processo construtivo que ocorre por meio de construções e reconstruções dos sistemas de significação e dos sistemas lógicos de cada indivíduo. Para essa (re)construção é fundamental se interagir com os objetos (natureza, mundo físico, cultura, artes, ciências, linguagens...), com outros sujeitos (sociedade, instituições...) e agora com e por meio da tecnologia (FAGUNDES et al., 2005).

Uma característica básica da aprendizagem colaborativa, segundo Rosini (2007, p.66):

é desenvolver um ambiente que incentive o trabalho em grupo, respeitando as diferenças individuais. Todos os integrantes possuem um objeto em comum e interagem entre si em um processo em que o aluno é um sujeito ativo na construção do conhecimento, enquanto o educador é um mediador, orientador e condutor do processo educativo.

O educador incentivando o trabalho colaborativo dos participantes aumenta a autoconfiança, a autoestima e a integração no grupo. A mediação passa a ser estudada, não só como uma atividade docente, mas como uma atividade de todo o grupo num sistema de trabalho em que todos agem colaborativamente, entendendo a ação do outro e buscando mediar conhecimentos e conflitos.

Portanto, é fundamental compreender o papel do computador na interação, pois permite maior rapidez e facilidade na comunicação, distante ou não, que se conhece ou que compartilha interesse e necessidade de socializar informações e construir textos de forma colaborativa.

Nesse contexto de aprendizagem colaborativa, a capacidade de aprender a aprender e de aprender a pensar é desenvolvida, além do senso crítico e da maturidade intelectual. Os saberes aprendidos serão retidos e canalizados para outros contextos, levando o aprendiz a obter o controle consciente dessa aprendizagem.

A aprendizagem acontece por meio das interações entre os alunos, das suas discussões, reflexões, questionamentos, decisões e linhas de raciocínio, ensinando um ao outro numa troca de conhecimentos.

Ao deparar com algumas dificuldades na resolução de tarefas, o grupo terá a

possibilidade de uma interação com o professor-educador ou demais colegas por meio de alguma ferramenta de comunicação existente no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). Antes essa comunicação dava-se por meio da língua materna em Chat e o Fórum. Hoje, incorpora-se a possibilidade de agir diretamente em softwares que o outro está utilizando, e de visualizar o processo de construção dos objetos feitos pelos pares.

Estimular e manter essa interação necessita planejamento de estratégias pedagógicas e tecnologias apropriadas que possam suportar e facilitar esse processo. Os objetivos de CSCL são os de favorecer um ambiente real ligado aos conhecimentos prévios dos aprendizes.

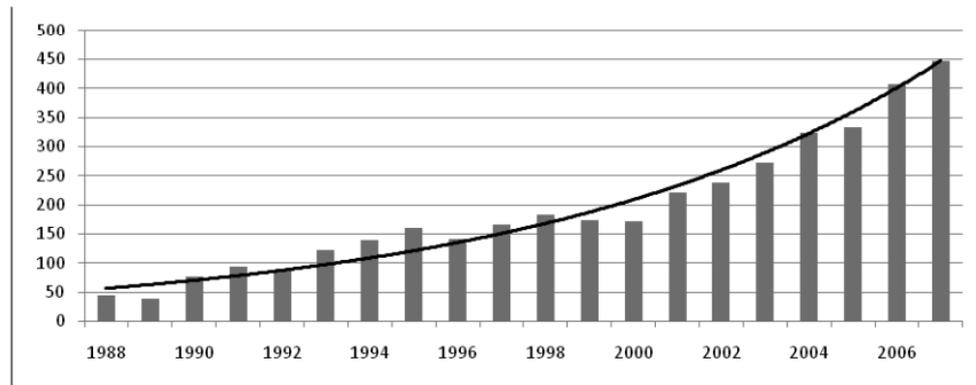
São vários os instrumentos tecnológicos que viabilizam esse processo. Numa modelagem assíncrona, podemos citar o correio eletrônico (e-mails) e na síncrona, necessitamos de softwares colaborativos por meio dos quais todos interagem sobre o mesmo objeto, permitindo a troca de informações textuais, gráficas, algébricas, como nos chats, fóruns e videoconferências. Com essas ferramentas, cresce a possibilidade de um trabalho com mais interação e colaboração entre os grupos.

#### **1.4.1. Situações de ensino: promovendo a colaboração**

Nos discursos presentes na contemporaneidade fala-se muito sobre o valor do trabalho em equipe e das comunidades profissionais de prática. Alguns autores falam até de uma nova *Era da Colaboração* nas organizações (TAPSCOTT, 2005). Para Tractenberg e Struchiner (2010, p.65):

Verificamos esse fenômeno também no campo da Educação. Uma forte evidência disso é o crescimento exponencial do número de publicações tratando do tema da aprendizagem colaborativa e cooperativa nos últimos anos, como mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 4: Crescimento do número de publicações em periódico indexados pelas bases ISI Web, ERIC (CSA), PsycINFO e Wilson Web entre 1988 e 2007



Número total de artigos sobre aprendizagem colaborativa publicados em periódicos internacionais *peer-reviewed* indexados pelas bases ISI Web, ERIC (CSA), PsycINFO e Wilson Web entre 1988 e 2007<sup>4</sup>. O levantamento foi realizado em setembro de 2008 nas bases de dados ISI Web, ERIC (CSA), PsycINFO e Wilson Web, buscando os artigos que contivessem as expressões “collaborative learning” e “cooperative learning” no título ou no campo de assunto/palavras-chave. Todas as referências duplicadas foram eliminadas.

Porém, a aprendizagem colaborativa precisa ter como referência uma prática pedagógica emergente, comenta Behrens (1999). Para alicerçar essa prática compatível com as mudanças paradigmática da ciência, num paradigma emergente, Behrens acredita na construção de uma aliança ou “teia” formada com **a visão sistêmica**, com **a abordagem progressista** e com **o ensino com pesquisa**. Essa teia se justifica pelas características de cada abordagem.

- A **visão sistêmica** ou **holística** busca superar a fragmentação do conhecimento, o resgate do ser humano em sua totalidade, considerando o homem com suas inteligências múltiplas, levando à formação de um profissional humano, ético e sensível;
- A **abordagem progressista** tem com pressuposto central a transformação social. Instiga o diálogo e a discussão coletiva como forças propulsoras de uma aprendizagem significativa e contempla os trabalhos coletivos, as parcerias e a participação crítica e reflexiva dos alunos e professores;
- O **ensino com pesquisa** pode provocar a superação da reprodução para a produção do conhecimento, com autonomia, espírito crítico e investigativo. Considera o aluno e o professor como pesquisadores e produtores dos seus próprios conhecimentos.

(BEHRENS, 1999, p. 56),

Portanto, conclui Behrens (ibid, p. 93):

Não há prática pedagógica isolada em uma disciplina e sim uma ação docente com a visão do todo, com a responsabilidade e a preocupação de provocar interações e relações consigo mesmo, com seus semelhantes, com sua comunidade, com a sociedade e com o

planeta.

Existem algumas estratégias de aula para inovação no ensino com a tecnologia. O professor pode negociar *aulas-informação* oferecidas pelo próprio professor apresentando sínteses, novos cenários ou temas, ao vivo ou gravada, precedidas ou complementadas de leituras e análise de textos, e/ou *aulas-pesquisa* estimulando o aluno à investigação, à experimentação e depois analisá-las individualmente ou em grupo para compreender o que de geral há naquela experiência (MORAN, 2012).

#### **1.4.2 Ambientes para o trabalho colaborativo com a Geometria Dinâmica – Tabulæ Colaborativo**

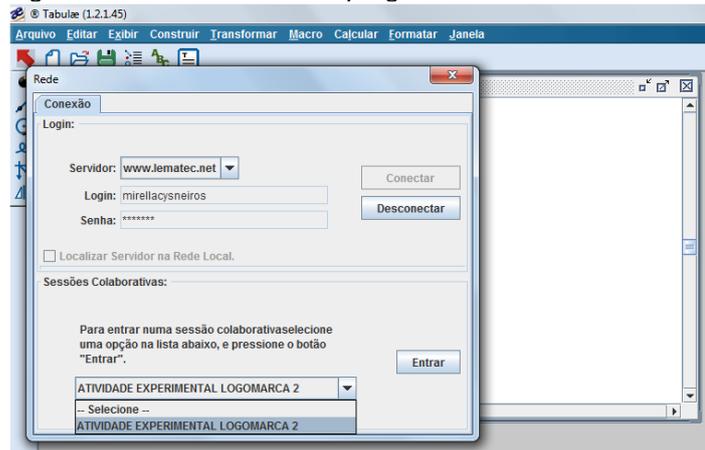
No contexto da Geometria Dinâmica, as pesquisas mais atuais, têm buscado integrar as ferramentas de Geometria Dinâmica como um meio de comunicação em que a “fala” se dá, não só pela língua materna (escrita ou falada), mas pela ação do sujeito com os objetos e representações matemáticas. Mesmo sem dar uma palavra, o professor pode mostrar o processo de construção de uma figura simétrica utilizando ferramentas e telas de geometria dinâmica que são compartilhadas por todos os usuários de uma plataforma.

Ferramentas colaborativas como essa já existem como o Geogebra Colaborativo (HOHENWARTER, 2001) e Tabulæ Colaborativo (GUIMARÃES; MORAES, 2008).

O Geogebra Colaborativo existe em uma plataforma em que todos podem criar uma conta, no estilo do youtube, socializar suas construções e construir coletivamente. Em 2001, Markus Hohenwarter começou o trabalho para tese *GeoGebra de seu mestre - um Sistema de Software para Geometria Dinâmica e Álgebra na planície*. O objetivo deste projeto foi para desenvolver um tipo completamente novo de ferramenta para a educação matemática nas escolas secundárias.

O Tabulæ Colaborativo é uma ferramenta livre que pode ser instalada no servidor de um grupo e nesse os grupos de trabalhos são criados. Os participantes precisam ser cadastrados pelo administrador do site, atribuindo login e senha. A tela a seguir traz a instalação dele no site do [lematec.net](http://lematec.net) ([lematec.net/tabulae](http://lematec.net/tabulae)).

Figura 1: Tela de acesso ao programa Tabulæ Colaborativo

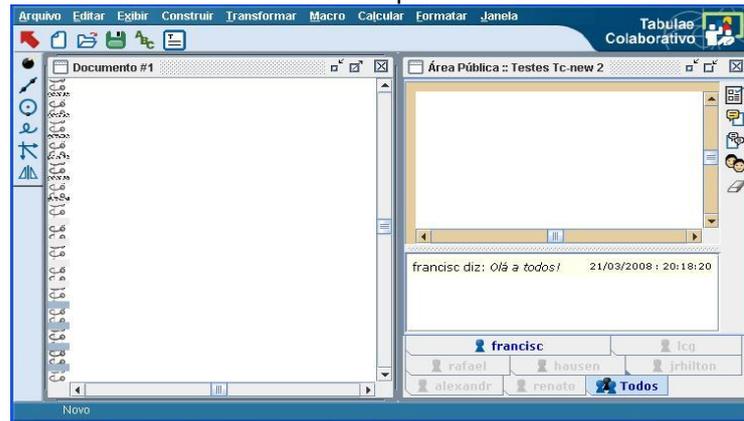


Idealizado como uma ferramenta para Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador (CSCL), com características de Geometria Dinâmica e compartilhamento de construções geométricas por meio da Internet, ou utilizando redes locais, o Tabulæ Colaborativo permite a aplicação de estratégias didáticas colaborativas em atividades de geometria dinâmica à distância ou realizadas em aulas em laboratório.

Desenvolvido na classe de aplicativos como Geometria Dinâmica (GD), o Tabulæ Colaborativo é um ambiente online que junta possibilidades de comunicação a distância com o software de geometria dinâmica. Este auxilia na aprendizagem colaborativa a distância, favorecendo a manipulação e o compartilhamento das construções geométricas e dos textos por todos os participantes, simultaneamente (forma síncrona) ou em sessões assíncronas.

O aprendizado colaborativo ocorre em mini-sessões, com a interação dos alunos usando Geometria Dinâmica - GD e as ferramentas agregadas (Chat, Roteiro didáticos, etc). Toda sessão colaborativa é baseada numa tela em branco com funcionalidades específicas à Geometria Dinâmica, seguindo um *roteiro de colaboração*, como podemos ver na figura a seguir.

Figura 2: Tela do Tabulæ Colaborativo copiada durante fase do teste diagnóstico



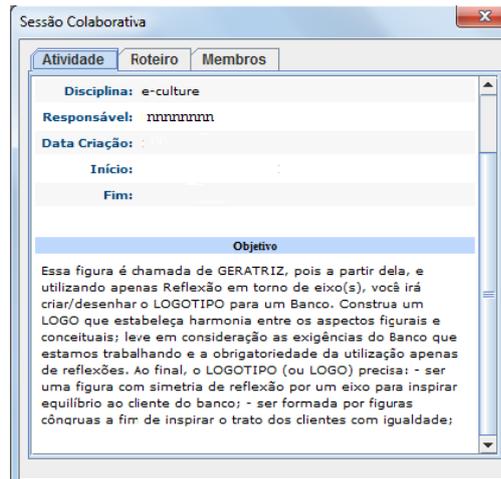
No lado esquerdo temos *caderno de anotações*, uma tela comum aos softwares de Geometria Dinâmica, com todas as propriedades comuns a este tipo de aplicativo. Nessa área o aluno poderá realiza suas construções particulares e suas estratégias na construção de sua produção.

À direita temos a área pública chamada *quadro negro*, coordenada pelo professor, onde todas as construções realizadas ali serão compartilhadas pelo restante do grupo buscando facilitar a mediação e a aprendizagem de forma colaborativa. Abaixo dessa área encontra-se a ferramenta de comunicação – Chat.

A partir desse compartilhamento é permitido ao professor elaborar atividades em que a construção seja acompanhada simultaneamente, em tempo real, por todos os participantes, tendo o professor controle das estratégias de construção, mas do ritmo empregado em cada situação dessa etapa de trabalho. A comunicação pela ferramenta Chat facilita o feedback de cada etapa à todos do grupo em um cenário semelhante ao da em sala de aula.

O ambiente dispõe ainda de uma janela de instruções da atividade, com as abas: Atividade, Roteiro e Membros, como mostra a figura a seguir.

Figura 3: Tela da Atividade com as instruções para os alunos



Por fim, esse programa foi utilizado como ambiente para a nossa pesquisa e os nossos estudos, porque levam em consideração os aspectos cognitivos e de interação homem-máquina, além dos tecnológicos e elementos que podem intervir na comunicação, mediação ou apreensão da informação apresentada no desenvolvimento dessas habilidades.

### 1.5. TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS – GERARD VERGNAUD

Como uma teoria cognitiva, a Teoria dos Campos Conceituais fornece uma base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem, na qual Vergnaud (1996) considera como sua principal finalidade prover uma teoria que permita dentre outras possibilidades a compreensão das rupturas encontradas nas concepções dos estudantes.

Vergnaud (ibid, p.166) descreve a construção de um conceito como um tripé:

$$C = (S, I, s)$$

S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);

I: conjunto das invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado);

s: conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).

Vergnaud chama a atenção para o cuidado de, do ponto de vista do ensino e aprendizagem, não se reduza um conceito à sua definição. Segundo ele, “É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido” (VERGNAUD, 1996, p.156).

Desta forma, na prática, temos um grande desafio relacionado ao ensino da Matemática: a introdução de conceitos por meio de resolução de problemas, tornando-os interessantes, desafiadores, instigantes e compreensíveis, diante da diversidade de níveis cognitivos dos alunos.

Para descrever e analisar os avanços e conquistas dos alunos na aprendizagem, segundo Magina (2005, p.11):

Vergnaud considera duas ferramentas essenciais: competência e concepção. A competência é traçada pela ação do aluno diante das situações (no caso, resolução de problemas), e as concepções dos alunos podem ser traçadas por suas expressões verbais ou outras representações simbólicas (tais como a escrita ou o gesto).

Para um melhor entendimento da relação competência e concepção, faz-se necessário o entendimento do significado de “esquema” introduzido inicialmente por Piaget, mas que adquiriu uma maior repercussão com Vergnaud.

Um esquema, conforme Vergnaud (1996, p.157), é a “organização invariante da conduta para uma dada classe de situações e é nos esquemas que temos que procurar os conhecimentos-em-ato do aluno, ou melhor, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória”.

Os algoritmos são esquemas (VERGNAUD, 1996), que são objetos do mesmo tipo lógico que os algoritmos, diferenciando a efetividade do algoritmo para o esquema, pois no algoritmo temos a propriedade de chegar ao fim com segurança num finito número de passos, já nos esquemas são frequentemente eficazes, mas nem sempre efetivos. As «invariantes operatórias» são os conhecimentos contidos nos esquemas também expressas por “conceito-em-ato” e “teorema-em-ação”.

Vergnaud, que esteve em Porto Alegre a convite do Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação (GEEMPA) e, durante o encontro, concedeu uma entrevista a *Sonia Montañó* que a publicou na Revista Pátio (Edição 13, Ano IV, Publicação Junho 2012, p. 2), descreve sobre o conhecimento matemático do jovem:

Desenvolvi a ideia de que os jovens têm muito conhecimento matemático, mas não são capazes de explicitá-lo, embora o utilizem em determinadas situações. Chamei a isso de “conceitos em ação” e “teoremas em ação”. Trata-se de uma interpretação do que a criança faz, são os conhecimentos utilizados por ela para lidar com as situações. É a base conceitual implícita ou explícita que está por trás das ações dos alunos ao lidar com as situações propostas.

Um teorema-em-ação é visto como relação matemática que é levada em consideração pelos alunos, quando estes escolhem uma operação, ou sequência de operações, para resolver um problema.

É de grande importância o professor ter a sensibilidade em perceber nos alunos as ações (teoremas em ação) que aparecem de modo intuitivo, na maioria das vezes, diante das situações, ações de acertos ou erros, e a partir daí propor novas situações possibilitando desenvolver novas estratégias-ações, considerando experiências anteriores, adaptando-as ou ampliando-as a novos conhecimentos.

A mediação perpassa, portanto, pela capacidade do professor entender os conhecimentos em ação do estudante, sendo eles corretos ou não. Um conhecimento prévio dos principais teoremas em ação e conceitos em ação já detectados na literatura, juntamente com o saber gerado na experiência sobre os teoremas e conceitos em ação, mais comumente observados em cada tema do conhecimento matemático, facilita não só a elaboração da situação, como também a mediação didática.

## 1.6. TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS

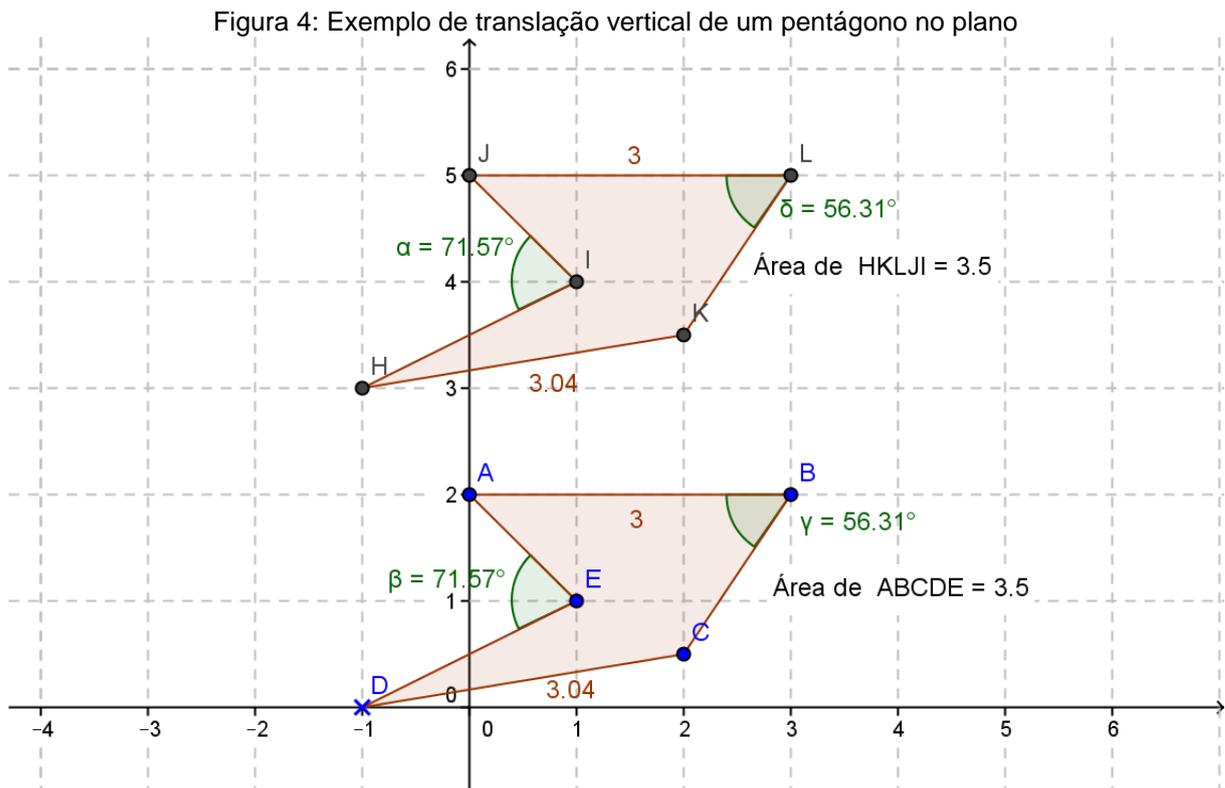
Muito tem se defendido uma abordagem da geometria que valorize a geometria das transformações, para Lindquist e Shulte (1998, p.133):

Um dos temas e abordagens “modernos” da geometria é a geometria das transformações, uma maneira mais global que local de ver a geometria. Em vez de considerar triângulos, círculos e poliedros isoladamente, como fez Euclides, a geometria das transformações concentra-se em translações, rotações e reflexões, em resumo, em *isometrias* (isto é, movimentos rígidos) que fazem essas figuras mudarem de posição.

Desta forma podemos entender que isometria no plano  $\pi$  é uma função

$$f: \Pi \rightarrow \Pi$$

que preserve a distância entre os pontos. Por exemplo, se a qualquer ponto  $(a,b)$  do plano somamos o ponto  $(0,3)$ , promovemos em qualquer figura do plano um deslocamento na direção do eixo  $y$ , de três unidades - fazemos uma translação vertical de três unidades. Quaisquer dois pontos de uma figura, com tal transformação mantêm a distância entre eles.



Assim como se observa no exemplo, uma translação ao preservar as distâncias, preserva também Ângulos; Áreas; e mantém a imagem da figura obtida congruente à figura original. Assim como essa translação, qualquer outra também o faz.

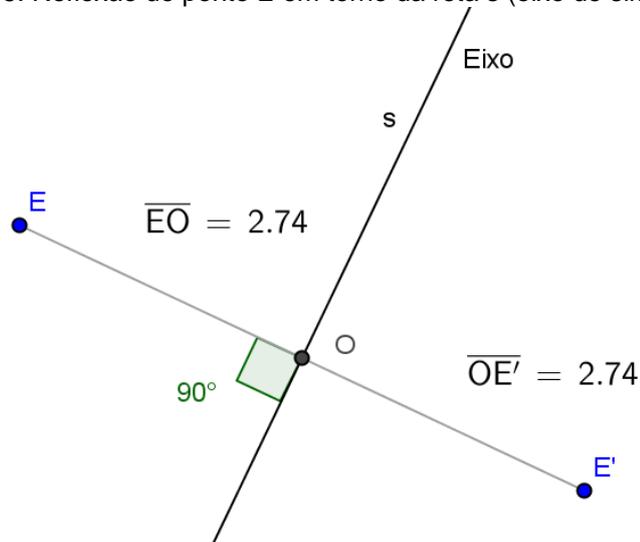
Uma função  $f: \Pi \rightarrow \Pi$  é uma isometria se, e somente se, quaisquer dois pontos  $P$  e  $Q$  de  $\Pi$ , tem-se que  $d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$ , onde  $d(x,y)$  denota a distância do ponto  $x$  ao ponto  $y$ .

(SIQUEIRA, LIMA, GITIRANA, 2004, p.2)

Entre as isometrias do plano destacamos as reflexões com relação a uma reta (axial). No caso das reflexões em relação a uma reta, a função de isometria leva cada ponto do plano a um ponto por meio de uma reta perpendicular ao eixo que

passa pelo ponto de origem. O ponto imagem passa a ser o ponto que está a mesma distância do ponto escolhido, como mostra a figura que mostra geometricamente sem o sistema cartesiano e por meio do sistema cartesiano.

Figura 5: Reflexão do ponto E em torno da reta s (eixo de simetria)



Siqueira, Lima e Gitirana (2004, pp. 2-3) descreveu da seguinte forma as reflexões:

Dada uma reta  $r$ , diz-se que  $\sigma: \Pi \rightarrow \Pi$  é uma reflexão com relação à  $r$  (referida como o **eixo de simetria**) se esta reta é a mediatriz do segmento de extremidades  $P$  e  $\sigma(P)$ , onde  $P$  representa um ponto qualquer do plano.

Demonstra-se que toda isometria é uma composição de, no máximo, três reflexões. Este fato importante permite classificar todas as isometrias do plano, pois tais produtos de reflexões produzem apenas quatro tipos de transformações geométricas: reflexões em relação a uma reta, translações, rotações em torno de um ponto e reflexões com deslizamento em relação a uma reta.

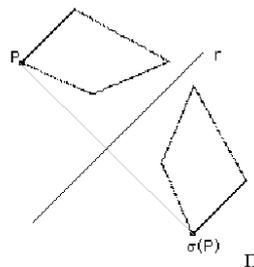


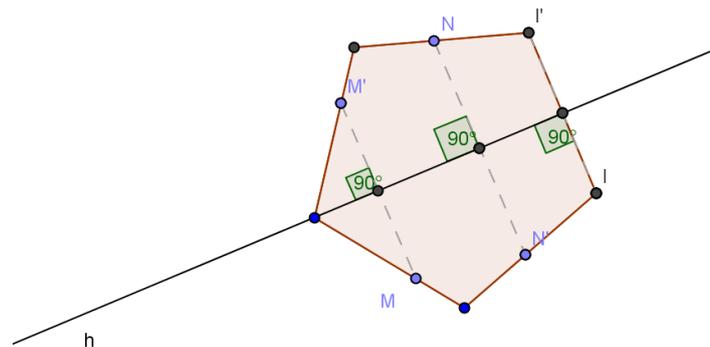
Figura 1: Reflexão do Plano  $\Pi$  com relação a reta  $r$

Ao se refletir uma figura qualquer em torno de um eixo de simetria (reflexão)

obtém-se, portanto, uma nova figura formada pela original e o seu reflexo. Essa nova figura tem simetria de reflexão em relação a este eixo.

Há, porém, figura que quando fazemos uma reflexão sobre alguns eixos obtemos a própria figura. Nesse caso, dizemos que a figura tem simetria de reflexão em relação ao eixo escolhido. O reflexo de cada ponto em relação ao eixo escolhido é outro ponto que também pertence à figura. Veja o exemplo:

Figura 6: Um dos eixos de simetria de um pentágono regular



Percebe-se, portanto, a invariância da figura quando refletida sobre o eixo h.

Nesse contexto, descreve Gitirana (1998, p.8) encontra:

dois tipos de percepção da figura que muitas vezes se contrapõem: percepção global da figura e a percepção da figura como formada por pontos. Para a identificação dos elementos da invariância por uma transformação isométrica que atua em pontos da figura o aluno precisa trabalhar com essas duas percepções conjugadas. Precisa entender a reflexão dos pontos e a invariância da reflexão quando se considera a figura como um todo. O ponto se altera, mas a figura fica invariante.

Os softwares estão caminhando em direção a uma *interface gráfica* que, segundo Moraes (2006) possibilitam uma maior manipulação de imagens na tela que podem ser capturadas, deslocadas e processadas, facilitando a utilização pelo usuário.

Na geometria, tem-se utilizado uma abordagem mais ativa, como o software *Cabri-géomètre* que permite um tratamento mais dinâmico na resolução dos problemas.

## 1.7. ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS

Desde final da década de 90, os Parâmetros Curriculares Nacionais, chama a atenção para um ensino de geometria que valorize o uso de software educativo, e também os padrões geométricos.

Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou obra de arte, esculturas, arquitetura, ou ainda, em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc. (...) O uso de alguns softwares disponíveis também é uma forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente. (BRASIL, 1997, p.128).

O parâmetro dos anos Finais do Ensino Fundamental de Matemática traz, mais direcionado, orientações para exploração das isometrias e homotetias, as transformações do espaço, o que veio a se chamar de geometria das transformações.

Deve destacar-se, também, a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p.51)

O Novo Programa de Matemática do Ensino Básico — **NPMEB**, homologado em Dezembro de 2007, constitui um reajuste ao Programa de Matemática para o Ensino Básico. Conforme Pinto (2012, p.16):

Um dos documentos programáticos de referência e que serviu de base e de orientação, na reformulação do NPMEB, foi o NCTM de origem norte americana e traduzido para português pela APM — Associação de Professores de Matemática, é «um processo contínuo que visa melhorar a educação Matemática (...), e é o resultado de vários grupos de trabalho que refletiram nos programas de Matemática, desde o pré-escolar até ao 12º ano». Este manual fornece inúmeras indicações e sugestões, tais como a «utilização das tecnologias e do software de Geometria dinâmica, que permitam ao aluno formular e testar conjecturas: a visualização possibilitada por estas ferramentas facilita o raciocínio geométrico, no plano e no espaço». O rigor científico e os termos e linguagem utilizados, para descrever e interpretar situações de congruência de figuras e de transformações geométricas é também alvo de extrema atenção,

assim como a articulação entre os vários ciclos de ensino.

O NPMEB (2007) menciona ainda que os programas computacionais de Geometria Dinâmica e os Applets favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas e os alunos devem recorrer a software de Geometria dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Segundo Pinto (2012, p.17):

O estudo da Geometria deve ter como base, tarefas que proporcionem oportunidades para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e de operar com elas. As tarefas que envolvem as isometrias do plano devem merecer atenção especial, sobretudo as que dizem respeito a reflexões e rotações, pois permitem a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão. As isometrias permitem desenvolver nos alunos o conceito de congruência (figuras congruentes relacionam-se entre si através (sic) de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes).

## 1.8. SIMETRIA DE REFLEXÃO: UMA REVISÃO DA LITERATURA

Lima (2006) desenvolveu um estudo no contexto da simetria de reflexão cujo objetivo foi identificar “controles<sup>4</sup> susceptíveis de serem mobilizados por alunos na resolução de problemas de construção e de reconhecimento de figuras simétricas. *“Estruturas que permitem atestar a legitimidade e a validação de uma ação do sujeito”* (LIMA, 2008, p.47). Lima apoia sua pesquisa no modelo cKç “Concepção, Conhecimento e Conceito”, desenvolvido por Balacheff (1995). A pesquisadora descreve que o principal interesse da pesquisa é estudar a forma como os professores tomam decisões didáticas promovendo o progresso da aprendizagem de conhecimentos quanto à simetria ortogonal (reflexão). E a partir da identificação a priori dos critérios e valores que os alunos podem usar em resolução de problemas quanto à construção de figuras simétricas, foi permitido realizar um experimento do estudo de tomada de decisões didáticas.

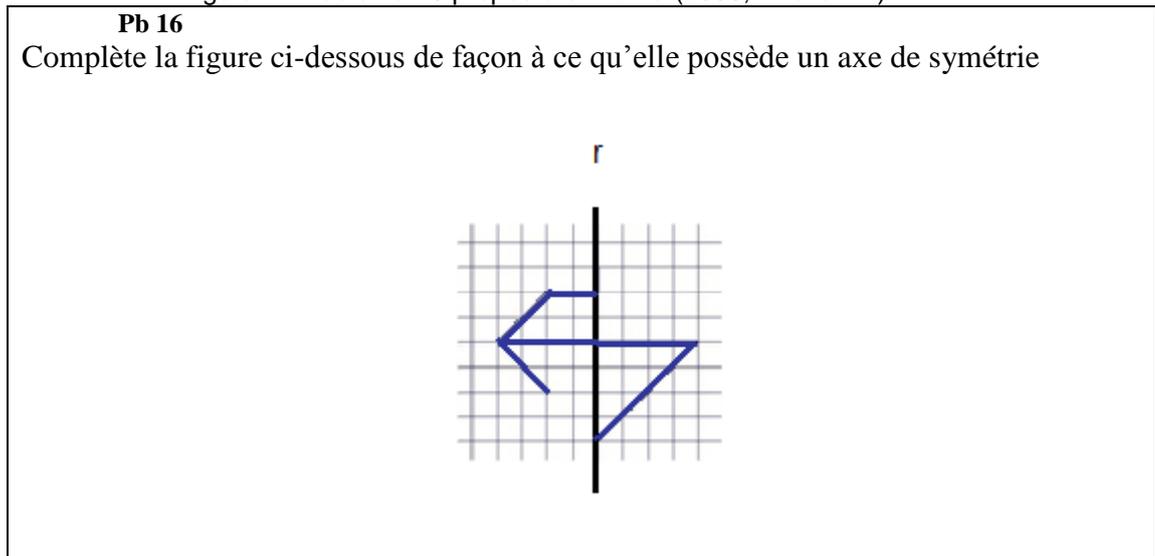
Duas de suas atividades nos revela especial interesse para o nosso estudo. A

---

<sup>4</sup> “Estruturas que permitem atestar a legitimidade e a validação de uma ação do sujeito” (LIMA,2008, p. 47). Lima apoia sua pesquisa no modelo cKç “Concepção, Conhecimento e Conceito”, desenvolvido por Balacheff (1995).

atividade a seguir:

Figura 7: Problema 16 proposto em Lima (2006, Anexo XX)



O problema proposto em Lima (2006) visou que o aluno completasse a figura dada para que ela fique simétrica em relação à reta  $r$  (eixo de simetria). Nessa atividade, definiu as variáveis didáticas quanto a:

- Natureza do problema: Construção da figura simétrica;  
Reconhecimento do eixo de simetria.
- Orientação dos segmentos de F em relação à folha do papel:
  - Horizontal,
  - Vertical,
  - Oblíqua.
- Tipo de papel: Quadriculado

Para Lima (ibid), o tipo de papel quadriculado, em sua análise, pode substituir os instrumentos, pois usa os quadrados como referência de unidade de medida em vez de medir a distância utilizando, por exemplo, a régua; a ortogonalidade é vista também onde o eixo é vertical ou horizontal. O papel quadriculado induz um reconhecimento perceptivo da propriedade geométrica perpendicularidade.

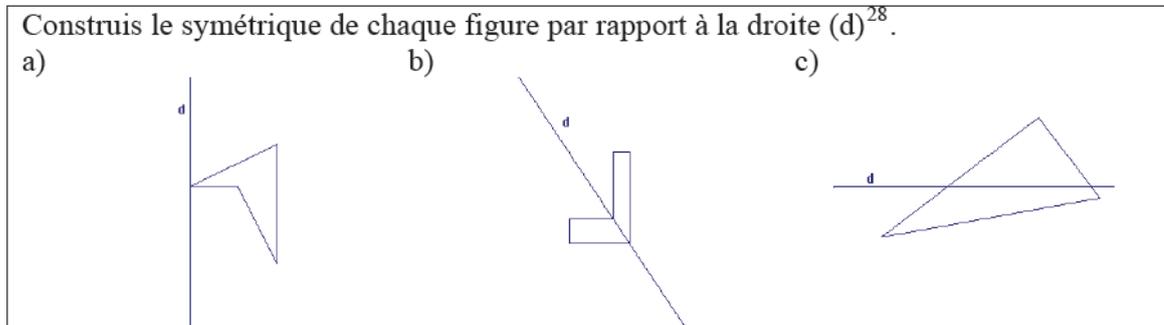
Outra atividade que revela importantes aspectos a serem considerados da pesquisa de Lima é uma questão de construção de figura.

Figura 8: Exemplo de problema de construção de figuras simétricas

**Problèmes de Construction**

a) *Construction de la figure symétrique* : la figure objet F et la transformation T (représentée par le tracé d'une droite) sont données, et la figure image F' est à construire.

Exemple :



Fonte: Lima (2000, p.217).

Nesse problema de construção da figura simétrica: a figura objeto é F e a transformação T (representado por um eixo) são dados, e a figura imagem F' deve ser construída. Nessa atividade, Lima (ibid, p. 205) definiu as variáveis didáticas quanto a:

- Natureza do problema: Construção da figura simétrica
- Especificidade da figura F:
  - F possui segmentos paralelos ao eixo de simetria;
  - F possui segmentos perpendiculares ao eixo de simetria.
- Orientação dos segmentos de F em relação à folha:
  - Horizontal,
  - Vertical;
  - Oblíqua.
- Orientação do eixo sobre a folha:
  - Horizontal,
  - Vertical,
  - Oblíqua.
- Posição de F em relação ao eixo:
  - Toca,
  - Corta.

- Tipo de papel: Branco

De acordo com Lima (2008, p. 47-48), tomando como referência os resultados das experimentações, incluindo as duas atividades:

Grenier e Laborde (1987) propuseram uma tipologia de procedimentos susceptíveis de serem mobilizados pelos alunos na resolução de problema de construção da imagem de uma figura por uma simetria de reflexão:

- **Direção ortogonal:** a determinação de um ponto da figura-imagem se faz em função de uma direção ortogonal ao eixo de simetria;
- **Direção por prolongamento:** esse procedimento dá por imagem de um ponto um ponto situado no prolongamento de uma direção materializada pela figura objeto;
- **“Direção horizontal”** ou **“Direção vertical”:** dão por ponto-imagem um ponto situado sobre uma mesma reta horizontal ou uma mesma reta vertical que o ponto objeto

(GRENIER; LABORDE 1987, p. 71-72).

Segundo a autora, a construção da imagem poderá ser caracterizada por um dos três tipos de procedimentos:

- **Global:** na construção da imagem não intervêm outros objetos senão a figura construída. A figura simétrica é construída seja perceptivelmente, à mão livre, por exemplo, seja com a ajuda de instrumentos tais como a dobraduras ou papel decalque.
- **Semi-analítico:** um ou vários pontos são construídos levando-se em conta somente seus antecedentes e, em seguida, a figura é construída globalmente a partir desses pontos, mobilizando as propriedades de conservação da simetria ortogonal (medida de ângulos, de comprimento...).
- **Analítico:** a imagem da figura F é obtida depois da construção dos simétricos de pontos característicos da figura F (medida de ângulo, centros de círculos...). (LIMA, 2006, p. 86)

Lima (2008) nos mostra que seus resultados dos estudos confirmam os de outras pesquisas com relação a certas variáveis didáticas, como por exemplo, a orientação dos segmentos da figura origem. Quando há na figura segmentos verticais e horizontais vários alunos escolheram a direção horizontal ou o prolongamento de um segmento da figura origem na construção da imagem. Percebeu-se um privilégio no procedimento analítico (pontual) na construção de imagens por simetria de reflexão, contudo o semi-analítico foi mais utilizado nas imagens de figuras complexas, que por hipótese, buscam apoio sobre alguns elementos da figura para depois construir sua imagem na percepção global.

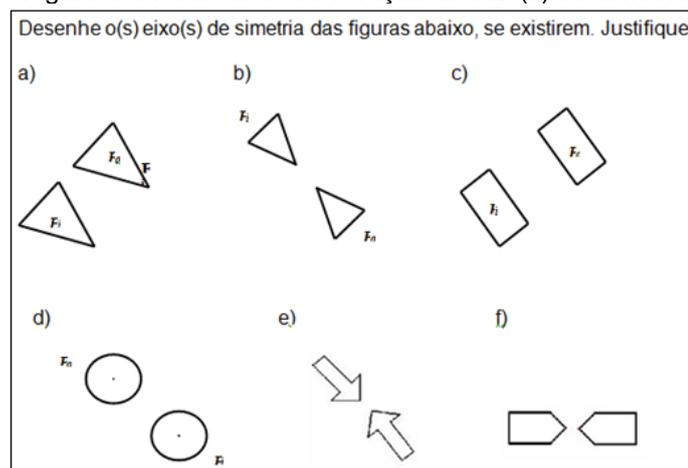
Outra natureza de problemas que se encontra na literatura são as atividades que requerem do estudante a localização e identificação dos eixos de simetria.

Sangaré (2004), em “La marque d’une transformation géométrique – un exemple de modelisation didactique”, foca sua pesquisa na construção de um modelo do objeto “transformação geométrica”. Sangaré iniciou os estudos com a questão de como os alunos lidam com diferentes modos de correspondências entre figuras-objeto e imagem por uma transformação; as significações e os traços de construção que ligam os pontos da figura-objeto aos pontos correspondentes respectivos da figura imagem. Propõe uma modelagem das transformações geométricas a partir desses traços. Com referência a sua pesquisa, incluímos na nossa atividade uma questão de localização e construção, caso existisse, do eixo de simetria.

Alves (2005) contribuiu para o nosso teste diagnóstico com duas atividades presente em sua dissertação de mestrado na UFPE em 2005 - **Simetria Axial: uma sequência para alunos da 6ª série com o uso de software de geometria dinâmica**. O objetivo de sua pesquisa foi investigar o efeito de uma sequência didática sobre a simetria axial utilizando o Cabri-Géomètre e suas ferramentas. Inicialmente, procurou na literatura as abordagens de simetria nos livros didáticos, orientações dos PCN de Matemática e as concepções dos alunos relacionados ao conceito e às variáveis didáticas como o eixo de reflexão, posição da figura e propriedades da simetria.

Sangaré (2004, Annexe 2, Items RT1 e 2) letras **a**, **b**, **c** e **d** e de Alves (2005, p. 65) com as letras **e** e **f**.

Figura 9: Problema de construção de eixo(s) de simetria



Esta questão para Alves (ibid, p.65) tinha como objetivo:

verificar se os alunos, ao traçarem os dois eixos de simetria, observaram a equidistância das figuras originais e dos reflexos aos eixos e a perpendicularidade em relação aos segmentos que unem os vértices.

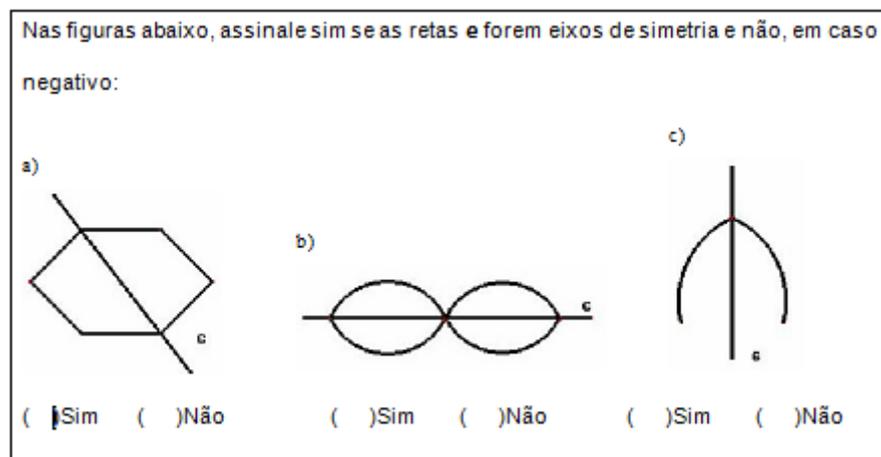
Dentre as maiores dificuldades dos alunos foram destacados a preservação da propriedade de equidistância das figuras ao eixo de simetria. Alves (ibid, p.100) justifica:

Acreditamos que a inobservância da propriedade de equidistância ocorreu devido ao fato de que os alunos tiveram dificuldades em manter a direção do eixo, não considerando a propriedade de perpendicularidade entre o segmento que une o ponto original e o reflexo, em consequência da posição inclinada dos segmentos que compõem a figura em relação ao eixo.

Para manter a direção deste, seria necessário que eles encontrassem a metade da distância entre os vértices mais próximos ao eixo de simetria. Assim, percebemos que os alunos não pensaram nesta estratégia e simplesmente desenharam a reta no lugar que julgavam ser o “meio” das figuras.

Alves traz também à tona a questão da composição da figura por segmentos de retas ou curvas. Na questão 08, as figuras apresentavam contorno reto e curvo e o objetivo era investigar se o aluno identificava se as retas desenhadas constituíam eixos de simetria, assinalando a resposta correta.

Figura 10: Problema de identificação de eixo(s) de simetria



A análise feita por Alves (2005) dessa questão sinaliza uma dificuldade maior do aluno confirmar ou não, se o eixo desenhado é o eixo de simetria na primeira

figura, pois ela é cortada por um eixo oblíquo. O mesmo não ocorre com a segunda e terceira figuras, nas quais a posição, horizontal e vertical respectivamente, do eixo em relação à folha pode ter facilitado a visualização, por hipótese. Isto revela que a figura ser ou não curva não é o entrave maior na identificação de um segmento como eixo de simetria.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA

Neste capítulo traremos as fundamentações das metodologias utilizadas nesta pesquisa. Iniciaremos por fundamentar a Engenharia Didática, pois algumas de suas fases foram tomadas emprestadas para a composição de uma sequência didática que buscasse propiciar uma atividade colaborativa para o ensino e aprendizagem da simetria de reflexão. A análise de conteúdo é também aqui fundamentada, pois foi utilizada como método de análise a fim de resgatar a essência das interações que se configurem como mediações didáticas. Por fim, apresentamos o WebQDA, uma plataforma de suporte a análise qualitativa numa perspectiva de trabalho colaborativo, a qual utilizamos em nossa análise de conteúdo.

### 2.1. A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Início dos anos 80 surge no panorama da didática da matemática francesa a noção de “Engenharia Didática”, teoria metodológica iniciada por Brousseau (1986), cuja grande precursora foi e tem sido Artigue (1995).

Essa metodologia se caracteriza para Artigue (1995, p.36):

por um esquema experimental com base na concepção, implementação, monitoramento e análise de sequências de ensino. Ela se utiliza das sequências didáticas para construção de um conhecimento significativo pelo aluno, nas quais o educador busca novas intervenções com a finalidade de articular diferentes atividades no decorrer de uma unidade didática.

As etapas metodológicas para o estudo das sequências didáticas são quatro: análises preliminares; concepção e análise a priori das situações didáticas; experimentação das situações de ensino; e análise a posteriori e validação das situações de ensino (Artigue, 1995).

De uma forma sintética do que é apresentado por Artigue, as etapas descritas.

**As Análises preliminares** pautam-se no estudo de diversas perspectivas do

conhecimento necessário a concepção e análise sequência didática: didática, cognitiva, epistemológica, curricular, .... Tanto no que concerne aos aspectos gerais quanto aos do público alvo.

**A Concepção e Análise a priori das situações didáticas** constitui-se em uma só fase, pois são atividades paralelas e imbricadas. Ao se idealizar a sequência didática e o esquema experimental é necessário também prever os seus efeitos, por meio de uma pauta nos estudos preliminares. Na construção são escolhidas as *variáveis didáticas* relevantes, já levantadas nos estudos preliminares, que serão consideradas. “Trata-se do processo de construção e elaboração de material e atividades; bem como prognóstico de procedimentos possíveis durante cada situação”. (ARTIGUE, 1996, p.202)

Essas variáveis são controladas e manipuladas pelo pesquisador durante a experimentação.

**A Experimentação** é a fase de aplicação da sequência didática, em que o professor/pesquisador em contato com a turma de alunos, sujeitos da investigação, a coloca em prática.

**A Análise a posteriori e Validação** é a fase de análise dos resultados obtidos em confronto com as previsões. Busca-se validar cada etapa das atividades propostas na sequência. Segundo Machado (2008), ela possibilita ao professor/pesquisador avaliar a sua proposta metodológica.

Em nossa pesquisa, a fim de poder analisar a mediação didática em situações colaborativas para o ensino de simetria de reflexão, buscamos utilizar algumas etapas dessa metodologia, para garantir uma experimentação com uma situação que permitisse o caráter colaborativo e a construção do campo da transformação de reflexão, assim como da simetria de reflexão.

## 2.2. ANÁLISE DE CONTEÚDO

Método que trabalhada como uma das formas possíveis de tratamento de dados em pesquisa designa-se sob o termo de análise de conteúdo é:

um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo

das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

(BARDIN, 2013, p.44)

Esse método possui cinco etapas:

I. **Organização da análise:** que se divide em três polos cronológicos conforme (BARDIN, ibid, pp.121-127):

- ✓ Pré-análise fase de *organização* e geralmente, esta primeira fase possui três missões: *a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final.*
- ✓ Exploração do material fase longa de análise propriamente dita. Quer se trate de operações efetuadas manualmente ou por computadores ela se complementa mecanicamente. Consiste em operações de codificação, decodificação ou enumeração em função de regras previamente formuladas.
- ✓ Tratamento dos resultados obtidos e interpretação fase em que os resultados em bruto são tratados de maneira a serem significativos e válidos. São submetidos a provas estatísticas, assim como a testes de validação.

II. **Codificação:** transforma os dados sistematicamente, agregando-os em unidades que descrevem as características relacionadas ao conteúdo.

Conforme Bardin (ibid, p.129)

a organização da codificação compreende três escolhas (no caso da análise quantitativa e categorial): o recorte que é a escolha das unidades; a enumeração que é a escolha das regras de contagem e a classificação que é a escolha das categorias.

III. **Categorização** “é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero, com critérios previamente definidos” (BARDIN, ibid, p.145). Esta categorização nos afirma Moraes (1999), é a atividade de agrupar dados comuns entre si, como por exemplo, critérios semânticos.

IV. **Inferência** é a dedução a partir dos fatos, dos dados recolhidos. A análise de conteúdo (BARDIN, 2013, p.167) “constitui um bom instrumento de indução para a investigarem as causas (variáveis

inferidas) a partir dos efeitos (variáveis de inferência)”.

**V. A informatização da análise das comunicações** que podemos diferenciar em três níveis, segundo Bardin (ibid, p.171):

- O tratamento de texto, que corresponde de certo modo à função «cortar, colar»;
- As operações de análise do texto propriamente dito, como a categorização;
- A análise dos dados obtidos, ou seja, as operações estatísticas sobre o resultado.

No que diz respeito aos avanços computacionais a metodologia da análise de conteúdo, atualmente, responde de forma **parcial** à questão de partida.

O uso do computador tem consequências sobre a prática de análise: a *rapidez* aumenta; acréscimo no rigor da investigação (recusa ambiguidade); rigor e unicidade na definição de cada variável; a flexibilidade com os dados; enfim, enormes volumes de informações podem ser «lidos» sequencialmente pelo computador e operações lógicas ou algébricas efetuadas a grande velocidade, mas falta-lhe a interpretação e a compreensão do implícito. (BARDIN, ibid, p.173-175)

### **2.3. WebQDA – SOFTWARE DE APOIO À ANÁLISE QUALITATIVA**

O WebQDA, desenvolvido pelo Souza; Costa; Moreira (2010) é uma software de análise qualitativa, com apoio quantitativo, de textos, vídeos, áudios e imagens que funciona em um ambiente colaborativo e apoiado pela internet.

O WebQDA (Web Qualitative Data Analysis) (LUDOMEDIA, 2010) é um software de análise de dados qualitativos num ambiente colaborativo ([www.webqda.com](http://www.webqda.com)). Esse software é direcionado a investigadores, no contexto acadêmico e empresarial, que necessitem de analisar dados qualitativos individual ou colaborativamente, de forma síncrona ou assíncrona. O WebQDA segue o desenho estrutural e teórico de outros programas mais utilizados no mercado – NVivo, Atlas.ti, MaxQDA – diferenciando-se de todos estes por proporcionar trabalho colaborativo online em tempo real e um serviço de apoio à investigação (SOUZA, COSTA; MOREIRA, 2011, p.49).

Com o webQDA, tanto as fontes de dados como o sistema de indexação

(categorias e as suas definições), podem estar disponíveis online para todos os utilizadores a quem seja atribuído um acesso. Mesmo para um trabalho individual, o utilizador pode, com o webQDA, ter acesso ao seu projeto em qualquer computador com acesso à internet e, não somente naqueles em que o mesmo esteja instalado, seguindo alguns pré-requisitos de utilização.

### 3. MÉTODO

Um estudo preliminar com base em um teste diagnóstico foi utilizado para uma prévia seleção de variáveis didáticas envolvidas nas situações elaboradas para uma aprendizagem colaborativa sobre simetria de reflexão. Levantamento feito a partir de uma análise de ações, conhecimentos, dificuldades, erros de um grupo de alunos da disciplina de Desenho Geométrico na graduação.

O estudo principal utiliza em sua metodologia alguns elementos da Engenharia Didática, a elaboração da situação que é também precedida de um levantamento das pesquisas que envolvem nosso objeto matemático, a simetria de reflexão, assemelhando-se a fase análises preliminares da Engenharia Didática. A essa elaboração segue-se uma experimentação com um grupo de licenciando em Matemática na modalidade EAD. A partir desse experimento mediações didática são analisadas.

Discutiremos a metodologia utilizada em etapas metodológicas:

Quadro 1: Estudos e etapas realizadas na pesquisa

N.	Estudos realizados	Etapas
1a	Estudos preliminares	Levantamento da literatura e identificação de variáveis Teste diagnóstico em régua e compasso
2a	Estudo experimental das mediações utilizando o Tabulæ Colaborativo	Concepção e análise a priori da sequência de atividades para o estudo experimental Experimentação da atividade com um grupo de estudo formado por 3 professores da Educação Básica e um professor mediador.

Na primeira etapa, realizamos um **levantamento da literatura** com base nos estudos e resultados de pesquisas já produzidas nessa área, tais como: Alves (2005), Lima (2006) e Sangaré (2004). Esses e outros resultados nos orientaram no sentido de fornecer um embasamento teórico e prático da realidade atual na qual se encontra o ensino e a aprendizagem das Isometrias.

A partir do levantamento literário, construímos, aplicamos e analisamos um **Teste diagnóstico**, utilizando o modelo “papel e lápis”, aplicado a um grupo de 15 estudantes da disciplina de Desenho Geométrico.

O teste teve a finalidade de levantar conhecimentos prévios, causas usuais das dificuldades mais frequentes relacionadas com as diversas habilidades e aptidões ligadas ao nosso objeto matemático e, principalmente, as variáveis

didáticas envolvidas na aprendizagem de simetria de reflexão. Nessa primeira fase, além da revisão de literatura, montamos um teste diagnóstico que buscou entender as principais variáveis didáticas a se trabalhar em uma sequência para o conceito de Simetria de Reflexão.

Um segundo estudo realizado foi um estudo experimental. Esse teve várias etapas. Com base nas variáveis observadas, utilizamos as etapas de **Concepção** e na **Análise a priori**, próprias da Engenharia Didática, de uma sequência de atividade de ensino e aprendizagem para simetria de reflexão, utilizando a Geometria Dinâmica e incentivando a colaboração entre estudantes por meio da interação computacional.

Uma terceira etapa valeu-se da **experimentação** da situação com um grupo de estudo, formado por três professores de Matemática da Educação Básica e um professor formador de professores do Ensino Superior que já tinham por hábito o trabalho a distância. As mediações didáticas desse experimento foram então analisadas.

O primeiro estudo será discutido na próxima seção dado que o mesmo situa-se como uma pesquisa preliminar com sujeitos próprios para construção da situação de intervenção. Adiante, discutiremos os sujeitos e dados coletados no segundo estudo. A construção e análise a priori, relativa à construção da situação a ser vivenciada, é discutida em uma seção após o do teste diagnóstico, pois precisa dos resultados do mesmo para ser entendida.

### 3.1. TESTE DIAGNÓSTICO

Um teste foi elaborado com a finalidade de realizar um diagnóstico a respeito do conhecimento de estudantes do ensino superior sobre as isometrias no plano. A partir de respostas às questões do teste foram observados conhecimentos, informações e noções já adquiridas pelos estudantes.

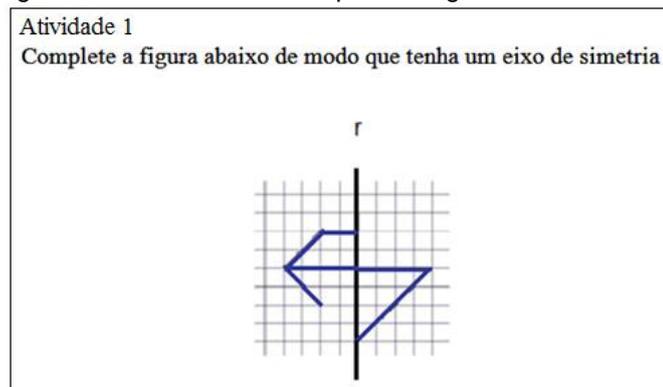
O teste foi aplicado a um grupo de 15 estudantes da disciplina de Desenho Geométrico de uma universidade federal utilizando lápis/papel e instrumentos de desenho, os quais os estudantes tinham habilidade, dada a natureza do curso que pertenciam. Os instrumentos foram disponibilizados de forma a manter uma equidade no que diz respeito às ferramentas e ao ambiente utilizado por todos, estando favoráveis ao uso de “papel e lápis”. Foi permitida a utilização de

instrumentos de desenho como régua, compasso e par de esquadros, assim como o desenho à mão livre, para a construção da resolução das atividades. O tempo foi estipulado para uma duração de duas aulas geminadas de 50 minutos cada.

O teste foi composto por onze questões sobre as isometrias (Reflexão, Rotação e Translação) das quais analisaremos aqui somente as quatro referentes à simetria de reflexão, que são as questões 1, 2, 7 e 8 do teste, todas já discutidas na revisão da literatura.

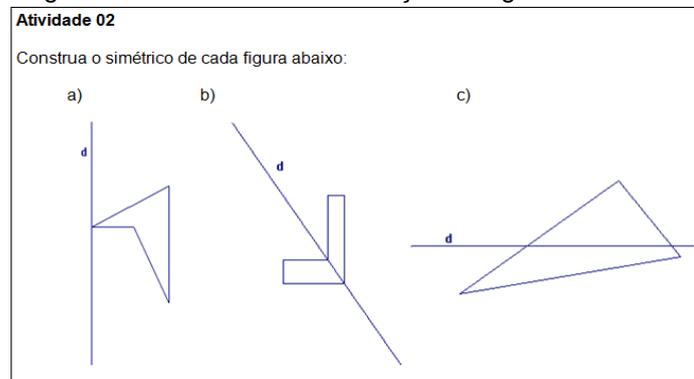
A atividade 1 é o **Pb** 16 de Lima (2006, Anexes XX), já discutido anteriormente.

Figura 11: Atividade 1 - Completar a figura simétrica



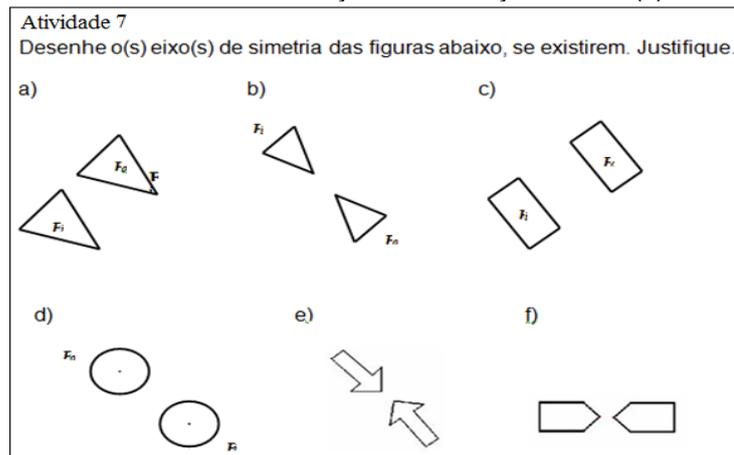
A segunda atividade analisada foi de *construção da figura simétrica*, também originária da pesquisa de Lima.

Figura 12: Atividade 2 - Construção de figuras simétricas



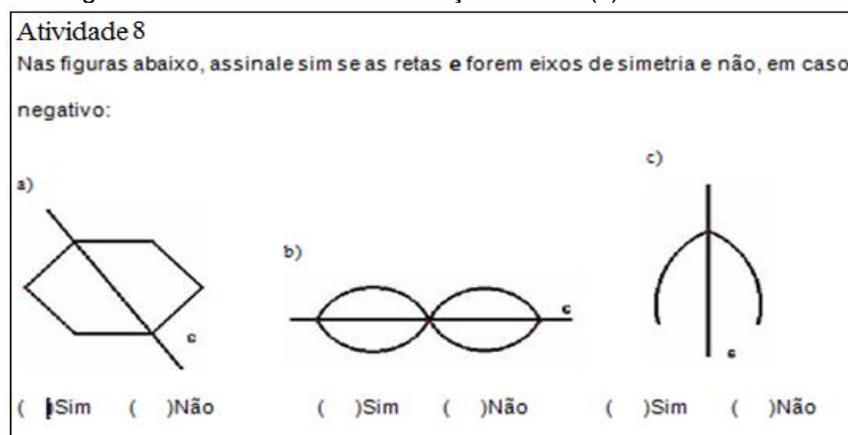
A atividade 7 compõe-se de *localização de eixo(s) de simetria* dada uma figura simétrica por reflexão, originários dos trabalhos de Sangaré (2004, Anexo 2, Items RT1 e 2) letras **a**, **b**, **c** e **d** e de Alves (2005, p. 65) com as letras **e** e **f**.

Figura 13: Atividade 7 - Localização e construção de eixo(s) de simetria



E a quarta analisada foi a atividade 8, que se originou do problema de *identificação de eixo* de Alves (2005).

Figura 14: Atividade 8 - Identificação de eixo(s) de simetria



As variáveis didáticas investigadas em cada atividade encontram-se discutidas já na fundamentação dessa dissertação.

### 3.1.1. Análise do teste diagnóstico a partir de teoremas-em-ação

Nosso estudo valoriza as respostas corretas como também apresenta um olhar reflexivo sobre o erro. Daí, a necessidade de ampliar nosso olhar a outras pesquisas similares que possam nos ajudar, de uma forma complementar, na nossa análise.

Realizamos uma investigação dos possíveis Teoremas-em-ação mobilizados na realização do teste e os classificamos por uma numeração sequencial de 01 a 24 aleatoriamente.

Quadro 2: Teoremas-em-ação mobilizados no teste diagnóstico

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. O objeto é transformado globalmente</li> <li>2. O objeto é transformado globalmente a partir de um ponto particular</li> <li>3. O objeto é transformado a partir dos seus pontos particulares (Pontual)</li> <li>4. Objeto e imagem são congruentes</li> <li>5. O perpendicularismo é conservado</li> <li>6. O paralelismo é conservado</li> <li>7. As formas dos objetos são conservadas</li> <li>8. A distância de cada ponto do objeto a sua imagem é conservada</li> <li>9. A imagem de um objeto fica do outro lado do eixo</li> <li>10. Existe apenas um eixo de simetria e foi desenhado mais de um</li> <li>11. Existe mais de um eixo de simetria e foi desenhado apenas um</li> <li>12. Objeto e imagem são paralelos</li> <li>13. A imagem é prolongamento de um segmento do objeto</li> <li>14. As linhas que juntam cada ponto e sua imagem são paralelas</li> <li>15. As linhas que juntam cada ponto e sua imagem são concorrentes</li> <li>16. As linhas que juntam cada ponto e sua imagem são paralelas ao eixo</li> <li>17. As linhas que juntam cada ponto e sua imagem são perpendiculares ao eixo</li> <li>18. Equidistância do objeto e da imagem a um ponto específico</li> <li>19. Inversão do sentido horário da imagem</li> <li>20. Existe um ponto invariante</li> <li>21. Existe um segmento de pontos invariantes</li> <li>22. Não existe ponto invariante</li> <li>23. As linhas que juntam cada ponto e sua imagem são concorrentes e não são perpendiculares ao eixo</li> <li>24. Existe pelo menos um eixo de simetria e não foi localizado</li> </ol>
--

Comparamos nossos resultados aos que nos precederam, nos aspectos em que nossa pesquisa tem elementos comuns com os desses pesquisadores. Com base nessa relação de teoremas-em-ação, iniciamos a análise de cada teste, por sujeito e de cada atividade individualmente, investigando quais foram os teoremas mobilizados pelo sujeito em seu procedimento de ação na resolução. Após essa investigação e apuração, geramos quadros com as informações obtidas nas atividades de todos os envolvidos na pesquisa.

Com relação à **atividade 01** as primeiras conclusões estão relacionadas ao complemento da figura de uma forma que ela fique simétrica ao eixo vertical dado.

Quadro 3: Teoremas-em-ação mobilizados na Atividade 01

ATIVIDADE 01		
Aluno	Teoremas-em-ação	Observações - % de acertos
ARM	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
CES	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
CIN	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
EMA	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
FAB	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
FLA	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
FRE	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
ELIZ	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
MARI	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
MILL	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
NHAY	1,13	Completou a figura sem considerar as prop
PAT	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
PED	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
ANA	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
BRU	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%
RIB	1,4,5,6,7,8,9,14,17	100%

Um fato importante é a figura estar desenhada em um papel quadriculado que. Segundo Lima, cuja pesquisa está inserida nos modelos educacionais da França, e a nossa, que reflete o modelo atual brasileiro, esse é um fator que contribui, de forma indutiva, na construção do desenho complementar da figura de forma correta.

Observamos que a figura no papel quadriculado necessita menos da utilização dos instrumentos de desenho no reconhecimento de propriedades: congruência da figura original e imagem; equidistância em relação ao eixo de simetria; a perpendicularidade entre o segmento que une os pontos originais e suas imagens e o eixo de simetria. O próprio “quadrado” é tomado como uma unidade de medida, o que induz um reconhecimento perceptivo da reflexão de alguns pontos (elementos) num procedimento semianalítico passando, em seguida, a construção global apoiando-se nesses elementos.

Concordamos com a análise da pesquisadora Lima quanto ao tipo de papel ser um facilitador, pois de fato, tivemos o percentual de acerto em 93,75%. Apenas um aluno utilizou o *teorema em ação falso* “A imagem é prolongamento de um segmento do objeto” para resolver a atividade.

Quanto à **atividade 02**, alguns procedimentos na construção do simétrico, ou seja, na imagem do objeto dado, deixou evidente que as maiores dificuldades estavam concentradas em situações na qual a figura interceptava o eixo de simetria e quando o eixo é oblíquo.

Quadro 4 Teoremas-em-ação mobilizados na Atividade 02

ATIVIDADE 02				
Aluno	Teorema-em-ação			Observações - % de acerto
	A	B	C	
ARM	3,4,5,6,7,8,9,14,17,20	3,4,6,7,8,12,14,16,22	3,6,13,14,20,23	Dificuldades com figuras q interceptam o eixo
CES	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20		3,4,5,6,7,8,9,14,17,20	66,60%
CIN	1,15,20		1,15,20	Dificuldades com figuras q interceptam o eixo
EMA	1,4,5,6,7,8,9,14,17,20	1,4,5,6,7,8,9,14,17,20	1,4,5,6,7,8,9,14,17,20	100%
FAB	1,4,5,6,7,8,9,14,17,20	1,4,5,6,7,8,9,13,14	1,4,5,6,7,8,9,13,14	Dificuldades com figuras q interceptam o eixo
FLA	1,22	3,12,22	2,22	Dificuldades com figuras q interceptam e/ou tocam o eixo
FRE	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20	100%
ELIZ	1,7,9,22	1,7,22	1,7,9,20	Dificuldades com figuras q interceptam o eixo
MARI	3,4,5,6,7,8,9,14,17,20	3,4,5,6,7,8,9,14,17,20	3,4,5,6,7,8,9,14,17,20	100%
MILL	1,4,5,6,7,8,9,14,17,20	1,4,5,6,7,8,9,14,17,20	1,7,20/22	Dificuldades nos pontos invariantes (apenas do triâng)
NHAY	1,13,20	1,13,20	1,22	0% - Não demonstra ter conhecimentos prévios
PAT	1,4,5,6,7,8,9,14,17,20	1,4,5,6,7,8,9,14,17,20	1,4,5,6,7,8,9,14,17,20	à mão - 100%
PED	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20	100%
ANA	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20	2,4,5,6,7,13,15,22	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20	Dificuldades com o eixo simétrico oblíquo (c/relação à folha)
BRU	3,4,5,6,7,8,9,14,17,20	3,4,5,6,7,8,9,14,17,20	3,4,5,6,7,8,9,14,17,20	100%
RIB	2,4,5,6,7,8,9,14,17,20		2,4,5,6,7,8,9,14,17,20	Dificuldades com o eixo simétrico oblíquo (c/relação à folha)

Os nossos resultados apontam tipos de erros tais como a inobservância da congruência da figura; da distância do reflexo ao eixo (por exemplo, a letra a da atividade – com um único ponto de invariância); do formato da figura; da ortogonalidade em relação ao eixo, entre os pontos originais e os seus reflexos; a utilização da translação ou rotação para produzir o simétrico.

Assim como na pesquisa de Lima (2006), os nossos alunos mobilizaram os procedimentos descritos em Grenier e Laborde (1987), segundo a tipologia utilizada por eles: direção ortogonal, direção por prolongamento e direção horizontal ou vertical.

Na construção do simétrico de figuras mais complexas, como no caso das letras b e c, as pesquisas se equivalem, pois houve uma tendência maior dos alunos a mobilizar os procedimentos do tipo semianalítico.

Na **atividade 07** relacionada à localização e construção do(s) eixo(s) de simetria, caso existissem, foi realizada 100% por apenas 05 dos 16 alunos.

Quadro 5: Teoremas-em-ação mobilizados na Atividade 07

ATIVIDADE 07							Observações - % de acerto
Aluno	Teorema-em-ação						
	A	B	C	D	E	F	
ARM	24	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17,25	5,6,7,8,9,14,17,25	5,6,7,8,9,11,14,17	Não traçou todos os eixos
CES	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17,24	5,6,7,8,9,14,17	
CIN	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	
EMA	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	100%
FAB	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	Só traçou 1 eixo por figura tendo mais
FLA	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	100%
FRE	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17,18	5,6,7,8,9,11,14,17	Só traçou 1 eixo por figura tendo mais
ELIZ	5,6,7,8,9,14,17	24	5,6,7,8,9,14,17	24	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	Só traçou 1 eixo por figura tendo mais
MARI	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	100%
MILL	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	Só traçou 1 eixo por figura tendo mais
NHAY	24	5,6,7,8,9,11,14,17	24	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	Demonstrou insegurança
PAT	24	24	24	24	24	24	Faltou conhecimento p desenhar
PED	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	Só traçou 1 eixo por figura tendo mais
ANA	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,11,14,17	Só traçou 1 eixo por figura tendo mais
BRU	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	100%
RIB	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	5,6,7,8,9,14,17	100%

A maioria traçou apenas um eixo quando existiam dois. Essa inobservância também foi percebida na pesquisa de Alves (2005), quando observamos que os alunos não pensaram em estratégias relacionadas às propriedades e simplesmente desenharam a reta no lugar que julgavam ser o “meio” das figuras.

Um fato que nos leva a deduzir é que os alunos ao ver uma questão relativamente comum ou aparentemente fácil, muitas vezes, pensam em resolvê-la na primeira leitura que ele faz do problema e finalizar o problema, deixando de perceber a existência de outros caminhos, outras possibilidades de resolução. Outra interpretação recorre ao fato de ser uma habitual que as questões matemáticas propostas têm uma e só uma resposta.

Portanto, uma atividade que parecia não ter um grau de dificuldade elevado.

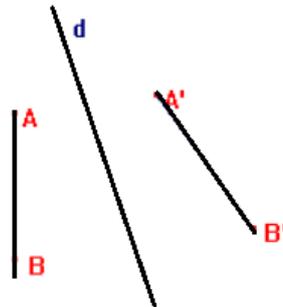
Concluindo nosso teste diagnóstico, a **atividade 08**.

Quadro 6: Teoremas-em-ação mobilizados na Atividade 08

ATIVIDADE 08				Observações - % de acerto
Aluno	Teorema-em-ação			
	A	B	C	
ARM		4,5,6,7,8,9,14,17		Deixou 2 letras em branco
CES	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
CIN	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
EMA	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
FAB	23 Não Just	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	Errou o eixo oblíquo
FLA	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
FRE	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
ELIZ	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
MARI	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
MILL	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
NHAY	23 Não Just	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	Errou o eixo oblíquo
PAT	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
PED	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
ANA	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%
BRU	23 Just Sim Oblíqua	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	Concepção simetria oblíqua (Erro/Iranete)
RIB	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	4,5,6,7,8,9,14,17	100%

O Quadro 6 mostra que apenas um demonstrou a concepção SO (Simetria Oblíqua), que segundo os estudos de Lima (2006, p. 51) são procedimentos errôneos sobre simetria oblíqua mobilizados por alunos: “A imagem do segmento é obtida por simetria oblíqua. As distancias ao dos pontos ao eixo e do seu simétrico ao eixo são conservadas, assim como as direções de suporte dos pontos e de suas imagens”<sup>5</sup> (tradução nossa).

Figura 15: Concepção simetria ortogonal (simetria de reflexão)



Com isso, podemos afirmar que os demais obtiveram êxito correspondendo a 75% de acerto.

### 3.1.2. Variáveis Didáticas Selecionadas para a Experimentação

Nesse levantamento das dificuldades e concepções prévias dos sujeitos apontadas pelo teste diagnóstico e pela revisão da literatura, encontramos: A observação das propriedades **Congruência** da figura original e imagem, **Equidistância** entre pontos simétricos e **Perpendicularidade** do eixo de simetria com o segmento que une os pontos originais e os seus reflexos; **Pontos Invariantes**; **Posição do Eixo** (horizontal, vertical e oblíqua) e **Interseção da figura** (corta, toca, vazia) com o eixo de simetria.

Tendo como referência esse diagnóstico, identificamos variáveis e ressaltamos as propriedades que darão suporte à elaboração da atividade:

- ✚ **Eixo de Simetria** que pode interferir na resolução do problema com relação a sua posição (orientação), podendo assumir os valores posicionais

<sup>5</sup> “l’image du segment est obtenue par symétrie oblique. Les distances à l’axe du point et son symétrique sont conservées, ainsi que les directions des supports des points et de leurs images”

*vertical, horizontal, obluo ou por prolongamento* em que determinadas direoes geram diferentes estratégias na resoluao do problema; a sua identificaao possibilitando sua *existência ou não, inobservância* e a *quantidade (um ou mais eixos)*;

- ✚ **Interseao da figura com o eixo** assumindo os valores: *vazio* (sem pontos comuns), *corta* (um ou mais pontos em comum – invariância de ponto(s)), *toca* (apenas um ponto invariante).

Em resumo, podemos relacionar as seguintes variáveis e propriedades:

Quadro 7: Variáveis e propriedades que darão suporte à elaboraao da atividade

Variáveis	Valores
Posiao do eixo de simetria <b>PosEixo</b>	1. <i>vertical</i> 2. <i>horizontal</i> 3. <i>obluo</i> 4. <i>por prolongamento</i>
Identificaao de eixo(s) de simetria <b>IdEixo</b>	1. <i>inobservância</i> 2. <i>um eixo</i> 3. <i>mais de um eixo</i> 4. <i>inexistência</i>
Interseao da figura com o eixo <b>IntEixo</b>	1. <i>vazia</i> 2. <i>corta</i> 3. <i>toca</i>

## 3.2. CONCEPAO E ANÁLISE A PRIORI DO EXPERIMENTO

Para compor o experimento foi elaborada uma sequência de atividades envolvendo a construao de um Logotipo, explorando apenas a ideia e propriedades da Simetria de Reflexão, em uma situaao colaborativa com compartilhamento de software de Geometria Dinâmica (O Tabule Colaborativo).

### 3.2.1. Sujeitos

O experimento foi realizado tendo como sujeito um grupo de três professores de Matemática, com experiência em Educaao a Distância – EaD e um professor formador de uma universidade federal de ensino. Esses professores, que aqui em diante denominaremos de estudantes dada a posiao que assumiram no experimento, assim como o professor formador, aceitaram participar como sujeitos

da pesquisa como voluntários com disponibilidade em participar dos encontros para a experimentação. Denominaremos o professor formador de Mediador durante a explicitação do experimento e da análise.

Nesse contexto, nossos sujeitos de pesquisa são o centro de sua própria aprendizagem em um processo de aprendizagem significativa e colaborativa, de forma a considerar suas experiências, conhecimentos, interesses e envolvimento, um motivador para a aprendizagem do grupo.

Segundo Sancho,

Na maioria dos profissionais da educação, já existe a consciência de que cada pessoa é diferente das outras, que cada uma tem as suas necessidades próprias, seus objetivos pessoais, um estilo cognitivo determinado, que cada pessoa usa as estratégias de aprendizagem que lhes são mais positivas, possui um ritmo de aprendizagem específico, etc... Assim parece óbvio que é preciso adaptar o ensino a todos estes fatores. Esta reflexão não é nova. As diferenças sempre têm sido reconhecidas. Mas, antes, eram vistas como um problema a ser eliminado, uma dificuldade a mais para o educador. No entanto, agora se considera que é a partir daí que devemos organizar a formação e é nos traços diferenciais que devemos fundamentar a tarefa de formação: as capacidades de cada pessoa representam uma grande riqueza que é conveniente aproveitar para proporcionar uma formação cada vez mais adaptada a cada pessoa em particular (SANCHO, 1998, p.185)

A atividade foi aplicada ao grupo em quatro sessões de 2h/a cada, as quais foram filmadas e gravadas a partir da captura da tela do computador do professor formador para posterior análise de dados.

Em cada sessão, os participantes trabalhavam a distância, cada um em sua própria casa, comunicando-se por meio do chat e do ambiente colaborativo de geometria dinâmica do Tabulæ.

Um fórum foi criado no moodle para que os componentes disponibilizasse suas produções um para os outros.

A seguir descrevemos a atividade experimental com uma discussão das variáveis utilizadas e uma análise de resultados possíveis quanto às soluções das atividades assim como das mediações do professor durante esse experimento.

### **3.2.2. Atividade experimental**

Após o levantamento da literatura e do teste diagnóstico, iniciamos a

elaboração da atividade para a experimentação com o uso da Geometria Dinâmica na interação dos sujeitos com o objeto matemático, *Simetria de Reflexão*, numa proposta de colaboração vivenciada a distância.

Os princípios e objetivos das situações propostas pela atividade “*Geração de Logotipos a partir de uma base (geratriz)*” são caracterizados por buscar propiciar aos estudantes situações em que algumas propriedades e características das figuras simétricas e da reflexão sejam explicitadas, a saber:

- congruência da figura original e imagem;
- equidistância em relação ao eixo de simetria;
- perpendicularidade do eixo de simetria com o segmento que une os pontos originais e os seus reflexos;
- posição do eixo de simetria;
- identificação/construção de eixo(s);
- identificação de figuras simétricas;
- interseção de segmento(s);
- pontos de invariância;
- construção do objeto imagem.

A seguir temos uma análise *a priori* da atividade, explicitando o objetivo, a identificação das ações previstas para serem mobilizadas naquela situação e a projeção de diferentes possibilidades de resolução do problema/atividade.

### 3.2.2.1 A atividade:

#### *Geração de Logotipos a partir de uma base (geratriz).*

Por meio de uma busca na internet, foi selecionado um logotipo com simetria de reflexão por diferentes eixos - O LOGO selecionado foi o do Banco Federal Argentino. Além de ter simetria de reflexão, ele não é muito conhecido aqui no Brasil.

Figura 16: Logotipo do Banco Federal Argentino

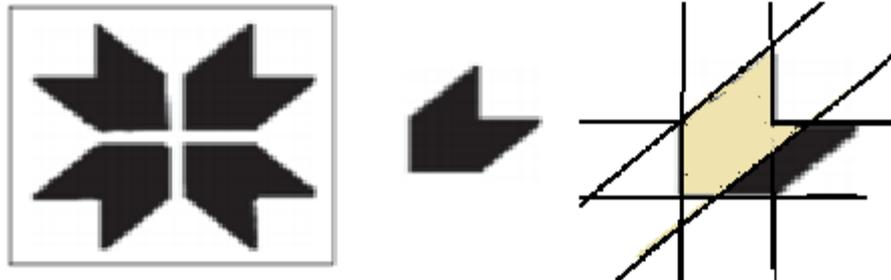


Esta foi a figura motivadora de toda a sequência da atividade desenvolvida. Pensamos em uma figura que inspirasse equilíbrio, igualdade, harmonia, em fim, fosse motivadora de inspiração às propriedades e variáveis relacionadas ao nosso objeto matemático, Simetria de Reflexão. Podemos elencar algumas delas, tais como: equidistância, congruência, perpendicularidade, eixo de simetria e invariância.

Encontramos diversas figuras simétricas, porém esse logotipo tinha também um contexto, era um Banco, que poderia nos ajudar na elaboração da atividade experimental.

Utilizando um software de Geometria Dinâmica e suas ferramentas, realizamos cortes, divisões estratégicas nessa figura de forma a torná-la compatível com os nossos objetivos acima citados.

Figura 17: Geratriz do Logotipo da atividade experimental



Com base nas variáveis selecionadas, elegemos essa geratriz por meio da qual se obtém a LOGO com repetidas reflexões para que os sujeitos trabalhassem a partir dela.

O nome desse banco foi ocultado para não criar qualquer tipo de interferência no resultado, partindo do princípio de que esses sujeitos já possuem noções de figuras relativamente conhecidas.

Uma vez escolhido O LOGO e uma geratriz, partiu-se para o desenvolvimento da sequência de atividades em 4 etapas.

Quadro 8: Distribuição das etapas da sequência de atividades

Etapa	Atividade	Duração
1 <sup>a</sup>	Construção individual de um LOGOTIPO para o Banco	2 horas
2 <sup>a</sup>	Apresentação pelos participantes de sua LOGO	1 horas
3 <sup>a</sup>	Desenvolvimento em consenso de uma LOGO ou escolha de uma delas.	1 horas
4 <sup>a</sup>	Obtenção da LOGO do Banco Federal Argentino a partir da geratriz	2 horas

Foi enviado por email para cada sujeito com o arquivo no *Tabulae* contendo a geratriz.

Figura 18: Instruções enviadas a cada etapa para os estudantes

<p>Leia atentamente o que é solicitado e comece seu trabalho utilizando e explorando os recursos oferecidos pelo programa em Geometria Dinâmica (GD).</p> <p>Agora, vamos iniciar a atividade.</p> <p>Observe a figura a seguir:</p>  <p>Essa figura é chamada de GERATRIZ, pois a partir dela, e utilizando <u>apenas Reflexão</u> em torno de eixo(s), você irá criar/desenhar o LOGOTIPO para um Banco. Construa um LOGOTIPO que estabeleça harmonia entre os aspectos figurais e conceituais; leve em consideração as exigências do Banco que estamos trabalhando e a obrigatoriedade da utilização apenas de reflexões.</p> <p>Ao final, o LOGOTIPO (ou LOGO) precisa inspirar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• equilíbrio ao cliente do banco;</li> <li>• o trato dos clientes com igualdade;</li> <li>• uma ideia de convergência de objetivos;</li> <li>• uma integração social.</li> </ul> <p>Algumas etapas serão necessárias nessa construção. Siga os passos a seguir:</p>	<p><b>Atividade individual de geração de um logotipo.</b></p> <p>ETAPA 1 - Utilize o arquivo <i>geratriz.xxx</i>, para iniciar a LOGO, no caderno de anotações, que você proporá. Ao final, salve o arquivo, com seu nome, e poste no ambiente colaborativo a LOGO produzida. Escreva um parágrafo defendendo-a, mostrando o porquê ela satisfaz as exigências do Banco. Obs.: Ficaremos <i>online</i> para auxiliar qualquer dúvida quanto ao uso do ambiente.</p> <p><b>Atividade coletiva de geração de um logotipo.</b></p> <p>ETAPA 2 - Cada membro, em sua vez, postará a sua LOGO na área pública do programa e apresentará a mesma defendendo-a como uma boa LOGO para o Banco. Todos os colegas e o professor deverão discutir a LOGO gerada.</p> <p>ETAPA 3 - Com base nas ideias geradas pela discussão e as LOGOs produzidas o grupo gerará uma LOGO coletivamente na área pública. Ao final o arquivo deverá ser salvo com o "nome" criado pelo grupo.</p> <p>Agora, utilize o arquivo <i>logorigem.xxx</i> para realizar a ETAPA 4.</p> <p>ETAPA 4 - Esse é o LOGO original do Banco (<i>logorigem.xxx</i>). Desafiamos os alunos a produzi-la a partir da geratriz inicial, de forma colaborativa.</p> <p>Ao final da atividade, escrevam um parágrafo relatando a experiência desse trabalho coletivo e colaborativo resultando os pontos positivos e negativos.</p>
---	--

As instruções gerais e a relativa a etapa era também enviada por email e constavam no *Tabulæ Colaborativo*.

É importante enfatizar que o Logotipo do Banco só aparece na quarta etapa da atividade.

Durante a realização da atividade o pesquisador ficou *online* acompanhando o desenvolvimento da atividade sem interferir na mediação.

### 3.2.2.2. As Etapas da Atividade

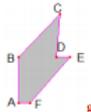
#### **ETAPA I - Atividade Individual de construção de uma LOGO**

Os princípios da situação proposta dessa fase **Geração de Logotipos a partir de uma base (geratriz) – Ação Individual** valorizam a **Construção do Objeto**

Imagem, a *Localização de eixo(s)* e a *Identificação de Figuras Simétricas*, assim como as demais etapas. Empregamos atividades explorando os recursos e uso de situações de simulações e ferramentas do software GD Tabulæ Colaborativo.

Os estudantes receberam por e-mail a imagem de uma **Geratriz** do LOGOTIPO (ou LOGO) que a princípio é formado por uma composição de reflexões (Figura 21), e outro arquivo em PDF chamado de **Etapa I** (figura 17) com orientações para a realização da mesma.

Figura 19: Arquivo em PDF com as orientações da Etapa I

<p style="text-align: center;"><b>Etapa I</b></p> <p style="text-align: center;"><b>“Geração de Logotipos a partir de uma base (geratriz)”</b></p> <p>Observe a figura a seguir:</p>  <p>Essa figura é chamada de GERATRIZ, pois a partir dela, e utilizando <u>apenas Reflexões</u> em torno de eixo(s), você irá criar/desenhar o LOGOTIPO para um Banco. Construa uma LOGOTIPO que por meio de aspectos figurais e conceituais; leve em consideração as exigências do Banco, a LOGOTIPO (ou LOGO) precisa inspirar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• equilíbrio ao cliente do banco;</li> <li>• o trato dos clientes com igualdade;</li> <li>• uma ideia de convergência de objetivos;</li> <li>• uma integração social.</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b>Etapa I - Atividade individual de geração de um logotipo.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Antes de iniciar, utilize o software a tube catch para gravar a área de trabalho em formato vmw, e nos enviar ao final;</li> <li>• Copie o <a href="#">geratriz.ac</a> na pasta Tabulæ-portable;</li> <li>• Abra o software Tabulæ colaborativo e solicite a entrada na seção “ATIVIDADE EXPERIMENTAL LOGOMARCA 2”;</li> <li>• Carregue o arquivo <a href="#">geratriz.ac</a> e busque gerar a LOGOTIPO solicitada no caderno de anotações;</li> <li>• Ao final, salve o arquivo, com seu nome, e poste no fórum LOGO do ambiente colaborativo (<a href="#">lematec.net/moodle sala pesquisa Mirella</a>) a LOGO produzida.</li> <li>• Escreva no fórum um parágrafo defendendo-a, mostrando o porquê ela satisfaz as exigências do Banco.</li> </ul> <p>Obs.: Ficaremos <i>online</i> (no tabulæ colaborativo) para auxiliá-lo em qualquer dúvida quanto ao uso do ambiente.</p>
---	--

Cada estudante tinha também a sua disposição, conjuntamente no ambiente GD Tabulæ Colaborativo, um arquivo do Tabulæ com a geratriz e na **Barra de informações > Ferramenta > Configuração da Sessão Colaborativa** instruções para que ele criasse uma LOGO para um banco a partir da figura dada utilizando apenas reflexões. A geratriz foi também disponibilizada na janela colaborativa do ambiente. Nesse ambiente estava disponível a ferramenta **chat** para interagir, caso necessitasse, com o professor mediador.

Em um período de duas horas, cada sujeito da pesquisa foi solicitado construir um logotipo para o Banco utilizando a geratriz dada e reflexões, de tal forma que o LOGO inspirasse:

- equilíbrio aos clientes do Banco;
- tratamento dos clientes com igualdade;
- convergência de objetivos;
- integração social.

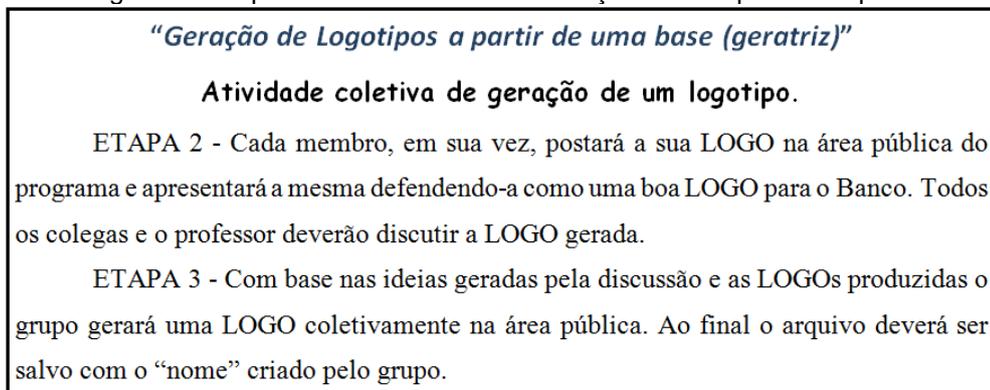
Ao final dessa etapa o arquivo da LOGO produzido foi postado (gravado) no *fórum LOGO* do ambiente colaborativo ***lematec.net/moodle sala pesquisa Mirella***

com o nome do seu criador. Todos escreveram no fórum um parágrafo defendendo suas ideias, justificando o porquê dela satisfazer as exigências do banco.

### **ETAPAS 2 – Apresentação e defesa da LOGO individual**

Nessa fase ingressaram numa *Discussão Coletiva dos Logotipos Gerados na Etapa 1 – Ação cooperativa*: O professor mediador em um encontro síncrono disponibiliza com os demais o mesmo software Tabulæ Colaborativo contendo a geratriz em um espaço de construção compartilhada de sua tela. Cada participante, de posse do material anteriormente fornecido, texto com instruções em PDF (Figura 18), tem o seu espaço individual de construção e o espaço coletivo em que ele pode alterar a construção diretamente agindo a distância e se comunicando por chat de VOZ.

Figura 20: Arquivo em PDF com as orientações da Etapa II e Etapa III



Nessa etapa, após todos conhecerem o LOGO produzido pelos colegas, iniciou-se a apresentação e “**defesa**” de seus logotipos. Um a um os participantes apresentam a sua ideia, utilizando a janela compartilhada do Tabulæ Colaborativo e o chat (escrito), defendendo-a como um bom logotipo para o Banco. Todos os colegas e o professor discutem o logotipo gerado.

### **ETAPA 3 – Criação colaborativa de uma LOGO para o Banco**

Atividade Coletiva na *Geração de um Logotipo a partir da interação e discussões do Grupo – Ação Colaborativa*: ao término das defesas, os participantes foram novamente desafiados, mas dessa vez coletivamente, a gerarem uma LOGO coletiva e discutirem o produto a partir das exigências do banco. O resultado do trabalho coletivo foi nomeado pelo grupo e postado (gravado) no *fórum LOGO* do ambiente colaborativo **lematec.net/moodle** sala *pesquisa Mirella* para posterior

análise.

#### **ETAPA 4 – Construção colaborativa da LOGO para o Banco Federal Argentino**

Após a apresentação do logotipo coletivo foi apresentado o LOGOTIPO do Banco Federal Argentino, em uma quarta etapa, os estudantes foram desafiados a produzir o mesmo logotipo a partir da geratriz inicial, de forma colaborativa.

*Geração do Logotipo a partir da visualização do logotipo original do Banco – Ação Colaborativa:* O professor mediador em um encontro síncrono disponibilizou no espaço de construção compartilhada a geratriz e a figura do Logotipo original. Todos os participantes foram desafiados a produzir o mesmo Logotipo utilizando apenas reflexões, no espaço coletivo de forma colaborativa a partir da geratriz inicial, podendo alterar a construção diretamente agindo a distância e se comunicando por chat de voz. O resultado foi nomeado pelo grupo e postado no *fórum LOGO* do ambiente colaborativo ***lematec.net/moodle*** sala *pesquisa Mirella* junto com um parágrafo relatando a experiência desse trabalho coletivo ressaltando os pontos positivos e negativos.

#### **3.2.3. Análise a Priori das Atividades**

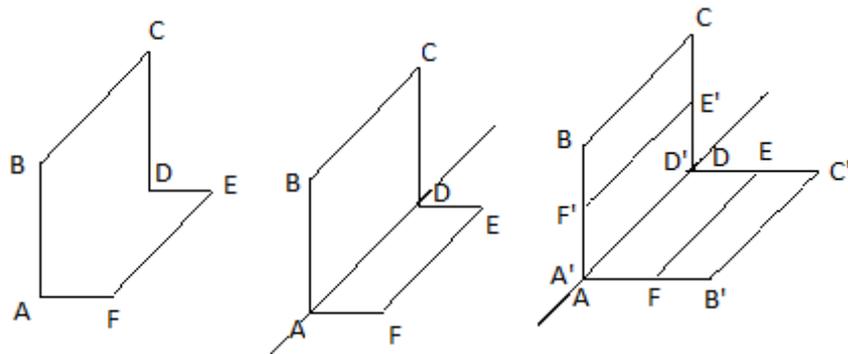
Iniciamos essa análise discutindo a escolha do LOGO, que buscava inspirar os elementos solicitados na atividade. Formada por quatro figuras em distribuídas em torno de um ponto central, indicando convergência; todas iguais indicando o tratamento igual dado aos clientes; a simetria de reflexão por quatro diferentes eixos e simetria de rotação de 90° em torno do ponto central, o que inspira equilíbrio; as quatro figuram integram o LOGO, o que inspira a integração social.

Escolhemos lidar com figuras formadas apenas por segmentos, sem envolver figuras curvas, com vários eixos de simetria. Dois dos quais interceptam a figura e dois não interceptam. Há eixos vertical, horizontal e diagonal. Cada uma das quatro partes que formam o LOGO também tem simetria de reflexão, por um eixo que intercepta a figura.

A escolha da geratriz. Um longo estudo das possíveis geratrizes foi feito buscando que fosse necessário iteradas reflexões para se obter o LOGO, que fosse

necessário uma reflexão para obtenção de uma das quatro partes da LOGO. Que o eixo escolhido interceptasse a figura de forma a ter partes da geratriz de ambos os lados do eixo de reflexão.

Figura 21: Geratriz, Geratriz com eixo, Reflexão em torno do eixo



A obtenção da figura componente do LOGO é feita de forma que alguns pontos obtidos por reflexão são diferentes dos originais, mas já compunha a geratriz.

As atividades foram desenhadas de forma a iniciar por um trabalho individual, em que o sujeito pensa sobre a sua produção, pouco a pouco, o trabalho coletivo surge, e depois um colaborativo. Busca-se que os estudantes vão se integrando a partir de uma reflexão prévia individual sobre o problema. Envolve-se também atividade de geração de figuras simétricas, livremente, assim como a geração de uma figura dada, que por sua vez, envolve a identificação de eixo de simetria e de geratriz.

Por meio da antecipação de estratégias de geração do LOGO, identificamos algumas resoluções que discutiremos a seguir. Utilizamos como base as variáveis apontadas na Quadro 7: Variáveis e propriedades que darão suporte à elaboração da atividade) como referência.

### 3.2.3.1. As variáveis didáticas

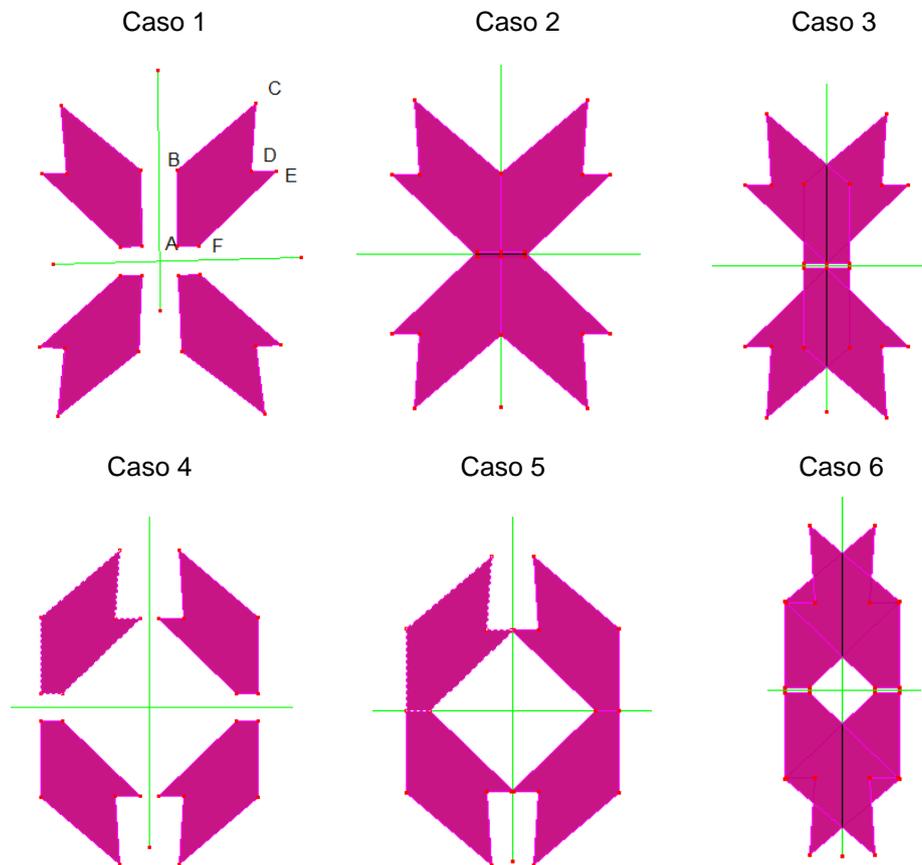
Simulações relacionadas à POSIÇÃO do EIXO de SIMETRIA

Variável: PosEixo

PosEixo → *vertical* ou *horizontal*

A geratriz pode tocar ou não o eixo, e nesse sentido pode existir ou não ponto(s) invariante(s).

Figura 22: LOGOS possíveis de serem obtidos utilizando eixos horizontais e verticais

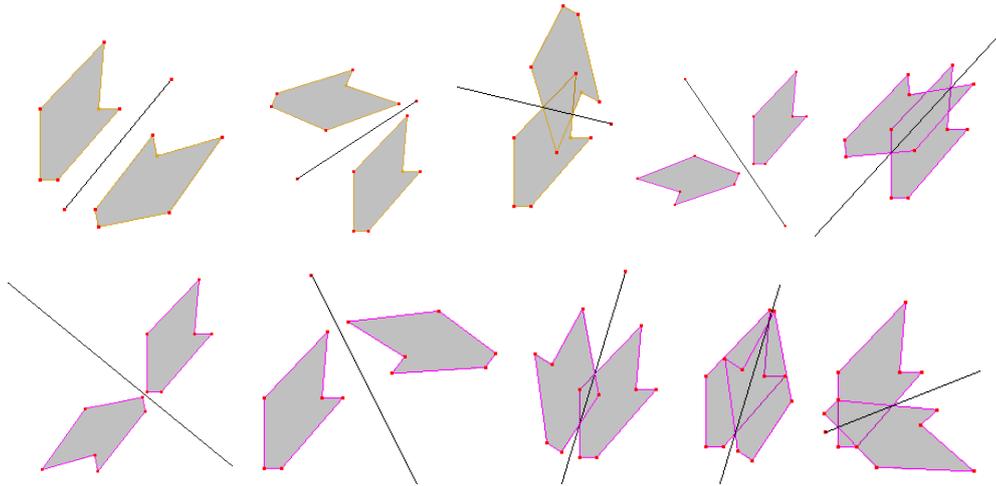


Uma observação importante é o fato de algumas dessas construções recaírem no tipo *prolongamento*, como por exemplo, o caso 2; e outras unirem os tipos *prolongamento* e *invariantes*, como nos casos 2, 3, 5 e 6.

PosEixo → *oblíquo* (com pontos invariantes ou não)

Abaixo temos alguns exemplos de reflexões em torno de um eixo oblíquo qualquer, diferentes daquele que gera a figura que é a quarta parte do LOGO.

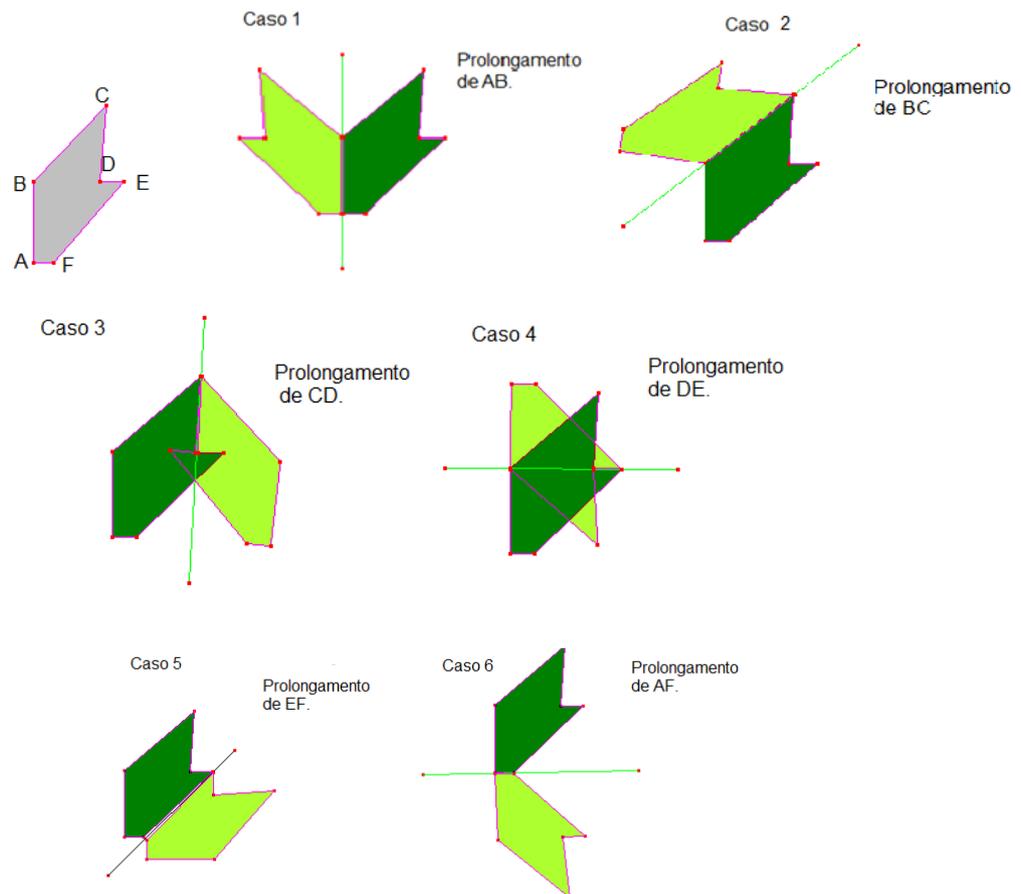
Figura 23: LOGOS possíveis de serem obtidos utilizando um eixo oblíquo



O estudante poderia também escolher como eixo um dos segmentos que formam a figura.

PosEixo → prolongamento (de um de um dos segmentos do contorno da geratriz).

Figura 24: LOGOS possíveis de serem obtidos utilizando como eixo o prolongamento de um dos segmentos que foram a geratriz



Nessa estratégia de construção observamos que não chegaremos ao logotipo do Banco Federal Argentino utilizando apenas reflexões por prolongamento, mas possibilita que as propriedades da reflexão sejam facilmente visualizadas pela “manipulação” do eixo, recurso da Geometria Dinâmica.

Todas as construções previstas aqui e feitas com o Tabulæ (um software de geometria dinâmica) possibilitam “brincar” com o eixo de simetria e o a geratriz. Girar o eixo (de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ ), e ao mesmo tempo, o estudante vê as inúmeras possibilidades de imagens ou reflexões formar-se. Agora, girando a geratriz origem, a imagem acompanha continuando o reflexo, mas o eixo continua fixo.

Desta maneira, nesse tipo de simulação visualizando, manipulando e obtendo resultados imediatos, reforça a compreensão e assimilação dos conceitos envolvidos.

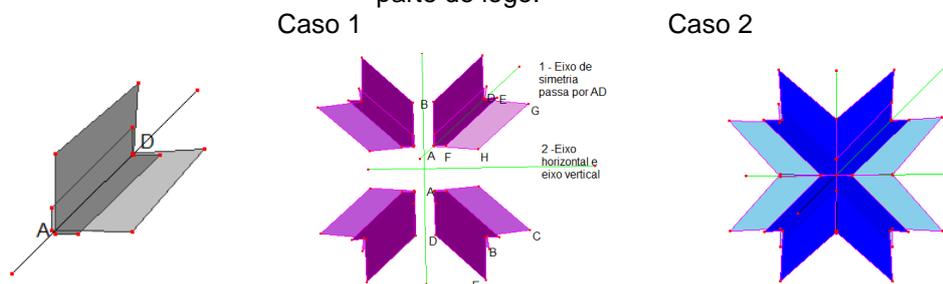
Nas condições de construção da Geometria Dinâmica apenas a geratriz permite movimentos, não podendo mover diretamente figura imagem (arrastar). Seu movimento decorre do movimento feito na geratriz. Isto de certa forma apresenta um contraponto a ideia de reflexão, no que concerne à propriedade reflexiva. Nessa construção, a figura obtida é o reflexo da geratriz, porém a geratriz não se põe como reflexo da figura obtida. Mesmo que o estudante faça nova reflexão da figura obtida sobre o eixo, essa será apenas uma nova figura que sobrepõe a geratriz.

É importante salientar aqui, que a obtenção do LOGO, perpassa necessariamente pelo uso de eixos oblíquos e verticais e/ou horizontais.

### Variável: IntEixo

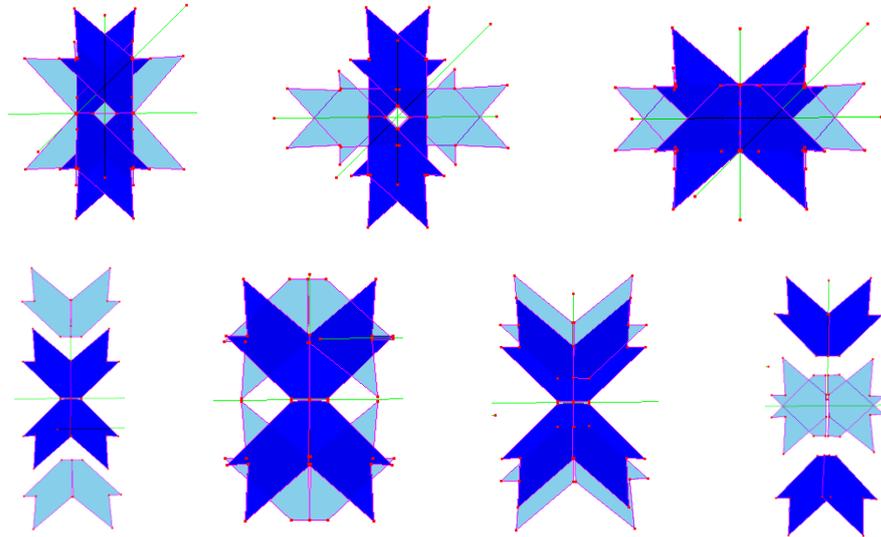
IntEixo → Eixo de simetria é uma reta que passa pelos pontos A e D cortando a geratriz, e conseqüentemente, gerando pontos invariantes.

Figura 25: LOGOS possíveis com o eixo oblíquo na posição prevista para obter a quarta parte do logo.



Como a geratriz foi escolhida tomando um eixo de simetria da LOGO que intercepta a figura na diagonal, sem coincidir com os segmentos, mostramos diversas possibilidades de obtenção da figura partindo do eixo oblíquo seguido de reflexões por eixos horizontais e verticais. Algumas variações quando movemos o eixo de simetria:

Figura 26: LOGOS possíveis de serem obtidos movendo-se os eixos horizontais e verticais



A primeira construção equivale ao Logotipo do Banco Federal Argentino, no entanto a segunda, assemelha-se, diferenciando apenas da distância da geratriz aos eixos horizontais e verticais. Temos nesse caso, após algumas reflexões e escolha de eixos, a figura do logotipo do Banco.

É certo que a Geometria Dinâmica nos possibilita variações instantâneas, imediatas, pela manipulação do objeto quando fixamos o eixo de simetria, ou vice-versa. Estamos trabalhando com duas variáveis nessa atividade, o *eixo de simetria* e a *interseção da geratriz com o eixo*, o que nos propicia uma grande quantidade de resultados.

Esses resultados são valiosos, para nossos sujeitos, na assimilação dos nossos objetivos, pois pelo seu dinamismo e visualização durante o processo de construção em GD, o sujeito tem maior interação com o objeto de estudo e seus resultados imediatos.

Ver as escolhas dos estudantes durante a tentativa de construção da LOGO permitirá ao mediador, entender concepções dos estudantes, quanto aos conceitos de simetria, de reflexão, de eixo, assim como os teoremas que estes usam em ação, com validade matemática ou não.

### **3.2.3.2. As etapas da atividade na construção de uma perspectiva colaborativa**

As atividades foram desenvolvidas em quatro etapas partindo de uma etapa individual, em que cada estudante trabalha com o contexto do problema e com o software. Esse é um espaço de familiarização com o software e com o problema, as mediações didáticas esperadas nesse momento são poucas, e em geral na perspectiva de auxiliar a entender o problema proposto e de auxiliar computacionalmente o uso do software. O espaço do Tabulæ Colaborativo é aberto para permitir que os estudantes possam interagir com o mediador, para tirar as dúvidas. E por o espaço ser aberto para todos, pode ser que haja interação entre estudantes também. Porém, a necessidade de se ter uma produção individual, inicialmente, livre de influências do LOGO original, do Mediador, e dos colegas, faz com que se evite que os estudantes tragam para o espaço colaborativo a sua produção.

Na segunda etapa, aproximam-se os estudantes numa perspectiva cooperativa, mas ainda focada na produção e divulgação individual. Os estudantes postam a LOGO produzida por si, e defendem sua LOGO. O mediador assume o papel de buscar que o estudante explicitite decisões ligadas aos conceitos matemáticos envolvidos, assim como, a articulação dessas decisões com as exigências do BANCO. São esperadas mediações feitas pelo apresentador e pelo estudante ouvinte, no sentido de entender melhor as escolhas feitas. Essas escolhas explicitarão variáveis didáticas envolvidas na escolha do estudante, que provavelmente, traz implícitas formas e limitações de concepções sobre reflexão e sobre simetria de reflexão.

Na terceira etapa, um primeiro momento colaborativo se põe. Os estudantes já com familiaridade com o software e com o contexto do problema assumem colaborativamente o papel de chegar a uma LOGO que seja consenso do grupo. Nesse caso, os estudantes podem deixar por conta de um só, ou de fato, assumir um trabalho colaborativo. Ao mediador cabe buscar que algumas concepções sejam explicitadas, lançar questões que desequilibre alguns teoremas em ação que não têm validade matemática, tirar dúvidas matemáticas propostas, incentivar a participação de todos, assim como coordenar a participação para que as construções não fiquem confusas caso todos queiram mexer ao mesmo tempo. No

entanto, essa etapa colaborativa, livre do LOGO do Banco Federal Argentino privilegia a criatividade dos estudantes, e foca na atividade de construção de figuras com simetria de reflexão.

A quarta e última etapa, já com os estudantes tendo vivido o contexto do problema e uma situação colaborativa de produção, os põem em situação colaborativa novamente. Privilegia-se agora tanto a construção como a identificação de simetria a partir de uma figura dada. Obter uma figura a partir de uma geratriz da figura é uma atividade de mão dupla – construção e identificação. Nessa fase, o processo criativo é menos valorizado, foca-se mais num processo guiado ao trabalho específico de alguns aspectos dos conceitos matemáticos envolvidos - Eixo que intercepta a figura, pontos de invariância, diferentes posições de eixo. Espera-se que o papel de mediador, para tirar dúvidas, para gerenciar a atividade, do mediador seja diminuído e os estudantes assumam direção da atividade. Que produzam conjuntamente, que tirem as dúvidas um dos outros.

### 3.3. COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Após a coleta dos dados iniciamos o tratamento dessas informações com o *Método da Análise de Conteúdo* (BARDIN, 2013). Utilizamos como apoio os recursos computacionais do software e plataforma WebQDA.

Inicialmente transcrevemos as nossas gravações feitas no **aTube Catcher** (programa que grava tudo o que está acontecendo na tela do computador, faz download de vídeos da internet, entre outras funções) por meio do programa chamado **OCR** (Optical Character Recognition), tecnologia que permite reconhecer caracteres de texto em imagens, transformando-os em texto editável que chamamos de *Histórico de Mensagem*. Algumas delas foram copiadas em um arquivo .doc após a experimentação, no qual se inseriu comentários sobre as ações na janela colaborativa.

O WebQDA nos ajudou a organizar, ordenar e categorizar os dados com o objetivo de termos uma análise mais organizada e detalhada. Apesar do auxílio do computador, tivemos a necessidade de uma observação criteriosa e questionadora para responder às nossas questões.

Começamos então a organizar a análise tomando como unidade de registro

cada interação escrita do sujeito e observações do que ocorria na janela colaborativa. A essas interações denominamos de “fala em ação” (chat), que foram categorizadas e contadas como unidade de referência.

Em um chat, a “fala em ação” sozinha, muitas vezes, não permite um entendimento da interação completa. Portanto, precisávamos definir uma unidade semântica que nos permitisse identificar o sentido, objetivos, participantes, dificuldades, ações..., de cada interação. Nesse sentido, decidimos isolar os casos no que denominamos de **episódio**, em vez de escolher um recorte de proximidade da fala no chat. Este processo foi realizado com o suporte do mediador que buscava, em um processo de lidar com os dados, manter o mais fiel possível cada conjunto de falas que tivessem um mesmo objetivo do ponto de vista da atividade docente. A identificação dos episódios seguiu um processo de categorização no estilo de categorização feita a partir dos dados. Cada fala era adicionada a um episódio já existente, ou iniciava outro. A cada objetivo de interação diferenciado, gerávamos uma nova categoria juntando as falas em episódio com começo, meio e fim.

Por exemplo, no chat alguém pode iniciar um episódio para tirar uma dúvida de como traça uma perpendicular. Outros episódios se intercalam, com outros objetivos, ou vêm depois. Ter uma conversa com começo meio e fim (ou até onde ela é interrompida ou esquecida) permite-nos uma melhor ideia de cada mediação. O que define, portanto, cada categoria (ou cada episódio) é o objetivo da fala.

Na fase da categorização, processo de classificar os dados por semelhanças, para cada unidade analisada, selecionamos as seguintes dimensões:

Objetivo da Interação;

Atores da Interação;

Ação do estudante ou mediador com a Geometria Dinâmica

Em cada dimensão, por sua vez, as unidades foram categorizadas como:

✓ *Objetivo da Interação:*

Cada “fala em ação” foi categorizada segundo o objetivo da interação, a fim de identificarmos nas sessões aquelas que se compunham em interação para mediação didática, daquelas que se compunham em outros tipos de atividades docentes e discentes. Essa é uma

categorização teórica e segue diversos modelos já elaborados no estudo de Lins (2010).

Acrescentamos ***Interferências*** como uma categoria de análise com relação às interações externas partindo do pesquisador-observador ou de uma pessoa não participante da pesquisa.

- Mediação Didática (MD Conteúdo Computacional e MD Conteúdo Matemático) – uma “fala em ação” foi categorizada como tendo objetivo de mediação didática, quando buscava mediar uma dúvida, incentivar novas buscar em relação ao conteúdo, favorecer o processo de aprendizagem oferecendo condições para que isso ocorra, sendo subcategorizada segundo o tipo de conteúdo, se matemático ou computacional (relativo ao software).
- Mediação Pedagógica – atitude e comportamento do professor para facilitar, incentivar ou motivar a aprendizagem;
- Gestão da Atividade – esclarece o objetivo da atividade.

✓ *Atores da Interação:*

- Estudante é o nosso aluno participante da pesquisa;
- Externo é o pesquisador ou qualquer pessoa que não está participando da pesquisa;
- Professor é o mediador

✓ *Ações do estudante ou do mediador na geometria dinâmica*

- Em algumas conversas, ou melhor, episódios, procuramos analisar se a ação no software compartilhado de forma colaborativa tinha importância significativa ou não na mediação do professor.
- Da mesma forma analisamos se houve, durante cada episódio marcado com mediação, alguma ação com a Geometria Dinâmica, importante e fundamental que não fosse possível sem a ferramenta da “janela” da área pública.

## 4. ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados seguiu duas etapas. A primeira compôs-se de uma descrição analítica dos encontros, em que se procura situar o leitor e o pesquisador em relação ao desenvolvimento das aulas de forma sintética, porém com algumas interpretações analíticas. A segunda compõe-se da análise de conteúdo das falas em ação e dos episódios.

### 4.1. DESCRIÇÃO ANALÍTICA DOS ENCONTROS VIVENCIADOS

Todos os participantes da pesquisa receberam dias antes um texto contendo orientações sobre o “**Procedimento para instalar o TABULÆ COLABORATIVO**” (ANEXO I).

A sequência de quatro etapas foi aplicada em três encontros:

1. **Etapa I – Atividade Individual** – *Geração de Logotipos a partir de uma base (geratriz) – Ação Individual;*
2. **Etapa II – Discussão Coletiva** – *Discussão Coletiva dos Logotipos Gerados na Etapa I – Ação Cooperativa;*
3. **Etapa III - Atividade Coletiva** – *Geração de um Logotipo a partir da interação e discussões do Grupo – Ação Colaborativa;*
4. **Etapa IV – Desafio Coletivo** – *Geração do Logotipo a partir da visualização do Logotipo original do Banco (Figura 3) – Ação Colaborativa.*

As quatro etapas ocorreram em três encontros, o segundo encontro compreendeu as II e III Etapas.

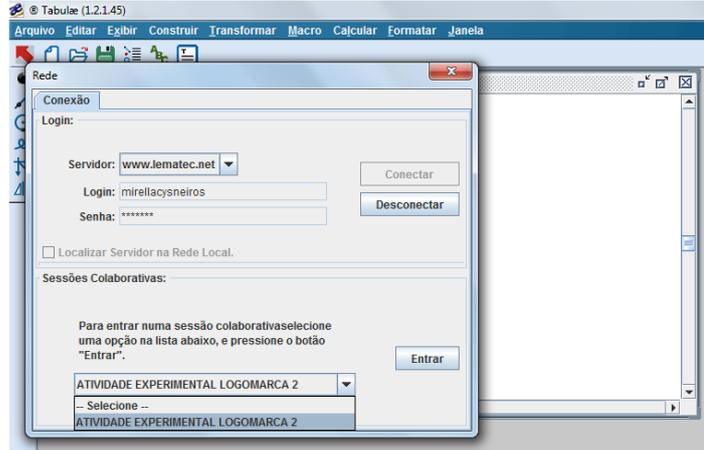
#### 4.1.1. Descrição analítica da etapa I

Utilizando o programa de Geometria Dinâmica **Tabulæ Colaborativo (TC)** já instalado, conforme orientações prévias do texto de *Procedimentos para instalação* (ANEXO 1) iniciamos no dia 11 de junho de 2013 às 20h à realização da atividade “**Geração de Logotipos a partir de uma base (geratriz)**” – **Etapa I** com o grupo experimental de quatro alunos voluntários (sujeitos da pesquisa).

Cada aluno já havia recebido por e-mail sua senha para acessar o programa; as instruções (Figuras 17) acima e a figura geratriz (Figura G1).

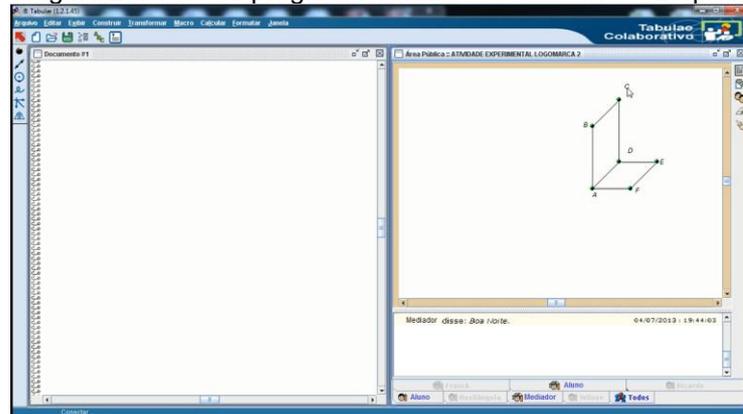
Feita a conexão com o servidor do TC o programa é aberto. Ao acessar em **Arquivo >> Colaboração >> Conectar** é solicitado do aluno o *login* e a *senha* (Figura 27), ambos já cadastrados no site [www.tabulae.net](http://www.tabulae.net), para que o aluno selecione a atividade que desejava trabalhar.

Figura 27: Tela de acesso ao programa Tabulæ Colaborativo



Após o acesso, os recursos do programa ficaram disponíveis para dar início ao processo de construção do logotipo. Na janela que aparece escrito Caderno de Anotações, nós não tivemos acesso como previsto. Não foi possível que cada estudante fizesse a captura de sua tela (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**). Essa área de produção individual o professor e os colegas não têm acesso. Na janela denominada de área pública, foi disponibilizado a geratriz. A partir desse ponto seu trabalho começou a ser gravado, pelo professor mediador, com os recursos do aTube Catcher para posterior análise.

Figura 28: Tela do programa Tabulæ Colaborativo – Etapa I

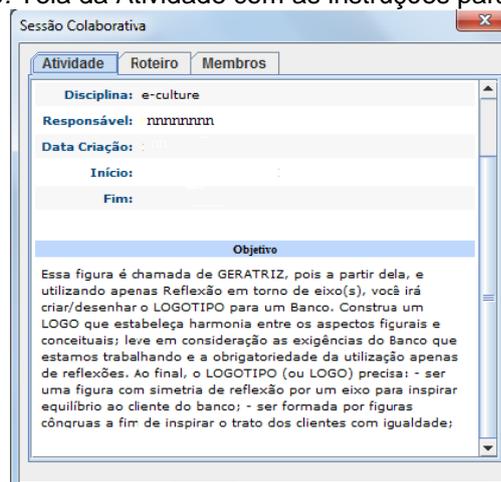


Como essa etapa consistia em trabalhar individualmente, cada aluno trabalha

na área privada (lado esquerdo) chamado de **caderno de anotações** ou **área particular**, uma tela comum aos softwares de Geometria Dinâmica, com todas as propriedades comuns a este tipo de aplicativo. Nessa área, o aluno realiza suas construções particulares e suas possíveis estratégias sem que seu trabalho seja visualizado pelos demais. O não acesso a esse trabalho representa uma limitação para a pesquisa, apesar de trazer para a pesquisa a visão que o professor tem da situação.

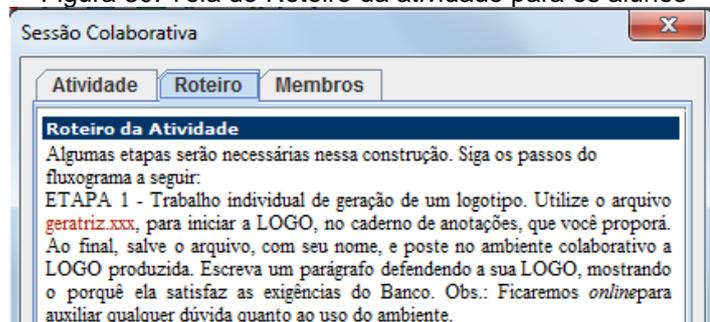
As instruções da atividade foram disponibilizadas na tela de sessão colaborativa:

Figura 29: Tela da Atividade com as instruções para os alunos



Na tela **Roteiro**, as etapas necessárias para a construção da atividade (Figura 30) foram disponibilizadas;

Figura 30: Tela do Roteiro da atividade para os alunos



Na tela **Membros** estão os alunos, professor e coordenador envolvidos na atividade.

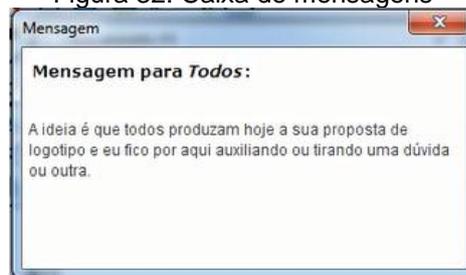
Figura 31: Tela dos Membros participantes da atividade



Entendidas as principais ferramentas do Tabulæ Colaborativo, os alunos seguiram as orientações discriminadas pelo Roteiro para realizar a sessão. O chat permite enviar mensagens direcionadas e para todos os participantes. Cada participante recebe somente as mensagens direcionadas a ele e a direcionada a todos. Nesse sentido, tivemos também acesso somente às mensagens direcionadas ao mediador e aquelas direcionadas a todos.

Ao clicar em **Todos** na barra de comunicação do chat, o professor mediador enviou a todos a mensagem “*A ideia é que todos produzam hoje a sua proposta de logotipo e eu fico por aqui auxiliando ou tirando uma dúvida ou outra*” (Figura 28).

Figura 32: Caixa de mensagens



Com o suporte das ferramentas do Tabulæ Colaborativo, das orientações descritas na *Atividade* e do *Roteiro* na *Configuração da Sessão* da atividade, os estudantes iniciaram seus trabalhos.

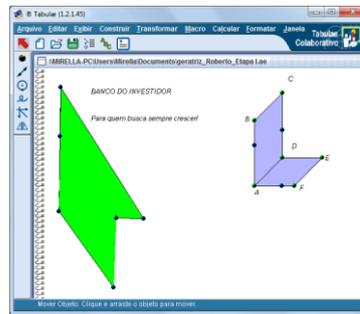
Considerando uma etapa onde o trabalho é estritamente individual não havendo interação, cooperação e nem colaboração entre os alunos, o foco é todo no mediador que se prontifica a estar presente on-line para responder a qualquer dúvida, caso exista.

Porém, em muitos momentos, o longo silêncio chega a produzir um “sentimento” de monotonia exigindo do professor/mediador estratégias cuidadosas e bem elaboradas de controle, mesmo à distância, para quebrar esse estado momentâneo sem haver prejuízo e interferência na produção do aluno.

A seguir temos as produções postadas (gravadas) no *fórum LOGO* do ambiente colaborativo *lematec.net/moodle sala pesquisa Mirella* dos participantes da **ETAPA I:**

1. Produção do Aluno 1 (Figura 29) e sua defesa:

Figura 33: Arquivo e defesa do Aluno1



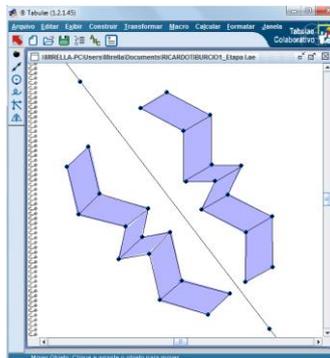
**Re: LOGO**  
por Aluno 1

[Aluno1.ae](#)

Não consegui identificar os critérios solicitados pelo banco, se alguém visualizar coloque suas contribuições. Entretanto, acho que a perspectiva da figura gera uma imagem de crescimento, daí o fato do nome BANCO DO INVESTIDOR, onde o banco passa a imagem de um bom lugar para se investir. A imagem foi gerada, a partir da simetria de um dos lados da figura geratriz, dois dos seus lados foram formados por essa simetria. Depois a figura foi fechada em forma de polígono, com lados exatamente coincidentes aos segmentos simétricos.

2. Produção do Aluno 2 (Figura 30) e sua defesa:

Figura 34: Arquivo e defesa do Aluno2



**Re: LOGO**  
por Aluno 2

[Aluno2.ae](#)

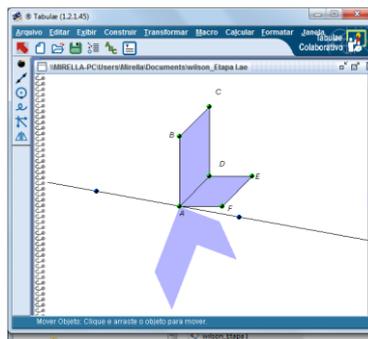
Com minha imagem defendo a ideia de um BANCO LIVRE. As aves desenhadas representam a facilidade de comunicação, o rápido acesso as informações e um atendimento 'nos ares' e igual para todos... 😊

Como disse, inicialmente senti dificuldades para compor as reflexões, porém, consegui observar, com a dica dada pela Professora outras possibilidades além da que havia feito!

O aluno 2 tinha interpretado o problema erroneamente. Ele entendeu que as reflexões deveriam ocorrer em torno dos eixos da própria figura. O mediador procurou reler o documento que havia enviado a eles com a descrição da atividade e esclareceu esse equívoco, não do documento, explicando que o eixo também poderia ser solto externo à figura.

### 3. Produção do Aluno 3 (Figura 31) e sua defesa:

Figura 35: Arquivo e defesa do Aluno 1



Re: LOGO  
por Aluno 3

Entendo na figura que ela atente todos os requisitos, pois ao movimentar o eixo solto, a figura simetria movimenta mas não perde as características da figura original.

[Aluno3.ae](#)

Observando as produções construídas individualmente nessa primeira etapa, vemos que o trabalho a distância, bem coordenado e auxiliado pelo professor e pelas ferramentas do software em Geometria Dinâmica (GD), o Tabulæ Colaborativo, tornou-se instigante e facilitador da aprendizagem.

O aluno ao perceber que trabalha diretamente com a manipulação dos seus objetos matemáticos, visualizando sua ação e reação em tempo real podendo reavaliá-lo e reconstruí-lo, tendo um feedback do professor quando necessita por meio do Chat, passa a sentir uma maior valorização do seu trabalho e assim o tempo é melhor aproveitado na construção dessa aprendizagem.

#### 4.1.2. Descrição analítica da etapa II

Iniciamos a **Etapa II – Discussão Coletiva dos Logotipos Gerados na Etapa I – Ação Cooperativa** no dia 4 de julho de 2013 no horário das 20h com o grupo

participante da Etapa I. Utilizamos o mesmo contexto, o programa de Geometria Dinâmica Tabulæ Colaborativo (TC) na modalidade a distância, partindo para a socialização das construções produzidas individualmente.

Essa socialização acontece em uma ação coletiva utilizando essencialmente a área do lado direito superior do TC chamada de **área pública** onde todas as construções feitas são visualizadas por todos os participantes da atividade além do auxílio da ferramenta de comunicação **chat**.

Ingressamos na discussão com a exposição individual da produção de cada aluno defendendo seu logotipo, com o professor mediador em um espaço de construção compartilhada de sua tela com os demais.

#### 4.1.2. Descrição analítica da etapa III

A **Etapa III** – Atividade Coletiva na *Geração de um Logotipo a partir da interação e discussões do Grupo – Ação Colaborativa*. O mediador voltou a mostrar a geratriz na área pública e solicitou que juntos procurassem criar um logotipo que atendesse as especificações do Banco: equilíbrio ao cliente, o trato dos clientes com igualdade, uma ideia de convergência de objetivos e uma integração social; e ainda os lembrou de que as figuras precisavam partir da geratriz e serem criadas por reflexão.

Nesse momento a participação de todos é solicitada pelo mediador, pois estão construindo um logo de forma colaborativa e se torna indispensável a intervenção de todos com as habilidades adquiridas e a socialização das ideias e estratégias para aprovação ou não do grande grupo.

Como um bom exemplo de socialização de conhecimento temos esse trecho do chat com o aluno 3, que por sinal interveio pouco durante as etapas:

Aluno 3 disse: *Acho que a integração social seria essa movimentação do eixo, além da igualdade entre os pontos (clientes), há uma integração entre a geratriz e a figura simétrica*

04/07/2013 : 21:08:34

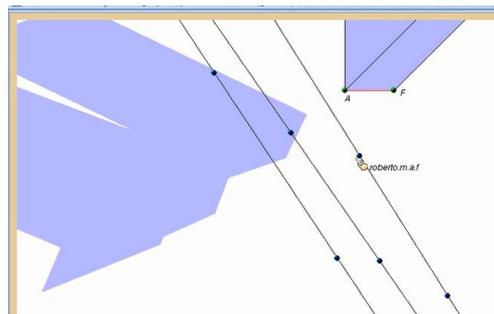
Ao chegar nessa fase, o aluno já se sente mais familiarizado com os participantes e a atividade, mas como em todo grupo, alguns se destacam pela iniciativa, por não ter medo de se arriscar nas respostas e levar motivação aos demais.

No início dessa etapa IV, o mediador precisou lembrar a atividade e deixar os alunos agirem livremente usando criatividade e colaboração. Suas intervenções

eram mais focadas em lembra-los das regras da atividade, por exemplo: “as figuras precisam sair da geratriz”; “é preciso criar uma LOGO por reflexões” e “pode ser uma estratégia” ao perceber o aluno3 escrever no chat “refletir a face seria o mais viável”.

O grupo, mesmo nessa troca de ideias e estratégias, perdeu um tempo importante, por vários motivos, como a queda e lentidão no sinal da internet. No final a construção precisou de vários ajustes no eixo de simetria, que era movimentado em várias direções, aumentando e diminuindo até chegarem à figura a seguir.

Figura 36: Produção final do grupo



#### 4.1.2. Descrição analítica da etapa IV

A **Etapa IV** -- *Geração do Logotipo a partir da visualização do logotipo original do Banco* (Figura 16) – *Ação Colaborativa*. Essa última etapa foi realizada em 04 de dezembro de 2013, cinco meses após a II e III etapas, por questões internas do grupo que estavam quase todos em momento de estudo para concurso. O mediador iniciou os trabalhos perguntando se lembravam da construção que haviam feito nas etapas anteriores cuja orientação era *o uso da reflexão a partir de uma geratriz, para um banco*. Todos lembraram e assim ele concluiu que o banco existia e apresentou o Logotipo Original exibindo a tarefa dessa etapa, que se caracterizava por *construir a partir da geratriz dada, o logotipo original utilizando o comando de reflexão*.

Nessa pesquisa a fase que houve maior articulação de raciocínio e conhecimentos da mediação foi essa. Foi mostrado aos alunos o Logotipo original do Banco em questão e logo após foi solicitada a construção do original nos mesmos moldes das etapas anteriores.

O professor cuidadosamente e esporadicamente lembrava a todos as regras de construção da atividade, como por exemplo, a utilização exclusiva de reflexões. Bastante observador do chat e da área pública, realizou questionamentos essenciais

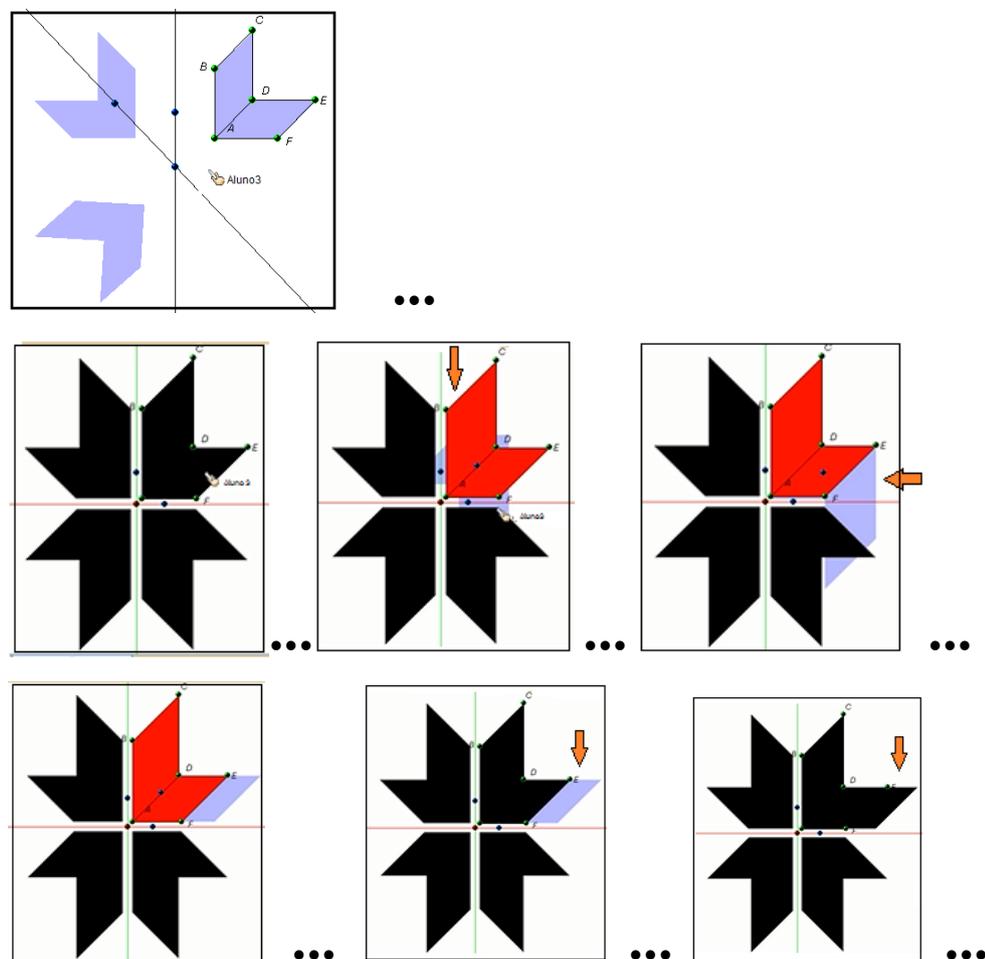
para os alunos argumentarem suas ideias numa socialização colaborativa. Questionamentos que parecia antever dificuldades ou erros que não ajudariam ao processo de aprendizagem.

Portanto, não é só o software que contribui para a realização de problemas em Geometria Dinâmica, mas todo um processo de investimento no ensino, por meio da mediação, buscando alcançar o objetivo maior de uma atividade que é a utilização de conhecimentos próprios do estudante e o investimento em novas descobertas cognitivas, para chegar a um resultado final adequado à situação-problema.

Seguem alguns passos da construção feita colaborativamente a distância:

1. Passos processados na descoberta da “imagem” que gera a figura original (Logotipo do Banco)

Figura 37: passos dos alunos na geração de uma LOGO

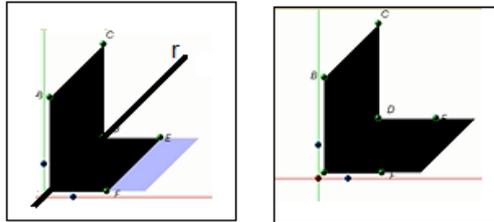


2. Reflexões compostas pela geratriz e o seu reflexo até chegar ao logotipo

do Banco:

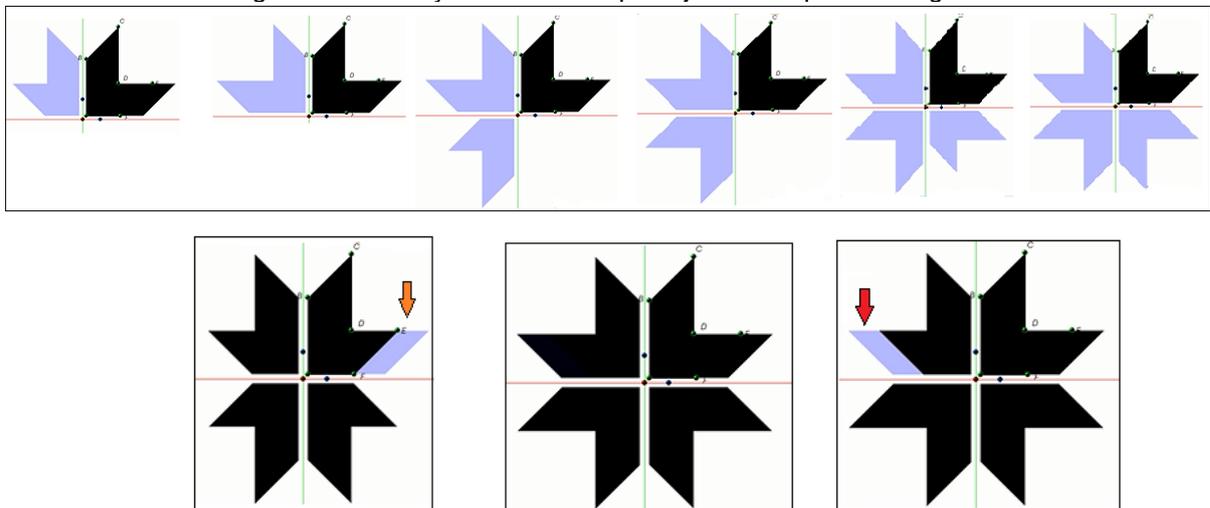
Pintaram a geratriz de preto. O complemento azul, que se vê, é a reflexão da geratriz tomando como eixo de simetria a reta  $r$  de pontos invariantes à geratriz.

Figura 38: Obtenção de um quarto da figura a partir da geratriz, antes e depois da pintura



Após essa reflexão, pintaram o complemento de preto e assim foram refletindo a geratriz e o complemento seguidamente até formar o logotipo solicitado.

Figura 39: Obtenção da LOGO após ajeitar um quarto da figura.



Essa etapa IV foi concluída com êxito na construção coletivamente a distância do LOGOTIPO do BANCO.

## 4.2. ANÁLISE DAS MEDIAÇÕES E AS SESSÕES

No nosso trabalho de coleta de dados utilizamos quatro categorias de interação a partir do objetivo da atividade docente, detalhados na Fundamentação Teórica: **Mediação Didática**, **Mediação Pedagógica**, **Gestão da Atividade e interferências**.

O quadro a seguir sintetiza a distribuição dessas interações em termos de cada “fala em ação”, assim como de cada episódio.

#Tabela 1: Distribuição das falas em ação e episódios em relação aos objetivos da interação e aos encontros

Objetivo da interação	Falas em ação					Episódios				
	1ªS	2ªS	3ªS	4ªS	Total	1ªS	2ªS	3ªS	4ªS	Total
Mediação Didática	49	33	73	147	302	10	7	18	24	59
Mediação Pedagógica	13	9	2	5	29	5	3	2	1	11
Gestão da Atividade	27	23	35	30	115	6	5	14	6	31
Interferência	16	0	1	6	23	6	0	1	3	10
Total por sessão	105	65	111	188	469	27	15	35	34	111

Sugestões apresentadas durante a atividade, tais como<sup>6</sup>:

“A ideia é que todos produzam hoje a sua proposta de logotipo e eu fico por aqui auxiliando ou tirando uma dúvida ou outra”,  
 “Enviei o documento da atividade por email, em pdf”,  
 “Então mãos a obra, e se der tempo ainda discutimos alguma produção hoje”

nos indicam comportamentos de **gestão de atividade** do mediador.

O episódio:

Mediador disse: Oi Aluno1, alguma dúvida?

Aluno1 disse: por enquanto não, só minha criatividade que não está em alta hoje.

Mediador disse: Deixe ela fluir que com o dinamismo do software ajuda um pouco”,

são ações condizentes à **mediação pedagógica**, porque mostra um relacionamento professor-aluno como um processo da construção do conhecimento.

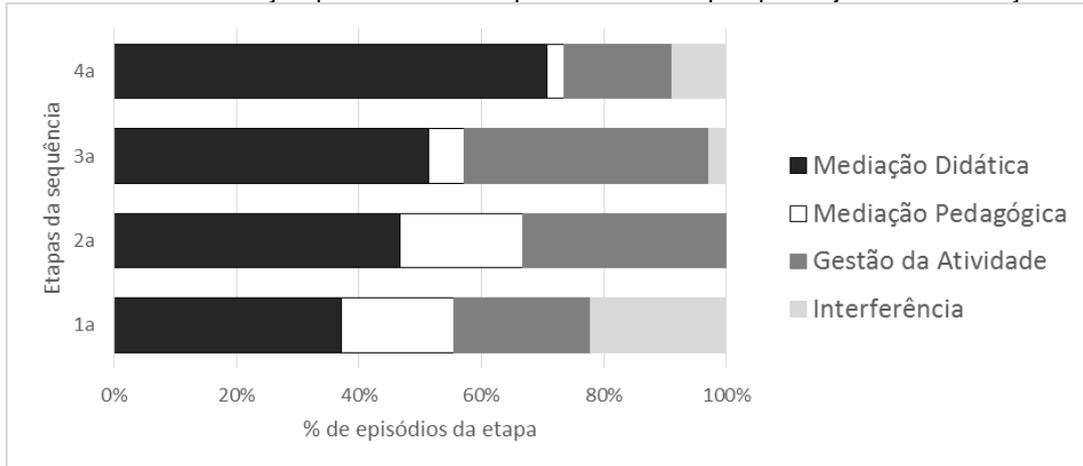
Na categoria **Interferências** foram consideradas as interações entre pesquisador e mediador durante a sessão, visto que as mesmas referiam-se ao trabalho de pesquisa e gestão de recursos e não ao andamento da atividade em si.

Nosso foco, porém, é a **Mediação Didática**. Os dados nos mostram um total de 59 episódios de interações com fins de mediação didática, num total de 111 episódios durante as quatro etapas. Em termos absolutos percebe-se um quantitativo maior desses episódios duas últimas seções em que o trabalho colaborativo é valorizado. Porém, em termos percentuais o gráfico a seguir mostra

<sup>6</sup> Ao longo da análise trazemos a cópia de diversas “falas em ação” que ocorreram durante os encontros. Essas não serão alteradas nem mesmo para corrigir a linguagem, nem se colocará (sic). A troca de letras falta de concordância e outros problemas de linguagem são frequentes, pois se tem uma escrita com velocidade que busca se aproximar a fala.

um crescimento percentual das mediações didáticas.

Gráfico 5: Distribuição percentual dos episódios nas etapas por objetivo da interação



Na última etapa da sequência de atividade chega-se a 70% dos episódios serem de natureza de mediação didática. Percebe-se a efervescência da discussão pautada no conteúdo, que com a subcategorização em os relativos ao conteúdo computacional e ao relativo ao conteúdo matemático, mostra que essencialmente tem-se o foco nos entraves e discussões matemáticas.

Geramos um quadro a partir das mediações didáticas por sessão (Etapa) para que pudéssemos ter um olhar mais próximo às ações do professor/mediador.

#Tabela 2: Distribuição das falas em ação e episódios de mediação didática, quanto a mediação computacional e mediação de conteúdo matemático

Objetivo da interação	Falas em ação					Episódios				
	1ªS	2ªS	3ªS	4ªS	Total	1ªS	2ªS	3ªS	4ªS	Total
Mediação Computacional	12	3	13	8	36	4	3	4	4	19
Mediação de Conteúdo Matemático	35	30	60	139	266	8	6	17	21	52
Total de Mediação Didática	47	33	73	147	302	10	7	18	24	59

Observa-se que o total de Mediações Didáticas nem sempre é igual à soma dos episódios em cada etapa. Isto se deve ao fato de que, nos episódios de mediação didática, algumas vezes a mediação computacional se articulava com a de conteúdo matemático no ambiente de geometria dinâmica. Já para o caso das unidades de registro (as falas em ação) são classificadas de forma disjunta entre as duas categorias.

Falas do tipo “trace dois pontos e depois uma reta...” surgiu como resposta à pergunta: “Como posso construir o eixo?”, de um estudante, evidenciando uma **mediação didática de conteúdo computacional** na construção de uma reta ou

segmento de reta utilizando as ferramentas do Tabulæ. A seguir incluímos o trecho das “falas em ação” da qual estamos ressaltando:

- Aluno3 disse: Como posso construir o eixo?
- *Mediador* disse: trace dois pontos e depois uma reta...
- Aluno3 disse: tá complicado, diz dá ambiguidade.
- *Mediador* disse: Estás tentando mexer em que comando Aluno3?
- *Mediador* disse: Quando aponta a ambiguidade, ele não abre uma tela para escolher qual você quer?
- *Mediador* disse: Aluno3 conseguiste sair da ambiguidade?
- *Mediador* disse: O complicado é a articulação da Matemática com a mensagem que a figura comunica ou fazer os comandos para obter uma simetria?

“A LOGOTIPO precisa partir dessa imagem [Geratriz]”, “Trace um eixo e obtenha uma primeira reflexão, dai podes soltar a imaginação e até compor com outras reflexões” (Etapa I); “Mediador: Em torno de que eixo?” (Etapa II); “Aluno2 disse: o eixo criado toca a figura original, por isso o ponto em comum. Mediador disse: Ok, é o ponto da geratriz que pertence ao eixo de simetria, portanto seu reflexo é ele mesmo.” (Trecho da Etapa III); “Retângulo ou paralelogramo?” (Etapa IV) são algumas “falas em ação” de **mediação didática de conteúdo matemático** encontradas nas etapas da atividade.

Assim, pudemos oferecer uma distribuição das falas e dos episódios que aparecem nas categorias de interação que iremos analisar nessa pesquisa a partir do objetivo da interação relativa às atividades mediadoras, em um espaço de aprendizagem colaborativa apoiada por computador, em um ambiente de geometria dinâmica, na modalidade a distância.

Faremos a análise das mediações etapa por etapa, dada que as mesmas têm objetivos e dinâmicas bem diferenciadas, o que prevê uma mediação também diferente. Iniciaremos com a Etapa I, dando continuidade com as Etapas II, III e por último a Etapa IV.

### 4.3.1. Etapa I – Atividade Individual – Geração de Logotipo a partir de uma geratriz

O quadro a seguir nos permite verificar uma maior necessidade dos estudantes relacionada à mediação de conteúdo matemático em uma fase na qual a criação fica por conta do próprio estudante em sua atividade junto ao objeto matemático e suas habilidades com as ferramentas de Geometria Dinâmica.

#Tabela 3: Distribuição das falas em ação de mediação didática na etapa I

E1	Mediação Didática	Falas em Ação				
		Aluno1	Aluno2	Aluno3	Professor	Total
MDC	Conteúdo Computacional	0	0	0	12	12
MDM	Conteúdo Matemático	8	7	1	19	35
TOTAL		8	7	1	29	47

Vale lembrar que os sujeitos têm certa familiaridade com outras ferramentas de geometria dinâmica como o Geogebra.

Para ilustração essa etapa, algumas “falas em ação”:

MDC – “Mediador: Como assim, Aluno3, que duas janelas?”  
 “Mediador: Estás tentando mexer em que comando Aluno3?”

MDM – “Aluno1: Não usei apenas a reflexão Aluno2. A partir delas que comecei a construir usando os outros recursos.”  
 “Mediador: Mas seria para fazer com a Reflexão apenas, mas depois discutimos como fizeste Aluno1.”  
 “Aluno2: Pensei nos possíveis eixos de simetria. Creio que tive esse entendimento por saber que o trabalho se tratava de simetria.”

Note que a ação do aluno1, ao “conversar” com seu colega, necessitou de uma mediação imediata do professor sobre a estratégia de construção que ele havia proposto. Eles tentavam alterar diretamente a geratriz arrastando seus pontos. Devido a uma falha de construção da geratriz, em um dos pontos, o comando de arrastar ela deformava a geratriz. Nesse momento, o mediador buscou corrigir uma interpretação não desejada das instruções da atividade, que era trabalhar apenas com reflexões em torno de um eixo qualquer, conforme as orientações repassadas pelo mediador no texto em pdf e pelo próprio recurso do Tabulæ Colaborativo em sua Sessão Colaborativa – Atividade.

Igualmente, como em uma aula presencial, o professor precisa ficar atento às intervenções e sugestões que possam surgir e mediar a interpretação do problema proposto.

A Tabela 4 apresenta a participação dos sujeitos nos 10 episódios de mediação didática ocorridos na etapa 1.

Tabela 4: Distribuição das falas em ação por sujeito de episódios na etapa I

N.	Mediação Didática	Falas em ação				Total
		Aluno1	Aluno2	Aluno3	Mediador	
1	Professor apresenta atividade	1	0	0	3	4
2	Mediador tira dúvida de uso de Software de estudante que chega	0	0	0	5	5
3	Estudante busca entender a atividade proposta	1	0	0	1	2
4	Estudante busca mediação para construir eixo	0	0	1	2	3
5	Estudante busca esclarecer requisitos da atividade	0	2	0	2	4
6	Estudante busca mediação tecnológica de uso do software	0	0	0	3	3
7	Estudante responde a outro num chat público e gera discussão da atividade	3	0	0	3	6
8	Professor busca feedback de andamento de atividade individual	3	4	0	6	13
9	Estudante discute o entendimento das instruções em pdf	0	1	0	1	2
10	Mediador busca entender se estudante está usando um Teorema em Ação inválido	0	2	0	3	5
TOTAL		8	9	1	30	47

Em um total de 10 episódios de mediação didática em um houve mais de um aluno interagindo. Os alunos 1 e 2 interagiram entre si e com o mediador, nesse momento de trabalho individual. Já se percebe um índice aproximado de 10% da comunicação com objetivo de mediação didática realizada entre alunos:

“Aluno1: Não usei apenas a reflexão Aluno2. A partir delas que comecei a construir usando os outros recursos.”

“Aluno1: isso mesmo Aluno2. Também encontrei essa dificuldade e achei que poderia “completar esses espaços” com segmentos que não fossem reflexões”.

Os outros 90% foram de comunicações diretamente entre uma estudante e o mediador ou o mediador “fala” e os estudantes “escutam”.

Nessa etapa os alunos não socializam suas dúvidas, estratégias, conhecimentos, descobertas entre eles, porém os recursos computacionais estão disponíveis para a resolução da atividade e também as comunicações entre mediador-aluno e aluno-aluno. Vamos mostrar uma situação vista na gravação dessa etapa:

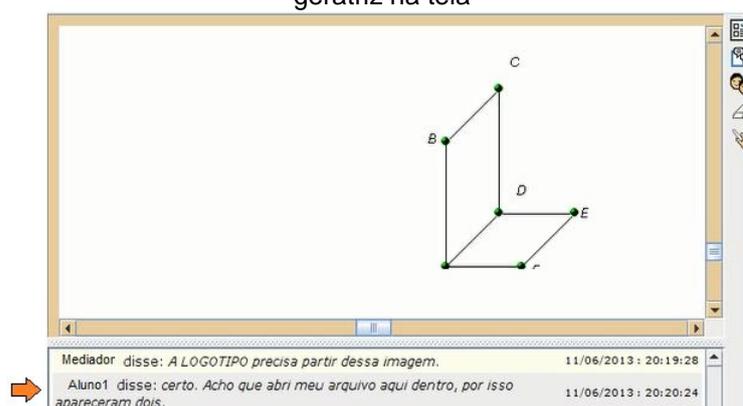
O mediador não entendeu porque apareceram duas geratrizes na área pública... ele só havia posto uma.

Figura 40: imagens na tela que geram a dúvida no mediador



Com o recurso de chat para “Todos” , tínhamos a possibilidade de uma comunicação com os alunos, gerando uma mediação para ajudar a responder o questionamento do professor.

Figura 41: Tela em que o Aluno 1 se identifica como autor da ação de colocar a 2ª geratriz na tela



Os alunos ainda estavam se familiarizando com os recursos do software Tabulæ Colaborativo. Caso não tivéssemos o recurso da interface gráfica e comunicação em tempo real, talvez essa descoberta não transparecesse ao mediador ou fosse esquecida de ser pesquisada em outro momento.

Se a participação entre estudantes iniciam a aparecer já nessa primeira etapa, as interações dos sujeitos com a geometria dinâmica de forma compartilhada parecem ser mais presentes e sua importância nas mediações se revelam. O **Erro! Fonte de referência não encontrada.** sintetiza os episódios em que a ação de um ou vários sujeitos no software é essencial para a condução da mediação didática.

Quadro 9:As ações no Tabulae em cada episódio da etapa I

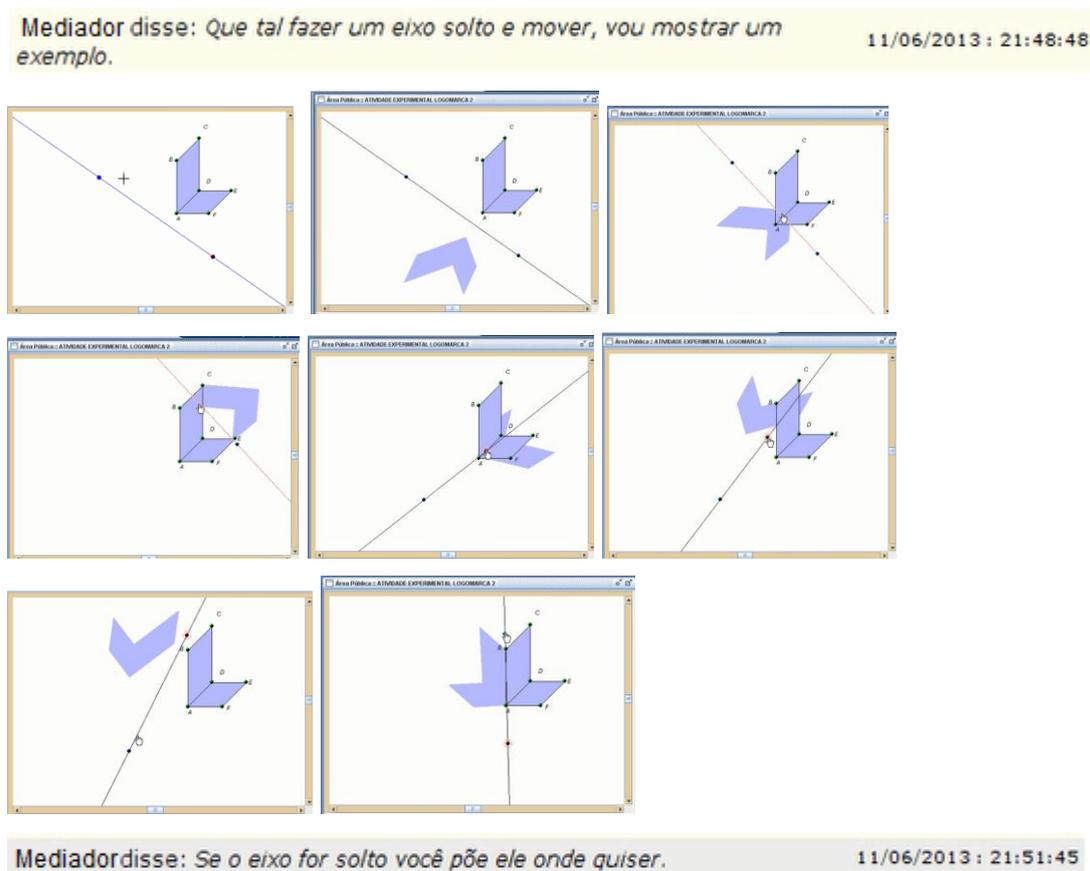
N.	Mediação Didática	Ações (S/N)	Importância da ação para a mediação
1	Professor apresenta atividade	N	----
2	Mediador tira dúvida de uso de Software de estudante que chega	N	----
3	Estudante busca entender a atividade proposta	N	----
4	Estudante busca mediação para construir eixo	N	----
5	Estudante busca esclarecer requisitos da atividade	N	----
6	Estudante busca mediação tecnológica de uso do software	S	Estudante mexe em comando que dá erro de ambiguidade na tela pública
7	Estudante responde a outro num chat público e gera discussão da atividade	S	Mediador percebe e intervém, agindo em tempo real, esclarecendo a interpretação errônea da atividade do aluno 1
8	Professor busca feedback de andamento de atividade individual	N	----
9	Estudante discute o entendimento das instruções em pdf	N	----
10	Mediador busca entender se estudante está usando um Teorema em Ação inválido	S	Mediador, por meio da área pública, faz questionamentos sobre a não simetria da figura

Dos 10 episódios de mediação didática três deles a possibilidade de ver a ação do outro com o objeto matemático como parte essencial à condução da mediação.

Outro exemplo da importância do compartilhamento da ação pode ser visto no extrato a seguir. Durante a construção de uma reflexão, o compartilhamento do procedimento ajuda aos estudantes a entender os resultados obtidos, descrito a seguir.

O mediador observa que os estudantes estão sem saber que eixo escolher. Ficam presos a ter como eixo o prolongamento de um segmento, então propõe o uso de eixo solto.

Figura 42: Sequência de telas com a exploração feita pelo mediador.



Os passos de construção são apresentados de forma dinâmica e após a construção o mediador move o eixo para deixar claro aos estudantes a liberdade que o eixo solto permitirá para a criação deles.

#### 4.3.2. Etapa II – Discussão Coletiva – Discussão Coletiva dos Logotipos Gerados na Etapa I

A segunda sessão já apresenta um aspecto de cooperação, em que cada estudante vai apresentando e defendendo a sua produção. O quantitativo de “falas em ação” é quase igual. O número de episódios também diminuiu, porém já se percebe uma concentração maior de episódios didáticos e maior interação entre

estudantes, mesmo em uma etapa em que cada um apresenta o seu produto.

O quadro mostra a distribuição das “falas em ação” por sujeitos e por tipo de mediação didática

Tabela 5: Distribuição das “falas em ação” de mediação didática na etapa II

E2	Mediação Didática	Falas em ação				Total
		Aluno1	Aluno2	Aluno3	Mediador	
MDC	Conteúdo Computacional	0	0	0	3	3
MDM	Conteúdo Matemático	13	7	6	19	45
TOTAL		13	7	6	22	48

Diminui visivelmente a ação do mediador, ficando quase equitativo entre as falas do mediador e a soma das falas dos estudantes. E a concentração das mediações didáticas continua no conteúdo matemático. Os dados obtidos mostram que nessa etapa só ocorreram três falas em ação de mediações computacionais num total de 48 de mediação didática. Estatisticamente, temos 6,25% das falas em ação de mediação didática com conteúdo computacional. A mediação de conteúdo matemático, relativo às “falas em ação”, ficou com um percentual de 93,75%.

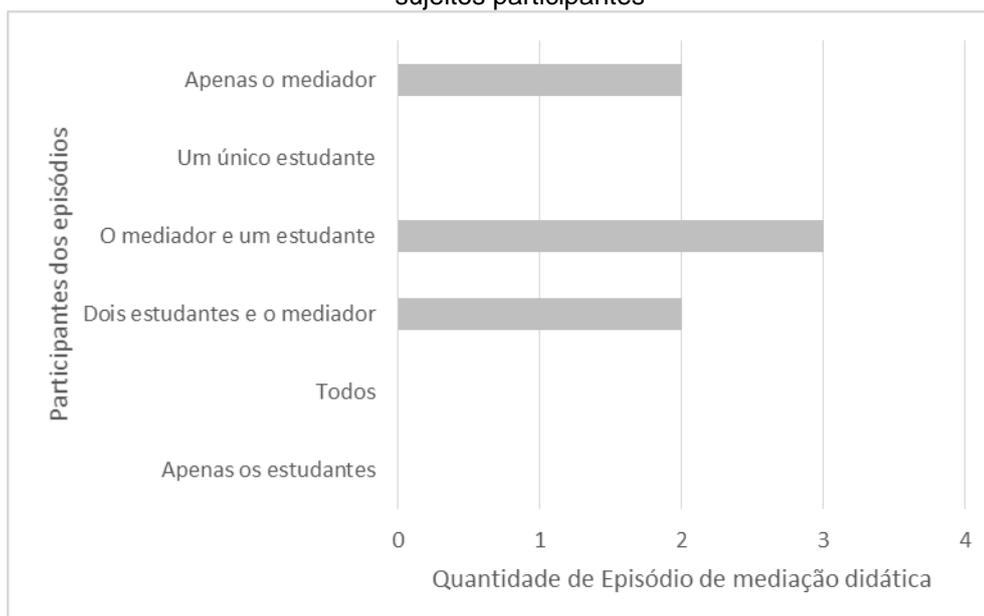
Tabela 6: Distribuição das referências de episódios na etapa II

N.	Mediação Didática	Referências				Total
		Aluno1	Aluno2	Aluno3	Mediador	
1	Estudante apresenta sua produção e explica	0	4	0	1	5
2	Mediador busca entender o processo utilizado para gerar o Logotipo	0	7	0	8	15
3	Mediador questiona se todos entenderam	0	0	0	1	1
4	Mediador busca auxiliar a aluno 1 a se desprender da ideia que o eixo tem que ser um segmento da geratriz	2	0	0	2	4
5	Aluno 3 apresenta e defende a sua Logotipo	1	0	6	4	11
6	Aluno 1 apresenta e defende o seu Logotipo	3	1	0	7	11
7	Mediador faz intervenção computacional para que reorganizem o ambiente	0	0	0	1	1
TOTAL		6	12	6	24	48

Apesar de estarem em uma sessão em que é permitida a ação interativa e cooperativa dos integrantes e do mediador na defesa de suas criações de Logotipos, cada um defende sem a participação dos outros integrantes da atividade.

O quadro anterior mostra a seguinte distribuição dos episódios de mediação didática no que concerne a participação dos sujeitos.

Gráfico 6: Distribuição dos episódios de mediações didáticas da etapa II quanto aos sujeitos participantes



A interação de mediação didática ainda aparece bastante focada em uma discussão com dois polos, o mediador e o estudante. Apesar disso, a interação de outros estudantes na apresentação do colega de forma cooperativa já começa a ser mais presente.

Quadro 10: As ações no Tabulæ em cada episódio da etapa II

N.	Mediação Didática	Ações (S/N)	Importância da ação para a mediação
1	Estudante apresenta sua produção e explica (Aluno 2)	N	----
2	Mediador busca entender o processo utilizado para gerar o Logotipo	S	Mediador simula a estratégia de construção do aluno apontando, na área pública, os elementos utilizados.
3	Mediador questiona se todos entenderam	N	----
4	Mediador busca auxiliar a aluno 1 a se desprender da ideia que o eixo tem que ser um segmento da geratriz	N	----
5	Aluno 3 apresenta e defende a sua Logotipo	S	O Aluno 3 demonstra, na área pública, que se movimentar o eixo de simetria da sua figura, os pontos dela também se movimentam.
6	Aluno 1 apresenta e defende o seu Logotipo	S	A produção do aluno 1 gerou uma figura de fácil visualização das reflexões por todos.
7	Mediador faz intervenção computacional para que reorganizem o ambiente	S	A área pública foi totalmente apagada para se organizar a sessão
<b>TOTAL</b>			

A janela pública nessa etapa foi muito importante por dar condições e facilitar a visualização das produções individuais e de forma síncrona acompanhar toda a evolução das interações e mediações com o professor e as estratégias didáticas adotadas. No total de sete episódios de mediação didática quatro destas ações no ambiente compartilhado têm papel fundamental. Todos puderam acompanhar e até participar dessa dinâmica cognitiva. Em dois casos, iniciou-se a interação entre estudantes.

Quatro dentre os sete episódios têm as interações dos colegas com o objeto matemático como linguagem essencial à mediação.

Claro que em se tratando de uma ferramenta que depende da internet e suas particularidades, como velocidade, conectividade e outros interfaces, o andamento da atividade poderia ser prejudicada parcialmente para alguém. Como ocorreu para o Aluno 3 que tinha sua internet lenta. Porém, os riscos existem em todas as modalidades de ensino.

#### **4.3.2.1. Defesa do LOGO do Aluno 2**

Com o *aluno2* tivemos uma mediação didática de conteúdo computacional. Percebemos nos episódios que ao defender sua LOGO, o aluno2 se preocupou claramente, no objetivo da atividade relacionado ao uso exclusivo de reflexões. Então, ele foca sua estratégia nas possibilidades de reflexão oferecidas pelas ferramentas computacionais e nos seus conhecimentos relacionados ao nosso objeto matemático (Simetria de Reflexão). Como exemplo, podemos descrever esse trecho de conversa:

“Mediador: E como foi gerada?”;  
“Aluno2: Foi gerada a partir de reflexões em torno da figura inicial (...);”  
“Mediador: Em torno de que eixo?”;  
“Aluno2: sem eixos, fui na opção ‘refletir’ e o programa me dava as figuras.” (...).

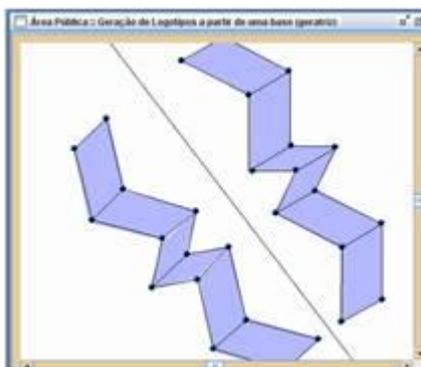
O mediador necessitou de um episódio com 15 “falas em ação” para descobrir que o mesmo não desejava criar um eixo qualquer para a reflexão da figura e sim usar o teorema em ação “O eixo de simetria é prolongamento de um segmento da figura”. Ao ver o tipo de ação do aluno2 na tela, o mediador inicia a investigar a concepção de eixo que o aluno está utilizando.

Segue o trecho da conversa e da gravação:

Figura 43: Trecho inicial do episódio em que mediador investiga concepção do aluno 2

Mediador disse: *E como foi gerada?*

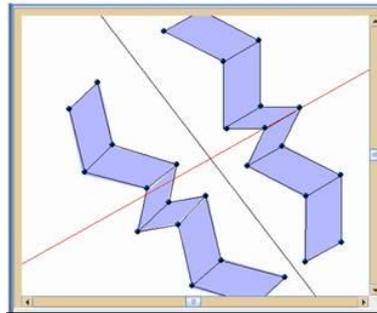
04/07/2013 : 20:16:58



Aluno2 disse: *Foi gerada a partir de reflexões em torno da figura inicial. Depois de uma figura criada, tracei um eixo (como sugerido) e fiz a simetria da figura como um todo e não as partes.*

04/07/2013 : 20:17:55

Figura 44: Trecho final do episódio em que mediador investiga concepção do aluno 2

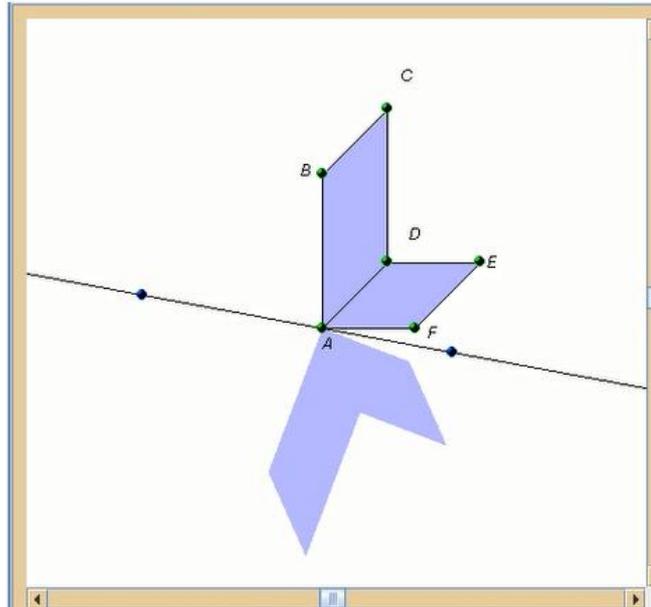


Mediador disse: <i>Deixa ver se entendi.</i>	04/07/2013 : 20:18:37
Mediador disse: <i>Desse eixo, que coloquei, você gerou o corpo do primeiro e parte da asa, e a segunda parte da asa?</i>	04/07/2013 : 20:19:39
Aluno 2 disse: <i>não</i>	04/07/2013 : 20:19:50
Aluno 2 disse: <i>a partir da geratriz eu fiz reflexões das faces.</i>	04/07/2013 : 20:20:06
Mediador disse: <i>Em torno de que eixo?</i>	04/07/2013 : 20:20:30
Aluno 2 disse: <i>sem eixos, fui na opção 'refletir' e o programa me dava as figuras</i>	04/07/2013 : 20:21:23
Mediador disse: <i>Onde tem esse comando refletir, é o criar reflexão, é isto?</i>	04/07/2013 : 20:22:49
Aluno 2 disse: <i>sim, 'criar reflexão'</i>	04/07/2013 : 20:23:04
Mediador disse: <i>Quando pede criar reflexão, tem que apontar uma linha (segmento, reta, semireta) que será o eixo e o objeto que deseja refletir, não?</i>	04/07/2013 : 20:24:15
Aluno 2 disse: <i>sim, mas não foi necessário 'criar' o eixo. Utilizando os segmentos da geratriz é possível fazer.</i>	04/07/2013 : 20:25:04
Mediador disse: <i>Ah, tá... mas eles passam a ser os eixos escolhidos.</i>	04/07/2013 : 20:25:51
Aluno 2 disse: <i>isso</i>	04/07/2013 : 20:26:19
Mediador disse: <i>Todos conseguem perceber como foi feito, cada eixo escolhido?</i>	04/07/2013 : 20:26:38

#### 4.3.2.2. Defesa do LOGO do Aluno 3

O *aluno3* defendeu sua logo utilizando um dos critérios e objetivos solicitados para a criação do Banco, particularmente, com características que inspirassem *equilíbrio ao cliente*; contudo, o mediador percebeu que poderia explorar mais a produção, fazendo-lhe questionamentos em torno do ponto comum para que ele chegasse ao entendimento sobre invariância.

Figura 45: Mediação entre mediador e aluno 3 sobre invariância (parte inicial)



Aluno 3 disse: *Bom, a dificuldade foi inicialmente entender a atividade*

04/07/2013 : 20:36:16

Mediador disse: *OK, e entendeu o que? Qual foi o entendimento?*

04/07/2013 : 20:36:57

Aluno 3 disse: *Por meio de uma estrutura podemos demarcar os pontos simétricos, assim tratando todos os clientes de forma equilibrada, tratando todos os clientes.*

04/07/2013 : 20:37:06

Mediador disse: *Por qual razão, as duas partes se tocam? Há um ponto comum?*

04/07/2013 : 20:38:33

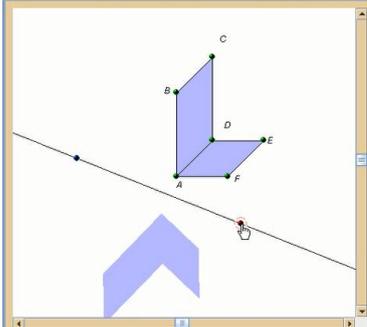
Aluno 3 disse: *Ao traçar o eixo para obter o logotipo por meio da geratriz,*

04/07/2013 : 20:38:52

Aluno 3 disse: *Ao movimentar o eixo, os pontos da figura simétrica também se movimentam*

04/07/2013 : 20:40:05

Figura 46: Mediação entre mediador e aluno 3 sobre invariância (parte final)

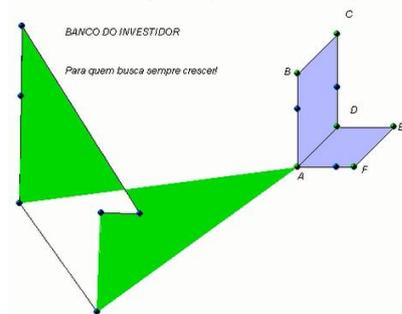


Mediador disse: <i>E em que situação se obtém o ponto comum?</i>	04/07/2013 : 20:40:49
Aluno 3 disse: <i>Creio que esse ponto comum também seja simétrico ao ponto da geratriz,</i>	04/07/2013 : 20:41:28
Aluno 3 disse: <i>que coincide</i>	04/07/2013 : 20:41:46
Mediador disse: <i>OK, é o ponto da geratriz que pertence ao eixo de simetria, portanto seu reflexo é ele mesmo.</i>	04/07/2013 : 20:42:38

#### 4.3.2.3. Defesa do LOGO do Aluno 1

A estratégia que esse *aluno* adotou junta aspectos do perfil dos dois perfis anteriores. Trouxe a *ideia de igualdade*, outro critério da criação do logotipo do Banco e a simetria de reflexão, objeto matemático da pesquisa. Inicialmente ele mostrou essa construção.

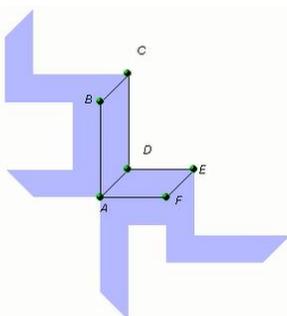
Figura 47: Construção apresentada pelo Aluno 1



E ao apresentar observa-se a conversa a seguir:

Figura 48: Trecho do episódio de apresentação da produção do Aluno 1

Aluno 1 disse: <i>bom, prmeiramente eu também não tinha entendido como fazer. Pensei que deveríamos apenas dar pontos simétricos e construir a figura livremente.</i>	04/07/2013 : 20:45:20
Mediador disse: <i>OK,</i>	04/07/2013 : 20:45:40
Mediador disse: <i>Pontos simétricos isolados.</i>	04/07/2013 : 20:46:26
Aluno 1 disse: <i>Depois, tentei construir uma figura a partir da reflexão de faces, assim tornou os segmentos e pontos em comum trazendo a ideia de igualdade. Estou com ela aqui no arquivo, mas não sei abrir na área pública. Isso mesmo.</i>	04/07/2013 : 20:46:48
Aluno 1 disse: <i>vou tentar expor aqui</i>	04/07/2013 : 20:47:00



Mediador disse: <i>OK, tente.</i>	04/07/2013 : 20:48:06
Mediador disse: <i>Ok, até quase consigo visualizar as reflexões feitas.</i>	04/07/2013 : 20:48:59
Mediador disse: <i>Como vês ou defendes esse Logo?</i>	04/07/2013 : 20:49:47
Mediador disse: <i>É interessante, que ele foi feito com muitas reflexões, mas a figura final não tem simetria de reflexão, tem?</i>	04/07/2013 : 20:51:23
Aluno 2 disse: <i>não tem</i>	04/07/2013 : 20:52:44
Mediador disse: <i>De fato Aluno 2</i>	04/07/2013 : 20:53:07

Essa construção foi a partir de várias reflexões de faces, pois a ideia de igualdade era forte para ele. Porém, o mediador, por meio de questionamento foi levando o aluno a perceber que sua construção não demonstrava simetria.

#### 4.3.3. Etapa III – Atividade Coletiva – Geração de um Logotipo a partir de interação e discussões do Grupo – Ação Colaborativa

Nessa etapa da construção coletiva de um logotipo para o Banco, os alunos participantes não sabem e não viram ainda o nome e nem o logotipo do Banco que escolhemos para a pesquisa.

Tabela 7: Distribuição das falas em ação de mediação didática na etapa III

E3	Mediação Didática	Falas em ação				Total
		Aluno1	Aluno2	Aluno3	Mediador	
MDC	Conteúdo Computacional	0	0	0	3	3
MDM	Conteúdo Matemático	22	23	11	12	68
TOTAL		22	23	11	15	71

Em uma etapa de construção colaborativa de um LOGOTIPO, percebe-se a clara migração do foco na intervenção do mediador para as interações com grande

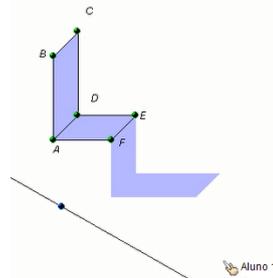
participação dos alunos. O mediador interfere apenas em 15 das 71 falas em ação com o objetivo de mediação didática.

Os dados obtidos mostram que nessa etapa só ocorreram 03 falas de mediações computacionais num total de 71 falas. Estatisticamente, temos 4,23% das falas de mediação didática. Nota-se que desde o início das atividades as mediações didáticas passam a ocorrer com participação de mais de um estudante. E muitas delas sem a mediação do mediador. Os estudantes assumem as mediações.

Índices das participações: *Aluno1* (22 em 71) 30,98%; *Aluno2* (23 em 71) 32,39% e *Aluno3* (11 em 71) 15,49% mostram a motivação em uma atividade com a cooperação de todos. Utilizando a área pública do Tabulæ, todos puderam opinar e ao mesmo tempo, visualizar todas as estratégias e manipulações, estando elas certas ou erradas, feitas por todos.

Segue um trecho dessa etapa em que há interação de todos os estudantes para a construção da LOGO:

Figura 49: Início de episódio para a construção da LOGO na etapa III



Aluno 1 disse: *acho que devemos pensar primeiro nos princípios que são exigidos.*

Mediador disse: *OK.*

Aluno 1 disse: *isso mesmo*

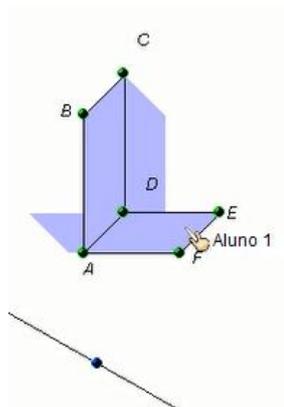


Figura 50: Final do episódio com interação de todos os estudantes

Aluno 2 disse: *quanto as exigencias do banco: a questão do equilibrio e da igualdade podem ser exploradas na em figuras identicas*

Aluno 3 disse: *isso*

Aluno 1 disse: *acho que a convergência de objetivos entra aí também, quando são identicas buscam um mesmo ideal.*

Tabela 8: Distribuição das referências de episódios na etapa III

N.	Episódios de Mediação Didática	Referências				
		Aluno1	Aluno2	Aluno3	Mediador	Total
1	Estudante assumem a tarefa e iniciam os trabalhos de produção	5	6	2	2	15
2	Estudante discute processo de criação de eixo	0	1	0	0	1
3	Estudante discute os princípios e a logo gerada	0	1	1	0	2
4	Estudante demonstra desconforto com a atividade	1	1	1	1	4
5	A partir da articulação estudante lidera a execução de um produto	1	1	1	0	3
6	Estudante busca validação para o processo que está construindo	0	0	0	1	1
7	Aluno tenta ajustar a imagem obtida à imagem que visualiza	1	0	1	3	5
8	Aluno discute a ideia do outro	2	2	0	0	4
9	Aluno busca interagir com colega para ajustar a imagem a partir da movimentação do eixo	1	2	0	0	3
10	Aluno decide criar nova parte da LOGO junto com outro	1	2	0	0	3
11	Mediador busca entender se há consenso	2	1	2	1	6
12	Aluno tem dificuldade de ajuste da tela	2	1	1	0	4
13	Mediador buscar rearrumar a tela	0	0	0	2	2
14	Alunos retomam a construção coletiva para ajustar a tela	2	1	0	0	3
15	Mediador busca estabelecer regras para não alterarem a geratriz	0	0	1	2	3
16	Mediador discute a figura final formada e a simetria	0	0	0	1	1
17	Aluno busca ajustar a figura alterando e falando	4	4	1	1	10
18	Mediador ensina a gravar a produção	0	0	0	1	1
TOTAL		22	23	11	15	71

Analisando os episódios de mediação didática, obtivemos um maior índice de ocorrência em “Estudantes assumem a tarefa e iniciam os trabalhos de produção”, totalizando 15 em 71 episódios, ou seja, 21,12%.

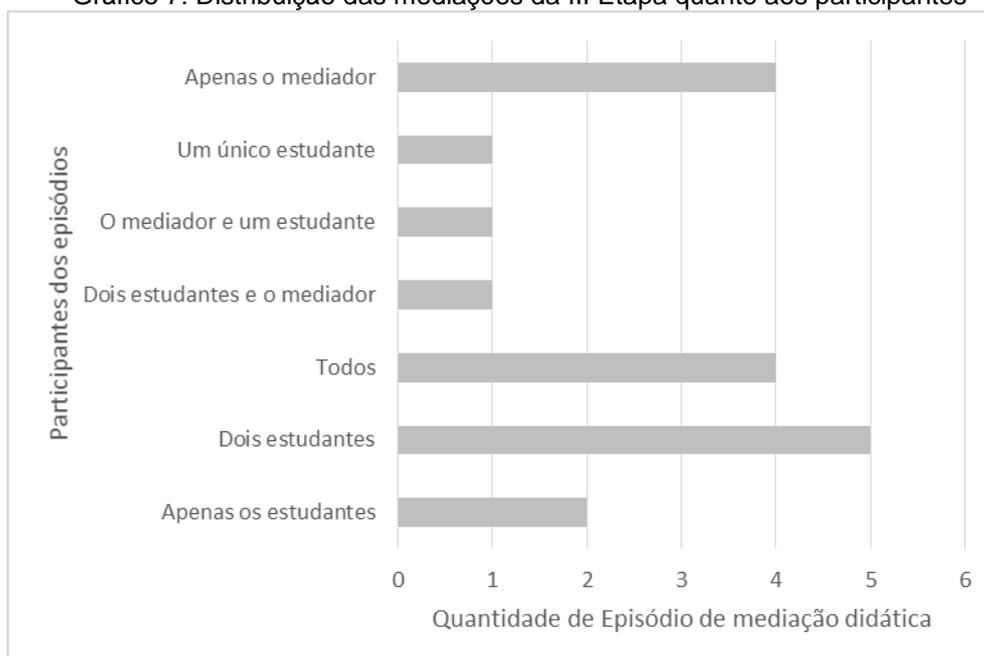
Moran et al (2009, p.140) nos traz uma reflexão:

“E o professor, como fica nesse processo? Desaparece?”

Absolutamente. Tem oportunidade de realizar seu verdadeiro papel: o de mediador entre o aluno e sua aprendizagem, o facilitador e motivador dessa aprendizagem”.

Os resultados mostram que a mediação didática exercida contribuiu para que os alunos assumissem maior responsabilidade e controle sobre o seu próprio processo de aprendizagem e construção de conhecimentos. Foi estimulada a liberdade de escolhas que definiram seu sucesso ou fracasso. Na sua autonomia, o aluno pode tomar decisões e logo em seguida comprovar as consequências de sua opção e refazê-las. Isto pode ser vista também pela síntese oferecida pelo gráfico a seguir.

Gráfico 7: Distribuição das mediações da III Etapa quanto aos participantes



O gráfico mostra que em sete dos 18 episódios de mediação didática ocorre só entre estudante, e um total de 12 dos 18 há a participação de pelo menos três dos quatro componentes do grupo. Isto mostra realmente o viés de colaboração na produção e negociação do conhecimento.

Até a etapa anterior, percebemos pouco envolvimento dos alunos na área pública do software Tabulæ, o que não aconteceu nessa etapa III. Nosso olhar se volta para a questão da colaboração a distância por meio de um software de geometria dinâmica quando solicitamos uma atividade de construção criativa colaborativa utilizando apenas simetria de reflexão.

Ao tratar Micromundos e Simulações, Bellemain (2010, pp.7,8) sinaliza a

importância dos sistemas de representação na interação do aprendiz com os objetos de saber. E assim o descreve:

O computador oferece assim múltiplas formas de ação sobre os objetos de saber por meio das suas representações, e ele oferece também, e, sobretudo, a possibilidade de calcular diversas retroações às ações e assim favorecer a construção de conhecimentos: sobre os objetos saber em função das reações (respostas) às ações e, permitindo antecipações e a determinação das ações necessárias a uma resposta esperada.”

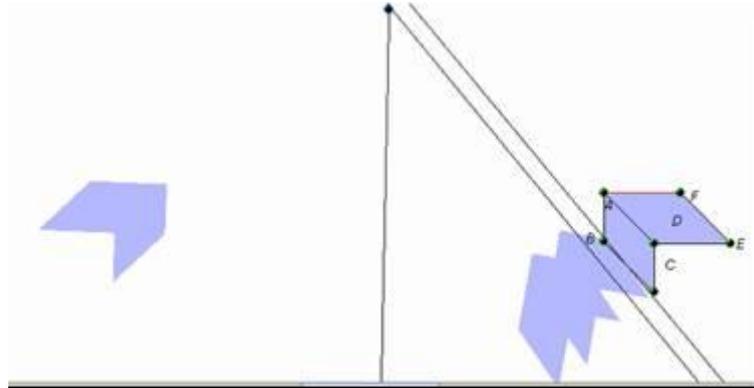
Quadro 11: As ações no Tabulæ em cada episódio da etapa III

N.	Mediação Didática	Ações (S/N)	Importância da ação para a mediação
1	Estudantes assumem a tarefa e iniciam os trabalhos de produção	S	Todos os estudantes, por meio da tela e em colaboração, iniciam uma figura. Pelo chat discutem as exigências do Banco
2	Estudante discute processo de criação de eixo	S	Estudante dá exemplo na área pública de como criar o eixo apenas no final
3	Estudante discute os princípios e a logo gerada	S	Mostra aos colegas que a integração social seria a movimentação eixo (executa esse procedimento na área pública)
4	Estudante demonstra desconforto com a atividade	N	----
5	A partir da articulação estudante lidera a execução de um produto	N	---
6	Estudante busca validação para o processo que está construindo	N	---
7	Aluno tenta ajustar a imagem obtida à imagem que visualiza	S	Mediador reage ao ver aluno usando de forma incorreta a ferramenta do tabulae para ajeita o eixo
8	Aluno1 discute a ideia do outro	N	----
9	Aluno busca interagir com colega para ajustar a imagem a partir da movimentação do eixo	N	----
10	Aluno decide criar nova parte da LOGO junto com outro	S	Aluno 1 e 2 iniciam uma produção em colaboração (área pública). Mediador analisa a ideia.
11	Mediador busca entender se há consenso	S	Mediador percebe que alunos estão em sintonia na produção
12	Aluno tem dificuldade de ajuste da tela	N	----
13	Mediador buscar reorganizar a tela	S	Mediador utiliza recursos do Tabulae para ajeitar a figura na área pública
14	Alunos retomam a construção coletiva para ajustar a tela	N	----
15	Mediador busca estabelecer regras para não alterarem a geratriz	S	Mediador percebe quebra da regra de não mexer na geratriz e reage
16	Mediador discute a figura final formada e a simetria	S	Mediador reage ao ver que figura formada não tem simetria de reflexão
17	Aluno busca ajustar a figura alterando e falando	S	Aluno 1 incentiva e inicia um processo colaborativo. Mediador questiona instigando a produção.
18	Mediador ensina a gravar a produção	N	----
<b>TOTAL</b>			

Dez dos 18 episódios têm as ações na janela pública como elemento fundamental, como mostra o quadro acima. Nesse momento de construção colaborativa, a presença do software de Geometria Dinâmica, mostrou-se ainda mais essencial.

Um exemplo dessas mediações didáticas pode ser visto a seguir.

Figura 51: Exemplo de episódio de mediação didática da etapa III em que as ações no software é essencial à mediação



Aluno 2 disse: onde estão as setas que pensamos?

Aluno 1 disse: uma pessoa só tem que mexer, senão ficaremos sempre ajustando

Mediador disse: Mexam no eixo e não na geratriz, senão ela ampliará.

Aluno 3 disse: ok

Mediador disse: É preciso deixar a geratriz fixa e mexer no eixo e não na geratriz.

Mediador disse: E a figura final é formada das 4 partes, mas não tem simetria de reflexão.

#### 4.3.4. Etapa IV – Desafio Coletivo – Geração de um Logotipo a partir da visualização do Logotipo original do Banco (Figura 3) – Ação Colaborativa

Etapa final da experimentação. É desafiadora por não ser tão livre como as outras. Nela, existe um modelo para ser copiado usando os recursos computacionais do software e a Logotipo do Banco que já existe e é o modelo resultante das interações, produções, que devem ser realizadas colaborativamente por meio apenas de reflexões.

Tabela 9: Distribuição das referências de mediação didática na etapa IV

E3	Mediação Didática	Referências				Total
		Aluno1	Aluno2	Aluno3	Mediador	
MDC	Conteúdo Computacional	0	0	0	3	3
MDM	Conteúdo Matemático	40	37	15	57	149
TOTAL		40	37	15	60	152

Nessa etapa, amplia-se a participação do mediador, apesar de continuar fortemente pautado na interação dos alunos. São 60 falas em ação do mediador num total de 152, de natureza de mediação didática.

Os 24 episódios de mediação didática são nomeados no quadro a seguir com identificação da quantidade de falas de cada participante.

Tabela 10: Distribuição das referências de episódios na etapa IV

N.	Mediação Didática	Referências				
		Aluno1	Aluno2	Aluno3	Mediador	Total
1	Estudante busca saber o que vão fazer no encontro	3	2	3	15	15
2	Mediador lembra aos alunos o problema da rigidez da geratriz	0	1	0	1	2
3	Mediador lembra aos alunos a localização do menu do software	0	0	0	1	1
4	Mediador vê aluno mexendo e pede que ele explicita a ideia	0	0	3	1	4
5	Aluno pede ajuda para usar o comando de reflexão do Tabulae	2	0	0	1	3
6	Mediador busca saber o autor de alguns movimentos da geratriz	1	1	0	1	3
7	Estudantes buscam combinar os procedimentos	2	0	1	4	7
8	Estudante intervém sugerindo outra estratégia	1	2	0	1	4
9	Estudantes vão se organizando na execução da estratégia	4	1	1	1	7
10	Estudante busca entender a estratégia utilizada por outro estudante	1	1	0	0	2
11	Estudante sugere ao colega uma estratégia para fechar a LOGO	1	1	1	0	3
12	Mediador interfere para entender se a reta original era perpendicular	1	1	0	2	4
13	Mediador busca entender o porque a reta estar fixa	0	0	0	1	1
14	Estudante dá continuidade à sua estratégia	3	3	0	1	7
15	Mediador pede que estudantes validem a construção comparando com a original	2	3	0	3	8
16	Grupo busca colocar a geratriz nas proporções originais	3	6	2	7	18
17	Mediador apela pela validação por meio da quantidade de eixos de simetria	5	1	0	5	11
18	Mediador relembra a necessidade de não alterar a geratriz	1	0	0	2	3
19	Estudante chega ao dilema de alterar a geratriz por reflexão	1	2	2	1	6
20	Mediador entende o dilema e busca questões para eles superarem	1	0	0	1	2
21	Mediador volta a apelar para os eixos	0	5	0	3	8
22	Mediador busca entender dificuldade do aluno para gerar a reflexão	2	2	1	3	8
23	Após estudante fazer, mediador pede que ele explique como foi feito	2	2	1	4	9
24	Mediador busca identificar se estudantes conseguem explicar o entrave vivido	4	2	0	3	9
TOTAL		40	36	15	62	145

Uma análise das participações é mostrada no gráfico a seguir.

Gráfico 8: Distribuição das mediações da Etapa IV quanto aos participantes



O gráfico mostra que nessa etapa em que o objeto final é definido a participação do mediador nos episódios volta a surgir como elemento forte. No entanto, a grande maioria dos episódios conta com a participação de pelo menos dois dos três alunos.

Nos episódios encontramos o mediador inteiramente entregue ao acompanhamento dos trabalhos. Nessa hora, sua atenção redobra pelo fato de não ultrapassar o tempo proposto para a execução da atividade e para o foco não ser desviado por conversas paralelas.

É uma mediação extremamente cautelosa porque o professor não pode interferir na estratégia lógica dos alunos e, sim, iniciar questionamentos que os levem a pensar se aquela tomada de decisão ocasionará um progresso ou não na atividade.

Quadro 12: As ações no Tabulae em cada episódio da etapa IV

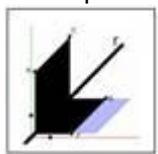
N.	Mediação Didática	Ações (S/N)	Importância da ação para a mediação
1	Estudante busca saber o que vão fazer no encontro	N	----
2	Mediador lembra aos alunos o problema da rigidez da geratriz	S	Mediador reage ao ver alterações diretas na geratriz
3	Mediador lembra aos alunos a localização do menu do software	N	----
4	Mediador vê aluno mexendo e pede que ele explicita a ideia	S	Mediador busca incentivar que aluno 3 explicita a sua ideia ao ver ele traçar eixo
5	Aluno pede ajuda para usar o comando de reflexão do Tabulae	N	----
6	Mediador busca saber o autor de alguns movimentos da geratriz	S	Mediador reage ao perceber a regra de não mexer na geratriz sendo desobedecida
7	Estudantes buscam combinar os procedimentos	N	----
8	Estudante intervém sugerindo outra estratégia	N	----
9	Estudantes vão se organizando na execução da estratégia	S	Estudantes iniciam a estratégia de usar retas perpendiculares e mediador questiona a perpendicularidade das retas criadas
10	Estudante busca entender a estratégia utilizada por outro estudante	N	----
11	Estudante sugere ao colega uma estratégia para fechar a LOGO	N	----
12	Mediador interfere para entender se a reta original era perpendicular	S	Mediador reage ao ver que não há perpendicularidade nas retas
13	Mediador busca entender o porquê a reta está fixa	N	----
14	Estudante dá continuidade à sua estratégia	S	Estudantes continuam com retas perpendiculares e mediador ao ver os movimentos na tela, lembra-os de não alterar a geratriz
15	Mediador pede que estudantes validem a construção comparando com a original	S	Mediador intervém com questionamentos, sobre as figuras visualizadas, ajudando nessa comparação
16	Grupo busca colocar a geratriz nas proporções originais	S	Todos mexem buscando melhorar a figura criada e visualizada.
17	Mediador apela pela validação por meio da quantidade de eixos de simetria	S	Mediador vê o produto e intervém com perguntas procurando incentivar a validação
18	Mediador relembra a necessidade de não alterar a geratriz	N	----
19	Estudante chega ao dilema de alterar a geratriz por reflexão	N	----
20	Mediador entende o dilema e busca questões para eles superarem	N	----
21	Mediador volta a apelar para os eixos	S	Mediador relembra os eixos à todos, com visualização, ... aluno 2 percebe que a geratriz necessita de um complemento e cria por sobreposição de imagens
22	Mediador busca entender dificuldade do aluno para gerar a reflexão	S	----
23	Após estudante fazer, mediador pede que ele explique como foi feito	S	Aluno1 utiliza os recursos do Tabulae (GD) na área pública e chat, com interações dos colegas, para socializar
24	Mediador busca identificar se estudantes conseguem explicar o entrave vivido	S	Mediador se satisfaz com as respostas dos alunos 1 e 2, visualizando a produção concluída
<b>TOTAL</b>			

O software Tabulæ Colaborativo nos moldes CSCL, além de permitir que o aluno interaja com o objeto de estudo, ele favorece outra possibilidade de se construir o conhecimento que é por meio de novas ações e retroações do aluno naquele objeto. A resposta é imediata, tanto do software quanto dos próprios participantes, nada vai passar ser que alguém ou algo seja sinalizado. Dos 24 episódios de mediação didática, em 12 percebe-se a ação direta da ação na janela pública como elemento de comunicação.

Estando já nesse nível de compartilhamento de conhecimentos, dúvidas, entraves e socialização de estratégias, os alunos já perderam a inibição em realizar perguntas, elementares ou não, aos demais. Estão juntos, pois a distância quase que não é percebida quando envolvidos em uma tarefa coletiva, desafiadora, com objetivos claros e um mediador deixando seus alunos pensarem.

A conversa que levou ao êxito da atividade foi muito dinâmica e empolgante para todos. Os alunos estavam tentando chegar ao Logotipo pensando apenas em localizar ou criar um eixo de simetria e gerar reflexões com a geratriz e não perceberam que a figura original se diferenciava por um pequeno complemento, que era a reflexão da geratriz tomando como eixo um segmento pertencente à própria figura. Um caso de invariância de um segmento observe a figura a seguir:

Figura 52: Geração de um quarto da figura por reflexão



Mesmo sabendo que estavam equivocados, o mediador foi argumentando, questionando até que perceberam essa diferença: “Aluno2: segmento AD funciona como eixo de simetria para formar o quadrilátero (...) se eu fizer isso eu vou sobrepor às imagens”; “Mediador: E daí, qual é o problema?”; “Aluno1: criei a reflexão da figura completa a partir do segmento AD e apareceu sobreposta, mas a parte que passou complementa o outro paralelogramo deixando as figuras iguais”.

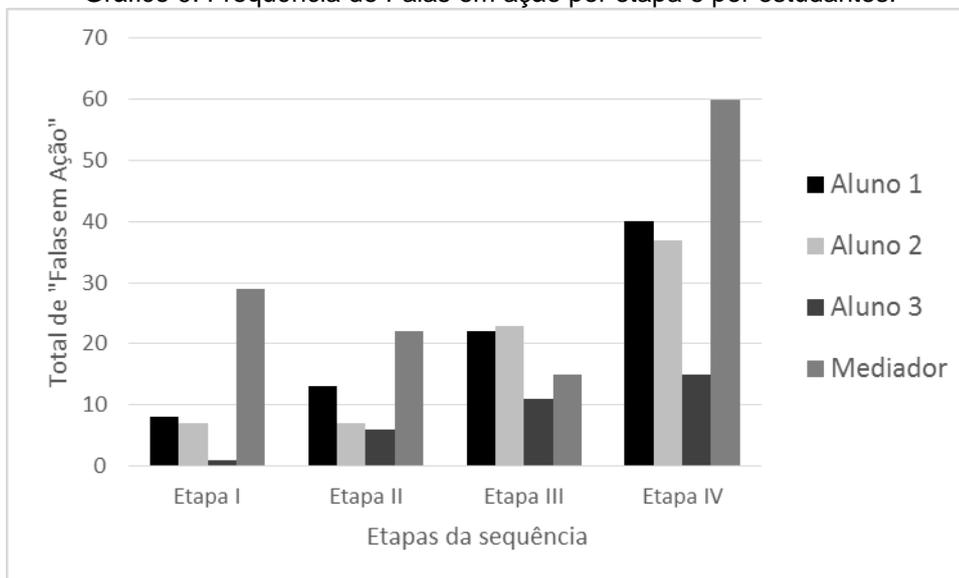
Os resultados mostram que a diferença significativa da mediação didática a distância se dá quando a atividade promove uma participação colaborativa dos componentes. Nesses casos, os estudantes passam inclusive a atuar como mediadores.

#### 4.3.5 Evolução das Mediações Didática no Decorrer das Etapas da Sequência

Traremos aqui gráficos que mostram a evolução das mediações didática ao longo da sequência de atividade, de forma a fornecer uma síntese ao leitor.

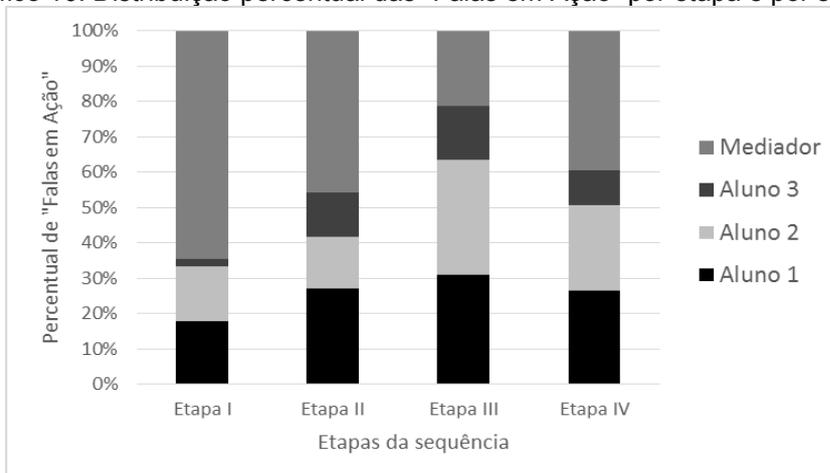
Um primeiro gráfico nos mostra a evolução das “Falas em ação” da primeira a quarta etapa.

Gráfico 9: Frequência de Falas em ação por etapa e por estudantes.



A participação do mediador diminui até a 3ª etapa e volta a ser predominante na quarta etapa. No entanto, em termos percentuais, a participação do mediador na quarta etapa ainda é menor que nas duas primeiras, como mostra o gráfico a seguir.

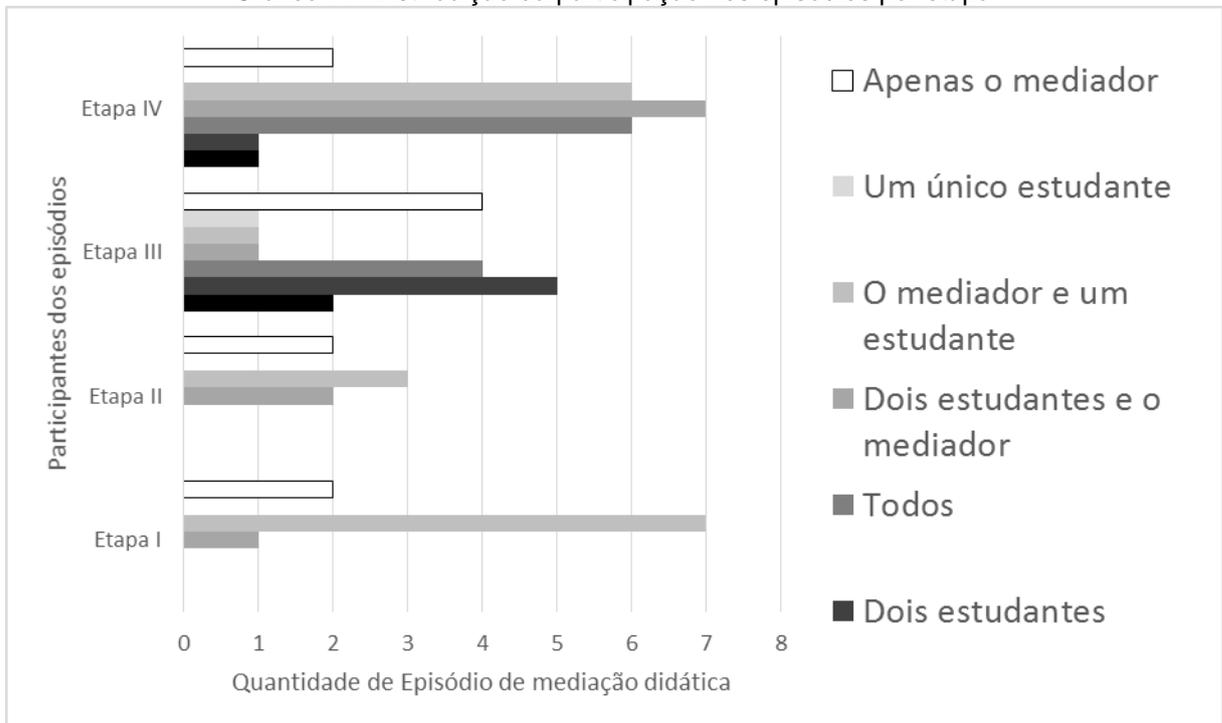
Gráfico 10: Distribuição percentual das “Falas em Ação” por etapa e por sujeito



Se por um lado, a “Fala em ação” ressurge como predominando na quarta

etapa, um olhar dos episódios vai nos mostrar uma caracterização diferente da participação na quarta etapa e nas duas primeiras. Os estudantes tomam a direção dos trabalhos, e o mediador muitas vezes participa dos trabalhos com ele. Diminuem muito as participações do tipo “o mediador fala sozinho” ou fala o mediador e um único aluno.

Gráfico 11: Distribuição da participação nos episódios por etapa

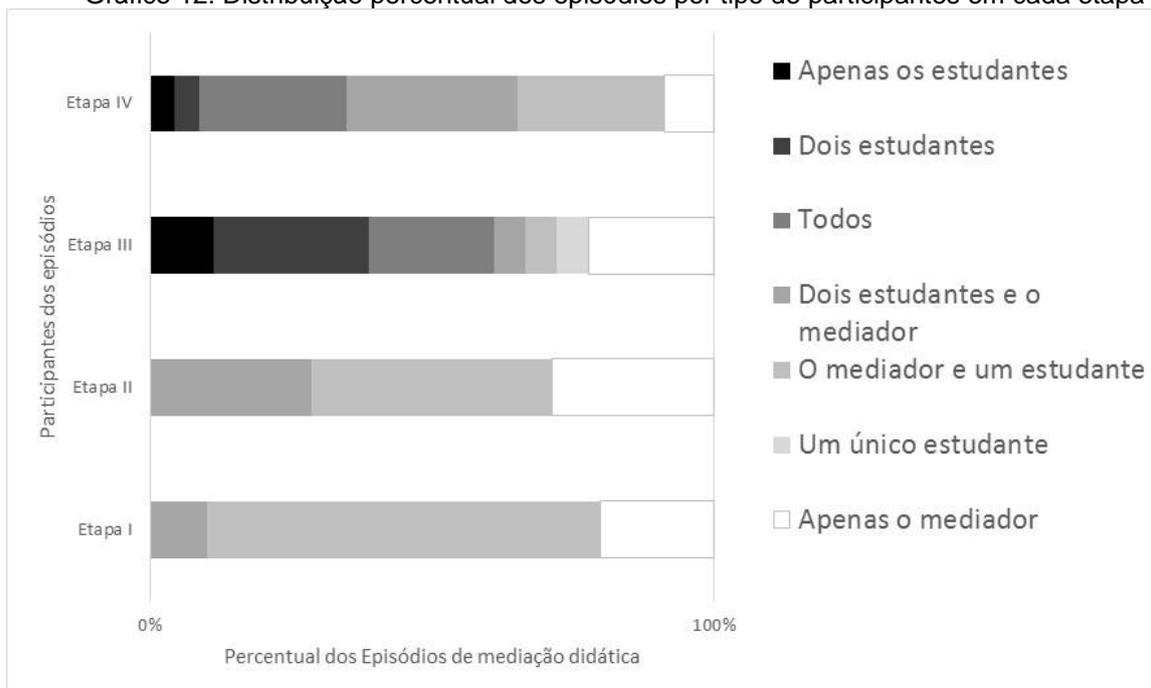


O Gráfico 11 nos deixa clara a diferença em termos de tendência de tipos de mediação quanto à participação dos sujeitos envolvidos. As atividades mais individuais e no máximo de cooperação predominam interações com no máximo duas pessoas, em que o mediador é peça chave.

Já as atividades desenhadas com o objetivo de colaboração foram centradas em mediações com maior participação dos alunos e muitas vezes sem a interferência direta do mediador. As duas atividades de colaboração também se diferenciaram, aquela cujo produto dependia essencialmente da criatividade dos alunos mostrou-se mais eficaz para que eles, sozinhos tomassem a “rédea” da condução da mediação.

Os mesmos dados reorganizados de forma a exibir o percentual dos episódios de mediação didática por participantes são mostrados no gráfico a seguir.

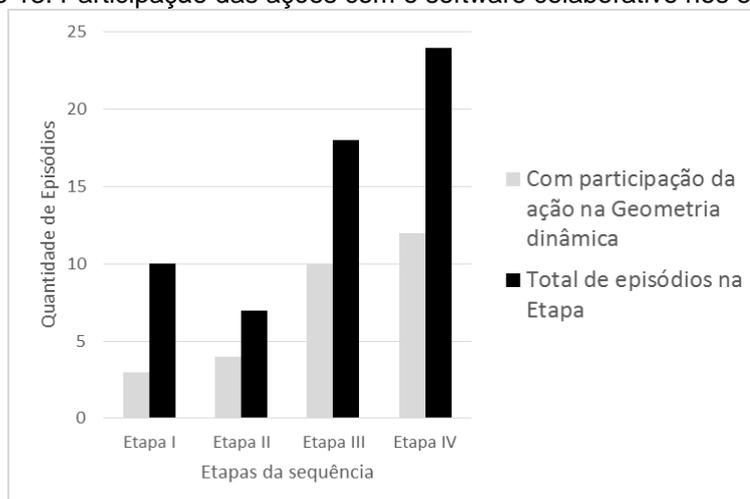
Gráfico 12: Distribuição percentual dos episódios por tipo de participantes em cada etapa



Observa-se claramente o crescimento dos episódios em que a participação do estudante é central. Vai desde uma etapa, de trabalho individual em que ele aparece apenas em 10 dos episódios, junto com o mediador e dois estudantes até mais de 60% dos episódios na quarta etapa.

Se há diferença significativa dos tipos de participação nas mediações didáticas ao longo das etapas, a importância da ação na janela de geometria dinâmica colaborativa aparece em todas elas. O que se amplia é a quantidade de episódios, como mostra o gráfico a seguir.

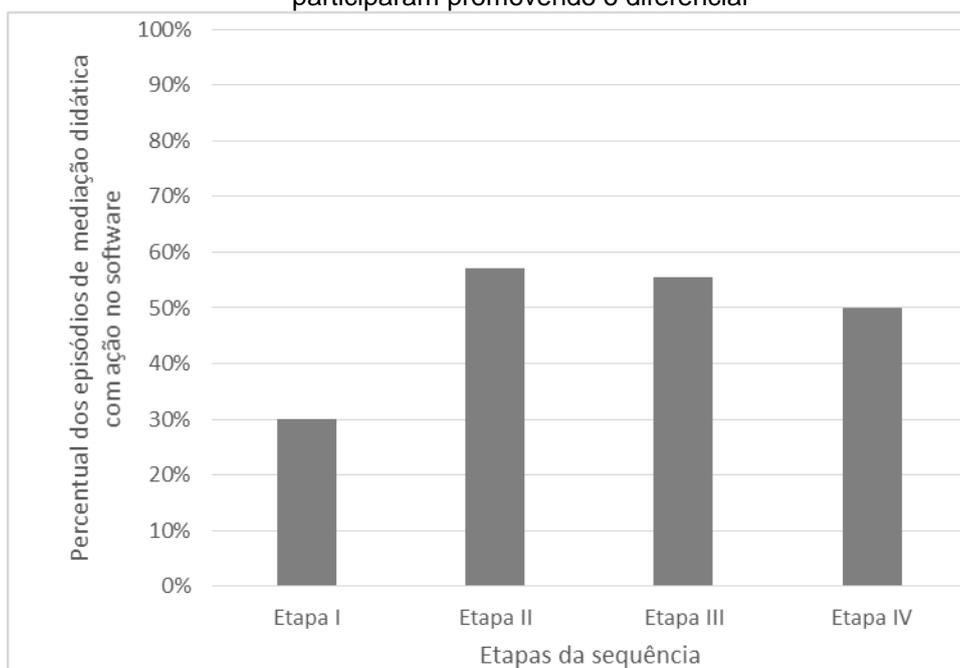
Gráfico 13: Participação das ações com o software colaborativo nos episódios



De forma percentual, a importância da mesma se revela sem grandes

diferenças.

Gráfico 14: Percentagem de episódios de cada etapa em que as ações no software participaram promovendo o diferencial



Mesmo para as etapas de trabalho individual, a presença do software que permite a interação com o objeto de conhecimento de forma coletiva mostrou-se importante na mediação didática.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação se compôs em uma pesquisa em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC-UFPE) cuja finalidade foi analisar Mediações Didáticas com o uso do software de Geometria Dinâmica TABULÆ COLABORATIVO nos moldes do CSCL – Computer Supported Collaborative Learning, sistema de aprendizagem colaborativa com o apoio do computador, aplicado ao objeto matemático SIMETRIA DE REFLEXÃO em um Ambiente Virtual Colaborativo a Distância.

Um software de Geometria Dinâmica (GD), mesmo sem a interface colaborativa on-line a distância, já é, por si só, um condutor de conhecimentos pelas construções produzidas com o auxílio das ferramentas de um programa GD, por facilitar a visualização das propriedades e permitir explorar possibilidades de ações e reações durante a realização do problema. Adicionamos a esse contexto a possibilidade de colaboração a distância, compartilhando as construções em um ambiente em rede, possibilitando o crescimento de contribuições significativas para uma melhor mediação didática no ensino e aprendizagem da simetria de reflexão.

Com o objetivo de analisar as mediações didáticas possibilitadas nesse cenário, realizamos um estudo experimental com uma atividade de criação de um Logotipo de um Banco que inspirasse os seguintes requisitos: equilíbrio ao cliente; igualdade de tratamento; convergência de objetivos e uma integração social. Quanto aos nossos objetivos referentes à aprendizagem da simetria de reflexão pautavam-se nas seguintes propriedades: congruência, equidistância e perpendicularidade da figura origem e sua imagem; posição, identificação e construção de eixos de simetria; pontos invariantes e construção do simétrico.

A montagem de uma sequência de atividade que promovesse a aprendizagem colaborativa partiu de um estudo que contou com a revisão de literatura e um estudo diagnóstico com estudantes do ensino superior sobre o conhecimento de simetria de reflexão. As etapas da atividade foram detalhadamente construídas com vista a promover engajamento dos estudantes em atividade de colaboração. Dividimos a sequência de atividades em quatro etapas.

A primeira constou de uma atividade individual para a criação de um logotipo de um Banco utilizando somente simetria de reflexão a partir de uma dada geratriz. Esse logotipo deveria respeitar os requisitos principais do Banco. Teriam o auxílio

das ferramentas do Tabulæ e o chat para tirar dúvidas, caso existissem, somente com o professor/mediador, apesar de todos terem acesso a discussão. Esse momento de cunho individual visava que cada estudante se apropriasse do problema e interagisse de forma criativa na criação do seu produto.

Nessa primeira etapa, um dos pontos essenciais foi a escolha da geratriz do Logotipo. Decidimos montar uma geratriz que necessitasse de mais que uma reflexão para encontrar o Logotipo do banco, a fim de gerar mais discussões. Dentre as variáveis relativas à simetria de reflexão, escolhemos também uma geratriz em que o eixo de reflexão interceptasse a geratriz e que houvesse eixo diagonal. Outro aspecto considerado foi que ao refletir a geratriz sobre o eixo houvesse pontos que ao serem refletidos sobrepucessem a figura, mesmo sem serem pontos invariantes.

A segunda etapa foi a defesa de suas produções construídas na primeira. Todos os estudantes, reunidos virtualmente na plataforma do Tabulæ Colaborativo, apresentavam sua produção, a qual era discutida. Também usariam os recursos do software para sua elucidação sobre as estratégias na construção de sua produção. Esse também era um momento de apresentação individual em que se previa no máximo uma cooperação.

Na terceira etapa, todos, em colaboração, deveriam utilizar as ferramentas do programa Tabulæ Colaborativo, como a área pública, particular e o chat, para criarem um único logotipo, a partir de uma geratriz, com as características do Banco em questão seguindo o objetivo da atividade e suas regras relacionadas ao uso exclusivo de reflexões. Com uma tarefa de produção de um único Logotipo, a participação de todos deveria convergir para a colaboração. A criatividade para gerar um Logotipo deixaram os estudantes livre para articular os requisitos do Banco e as propriedades de uma figura com simetria.

Apesar de jogar a responsabilidade de uma construção criativa para os estudantes para forçar a apropriação dos estudantes do problema e uma atitude colaborativa, com essa etapa haveria o risco de o grupo não passar por diversas propriedades de simetria, tal como a possibilidade de existir pontos invariantes em uma reflexão. E foi nesse sentido que decidimos incluir uma quarta etapa.

Na quarta etapa, foi fornecido aos estudantes a logotipo original do Banco e eles foram desafiados a construir nesse contexto de colaboração e recursos do Tabulæ Colaborativo, uma figura igual ao Logotipo original, utilizando apenas reflexões axiais, a partir da mesma geratriz inicial.

Essa sequência foi experimentada com professores licenciados em matemática que participavam de um grupo de estudo numa universidade federal, contando com três professores e um professor da universidade que serviu de mediador. O experimento foi realizado nas quatro etapas, sendo que duas delas foram realizadas em um mesmo dia.

Todos os sujeitos da pesquisa participaram do experimento virtualmente em suas casas a partir de computador próprio. Em todas as etapas o professor-mediador ficava on-line para facilitar os trabalhos por meio da mediação didática, que é o foco da nossa pesquisa.

O pesquisador participou das etapas do experimento também em sua casa como observador, intervindo apenas quando era necessário garantir a qualidade dos dados.

A tela do computador do professor-mediador foi gravada como dados de pesquisa, a partir do qual as interações por chat foram transcritas e as conversas por outras linguagens descritas para uma análise de conteúdo.

Partimos da identificação de cada “fala em ação” do chat complementada pelas descrições das imagens que compunham nossas unidades de análise num total de 469. Essas unidades de análise foram recategorizadas em Episódios compondo uma unidade com sentido completo, em que ações de Mediação Didática, Pedagógica, Gestão da Atividade ou interferências tinham começo, meio e fim, constituindo nossas unidades semânticas.

Essa primeira categorização nos permitiu identificar os episódios que seriam focos de nossa análise – aqueles relativos à mediação didática. Revelou-se também a efetividade da sequência de atividades elaboradas no sentido de favorecer a discussão e mediação. Ao longo das etapas, as interações concentraram-se em episódios de mediação didática.

Trazemos aqui as questões de pesquisa buscando responder a tais questões. No entanto, buscamos inicialmente refletir sobre os ganhos para a pesquisa das possibilidades de interações no ambiente CSCL permitido junto ao Tabulæ Colaborativo no contexto da sequência desenvolvida.

**Como se dão as mediações didáticas a partir das diferentes interações entre alunos, professor e artefatos computacionais, mediados por sistema colaborativo como o Tabulæ Colaborativo?**

O fato de termos o acompanhamento das ações e construções visualizadas em uma área pública, por todos os participantes, favoreceu o entendimento e intervenções construtivas, tais como, questionamentos, negociações, compartilhamento social, respostas às dúvidas, descobertas de novas estratégias e propriedades da simetria, sugestões de ações, principalmente quando o professor é um mediador deixando “livre” a criatividade do aluno, apesar de estar no controle da situação visualizando tudo que se passava na tela e acompanhando todas as conversas pelo chat, inclusive tendo o conhecimento de qual estudante corresponde àquela ação (no GD e no Chat).

A oportunidade oferecida pelo software aos estudantes e mediador, em ver a ação e reação sobre o objeto de estudo e estratégias de construção da atividade em tempo real, traz na colaboração e interação entre os participantes um aspecto importante. Ele, o aluno, se torna mais dinâmico ao poder compartilhar sua produção e ver também de forma compartilhada a produção dos outros envolvidos na atividade, permitindo-o, de certa forma, se sentir responsável pela sua própria aprendizagem e pela do outro.

A participação nesse processo do mediador é de questionador, instigador, orientador, observador, investigador e condutor de conhecimentos de forma responsável e racional. Ele sabe que nesse ambiente de compartilhamento, mesmo a distância, o “contato” com as operações estratégicas elevam a condição de entendimento pelo fator de visualização e de manipulação dos objetos de conhecimento em construção.

### **Um software de Geometria Dinâmica contribui para uma melhor mediação didática na abordagem de Simetria de Reflexão?**

O software de geometria dinâmica levou os estudantes a entender e resolver um problema geométrico por meio da visualização e manipulação do seu objeto de estudo, as propriedades e variáveis envolvidas no problema com recursos visuais/gráficos (GD) favoreceram a mediação, tanto em momentos de sua ação, quanto em situações em que buscavam compreender o pensamento do colega.

### **Como as possibilidades de interação com outras formas de se expressar a**

## **matemática permite que os sujeitos desenvolvam ou aperfeiçoem as mediações didáticas?**

A Matemática se compõe não somente de conceitos, teoremas e propriedades, mas também de uma simbologia própria, que representa entraves quando se pensa em educação mediada por computador a distância, obstáculos a que se possa expressá-la em outros contextos ou cenários que fogem presencial. No entanto, com esses avanços tecnológicos, um “olhar” se volta, particularmente, à Mediação Didática em Matemática de forma colaborativa e a distância.

Hoje, com o uso do computador e seus avanços, até podemos contar, em Matemática, com softwares mais comprometidos com a sua simbologia, trabalhando de forma estruturada em colaboração, visualizada por todos os participantes de uma forma cada vez mais síncrona. Os elementos visuais gráficos desses ambientes virtuais nos moldes CSCL (aprendizagem colaborativa apoiada por computador) nos deixam cada vez mais próximos de uma aprendizagem coletiva e com possibilidades de uma mediação que acredita que essa aprendizagem ocorre socialmente, de forma integrada em grupo.

Cabe a cada professor desejar quebrar seus paradigmas e seguir junto com seus alunos numa cadeia de conhecimentos gerados de forma participativa, colaborativa e principalmente, em uma atividade de processos construtivos que ocorrem por meio de construções e reconstruções, ações e reações dos sistemas lógicos de cada indivíduo.

Nosso grande “achado” nessa pesquisa foi que não importa a distância física, não importam as dificuldades de manipular as ferramentas de um programa em GD, não importa o nível de conhecimento ou faixa etária, etc, mas, basta um professor com uma simples atividade COLABORATIVA e uma MEDIAÇÃO DIDÁTICA crítica e questionadora, permite que o conhecimento aflore em uma socialização espontânea do saber.

O professor deixando de ser o centro de toda a aprendizagem e passando a compartilhar com seus alunos a responsabilidade de uma socialização de conhecimento, ressurgem um novo aluno crítico, colaborador, participante, dinâmico, até em alguns casos, responsável e mediador de sua própria aprendizagem.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M.E.B. Educação a distância na internet: Abordagens e contribuições dos ambientes digitais de aprendizagem. **Educação e Pesquisa**, vol. 29, n. 2 (jul-dez) 2003.

ALVES, D. S. **Simetria Axial: uma sequência didática para alunos da 6ª série com o uso de software de geometria dinâmica**. Dissertação de mestrado, UFPE, Recife, 2005. 198f.

ANDRADE, J.P.G. **Vetores: Interações à distância para a aprendizagem de álgebra linear**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

ARTIGUE, M. Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique. **Petit x**, nº26, Grenoble, 1990/1991, pp.5-27.

ARTIGUE, M. Ingeniería Didáctica. In: Artigue M., Douady R., Moreno L. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas**. Grupo editorial Iberoamérica, Bogotá, 1995.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In. Brun, Jean (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Trad. Maria José Figueiredo, Delachaux et Niestlé, 1996. pp. 193-217.

BALACHEFF, N. Conception, connaissance et concept. In: Grenier, D. (ed) **Séminaire Didactique et Technologies cognitive en mathématiques** (p. 219-244). Grenoble: IMAG, 1995.

BARDIN, L. **Análise do Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2007. 2013.

BEHRENS, M. A. **O paradigma emergente e a prática pedagógica**. Champagnat, 1999.

BELLEMAIN, F.; BAULAC, Y. ; LABORDE, J. M. . **Cabri-Géomètre**. 1988.

BELLEMAIN, F. ; GITIRANA, V. ; ANDRADE, J. P. G.; BELLEMAIN, P. M. B. **Vetores - software para a aprendizagem colaborativa de conceitos de álgebra linear**. 2010.

BELLEMAIN, F. et al **Tecnologias para aprendizagem colaborativa de conhecimentos por meio de micromundos: Ciências online**. Projeto de pesquisa. 2010

BELLEMAIN, F. Geometria dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. In **Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico & International Conference on Graphics Engineering for Arts an Design**, 2001. pp. 1314–1329.

BRANDÃO, L.O.; ISOTANI, S. Uma ferramenta para ensino de geometria dinâmica

na internet: iGeom. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 9., 2003, Campinas. **Anais...** Campinas: UNICAMP, 2003. pp.1476-1487.

BRASIL. Secretaria de Educação fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática: ensino de quinta a oitava séries**. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática: ensino de primeira a quarta séries**. Brasília : MEC / SEF, 1997.

BROUSSEAU, G., **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques**, 7.2, pages 33-115, 1986.

CORREA, J. **Educação a distância: orientações metodológicas**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DILLENBOURG, P. What do you mean by “collaborative learning”? In P. Dillenboud (Ed.), **Collaborative learning: Cognitive and computational approaches**, pp. 1-16, 1999.

DOUGIAMAS, M. Moodle: A virtual learning environment for the rest of us. **TESL-EJ** 8.2, p. 1-8, 2004.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papyrus; 2005, p. 7-33.

FAGUNDES, L.C. et al. Projetos de Aprendizagem – Uma experiência mediada por ambientes telemáticos. **Workshop Brasileiro de Informática na Educação – WIE 2005**. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/rbie/issue/view/7> Acesso em: 22/03/13.

GITIRANA, V.. O Conceito de Função Explorado de Forma Dinâmica. **Educação Matemática em Revista (São Paulo)**, Rio Claro - SP, v. 1, n.6, p. 2-8, 1998.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da Matemática em ambientes Informatizados. **Anais do IV Congresso RIBIE**, Brasília, 1998.

GRAVINA, M.A. Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**. Belo Horizonte, MG. 1996.

GRENIER, D., LABORDE, C. Transformations géométriques: le cas de la symétrie orthogonale. In **Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres**. Grenoble : La Pensée Sauvage – Éditions.1987.

GUIMARÃES, L. C.; MORAES, T. G.. **Tabulae Colaborativo**. Software sem registro, 2008.

GUIMARÃES, L. C., BARBASTEFANO, R. G., CARVALHO, D.(2001) **Tabulæ**, Registro INPI n.0039192.

HOHENWARTER, M. **Geogebra colaborativo**, 2001

JACKIW, N. KLOTZ, E.; SCHATTSCHNEIDER, D. **Geometer Sketchpad** (versão preliminar), 1989.

LIMA, I. Conhecimentos de alunos da educação básica sobre a simetria de reflexão. **Revista Educação Matemática em Revista**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, V. 13, n. 25, p. 46-55, 2008.

LIMA, I. **De La modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs: étude didactique dans Le cas de La symétrie orthogonale**. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2006.

LIMA, I. **FoLes figures des items « a » et « b » sont extraites du manuel Cinq sur Cinq, 6e, Pb 04**, 2000, p.217.

LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A.P. (org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo, Atual Editora, 1998.

LINS, W.C.B. **Interações em Atividades de Docência Online em Ambientes de Imersão 3D** Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação, UFPE 2010.

MACHADO, S.D.A. et al. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2008.

MAGINA, S. A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente. In: **XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática**. São Paulo: Unicamp. 2005. Disponível em: Erro! A referência de hiperlink não é válida. Acesso em 2013.

MORAES, Roque. **Análise de conteúdo**. *Revista Educação*, Porto Alegre, v.2, n.37, p. 7-32, 1999.

MORAES, T.G. **Um Modelo para Colaboração Síncrona em Geometria Dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, 2006.118 f.

MORAN, J. M. **A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá**. 5 ed., Campinas, SP: Papyrus, 2012.

MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. 16 ed., Campinas, SP: Papyrus, 2009.

NPMEB: **Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, Ministério da Educação de Portugal**. Dezembro de 2007. [http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/028\\_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf](http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf)

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

PINTO, M.J.T. **Isometrias**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto – FCUP. Portugal. 2012.

ROCHA, J.S. **Aprendizagem de Matemática na Educação a Distância Online: especificações de uma interface que facilite o tratamento algébrico para aprendizagem colaborativa entre pares**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, 2012.

ROSHELLE, J.; TEASLEY, S. The construction of shared knowledge in collaborative problem solving. In C. O'Malley (Ed.), **Computer supported collaborative learning**, pp. 69-197. Berlin, Germany: Springer Verlag, 1995.

ROSINI, A. M. **As Novas Tecnologias de Informação e a Educação a Distância**. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SANCHO, Juana Maria. **Para uma Tecnologia Educacional**. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p.190.

SANGARÉ, M.S. **LA MARQUE D'UNE TRANSFORMATION**, Une Etude de cas au Mali, 2004.

SIQUEIRA, J. E.; LIMA, P.F.; GITIRANA, V. Explorando Simetria de Reflexão: uma sequencia didática no Cabri-geomètre. In: **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife: SBEM, 2004. v. Único. p. 1-14.

SOUZA, F. N.; COSTA, A.P.; MOREIRA, A.. Análise de Dados Qualitativos Suportada pelo Software WebQDA. In: **Atas da VII Conferência Internacional de TIC na Educação: Perspetivas de Inovação**. 2011. p. 49-56.

TAPSCOTT, Don. **Rethinking information technology and competitive advantage information technology & competitive advantage**. Part II: Strategy in the age of collaboration. New Paradigm Learning Corporation, June,2005. Disponível em:  
[http://newparadigm.com/media/Rethinking\\_Information\\_Technology\\_and\\_Competitive\\_Advantage\\_Part%20II\\_-\\_Strategy\\_in\\_the\\_Age\\_of\\_Collaboration.pdf](http://newparadigm.com/media/Rethinking_Information_Technology_and_Competitive_Advantage_Part%20II_-_Strategy_in_the_Age_of_Collaboration.pdf) Acesso em: 13/05/2010.

TRACTENBERG, L.; STRUCHINER, M.. A emergência da colaboração na educação e as transformações na sociedade pós-industrial: em busca de uma compreensão problematizadora. **B. Téc. Senac: Revista Educ. Prof., Rio de Janeiro**, v. 36, n. 2, 2010.

VALENTE, José Armando. **O Professor no Ambiente Logo: formação e atuação**. UNICAMP/NIED, 1995.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In. Brun, Jean (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Trad. Maria José Figueiredo, Delachaux et Niestlé, 1996. pp. 155-191.