Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

EVANILSON LANDIM ALVES

MENOS COM MENOS É MENOS OU É MAIS?

Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do Ensino Regular e da Educação de Jovens e Adultos

RECIFE

2012

EVANILSON LANDIM ALVES

MENOS COM MENOS É MENOS OU É MAIS?

Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do Ensino Regular e da Educação de Jovens e Adultos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lícia de Souza Leão Maia

RECIFE

2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

A474u Alves, Evanilson Landim.
Menos com menos é menos ou é mais? : resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do ensino regular e da educação de jovens e adultos / Evanilson Landim Alves. – Recife: O autor, 2012.
205 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Lícia de Souza Leão Maia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2012.
Inclui bibliografia e Apêndices.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Números inteiros. 3. Educação de Adultos. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Maia, Lícia de Souza Leão. II. Título.

CDD 372.7 (22. ed.) UFPE (CE2012-23)

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

EVANILSON LANDIM ALVES

MENOS COM MENOS É MENOS OU É MAIS?

Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do Ensino Regular e da Educação de Jovens e Adultos

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientadora
Profª. Drª. Lícia de Souza Leão Maia

Examinadora Externa
Profª. Drª. Sandra Maria Pinto Magina

Examinadora Interna
Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Recife, 27 de fevereiro de 2012.

A Deus,

Aos meus pais,

À Professora Lícia,

por terem me escolhido.

A tio Doda,

que foi impedido de viver a vida,

no que ela tem, de belo e de cruel.

AGRADECIMENTOS

E aprendi que se depende sempre
De tanta, muita, diferente gente
Toda pessoa sempre é as marcas
Das lições diárias de outras tantas pessoas
E é tão bonito quando a gente entende
Que a gente é tanta gente onde quer que a gente vá
E é tão bonito quando a gente sente
Que nunca está sozinho por mais que pense estar

Trecho da Música *Caminhos do Coração - Gonzaguinha*

Ao final desta pesquisa, é justo reconhecer as contribuições que a tornaram possível. Este estudo durou dois anos, mas só foi concluído, porque desde quando nasci até hoje, nunca estive só. Por isso, se houvesse uma expressão mais intensa que **MUITO OBRIGADO**, certamente, usaria, para agradecer:

A Deus, por tornar possível a realização de mais um sonho.

A minha mãe, Hermina, e ao meu pai, João, que, cotidianamente, lutaram, para que este dia fosse possível.

À Professora Lícia, pelas brilhantes orientações e pelos ensinamentos no decorrer deste estudo, sempre nos incentivando a avançar e crescer. Ser seu orientando é um daqueles privilégios, que a gente nunca entende como pode ter alcançado tamanha dádiva.

Aos meus avós (in memoria), homens e mulheres que foram privados do conhecimento escolar, mas doutores nos conhecimentos da vida. As lições que me deram os tornaram eternos nas minhas lembranças.

Aos meus irmãos, Edvan, Eneilson e Evilene, companheiros de uma vida.

Aos meus sobrinhos, Maria Eduarda, Davi, Tallyson e Mateus, que me faziam brincar, mesmo quando, as demandas do Mestrado eram imensas.

A todos os meus tios e tias: Zezinho, Eunice, João, Odálio, Terezinha, Beto, Dorinha, Helena, Geni, Chico (in memoria) e Doda (in memoria).

À Tia Lúcia, minha primeira Professora, que fez com que o menino que chorava para não ficar na escola, se apaixonasse tanto por este lugar, a ponto de nunca mais conseguir deixá-lo. É em nome de Tia Lúcia que eu agradeço aos meus professores da Escola Jacob Antônio de Oliveira (Orocó - PE), da Escola Joaquim André Cavalcanti (Petrolina – PE), do SENAI (Petrolina - PE) e da Universidade de Pernambuco (Campus Petrolina), lugares sagrados e responsáveis pela minha formação.

A todos os meus primos e as minhas primas, especialmente, a Claudiana Landim, que muito nos ajudou nesta pesquisa.

Às Professoras Rute Borba, Sandra Magina e Zélia Porto, por participarem e contribuírem com este estudo no exame de qualificação e/ou na banca de defesa.

Aos professores, professoras, funcionários e colegas do EDUMATEC, ter participado deste grupo, é uma honra incomensurável.

Aos integrantes (professores, professoras e mestrandos) da linha de pesquisa *Processos de Ensino Aprendizagem em Educação Matemática e Científica*, pelas diversas contribuições no decorrer de todo o percurso deste estudo.

A todos os colegas do EDUMATEC, com quem foi um prazer conviver nestes dois anos. Especialmente, Dayse Bivar, Andréa Paula, Kátia, Jadilson, Pollyana, Lílian, Cristiane, Fabiana, João Rocha, João Paulo, Fernanda, e Dierson, que certamente, serão amigos para toda a vida.

Aos meus amigos, parceiros de todos os momentos: Roni, Del, João Batista, Wagner, Dapaz, Djair, Nasilda, Lucinha, Noeme, Vanúsia, Antônia Lúcia, Ítalo, Frank, Douglas, Acácia, Ângela Zenúbia, Agostinha, Socorro, Madrinha Nenê, Dona Terezinha, Ilma (Fia), Everton, Mazinha, Socorro Lacerda, Elba, Lúcia Neide, Clarice, Sebastião, Cristóvão, Tony, Simone, Vítor, Thomaz, Jadnaelson, Cláudio Ricardo, Ana Maria, que, também, durante este curso, não mediram esforços para nos ajudar.

Aos integrantes das Escolas Antônio Padilha e Mãe Vitória, que tão bem nos receberam e permitiram a coleta dos dados deste estudo.

A todos os 32 estudantes, que participaram desta pesquisa, e nos ajudaram a compreender as questões que nos propomos investigar.

Aos meus alunos, de ontem, de hoje e de amanhã, por me ensinarem tanto, a cada dia. Conviver e aprender com tantas pessoas brilhantes como vocês é uma grande honra.

A você, prezado(a) leitor(a), por acreditar que nesta pesquisa, encontrará elementos e evidências que possam contribuir com o Ensino e a Aprendizagem daquilo que a Matemática tem de mais elegante, que é a busca do novo. Que esta pesquisa, seja para você uma parcela da adição entre a reflexão e a descoberta, e que o total seja uma Matemática desprovida apenas de truques, regras e repetições, sem significado para muitos dos que, com ela, forçadamente convivem.

“Agora, o Senhor chega e pergunta:
Ciço, o que é educação?
O que eu penso, eu digo.
Então veja, o senhor fala: Educação;
Daí eu falo: Educação
A palavra é a mesma, não é?
Mas, é do mesmo que a gente fala quando fala essa palavra?
Aí eu digo: não. (...)
Quando o senhor chega e diz ‘Educação’, vem do seu mundo, o mesmo, um outro.
Quando eu sou quem fala vem dum outro lugar, de um outro mundo.
A educação que chega pro senhor é a sua, da sua gente, é pros usos do seu mundo.
Agora, a minha educação é a sua.
Ela tem o saber de sua gente e serve para que mundo?
A professora da escola dos seus meninos pode até ser uma vizinha sua, uma parente, até uma irmã; não pode?
Agora, e a dos meus meninos?
Não é uma escola; não tem um professor assim na frente,
com o nome ‘professor’
Você vai juntando, vai juntando e no fim dá o saber do roceiro
Quem vai chamar isso aí de educação?”

Antônio Cícero de Souza, lavrador

Parte do prefácio do livro de Brandão (1984)

RESUMO

Afirmar que *menos com menos é mais* não é uma ação trivial, tampouco uma verdade que se sustenta em todas as situações. A princípio isso já indica que aprender e ensinar conceitos relativos à multiplicação e divisão de números inteiros na Educação Básica tem sido uma tarefa hercúlea para àqueles que precisam desenvolvê-la. A marcha desse processo, na maioria das vezes, tem sido marcada por intempéries e frustrações constituídas e constitutivas de resistências como a ausência de situações que dão sentido à multiplicação e a divisão de números inteiros relativos, as formas de representação dessas operações e a falta de relação significativa entre as atividades forjadas pela escola e as características de quem deveria aprender. É diante de tantas questões que esta pesquisa nasce com vistas a entender as dificuldades e resistências de adolescentes, jovens e adultos escolarizados na compreensão dos conceitos relativos à multiplicação e a divisão de números inteiros, dado que apesar de a literatura já indicar estudos sobre a aprendizagem dos números inteiros, realizadas com as operações adição e subtração, ainda não se têm registros de experimentos realizados com as operações multiplicação e divisão em $\mathbb{Z}$. Soma-se a isso a nossa curiosidade como professor da Educação de Jovens e Adultos e do Ensino Fundamental dito regular sobre a origem das competências e estratégias empregadas por esses estudantes na resolução de situações, que requerem tais operações. Assim, o nosso objeto de estudo resulta da união de todas essas demandas e faz-nos partir da seguinte questão: *Quais as principais competências e dificuldades evidenciadas por adultos e adolescentes escolarizados em relação à multiplicação e divisão de números inteiros e que aspectos específicos (modalidade de ensino, idade, atividade profissional) podem influenciar a compreensão e as estratégias mobilizadas pelos estudantes?*

A pesquisa foi realizada por meio de entrevistas clínicas aplicadas a 32 estudantes já escolarizados na multiplicação e divisão de números inteiros. Os participantes foram distribuídos em quatro grupos, a saber: jovens na 4ª fase da EJA, adultos na 4ª fase da EJA, adolescentes no 8º ano do Ensino Fundamental e adultos no 8º ano do Ensino Fundamental. Essa organização deu-se em função da necessidade de criarmos algumas condições de controle sobre as variáveis *modalidade de ensino* e *idade*, já que as possíveis especificidades apontadas nas formas de agir dos estudantes da 4ª fase e do 8º ano poderiam ter origem na modalidade de ensino ou na idade dos mesmos, além de outras como a atividade profissional que eles desenvolvem, o que também consideramos, embora de modo mais distante. Para o instrumento de coleta de dados, necessitávamos de um suporte rigoroso capaz de auxiliar o desenvolvimento e a análise das questões, dando luz ao fenômeno que queríamos investigar. Por isso, elaboramos 26 itens, assentados em sete questões baseadas na Teoria dos Campos Conceituais. Os resultados trouxeram à tona que tanto os estudantes da EJA quanto os do 8º ano ainda apresentam dificuldades na resolução de situações que envolvem a multiplicação e a divisão de números inteiros relativos, embora as suas ações indiquem que eles estão a caminho da compreensão desses conceitos. Na comparação do desempenho dos grupos, não foram identificadas diferenças importantes, mas, quando em situação, adolescentes e adultos mobilizaram estratégias com diferenças expressivas. Enquanto os adultos com frequência fogem dos algoritmos da multiplicação e divisão, os mais novos se agarram a essas formas de resolução.

Palavras-chave: Números Inteiros; Multiplicação e Divisão; Educação de Jovens e Adultos; Campos Conceituais.

RÉSUMÉ

Affirmer que *moins et moins représente plus* ce n'est pas une action banale, et puis ce n'est pas une vérité absolue. Pour commencer, ça signifie que apprendre et enseigner des concepts à propos de multiplication et division des numéros entiers dans l'éducation élémentaire, c'est un travaille vraiment difficile pour celui-là qui ha besoin de le développer. La marche que se fait sentir à travers ce procès, la plupart du temps trouve des obstacles à cause des résistances comme par exemple, la faute d'occasion que rendre plus clair le sens de la multiplication et division des numéros entiers vers les formes de représentation des opérations et la faute d'une relation plus proche entre les activités utilisées par les écoles et les caractéristiques de qui devrait apprendre. Devant les questions dont cette recherche met en évidence, c'est-à-dire les difficultés et résistances des adolescents, jeunes et adultes engagés dans la compréhension des concepts de la multiplication et division des numéros entiers, résulta déjà indiqué par la littérature sur études et apprentissage des numéros entiers, réalisés avec l'addition et soustraction, n'existe pas encore des expériences réalisés avec les opérations de multiplication et division en $\mathbb{Z}$ Alors, s'adresse aux instituteurs que se occupent de la éducation des jeunes et adultes du 8° an de la éducation fondamental, une curiosité sur l'origine des compétences et stratégies appliquées par ces étudiants à la résolution dans les situations que cherchent ces opérations. Ainsi, l'objectif d'étude chez nous reviens de la union de toutes ces demandes et nous fait partir des questions: *Quelles sont les difficultés abordées par les adultes et adolescents dans les écoles sur la multiplication et division des numéros entiers? et quels sont les aspects particuliers (modalité de enseignement, âge, activité professionnel) qui peuvent influencer tel compréhension?* La recherche a été réalisée par des entretiens cliniques appliquées à 32 étudiants où la pratique scolastique de la multiplication et division des numéros entiers existe déjà. Les participants ont été divisés en quatre groupes: Jeunes de la quatrième phase de la EJA, adultes de la quatrième phase de la EJA, adolescents du 8° an de la éducation fondamental et adultes du 8° an de la éducation fondamental. Cette organisation est arrivée par la nécessité de la création des conditions plus favorables au contrôle à la faveur des variables *modalité d'enseignement et âge,* une fois que les possibles spécifications montrées dans les formes d'agir des étudiants de la 4° phase et du 8° an de la éducation fondamental pourraient avoir origine dans la modalité d'enseignement ou dans l'âge chez eux, outre des activités professionnels, lesquelles nous considérons aussi, quand même d'une façon plus lointaine. Pour l'instrument de collecte des informations nous avions besoin d'un support rigoureux capable d'aider le développement et l'analyse des questions en donnant lumière au phénomène que nous voudrions faire des recherches. C'est pour ça , que nous avons élaboré 26 articles, dans sept questions. Les résultats ont montré que les étudiants de la EJA et ceux-là du 8° an présentent encore difficultés vers les résolutions des situations que faire partie de la multiplication et division des numéros entiers relatifs, quoique les actions indiquent que ils sont sur le chemin de la compréhension des concepts abordés ici. Dans la comparaison du accomplissement des groupes, pas de différence importante, mais dans la situation, adolescents et adultes ont pris des stratégies avec différences expressives. Tandis que les adultes fréquemment fuient des chiffres de la multiplication et division, les plus jeunes s'attachent à ces formes de résolutions.

Paroles-clés: Numéros entiers; multiplication et division; Éducation de jeunes et adultes; champs de concepts.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

CEPLAR - Campanha de Educação Popular
CNAEJA - Comissão Nacional de Alfabetização e Educação de Jovens e Adultos
CNAIA - Comissão Nacional para o Ano Internacional da Alfabetização
CNBB - Conferência Nacional dos Bispos do Brasil
CPCs - Centros Populares de Cultura
EJA - Educação de Jovens e Adultos
FHC - Fernando Henrique Cardoso
FUNDEB - Fundo de Desenvolvimento da Educação Básica
FUNDEF - Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Magistério
IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
INAF - Indicador Nacional de Analfabetismo Funcional
INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais
LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MCP - Movimento de Cultura Popular
MEB - Movimento de Educação de Base
MEC - Ministério de Educação e Cultura
MOBRAL - Movimento Brasileiro de Alfabetização
ONU - Organização das Nações Unidas
PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais
PDE - Plano Decenal de Educação
PISA - Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PNAC - Programa Nacional de Alfabetização e Cidadania
PNAD - Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios
PNLD - Programa Nacional do Livro Didático
PROEJA - Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Jovens e Adultos
SAEB - Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SAEPE - Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco
TCC - Teoria dos Campos Conceituais
UNE - União Nacional dos Estudantes
UNESCO - Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O momento educacional, que ora vivemos, enfrenta opiniões, experiências e resultados assimétricos, se tomamos por referência os resultados de avaliações em larga escala e a opinião de grande parte dos professores e dos alunos quando confrontam a escola de ontem com a escola de hoje. De um lado, temos professores e alunos desacreditados no papel da escola e já não veem nela nenhum poder de transformação individual, tampouco social. De outro, os docentes que perderam a crença na educação, fundamentam-se na falta de interesse dos alunos, que, segundo eles, não sabem e não "querem" nada. Ao mesmo tempo, os alunos acusam os professores e a escola de lhes oferecerem propostas vazias, desligadas dos seus interesses e fundamentadas na mecanização (SADOVSKY, 2007). O sentimento desses alunos, é que na escola eles perdem as suas peculiaridades e embora cotidianamente presentes nela, não se sentem vistos ou pertencentes a ela, já que ser visto não é apenas ser chamado numa lista.

A lacuna apontada pelos alunos ao se referirem à escola pode estar relacionado a uma prática pedagógica, na qual

> os professores mostram a utilidade das fórmulas e das regras Matemáticas por meio de um treinamento de aplicação: *definição, exercício-modelo, exercício de aplicação*. Nesse contexto, perguntas clássicas como **"Para que serve isso, professor? De onde veio? Por que é assim?"** revelam a inadequação do método de ensino. (ROSA NETO, 2007, p. 3, grifo nosso).

Em outro plano, que vai de encontro ao exposto acima, notamos profissionais da educação, alunos, pesquisas e resultados de experiências bem sucedidas que entusiasmam e mostram que o desassossego dos professores e dos alunos já são bons indícios de que a escola não está detida, pelo contrário, ela é mutável.

Essa dinâmica na qual a escola vive, requer um questionamento constante do seu papel. Para isso, ela precisa considerar cada época e os anseios do público a que atende, garantindo melhores condições de vida aos homens e as mulheres sem subtrair a condição de sustentabilidade das futuras gerações, das demais espécies, enfim do planeta. Isso requer que a escola dê sentido ao que faz em todas as suas ações e disciplinas, para tal é

> necessário conhecer melhor a Matemática inerente às atividades da vida diária da cultura dessas crianças a fim de construir, a partir dessa Matemática, pontes e ligações efetivas para a Matemática mais abstrata que a escola pretende ensinar. (CARRAHER, CARRAHER, SCHLIEMANN, 1988, p. 27).

É certo que essa é uma discussão muito ampla, uma equação de muitas variáveis, cujo método resolutivo ainda não foi apresentado, apenas tateado. Nem é essa a nossa pretensão nesta pesquisa. Mas, se partimos de tamanha dimensão, é apenas para evidenciar as questões e as potencialidades que circundam a escola e que estão longe de receber um tratamento adequado. De sorte que aqueles e aquelas que se preocupam com a sua melhoria, ora por meio de estudos e intervenções, ora por meio de pesquisas que deem corpo aos problemas relativos à escola, não podem se distanciar dessas questões, porque, só conhecendo o problema, é que podemos tratá-lo, ou apontar caminhos para que outros o façam.

A pesquisa, ora apresentada, se junta àquelas que, reconhecendo as dificuldades e potencialidades da escola, vai até ela com a finalidade de examinar os obstáculos à aprendizagem de um conceito, ou conjunto deles, isso após muitos clamores que, infelizmente, só são ouvidos após a leitura de gráficos e tabelas que mostram que a proficiência dos estudantes da Educação Básica no Brasil ainda está muito distante do mínimo esperado, como têm apontado as avaliações internas e externas.

Os resultados apontados pelas frequentes avaliações em larga escala[1] (PISA, SAEB, Prova Brasil, SAEPE entre outras), reconhecidas as suas limitações, indicam que a competência dos estudantes que concluem o Ensino Fundamental em Matemática (o que não é diferente em língua portuguesa, que também é avaliada por essas avaliações, com exceção do PISA, que além de Língua Portuguesa e Matemática avalia ainda o desempenho dos alunos em ciências), está muito abaixo do que se esperava.

De modo geral, o objetivo do ensino de Matemática, na Educação Básica, é garantir ao estudante melhores condições de exercer com eficiência aquilo que já

[1] Para que possamos ter uma ideia do quão preocupante são os resultados apontados pelas avaliações em larga escala, em dezembro de 2010 foram divulgados os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos - PISA que avalia em 64 países o desempenho de alunos de 15 anos em Matemática, Leitura e Ciências e o Brasil ocupou a 53ª posição. É mais preocupante ainda saber que em Matemática, 69% dos alunos avaliados ficaram no nível 1, o mais baixo da avaliação.

lhe é nato, a cidadania. E isso não ocorre quando se “ensina” ou se “aprende” Matemática apenas por meio de técnicas, truques ou musicazinhas.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Matemática,

> caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. Esta visão opõe-se àquela presente na maioria da sociedade e na escola que considera a Matemática como um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro, que deve ser assimilado pelo aluno. (BRASIL, 1998, p. 24).

Para que homens e mulheres possam exercer com qualidade os seus direitos e deveres, é necessário certo domínio de Matemática. Mas, ao observamos os baixos índices de aprendizagem em Matemática e a elevada taxa de evasão escolar na Educação Básica que faz com que ela perca a cada ano 22,6% dos seus alunos por reprovação ou evasão, segundo dados do Censo Escolar 2010 (INEP/MEC), percebemos que a compreensão e atuação no mundo de muitos brasileiros está comprometida.

As crianças e adolescentes, que vão sendo excluídas da escola, acabam retornando anos depois, com a intenção de se apropriarem dos conhecimentos construídos pela humanidade ao longo dos anos e garantir melhores condições de vida. Esse retorno à escola aliado aos índices de reprovação alimenta a distorção idade-série que corresponde a 23,6% no Ensino Fundamental e 33,7% no Ensino Médio. Entre os jovens de 15 a 17 anos, a distorção chega a 49,1% e no Nordeste 60,9% dos jovens entre 15 e 17 anos estão excluídos da escolarização líquida[2], segundo o Censo 2010 (INEP/MEC).

Muitas vezes, o retorno de jovens e adultos à escola deve-se à maior importância que o domínio do conhecimento tem ganhado com a globalização, que é marcada fortemente pelo encontro das culturas. D’Ambrósio (2005) diz que *cultura* é a nomenclatura dada aos indivíduos que pertencem a um mesmo grupo e que compartilham conhecimentos e possuem comportamentos compatíveis entre si.

---

[2] *Escolarização líquida* é o termo empregado para caracterizar o grupo de estudantes que estuda a série correspondente à sua idade.

Com o advento do fenômeno da globalização, muitos trabalhadores precisaram retornar à escola, visto que o mercado de trabalho tornou-se mais exigente e ingressar na cultura letrada passou a ser condição para se manter nele.

Além disso, grande parte dos jovens e adultos que retornam à escola vem em busca do sonho perdido, da oportunidade e do direito que a vida lhes negou quando mais jovem.

De volta à escola, jovens e adultos percebem que ela continua repetindo os mesmos procedimentos e métodos, que contribuíram para que eles tivessem ido embora. É aí, que esses estudantes marcados com a falta que a escola lhes fez ao longo da vida e a dificuldade de se adaptar a um modelo de ensino distante daquilo que eles esperam e necessitam, lutam intensamente para se acomodar nessa “nova” realidade, já que mudar a escola parece ser uma utopia.

Mas, muitas vezes a convivência *adulto* e *escola* é demasiadamente conflituosa, e o que era para ser mais uma tentativa de sucesso, concretiza a ideologia desses alunos de que o conhecimento é para pessoas naturalmente privilegiadas, uma convicção que nasce de uma guerra silenciosa, na qual a Matemática tem alguma contribuição, embora não seja a principal responsável pelo re-abandono escolar.

A compreensão do que é ser alfabetizado avançou; agora uma pessoa que apenas desenha letras não pode, segundo a Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura - UNESCO, ser considerada alfabetizada, mas sim, a que faz uso do processo de letramento e numeramento[3] nas suas práticas sociais. Nasce, então, um novo conceito para a Educação de Jovens e Adultos - EJA, ao invés de ser uma educação de suplência deve passar a ser uma educação para toda a vida.

A Educação de Pessoas Jovens e Adultos, que surgiu inicialmente com o propósito de reduzir a elevada taxa de analfabetismo do país, acaba se tornando uma modalidade de ensino, deixando de ser uma política emergencial para assumir um caráter de permanente de educação.

---

[3] Ser numerado é ter a capacidade e inclinação para usar a Matemática eficazmente em casa, no trabalho e na comunidade (FERREIRA, 2010).

Cientes de que não era suficiente alfabetizar, mas garantir condições de continuidade nos estudos foram sendo criados projetos que pudessem garantir a continuidade dos estudos para aqueles que não tiveram acesso à escola na idade considerada escolar. Essas políticas tinham a pretensão de amenizar os prejuízos causados a essas pessoas que foram, por muitas questões, privadas de ir ou continuar na escola.

Na EJA e na Educação dita regular, aprender Matemática é uma tarefa árdua. Principalmente, porque "a ação prática tem ocupado um lugar de primazia onde a filosofia, um pensar no que é essencial, não tem tido uma maior atenção" (MEDEIROS, 2005, p.13), ou seja, a técnica substituiu o significado. Como exemplo, podemos destacar o conjunto dos números inteiros relativos que supomos não ter o seu sentido compreendido por grande parte dos estudantes. Daí, brotarem tantas dificuldades na aprendizagem dos conceitos relativos a esse campo numérico.

As dificuldades relativas à aprendizagem dos números inteiros alcançam todos os estudantes da Educação Básica, inclusive aqueles da EJA. Alguns estudos (GLAESER, 1985; BORBA, 1993; NASCIMENTO, 2002) já identificaram resistências à aprendizagem desse conceito e como essas resistências se apresentam nas ações de estudantes escolarizados ou não na adição e subtração de números inteiros relativos.

Todavia, não constatamos na literatura pesquisas que abordem os processos de aprendizagem envolvendo a multiplicação e a divisão no campo dos números inteiros. Por isso, dentre os muitos objetos matemáticos que podiam ser tomados nesta pesquisa, optamos por investigar a aprendizagem dos estudantes nessas duas operações, dada a importância que esses conceitos têm para a compreensão de outros temas matemáticos, tais como: equações, funções, geometria analítica, números complexos etc; além de ainda ser uma ferramenta importante em outras áreas do saber como física, química, geografia entre outras.

Definido o objeto matemático desta investigação, carecíamos ainda delinear os seus participantes, a forma de condução da pesquisa e obter uma teoria que fosse capaz de explicar o processo de conceitualização da multiplicação e da divisão de números inteiros relativos.

Diante da falta de outros estudos sobre a forma como estudantes da Educação Básica apreendem a multiplicação e a divisão no conjunto $\mathbb{Z}$[4] e cientes dos resultados de algumas investigações comparativas sobre o desempenho de crianças e adultos em conceitos matemáticos (SILVA, 2006; ALBUQUERQUE, 2010), é que achamos legítimo buscar respostas para a seguinte Questão: *Quais as principais competências e dificuldades evidenciadas por adultos e adolescentes escolarizados em relação à multiplicação e divisão de números inteiros e que aspectos específicos (modalidade de ensino, idade, atividade profissional) podem influenciar a compreensão e as estratégias mobilizadas pelos estudantes?*

Dessa forma, por meio desta pesquisa, será possível identificar se, no caso das situações que tratam de multiplicação e divisão de números inteiros, as experiências cotidianas dos estudantes, principalmente as dos adultos, influenciam na aquisição desses conceitos.

Essa comparação é fruto de muitos questionamentos sobre as potencialidades que os estudantes adultos possam apresentar em relação aos mais novos devido ao maior número de atividades que desenvolvem.

Outro motivo para a realização de um estudo comparativo é a ingênua interpretação da supervalorização atribuída aos saberes e valores próprios da experiência e da “realidade do aluno”, o que, algumas vezes nega ou minoriza o conhecimento formal. Essa má interpretação, embora comum em toda a Educação Básica, é mais forte na EJA dada as lições de Paulo Freire sobre a importância da leitura do mundo para a leitura da palavra.

Por vezes, isso acaba influenciando a qualidade e a abrangência da Matemática que se ensina e se aprende na EJA, nutrindo ainda mais o fracasso escolar entre esses alunos e colaborando com o que Soares (1996, p.10) chama de “ideologia do dom”, que é o discurso de que o adulto não tem as condições básicas para a aprendizagem e, por isso, não consegue se adaptar a escola.

Nesse sentido, a autora, considerando as taxas de repetência, de evasão e a não aprendizagem, diz que “a escola que existe é antes contra o povo que para o

[4] A utilização desse símbolo para representar os números inteiros deve-se a palavra alemã *Zahl* que em português significa número.

povo” (SOARES, 1996, p.9). Muitos estudantes da EJA, diante das situações Matemáticas que lhes são apresentadas, “assumem o discurso da dificuldade, da quase impossibilidade, de isso entrar na cabeça de burro velho” (FONSECA, 2005, p.20-21).

Uma vez apontadas as questões que nos motivaram para a realização deste estudo, é chegado o momento de apresentar a forma de condução do mesmo.

A coleta de dados foi realizada por meio do método clínico com 32 (trinta e dois) estudantes após a instrução formal sobre multiplicação e divisão de inteiros. Para um maior controle das variáveis, modalidade de ensino e idade, os participantes foram distribuídos em quatro grupos, assim organizados: jovens matriculados na 4ª fase e oriundos da EJA; adultos na 4ª fase oriundos da EJA; adolescentes no 8º ano e, por fim, adultos no 8º ano do Ensino Fundamental.

A escolha da 4ª fase da EJA e do 8º ano do Ensino Fundamental, que são ciclos escolares correspondentes, deu-se em função do nosso interesse por estudantes já escolarizados nos conceitos, que ora estudamos. Na seleção dos participantes, escolhemos aqueles que cursaram as séries ou fases anteriores na mesma modalidade.

Para a elaboração e análise das questões, precisávamos de uma ferramenta tanto para o desenvolvimento das situações de aprendizagem quanto para a sua análise, ou seja, de uma teoria capaz de explicar o processo de conceitualização da multiplicação e divisão, envolvendo números relativos. Por isso, é que escolhemos a Teoria dos Campos Conceituais - TCC de Gérard Vergnaud, que, sendo uma teoria cognitiva, é uma excelente ferramenta didática, e, permite identificar a natureza das potencialidades e resistências dos estudantes ao trazerem à tona as suas competências sobre um conceito ou sobre um campo conceitual.

Além da TCC, para o desenvolvimento das questões, consideramos ainda os resultados obtidos na realização de um estudo piloto.

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos, como detalhamos a seguir:

No primeiro capítulo, situamos a nossa questão de pesquisa, estabelecendo um diálogo entre as dificuldades evidenciadas no ensino-aprendizagem dos números relativos e aquelas apresentadas tanto no desenvolvimento histórico desse campo numérico, quanto as apontadas por estudos anteriores.

No segundo capítulo, discutimos brevemente a Educação de Jovens e Adultos, chamando a atenção para as políticas públicas mais recentes voltadas a essa modalidade de ensino.

A Teoria dos Campos Conceituais é o tema do terceiro capítulo. Na ocasião, apresentamos ainda o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, visto que as operações multiplicação e divisão de números inteiros são integrantes desse campo conceitual.

No quarto capítulo, apresentamos os objetivos e o percurso desta pesquisa. Nele, tratamos, também, do método aqui aplicado, da caracterização dos participantes e do instrumento de coleta de dados. Ainda, apresentamos o modo no qual a análise dos dados foi conduzida.

O quinto capítulo foi dedicado à apresentação das etapas deste estudo, destacando as contribuições e ensinamentos de cada uma delas. Os resultados e a sua análise é que dão forma a este capítulo.

Finalmente, apresentamos algumas considerações sobre esta pesquisa, o seu percurso e os seus resultados. Principalmente, chamamos a atenção para o que ela nos ensinou e para as possíveis contribuições que pode dar àqueles ou àquelas que se interessam pelo ensino e pela aprendizagem de Matemática.

CAPÍTULO 1 - SITUANDO O PROBLEMA

Neste capítulo, situamos a nossa questão de pesquisa, que nasce a partir de algumas observações do cotidiano da sala de aula, enquanto professor da Educação Básica.

Professor, menos com menos é menos ou é mais?

Essa pergunta se repete no cotidiano de diversas salas de aula. A frequência com que esse questionamento é feito, inclusive, muitas vezes, pelo mesmo estudante no decorrer de toda a sua vida escolar, pode ser um primeiro indício de que a aprendizagem das operações envolvendo números inteiros ainda enfrenta obstáculos.

Quando essa pergunta chega ao professor que desconhece a operação à qual o estudante está se referindo, ele, a princípio, não consegue dar uma resposta, antes de entender qual a situação que o estudante está tentando desenvolver, dado que, a depender da operação, o *“menos com menos”* pode ser mais ou pode ser menos.

Essa questão aparece tanto entre os estudantes do Ensino Fundamental que estão tendo o seu primeiro contato com o campo numérico dos números inteiros relativos, quanto entre os estudantes do Ensino Médio e independe da modalidade de ensino. Muitas vezes, esse mesmo estudante resolve situações semelhantes ou convive com contextos nos quais se aplicam números e operações pertencentes aos números inteiros. Isto costuma ocorrer principalmente entre os estudantes da EJA, já que a maior parte deles atua no mercado de trabalho e lida frequentemente com situações de débitos e créditos.

Em alguns casos, sobretudo nas comunidades mais carentes, é comum estudantes adolescentes atuarem informalmente no mercado de trabalho e de forma semelhante aos adultos empregarem ideias relativas aos números inteiros e às suas operações.

Ao confrontar a pergunta apresentada na abertura deste texto com as atividades desempenhadas cotidianamente na atividade social desses estudantes, percebemos que algumas situações que eles realizam são semelhantes àquelas forjadas pela escola para o ensino dos números relativos. Porém, essa relação quase nunca é visível, tampouco compreensível.

Quando um adolescente ou um adulto observa e calcula a variação de temperatura de uma cidade, a soma de duas ou mais dívidas ou ainda convive com situações financeiras de créditos e débitos, está empregando números inteiros, mesmo que ele não perceba isso. Essas situações, de natureza aditiva, são mais comuns ao cotidiano dos estudantes.

Conviver com problemas e situações que são retomadas e sistematizadas na escola pode ser vantajoso do ponto de vista da aprendizagem. Arnay (1998), analisando a constante insistência de anulação dos conhecimentos cotidianos em detrimento dos conhecimentos acadêmicos, defende que o

> conhecimento cotidiano desempenha um papel fundamental na compreensão e ação das pessoas em contextos de atividades específicos, e, portanto, que não existe nenhuma razão para empenhar esforços e recursos educativos em sua anulação (1998, p. 40-41).

Supomos que na aprendizagem dos números inteiros, o que requer domínio das suas operações, não é diferente, pois as atividades desenvolvidas no dia a dia podem favorecer o sucesso na compreensão desses conceitos. Pesquisas sobre a aprendizagem do conceito de números inteiros ou abordando as operações adição e subtração desses números (BORBA, 1993; TEIXEIRA, 1993; NASCIMENTO, 2002) têm mostrado que crianças e adolescentes apresentam muitas dificuldades na compreensão dos conceitos pertinentes a esse campo numérico.

Esses estudos vêm permitindo o entendimento de alguns aspectos do processo de ensino-aprendizagem dos números inteiros, apontando, por exemplo, quais das dimensões desse conceito são mais facilmente compreendidas.

Embora já existam pesquisas sobre o entendimento de alguns obstáculos[5] à aprendizagem do conceito de números inteiros relativos (GLAESER, 1985; ASSIS NETO, 1995; SOARES, 2007), bem como a resolução de cálculos numéricos e problemas, que envolvam a adição e subtração desses números, como as que

---

[5] Para Bachelard (1938) um obstáculo é uma concepção resistente no processo de conhecer e que impede, em determinado momento, o avanço da aprendizagem. Essas resistências podem ser originadas por obstáculos ontogenéticos, didáticos e/ou epistemológicos.

citamos acima, ainda não conhecemos as potencialidades e resistências apresentadas pelos estudantes na compreensão das operações multiplicação e divisão no campo dos números relativos.

A segunda questão que surge a partir dessa refere-se ao levantamento de possíveis especificidades no modo como estudantes da EJA e do Ensino Fundamental[6] dito regular resolvem e evidenciam compreender situações-problema com multiplicação e divisão de números inteiros.

A EJA no Brasil é permeada de uma diversidade de clientela tanto do ponto de vista das práticas culturais quanto das diferentes faixas etárias, que compõem essa modalidade educacional. Mas, é justamente aí, que se encontram a maior parte dos adultos que retornaram à escola para aprimorar as suas práticas ou realizarem sonhos que, quando crianças ou adolescentes, não lhe foram permitidos.

Considerando as dificuldades de aprendizagem dos números inteiros, a falta de exploração do desempenho de Pessoas Jovens e Adultas e as potencialidades e resistências, que supomos que essas pessoas apresentam em relação às crianças quando lidam com esses conceitos, como também a escassez de estudos que investiguem a compreensão das operações de multiplicação e divisão nesse campo dos números, é que nasce a nossa motivação para investigar essas questões.

A partir das inquietações apresentadas acima, é que neste estudo, tentamos responder a seguinte Questão: *Quais as principais competências e dificuldades evidenciadas por adultos e adolescentes escolarizados em relação à multiplicação e divisão de números inteiros e que aspectos específicos (modalidade de ensino, idade, atividade profissional) podem influenciar a compreensão e as estratégias mobilizadas pelos estudantes?*

A nossa preocupação por essa questão surge, também, por entendermos que algumas situações vividas no dia a dia por adolescentes e adultos, como as relativas a débitos e créditos, possam favorecer a aceitação dos números negativos, embora a nossa hipótese seja de que as especificidades entre os adolescentes e adultos

[6] Na atual organização do sistema educacional brasileiro a EJA integra a Educação Básica. Assim, quando nos referimos a EJA e ao Ensino Fundamental é apenas para enfatizar a modalidade à qual estamos nos referindo, embora cientes de que os estudantes da 4ª fase da EJA, assim como os do 8º ano, pertencem ao Ensino Fundamental.

estejam muito mais relacionadas às estratégias que eles mobilizam ao resolverem situações relativas às operações multiplicação e divisão em $\mathbb{Z}$ do que no índice de desempenho. Isto é, a princípio, imaginamos que adolescentes e adultos aproximam-se na frequência de acertos e erros nestas operações, mas distanciam-se, nas estratégias utilizadas na resolução das mesmas.

Por isso, é que nos propomos a realizar um estudo comparativo entre as formas de resolução e justificativas dadas pelos estudantes da 4ª fase da EJA e os do 8° ano, que são ciclos correspondentes do Ensino Fundamental às estratégias que utilizam para resolver situações-problema com multiplicação e divisão de números inteiros relativos.

Além do mais, a nossa motivação para entender as formas de ação e compreensão de estudantes da EJA frente a conceitos matemáticos reside na pouca quantidade de investigações sobre as particularidades dos estudantes da EJA no desenvolvimento das competências matemáticas. De acordo com Gomes e Borba (2008, p. 1), ainda temos a "necessidade de se levantar como jovens e adultos desenvolvem seus conhecimentos matemáticos, dentro e fora de ambientes escolares."

As dificuldades no entendimento dos números relativos não são comuns apenas aos estudantes que já passaram pela escola. A própria história do desenvolvimento desses números e a sua demorada aceitação pelos próprios matemáticos são um indício da complexidade dessa questão, que parece ter sido amenizada quando os números passaram a ter a função não apenas de contar ou expressar uma medida, mas também de representar a ausência de uma grandeza ou expressar o comportamento de uma medida, tomando como referência o zero, como ocorre com as medidas de temperaturas negativas.

Para que possamos entender as dificuldades relativas à sala de aula e a relação entre as resistências apresentadas pelos estudantes, sejam da EJA, sejam da Educação dita regular, com aquelas apresentadas pelos matemáticos no desenvolvimento histórico desse conceito, elencamos alguns pontos a seguir, que visam situar o nosso problema de pesquisa.

Inicialmente, apresentamos alguns fatos históricos que indicam o lento desenvolvimento dos números inteiros. Em seguida, algumas considerações sobre o que as pesquisas, envolvendo esse objeto matemático, têm indicado sobre os obstáculos à sua aprendizagem.

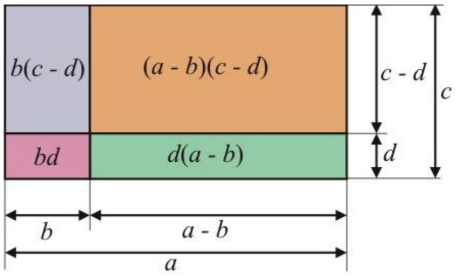
1.1 A aceitação de medidas positivas e negativas como números inteiros

Os números negativos surgiram há mais de dois mil anos na China, onde eram representados por duas coleções de barras de bambu, ferro ou marfim. As barras vermelhas eram utilizadas para indicar os números positivos e as barras pretas para os números negativos. Mas, os chineses não admitiam que um número negativo pudesse representar a solução de uma equação algébrica, tendo em vista que eles tratavam esses números apenas como subtraendos (BOYER, 1996).

A mais antiga Universidade de que temos notícia é a Universidade de Alexandria, que surgiu por volta do ano 300 a. C. e durou até o ano 641 d. C. Lá destacou-se por volta de 250 d. C., um fascinante matemático, Diofanto[7] de Alexandria, que contribuiu na Álgebra e na Teoria dos Números. A ele atribui-se o primeiro tratamento com as regras de sinais (BOYER, 1996; GARBI, 2009).

Apesar de ter deixado poucas contribuições na Geometria, é justamente aí que, por meio de um diagrama geométrico, ele, no desenvolvimento do produto (a – b)(c – d), evidencia que a multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo (GLAESER, 1985; GARBI, 2009).

Figura 1 - Demonstração feita por Diofanto da regra de sinais



[7] Em algumas obras (BOYER, 1996; ALVES, 2007) ao invés de Diofanto de Alexandria encontramos Diofante de Alexandria. Nesse texto nos referimos a esse matemático como Diofanto de Alexandria, como também o fazem Garbi (2009), Eves (2004) e Assis Neto (1995).

Na Figura 1, **a**, **b, c** e **d** representam segmentos de reta e esclarece esquematicamente o raciocínio utilizado por Diofanto.

Observando a Figura 1, podemos perceber que a área do retângulo maior (lados **a** e **c**) é igual à soma das áreas do quatro retângulos menores nele contidos, ou seja:

$$\mathbf{ac =} (a - b)(c - d) + b(c - d) + d(a - b) + bd$$

As igualdades b(c – d) = bc - bd e d(a – b) = da – db, já eram conhecidas devido às demonstrações realizadas pelo grego Euclides, que viveu por volta do século III a. C. Ciente disso, Diofanto escreveu que:

$$(a - b)(c - d) + bc - bd + ad - bd + bd \mathbf{= ac}, \text{ ou ainda:}$$

$$(a - b)(c - d) + bc - bd + ad \mathbf{= ac} \Rightarrow \mathbf{(a - b)(c - d)} = ac - ad - bc + bd$$

Como se pode perceber, a parcela que resulta do produto **(- b)(- d)** é considerada como igual a **+ bd**, ou seja, Diofanto tratou o produto de duas medidas negativas como uma medida positiva.

> O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta. (DIOFANTO *apud* GLAESER, 1985, p.47).

A citação acima e a compreensão de Diofanto sobre o produto de dois números negativos resultar em um número positivo parece ser um primeiro passo na aceitação e compreensão dos números negativos, o que não significa, evidentemente, que Diofanto já tivesse percebido plenamente a existência dos números inteiros, tampouco que já entendesse esses números da mesma forma na qual os compreendemos hoje, ou seja, como um conjunto de números com características, significados e aplicações particulares.

A aceitação dos números inteiros foi lenta e bastante polêmica. Afinal, ainda hoje, podemos perceber, mesmo na comunidade de matemáticos, nuanças nesse campo numérico, se não na aceitação dos números inteiros relativos, mas na justificativa para as regras de sinais. Segundo Garbi,

> Alguns livros de Matemática dizem que a regra de sinais é uma convenção, não um teorema. Isso precisa ser recebido com cuidado e bem entendido: ***trata-se de uma convenção que somos obrigados a estabelecer se quisermos que a propriedade distributiva do produto em relação à***

> ***soma valha também para números negativos e essa é a essência da prova de Diofanto*** (2009, p.125, grifo do autor).

Os hindus também já lidavam no século VII com números positivos e negativos. Por volta de 630, Brahmagupta, matemático indiano, destaca-se na Aritmética, Álgebra e Geometria. Na Geometria, contribui com um importante teorema sobre os quadriláteros inscritíveis, mas conhecido como fórmula de Herão. Na Aritmética, Brahmagupta também já recorre às regras de sinais e contribui para o demorado processo de sistematização dos números negativos ao tratar de medidas positivas e negativas (BOYER, 1996; EVES, 2004).

Apesar de alguns povos, como vimos, já utilizarem a ideia de quantidades negativas, matemáticos como Descartes e Fermat, no século VII, deixaram de ampliar estudos geométricos por ignorarem os números negativos. Bháskara, matemático hindu, que viveu no século XII, afirmava que um número positivo possui duas raízes quadradas, uma positiva e uma negativa e já reconhecia que uma medida negativa não possui raiz quadrada; porém, ele desconsiderava a raiz negativa, o que indica que ele não dava aos números negativos o mesmo tratamento que atribuía aos números positivos. Thomas Harriot pensou ter demonstrado na sua obra “Artes Analíticas Aplicadas”, publicada em 1721, que as raízes negativas eram impossíveis (BOYER, 1996; GARBI, 2009).

Os números negativos tinham aplicação limitada, podendo ser percebidos apenas em cálculos geométricos, em situações que envolviam a multiplicação de medidas negativas como o fez Diofanto, ou ainda em operações comerciais para se tratar das dívidas (GLAESER, 1985; ASSIS NETO, 1995).

Na obra *Triparty em la Science des Nombres,* publicada em 1484 pelo médico francês Nicolas Chuquet (1445 – 1500), os números negativos são utilizados apenas em casos que envolvem dívidas e expoentes negativos, o que ele também já compreendia claramente. Para representar $12x^{-2}$, ele escrevia $12^{2\bar{m}}$, já que representava o sinal de – utilizando o símbolo $\bar{m}$. Mas, quando uma equação algébrica apresentava uma raiz negativa, ele não considerava tal raiz, ou seja, os números negativos, segundo Chuquet, não serviam como solução para uma equação algébrica (GLAESER, 1985).

No século XVI, o alemão Michael Stifel (1487 – 1567) populariza os sinais **+** e **–** nas operações de adição e de subtração. Há indícios de que esses sinais (**+** e **-**) derivam das iniciais das palavras latinas *plus* e *minus*, apesar de autores como Garbi (2009), por exemplo, apontarem a possibilidade do sinal de **+** ser proveniente do termo latim “et” (*e*, em Latim). Stifel também não admitia a possibilidade de um número negativo indicar a raiz de uma equação algébrica e tratava tais números como “números absurdos” (GLAESER, 1985).

Outros matemáticos, tais como os italianos Scipione del Ferro (1465 – 1526), Nicolò Fontana (1500 – 1557), conhecido por Tartaglia devido a problemas na fala e e Girolamo Cardano (1501 – 1576), que foram algebristas de grande destaque no século XVI e que apresentaram muitas contribuições ao processo de resolução das equações algébricas de terceiro e quarto grau, também rejeitaram as raízes negativas (GLAESER, 1985).

A considerável lista de matemáticos, que rejeitaram o uso de números negativos no tratamento algébrico, fez Glaeser (1985) denominar esse fenômeno de *sintoma de evitação*.

Stevin, matemático que também viveu no século XVI, admitia que números negativos pudessem representar as raízes e os coeficientes de equações, mas ainda se manteve preso à cardinalidade do número, isto é, o número para ele era a representação da quantidade de elementos de determinado objeto ou coisa. Essa concepção de que um número sempre deveria está associado a algo real, ou seja, a uma quantidade (cardinalidade do número, que é apenas uma das suas funções) é apontada como a principal responsável pelo atraso no desenvolvimento dos números relativos (GLAESER, 1985).

Perceber os números negativos numa perspectiva cardinal não é algo simples, pois essa aplicação apresenta contextos limitados. Mas, na época, o número ainda era tido apenas como uma representação do real,

> o número era entendido como "coisa", como grandeza, como objeto dotado de substância. É claro que dentro dessa concepção fica difícil entender o número negativo. Um fato corriqueiro da Matemática, o que afirma que "um número negativo é menor que zero", torna-se problemático. Isso porque se número é quantidade, a identificação do número zero com ausência de quantidade ou com a expressão *nada* é natural. E como conceber algo menor que nada? (ASSIS NETO, 1995, p. 3).

Na segunda metade do século XVI, o advogado e matemático francês François VIète (1540 - 1603) apresenta grandes contribuições para o desenvolvimento algébrico com a utilização e difusão do uso de letras para representar os números, tanto no caso das incógnitas quanto no caso dos coeficientes das expressões (GARBI, 2009). Ao lidar com expressões literais, Viète admitia que essas pudessem assumir valores negativos.

O fato de Viète, considerado um dos maiores matemáticos do século XVI, considerar que equações algébricas pudessem ter raízes negativas não foi suficiente para que outros matemáticos compartilhassem do seu posicionamento em relação aos números negativos. René Descartes (1596 – 1650), por exemplo, apesar de também considerar a existência de raízes negativas em equações algébricas, as trata como raízes *falsas*, evitando-as e preocupando-se nos estudos algébricos apenas com as raízes positivas que chamava de *verdadeiras*.

Glaeser (1985) defende que a criação dos termômetros trouxeram contribuições para a compreensão e posterior aceitação dos números negativos. Ela, recorre à história da criação do primeiro termômetro por Gabriel Fahrenheit, no século XVIII, para justificar o seu posicionamento. Fahrenheit, ao invés de considerar o ponto de fusão do gelo, como Réaumur e Celsius, fizeram posteriormente, toma como ponto mínimo a menor temperatura registrada no inverno de 1709 e como ponto máximo a temperatura do corpo humano e divide esse intervalo em 100 unidades, chamando cada uma dessas unidades de grau.

Ao desconsiderar o ponto de fusão do gelo como o ponto fixo de menor valor da sua escala termométrica, Fahrenheit abre espaço para a representação de temperaturas por meio de números negativos (GLAESER, 1985).

Leonhard Euler (1707 – 1783), suíco nascido na Basiléia, foi considerado como um dos mais importantes e produtivos matemáticos do século XVIII. Ele atuou em todas as áreas da Matemática e em especial no campo da aritmética. Ao lidar com os números inteiros, que é nesse estudo o nosso objeto matemático de interesse, Euler já consentia a existência de números relativos e até justificava as regras de sinais.

> 1. A multiplicação de uma dívida por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: Três dívidas de **a** escudos fazem uma dívida de ***3a*** escudos. Logo ***b x (- a) = - ab.***
> 2. Por comutatividade, Euler deduz daí que ***(- a) x b = - ab***.
> 3. Resta determinar o que é o produto ***(- a)*** por ***(- b).***
> - É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ***ab***. Trata-se, portanto de decidir entre ***+ ab*** e ***– ab.*** Como ***(-a) x b*** já vale ***– ab***, a única possibilidade restante é de que ***(- a) x (- b)*** = ***+ ab*** (EULER *apud* GLAESER, 1985, p. 64 e 65, grifo nosso).

Mais uma vez, vemos o quanto a multiplicação de medidas negativas foi de grande importância para o avanço e a aceitação dos números negativos, dado que aceitar o produto de duas medidas negativas como uma terceira medida positiva, era uma condição geométrica nos casos onde a área de uma região retangular era conhecida e precisava-se obter, por meios algébricos, a medida de um dos lados dessa região. De tal forma que, a conclusão de Diofanto pode ter sido consequência de uma verificação em situações reais.

No século XIX, com as contribuições do matemático Haenkel (1839 – 1873), as quantidades negativas ganham uma explicação mais definitiva, adquirindo de fato a condição de número. Esse estado adquirido pelos números inteiros só foi possível porque Haenkel apresentou uma perspectiva diferente a compreensão que até então se tinha dos números, ou seja, para ele os números não eram descobertos, mas sim inventados ou imaginados. Essa compreensão de Haenkel é de grande importância para o desenvolvimento do conjunto dos números inteiros, pois, a partir dela se abandona a necessidade de obter na natureza, exemplos práticos ou aplicações cotidianas, para os números, o que, no caso dos inteiros, não é uma tarefa fácil (GLAESER, 1985; ASSIS NETO, 1995; BOYER, 1996; EVES, 2004; GARBI, 2009).

Segundo Assis Neto (1995), esse avanço histórico, referente à aceitação dos números inteiros relativos, ocorrido no século XIX, deu-se quando a Matemática deixou de ser vista como a ciência voltada apenas para a realidade das coisas e das substâncias. Tal momento, é chamado por Ernest Cassirer como *passagem do pensamento substancial para o pensamento funcional*. Essa transposição indica que a “Matemática é, no sentido mais geral possível, a ciência das relações na qual se abstrai de todos os conteúdos das relações” (p. 3).

O longo caminho percorrido desde os chineses até o alemão Hankel para o entendimento e o verdadeiro ingresso dos números inteiros no rol dos conhecimentos matemáticos foi resultado do tratamento substancial e aplicável dado à Matemática, o que certamente pode ser apontado como um impedimento tanto no desenvolvimento do conjunto dos números inteiros, quanto no aperfeiçoamento da própria Matemática (GLAESER, 1985; ASSIS NETO, 1995).

Essa tentativa de atribuir à Matemática uma aplicação cotidiana e imediata, deixando de lado o seu caráter abstrato, é responsável pelo atraso na compreensão dos números inteiros. Na sala de aula, as dificuldades que decorrem no ensino e na aprendizagem desse conceito podem ter alguma relação com o ensaio realizado pelos matemáticos no entendimento dos números inteiros relativos (GLAESER, 1985; ASSIS NETO, 1995).

Dissociar a Matemática, enquanto ciência dedutiva e formal, da sua aplicabilidade prática em situações do cotidiano, é compreendê-la não apenas como uma ciência, mas também, como uma forma de atividade humana e, nesse papel, ela não pode ser conduzida apenas pelas suas regras internas (CARRAHER, CARRAHER, SCHLIEMANN, 1988). O que quer dizer que, do mesmo modo como não podemos compreender a Matemática apenas olhando para as suas aplicações em fenômenos do dia a dia, tampouco podemos entender as situações e os acontecimentos que nos cercam sem recorrer à Matemática.

No que concerne à sala de aula, a Matemática é resultado de um processo de interação humana. Assim, o ensino e a aprendizagem dos números relativos envolvem diversos fatores, tais como: a Matemática desenvolvida pelos matemáticos, as experiências e os conhecimentos prévios dos alunos e do professor, o modo como cada aluno aprende ou ainda, a maneira como o professor concebe o seu papel e conduz a aprendizagem. Por isso, o item seguinte discute os aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem dos números inteiros relativos, levando em consideração alguns estudos empíricos.

1.2 Dificuldades na aprendizagem dos números inteiros relativos

No currículo escolar brasileiro, geralmente, o ensino dos números inteiros ocorre a partir do 7º ano ou da 3ª fase da EJA, que são ciclos do Ensino Fundamental correspondentes. Desde então, os estudantes tem contato com a chamada *regra dos sinais* e são estimulados a aplicá-las na resolução de operações com números inteiros.

Mas, esta tem sido uma tarefa na qual os estudantes tem apresentado muitas dificuldades, isso tem preocupado pesquisadores e professores da Educação Básica. Borba (1998, p. 121) ao referir-se ao ensino dos números relativos, diz que

> a introdução desse novo campo numérico e das regras para operações com números positivos e negativos frequentemente resultam em dificuldades para os alunos, já que os números naturais até então eram os únicos utilizados em sala de aula.

Durante alguns anos os estudantes conheciam apenas os números naturais e as operações aritméticas que realizavam eram fechadas nesse conjunto, agora *como convencê-los de que* ***4 – 10 = - 6****, se, até então, eles não admitiam a possibilidade de tirar uma quantidade maior de uma quantidade menor?*

A dificuldade de compreensão dos números inteiros também é uma preocupação compartilhada com Assis Neto, que ao se referir ao processo inicial de aprendizagem desses números, diz:

> Até então seus alunos vinham perdendo bolas de gude no jogo, gastando dinheiro ou emprestando coisas e com isso sabiam muito bem que a - b é uma conta muito simples. Desde que a > b. A dificuldade agora é que a < b e toda aquela experiência anterior parece prejudicar o novo aprendizado. (1995, p. 2).

Outro problema que surge na aprendizagem dos números inteiros relativos é explicar que o sinal de menos não serve apenas para subtrair duas quantidades, mas que também é utilizado para indicar sinal de número. Nessa condição, inevitavelmente, o sinal de menos precisa ser aceito pelo estudante com outros significados (sinal de número, inversão, relação) porque, somente assim, é que ele poderá vir a compreender que de 4 é possível tirar 10. Nestes termos, a principal dificuldade de compreensão dos números inteiros é semântica, e não operatória.

O entendimento dos números inteiros relativos só se dá quando o estudante percebe a necessidade de ampliação do conjunto dos números naturais, que é válido apenas para algumas situações, como, por exemplo, ordenar, contar e codificar objetos.

As dificuldades que ora apontamos, na aprendizagem dos números inteiros, também são notadas nos resultados das avaliações externas, que indicam índices de aprendizagens ainda mais baixos que em outros descritores da matriz de referência do 9º ano do Ensino Fundamental. Os descritores 18 (D18) e 20 (D20), tratam justamente da aprendizagem do conceito e da realização de operações com números inteiros relativos. O D18 prevê que o aluno, ao término do Ensino Fundamental, seja capaz de *“efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)”* e o D20 espera que, no final do mesmo ciclo, o aluno possa *“resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)”* (BRASIL, 2008, p. 153).

A Figura 2 mostra uma das questões aplicadas aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental pela Prova Brasil, com o objetivo de avaliar o desempenho dos mesmos no descritor 20.

Figura 2 - Exemplo de item do D20 aplicado na Prova Brasil

Numa cidade da Argentina, a temperatura era de 12 °C. Cinco horas depois, o termômetro registrou -7 °C.

A variação da temperatura nessa cidade foi de

(A) 5 °C. (B) 7 °C. (C) 12 °C. (D) 19 °C.

Percentual de respostas às alternativas			
A	B	C	D
45%	9%	8%	37%

O fato de quase metade dos alunos participantes do teste terem indicado como resposta correta o número **5,** que é o resultado da operação **12 – 7** [em vez de **- 7 – (+ 12),** que seria o cálculo numérico indicado para a situação] vai ao encontro do que nos referimos anteriormente sobre o não conhecimento dos diferentes significados do sinal de menos, e também, ao que algumas pesquisas têm apontado sobre as dificuldades e os obstáculos de compreensão dos números inteiros relativos (GLAESER, 1985; BORBA, 1993; NASCIMENTO, 2002; BORBA, 2009).

Ainda analisando a Figura 2, podemos perceber que os 45% dos estudantes, quando respondem o distrator apresentado no item **A**, trazem, à tona, dificuldades semelhantes àquelas evidenciadas pelos matemáticos, no entendimento e na aceitação dos números inteiros.

> Pelo menos uma das dificuldades que os alunos encontram no aprendizado do conceito de número negativo guarda um paralelo muito forte com uma dificuldade encontrada pelos matemáticos no desenvolvimento histórico do conceito. Trata-se da dificuldade de entender o negativo no quadro de uma concepção *substancial* de número. Por essa concepção, que predominou até certo período do século XIX, o número era entendido como "coisa", como grandeza, como objeto dotado de substância (ASSIS NETO, 1995, p. 3).

Esses são apenas alguns indícios de que a aquisição do conceito de números inteiros passa pelo domínio das quatro operações, de modo que, para que um estudante alcance um nível de desempenho satisfatório em situações, que envolvam números positivos e negativos, ele precisa, pelo menos, saber adicionar, subtrair, multiplicar e dividir nesse corpo de números, ou seja, ser competente no conjunto dos números inteiros, é ser capaz de operar nesse campo numérico, compreendendo a variação e o comportamento dos termos dessas operações.

Na subseção seguinte, detalhamos melhor as pesquisas (GLAESER, 1985; BORBA, 1993; NASCIMENTO, 2002; BORBA, 2009), nas quais estamos nos apoiando, para identificar as dificuldades de compreensão dos números inteiros.

Algumas dessas análises (BORBA, 1993; NASCIMENTO, 2002, BORBA, 2009) foram realizadas com estudantes, aproximando-se de contextos referentes à sala de aula; outras (GLAESER, 1985; ASSIS NETO, 1995) levantam historicamente, as resistências, apresentadas pelos matemáticos (e pelos estudantes), na aceitação dos números inteiros. Na ocasião, procuramos apresentar os objetivos, métodos, resultados e principais conclusões de cada uma dessas investigações. Concluímos, com algumas observações sobre o ensino dos números inteiros.

1.2.1 O que dizem as pesquisas sobre os números inteiros

Na seção anterior, situamos o momento a partir do qual os números inteiros alcançam a sala de aula, e apontamos algumas das dificuldades à sua compreensão. Ainda, apontamos que, o desempenho dos estudantes do Ensino Fundamental, nos descritores, referentes ao conceito e às operações com os números inteiros relativos, é insatisfatório, conforme metas estabelecidas pelo MEC.

Como mencionamos no final da seção anterior, neste momento, apresentamos alguns estudos sobre as dificuldades no entendimento do conceito e das operações no campo dos números relativos.

Georges Glaeser (1985) estudou os obstáculos epistemológicos relativos aos números inteiros relativos. O autor, preocupado com a epistemologia desses números, organiza metodologicamente a sua pesquisa em duas etapas. Na primeira, recorre à história da Matemática e levanta os livros e artigos que tratam ou evitam propositalmente os números relativos. Na segunda parte, analisa o material levantado, como é comum em investigações dessa natureza.

Glaeser, analisando o desenvolvimento histórico do entendimento dos números inteiros, pelos matemáticos, identifica os seguintes obstáculos epistemológicos à aprendizagem desse números:

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas;
2. Dificuldade em dar um sentido às quantidades negativas isoladas;
3. Dificuldade em unificar a reta numérica, expressa pela ideia da reta como justaposição de duas semirretas opostas, o que desconsidera o caráter dinâmico e estático dos números e a diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas;
4. Ambiguidade do zero absoluto e do zero como origem;
5. Oposição relativa à concretude que decorre espontaneamente nos números Naturais (estagnação no estágio das operações formais);
6. Necessidade de um modelo unificador do campo aditivo para o multiplicativo.

O obstáculo *inaptidão para manipular quantidades isoladas* refere-se à rejeição de matemáticos, como Diofanto, a medidas negativas, nesta condição, o número não positivo (ou não número) era tratado como o que está em falta.

A *dificuldade em dar um sentido às quantidades negativas isoladas* é reconhecida em matemáticos como Stevin, que recorre a artifícios para que os “números negativos” sejam utilizados apenas como elementos intermediários, sem que estas representações sejam reconhecidas como número, mas apenas empregadas isoladamente para atender as necessidades da própria Matemática.

A principal identificação do obstáculo *dificuldade em unificar a reta numérica* é percebida na justaposição da reta numérica como duas semirretas opostas, condição que desconsidera o número com características dinâmicas, isto é, com diferentes significados. Tal obstáculo,é percebido, também, no matemático Colin Maclaurin, para quem uma quantidade negativa só existiria por comparação com uma quantidade positiva, o que nos leva a perceber que as quantidade negativas eram apenas uma *ficção*.

A *ambiguidade do zero absoluto e do zero como origem* (ambiguidade dos dois zeros) está presente nos trabalhos de muitos matemáticos (como mostra o Quadro 1), que durante séculos interpretaram o zero apenas como valor absoluto, abaixo do qual nada mais poderia existir.

O obstáculo *oposição relativa à concretude que decorre espontaneamente nos Números Naturais* foi caracterizado como a longa dificuldade dos matemáticos de se distanciarem do sentido concreto e substancial dos números, para os quais, a Matemática só existiria a partir do mundo real, ou seja, sem abstrações. Este obstáculo foi de difícil superação, já que durante séculos, os números sempre indicavam um estado, e nunca uma ação. Por isso, a sua existência só se justificava a partir da representação do real.

A *necessidade de um modelo unificador do campo aditivo para o multiplicativo* caracteriza-se pela necessidade de trazer à tona um modelo aditivo eficiente também no campo multiplicativo, capaz de atender as propriedades destas duas operações.

Além de apresentar e descrever os obstáculos epistemológicos à compreensão dos números inteiros, Glaeser assinala qual(ais) dele(s) foram observados entre alguns célebres matemáticos, como mostra o Quadro a seguir:

Quadro 1 – Obstáculos de matemáticos à compreensão dos números inteiros

NASC. – MORTE	OBSTÁCULOS / AUTORES	1	2	3	4	5	6
~325 - 409 d.C.	Diofantes	-					
1548 - 1620	Simon Stevin	+	-	-	-	-	-
1596 - 1650	René Descartes	+	?	-	?		
1698 - 1746	Colin Maclaurin	+	+	-	-	+	+
1707 - 1783	Leonard Euler	+	+	+	?	-	-
1717 - 1783	Jean D'Alembert	+	-	-	-	-	-
1753 - 1823	Lazare Carnot	+	-	-	-	-	-
1749 - 1827	Pierre de Laplace	+	+	+	?	-	?
1789 - 1857	Augustin Cauchy	+	+	-	-	+	?
1839 - 1873	Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Legenda: $\boxed{+}$ obstáculo ultrapassado; $\boxed{-}$ pesquisado, mas não ultrapassado; $\boxed{?}$ não há como informar pelos textos pesquisados; $\boxed{}$ o autor/matemático não tentou ultrapassar o obstáculo.

A necessidade de atribuir sentido aos números e a ideia de que de uma quantidade menor não se pode tirar uma quantidade maior, entre outras, como as apontadas por Glaeser tenta mostrar que os números naturais apresentam-se como um obstáculo para a aprendizagem dos números inteiros.

Finalmente, Glaeser conclui que os obstáculos por ele identificados perturbaram os matemáticos por mais de 1500 anos. Ainda, conclama que, enquanto a didática científica se esforça para evidenciar as potencialidades e dificuldades de um ensino baseado em exemplos e na concretude da Matemática, os documentos históricos por ele analisados indicam que tal ação atrasou a efetiva compreensão dos números inteiros, isso não implica, que a transposição do saber científico para o saber escolar deva ser totalmente desvinculada dos diferentes contextos sociais e Matemáticos dos conceitos em tela.

Na sala de aula, os obstáculos apontados por Glaeser ainda não foram plenamente superados pelos estudantes, como mostra o estudo de Borba (1993).

Borba (1993) analisou, em função dos contextos e das regras de sinais das operações adição e subtração em $\mathbb{Z}$, as dificuldades de estudantes antes e depois do recebimento de instrução nesse campo numérico. Ainda, investigou possíveis justificativas para as dificuldades apresentadas pelos estudantes no manuseio das regras e relações relativas a este conjunto.

O estudo foi organizado em três etapas: pré-teste, intervenção e pós-teste.

Participaram desta pesquisa 64 crianças da 4ª série[8] e 32 estudantes da 6ª série do Ensino Fundamental. Os estudantes da 4ª série foram distribuídos em quatro grupos, sendo três experimentais e um funcionando como grupo controle. Os participantes da 6ª série atuaram como um segundo grupo controle.

Os grupos experimentais resolveram situações relacionadas aos contextos de ganhos e perdas financeiras, tendo como suporte a reta numérica e os diagramas propostos por Vergnaud para o ensino das estruturas aditivas (discutidas no capítulo 3 desta pesquisa). Esses grupos distanciavam-se na forma de utilização das regras de sinais (construídas por meios de situações de débitos e créditos, apresentadas ou evitadas pelo instrutor no decorrer do treinamento).

Os estudantes do grupo controle, da 4ª série, foram treinados em contextos semelhantes aos grupos experimentais, mas, as situações propostas resultavam apenas em ganhos (créditos). Os participantes da 6ª série recebiam instrução semelhante àquela apresentada pelos professores no ensino desses conceitos.

A instrução dos estudantes da 4ª série ocorreu no decorrer de seis aulas (45 minutos cada aula), sendo que cada grupo participava de um encontro a cada semana. Já para os estudantes da 6ª série, a instrução deu-se durante nove aulas, com 45 minutos cada aula.

[8] Na legislação atual, a 4ª série corresponde ao 5º ano do Ensino Fundamental, da mesma forma que, a 6ª série corresponde ao 7º ano do Ensino Fundamental.

Os estudantes da quarta série eram equivalentes no que se refere à média de acertos apresentadas no pré-teste, que foi de aproximadamente 20%. Essa equivalência é resultado da forma como os grupos foram organizados.

Os resultados apontaram que as crianças da 4ª série evidenciaram noções intuitivas apenas quando as situações pertenciam a contextos significativos, como problemas de débitos, créditos e de temperaturas, diferentemente dos estudantes da 6ª série, que indicaram uma conceitualização inicial sobre os conceitos em pauta neste estudo, já que foram capazes de resolver até mesmo questões e expressões formais descontextualizadas.

A comparação entre os resultados do pré e dos pós-teste indicou que todos os estudantes apresentaram avanços estatisticamente significativos. A 6ª série continuou a apresentar o melhor desempenho em relação aos estudantes da 4ª série. Nos grupos da 4ª série, os grupos experimentais apresentaram melhores resultados do que o grupo de controle.

A instrução formal permitiu aos estudantes da 6ª série evoluírem do modelo de reta numérica dividida (para as operações adição e subtração) para um modelo de reta contínua, permitindo manipular os inteiros positivos e negativos tanto isoladamente, quanto os inseridos numa mesma expressão.

A instrução formal com situações de créditos e débitos, envolvendo apenas números naturais, não se mostrou suficiente para o desenvolvimento da compreensão do conceito de números inteiros.

A pesquisadora conclui, chamando a atenção para a importância da instrução formal para o efetivo entendimento do conceito de números relativos, que deve considerar os conhecimentos anteriores dos estudantes sobre esses números e contextos que sejam significativos para as crianças. Finalmente, ela aponta que crianças da 4ª série já podem ser escolarizadas no conceito e nas operações de adição e subtração com esses números.

Assim como Glaeser (1985), Nascimento (2002) retoma alguns obstáculos epistemológicos à aprendizagem dos números inteiros relativos. Ele analisou e comparou os obstáculos apresentados por alunos da 7ª série[9] do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio quando resolvem uma sequência de questões envolvendo adição e subtração de números inteiros em dois ambientes: o papel e o computador, onde utiliza o software Megalogo[10].

O referido pesquisador realizou um estudo de caso com quatro estudantes, sendo dois da 7ª série do Ensino Fundamental e dois do 1º ano do Ensino Médio, desenvolvido em três fases:

- ✓ *Pré-teste:* sequência de operações, envolvendo adição e subtração de números inteiros no papel, aplicadas em uma turma da 7ª série do Ensino Fundamental e em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, com o objetivo de identificar os estudantes que apresentavam os obstáculos apontados na literatura e selecioná-los para participar do estudo;

- ✓ *Sequência de atividades no papel e no computador:* cada um dos estudantes participou de dois encontros, resolvendo ao mesmo tempo atividades no papel e num software que simulava uma reta numérica dinâmica (Megalogo).

- ✓ *Pós*-teste: nessa fase, os quatro participantes realizaram no papel um pós-teste semelhante ao pós-teste.

A partir daí, o pesquisador analisou as evoluções dos participantes, segundo cada um dos obstáculos e dificuldades identificadas na fase inicial da sua pesquisa.

O autor, reforça alguns obstáculos que produzem dificuldades na compreensão do conceito de números inteiros, bem como na resolução de questões envolvendo adição e subtração nesse campo numérico, tais como: *a concepção do número como cardinalidade,* o que não ocorre com os números inteiros, o *revés sofrido pelo conceito de ordinalidade na reta numérica* que deixa de ter um só sentido, *o zero não como ausência, mas como resultado de operação*, *os diferentes significados do sinal de menos* que provoca generalizações da regra de sinais para além do seu campo de validade e a herança dos números naturais de que do menor não se pode tirar o maior.

---

[9] Equivale na legislação atual ao 8º ano.

[10] O Megalogo é um programa de computador desenvolvido em 1994, baseado na linguagem de programação Logo.

Além disso, os resultados indicaram que os estudantes evoluíram em três dos obstáculos apontados: *não admissão do número negativo isolado, não se pode subtrair o maior do menor* e *o sinal de menos da operação como inversão*. Segundo o autor, essa evolução é consequência do uso da reta numérica num ambiente computacional, o que provocou nos participantes uma melhor compreensão das operações de adição e de subtração de números inteiros relativos, apesar de, mesmo no computador, persistirem as dificuldades advindas dos diferentes significados do sinal de menos.

Outro resultado importante do seu estudo é que a evolução dos alunos do Ensino Fundamental foi maior do que a dos estudantes do Ensino Médio.

Nascimento conclui chamando a atenção para a limitação dos resultados obtidos na sua investigação, principalmente no que se refere à quantidade de participantes do seu estudo, o que restringe ainda mais o poder de generalização dos mesmos.

Borba (2009), preocupada com questões relativas à aquisição do conceito de números inteiros, traz, à tona, os resultados de três estudos realizados com crianças inglesas, ainda não escolarizadas nesse campo numérico.

A autora defende que a aquisição de um conceito é influenciada pelos *significados, propriedades e representações simbólicas* utilizadas pelos estudantes no decorrer das situações que lhes são apresentadas. Por isso, analisa, isoladamente, o papel de cada uma destas dimensões no processo de conceitualização dos números relativos.

Do mesmo modo que os problemas envolvendo números naturais possuem diferentes significados, os problemas que envolvem números inteiros também apresentam diferentes tipos, entre eles: *medida, relação e transformação*. Por exemplo, se alguém possui R$ 5,00 na sua conta bancária e retira R$ 7,00, o seu saldo passa a ser uma dívida de R$ 2,00. Assim, o 5 é uma medida positiva, o 2 final uma medida negativa e o 7 representa uma transformação negativa (se fosse o caso, de um depósito de R$ 7,00 teríamos uma transformação positiva). Ainda, o 7 pode ser entendido como uma relação, pois independente do que a pessoa possuía antes ela tinha 7 a menos do que antes, o que caracteriza uma relação negativa. (BORBA, 2009).

A autora realizou uma triangulação (análise de estudos anteriores, compreensão dos estudantes antes do ensino formal, experimentação de uma forma de ensino) na busca de evidências das dimensões que influenciam a aprendizagem desses números.

Ao analisar estudos anteriores, Borba, aponta que, estudantes ainda não escolarizados nesse campo numérico, demonstram compreender o significado de inteiro enquanto medida, mas a compreensão de inteiro enquanto relação requer um tempo maior.

A primeira investigação de Borba (2009) propunha-se a confirmar resultados isolados de estudos anteriores, que indicavam a influência dos significados, dos invariantes e das formas de representações simbólicas na compreensão dos números inteiros.

Participaram deste estudo 60 crianças de sete e oito anos de idade, aleatoriamente, organizados em quatro grupos, que se diferenciavam pelos significados dados aos números inteiros e pelas formas de representação (implícita ou explícita). As crianças resolviam 12 problemas por meio do jogo do pinball.

Os resultados indicaram que estudantes antes da escolarização formal no conjunto dos inteiros, já possuem conhecimentos importantes sobre esse campo numérico, principalmente, quando a situação se refere a inteiro enquanto medida, e não se faz necessário explicitar os números e as operações realizadas com os mesmos e os problemas em questão são diretos. Com isso, a autora confirma que os significados, os invariantes e as formas de representação influenciam fortemente na aquisição do conceito de números relativos.

A proposta do segundo estudo foi auxiliar os estudantes na compreensão de problemas com significado de medida e de relação, no campo dos números relativos. Desse estudo, participaram 60 crianças, diferentes das do primeiro estudo, resolvendo problemas de transformações no jogo do pinball. Foram propostos 12 problemas, que, diferenciavam-se na quantidade de valores negativos envolvidos e no significado do resultado (medida ou relação).

Os resultados dessa intervenção apontaram que registrar diferentes números positivos e negativos foi uma tarefa simples para a maior parte das crianças, que se utilizavam, de cartões coloridos ou de representações escritas.

Os estudantes que discutiam o significado do inteiro enquanto relação avançaram mais do que os estudantes que lidavam com problemas de medida, de modo que os que apenas resolviam problemas de relação, no pós-teste, evoluíram no contexto do inteiro enquanto medida; já os estudante que resolviam problemas relativos ao significado de medida não conseguiram avançar na compreensão dos problemas de relação.

A terceira intervenção da autora tinha como objetivo ajudar os estudantes a superarem as dificuldades relativas aos problemas inversos no contexto dos números inteiros. Nesse estudo, os participantes foram distribuídos em dois grupos. No primeiro, discutiam-se apenas problemas diretos, enquanto no segundo, apenas problemas inversos.

Os resultados do pós-teste, indicaram que os estudantes que resolveram apenas problemas inversos na intervenção, conseguiram resolver tanto os problemas inversos quanto os diretos. Os que resolveram problemas diretos evoluíram apenas nesse tipo de problema.

Borba (2009) concluí que é mais fácil entender o significado do inteiro enquanto medida do que enquanto relação, que lidar com problemas inversos é bem mais difícil do que resolver problemas diretos e que a maior dificuldade dos estudantes, ao operarem com os números inteiros, deve-se à necessidade de representar explicitamente esses números. Ainda, aponta que discutir, na sala de aula, problemas mais complexos, auxilia os estudantes a compreenderem problemas mais simples, como aconteceu nos estudos 2 e 3.

Da análise desses estudos, percebemos que não se podem entender os números negativos com a mesma natureza com que os números naturais foram concebidos e utilizados historicamente pelas diversas civilizações, já que eles eram tidos como representações da quantidade de objetos, animais ou pessoas, mesmo sabendo que, quando o ensino dos números naturais se dá por meio de situações significativas, a sua aprendizagem é facilitada como aponta o estudo realizado por Nunes & Bryant (1997).

A facilidade na compreensão de situações que associam número ao seu significado pode estar relacionada ao desenvolvimento histórico da representação do número que, segundo Boyer (1996), deu-se em diferentes civilizações (Maias, Egípcios, Hindus, Romanos, Babilônios, Chineses entre outras) por meio da percepção de características entre as quantidades de objetos ou animais e as representações que faziam para representar essas quantidades.

Analisando essas pesquisas, percebemos que as dificuldades enfrentadas por estudantes da Educação Básica são decorrentes de obstáculos didáticos e epistemológicos no processo de ensino-aprendizagem de números inteiros relativos. Tais dificuldades podem alcançar outros campos conceituais[11], pois, segundo Borba (1993, p. 26), a aprendizagem dos números inteiros relativos é importante para o entendimento de álgebra, para a representação gráfica de funções e para o cálculo de quantidades (velocidade, distância, tempo).

Para Teixeira (1993), os números positivos e negativos não são caracterizados como números inteiros pelo seu valor absoluto, mas sim pela posição que ocupam em relação ao ponto de origem; por isso, esses números são tratados como relativos, ou seja, amplia-se a ideia construída no conjunto dos números naturais de que um número sempre representa uma quantidade.

O nosso estudo envolve participantes da Educação Básica regular e da Educação de Jovens e Adultos; por isso, no capítulo seguinte, fazemos um breve levantamento da trajetória da Educação de Adultos no Brasil, tentando elencar algumas especificidades desse público. O nosso recorte histórico começa a partir de 1930, por ser no Brasil "quando ressurge a gratuidade associada à ideia de obrigatoriedade" (VALLE e RUSCHEL, 2009, p. 3). Ainda, apresentamos as principais características da EJA, os motivos que provocam a evasão escolar, as políticas públicas voltadas para este público, e, finalmente, as especificidades do ensino e da aprendizagem de conceitos matemáticos por Pessoas Jovens e Adultas.

---

[11] Vergnaud (1996) define um campo conceitual como sendo um conjunto de situações e conceitos que exigem o domínio de vários conceitos de naturezas distintas, tratado com maior detalhamento no Capítulo 3.

CAPÍTULO 2 – A MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS (EJA)

O capítulo, que ora apresentamos, é dedicado à Educação de Jovens e Adultos – EJA, uma reflexão que parte das políticas públicas voltadas para esta modalidade de ensino e, que, tem como escopo apontar os percalços e potencialidades do ensino de Matemática a Pessoas Jovens e Adultas. Nele, situamos legalmente essa modalidade de ensino, apresentamos alguns dos principais motivos que favorecem a evasão escolar e analisamos o que faz dessa modalidade de ensino uma política pública permanente. Ainda, apontamos brevemente, a história mais recente da EJA e trazemos os resultados de algumas pesquisas sobre as particularidades na aprendizagem de conceitos matemáticos por este público.

É certo que as políticas e o breve histórico da EJA que fazemos neste capítulo é voltado para a alfabetização de Pessoas Jovens e Adultas. A motivação, para elencarmos neste estudo tal discussão, vem do nosso interesse em melhor compreender e caracterizar as políticas educacionais, vivenciadas por parte dos estudantes desta pesquisa.

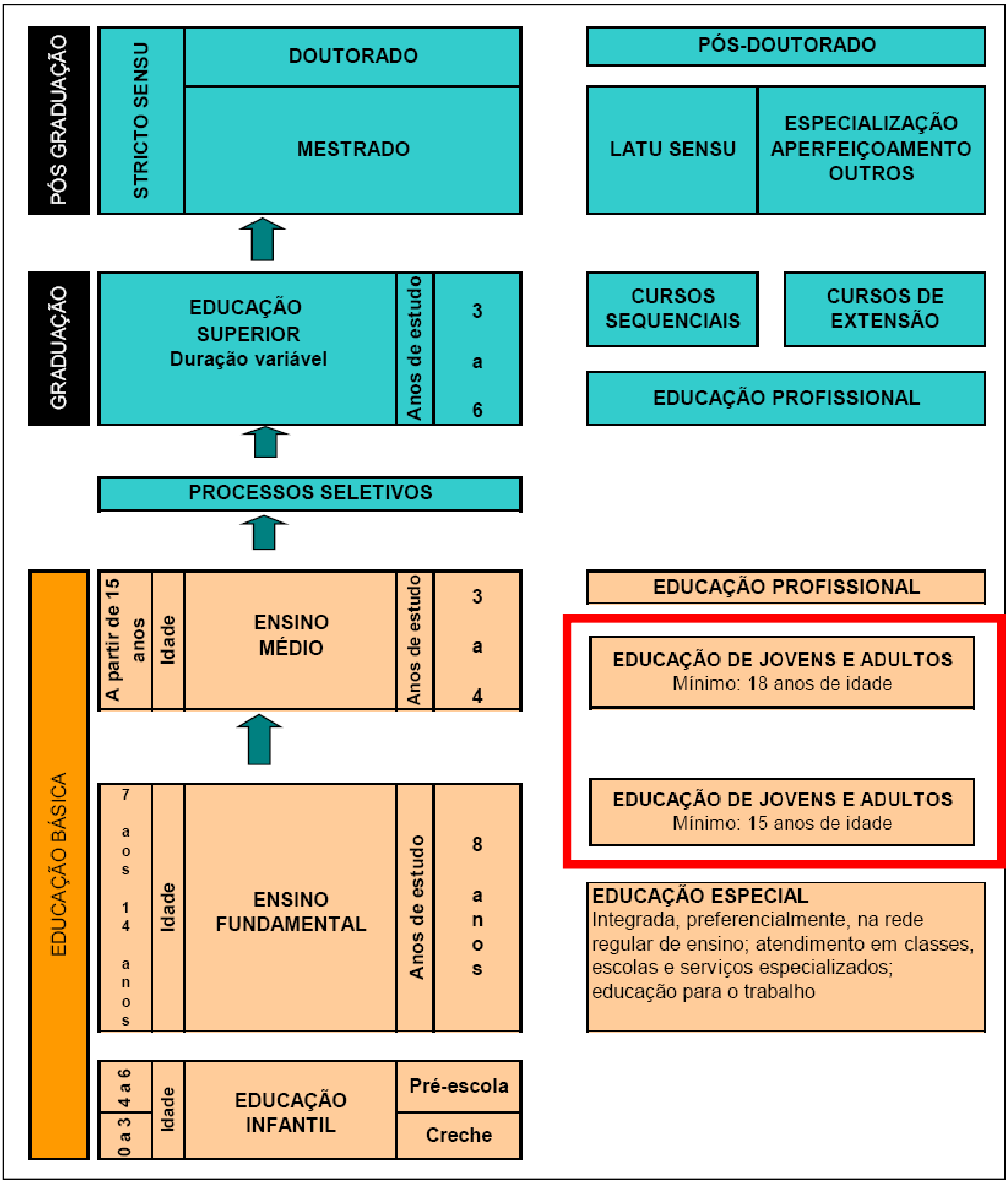
A organização atual do sistema educacional brasileiro obedece à Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB (Lei nº 9.394/96), que está vinculada à Constituição de 1988 e suas emendas constitucionais. O artigo 21 da LDB estabelece que a educação escolar é constituída em Educação básica e Educação Superior. A Educação Básica subdivide-se em Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A finalidade da Educação Básica, nível ao qual pertencem os participantes do nosso estudo, é, segundo o artigo 22 da lei citada, desenvolver o educando, assegurando-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

A Educação Básica pode ser oferecida no Ensino Regular e nas modalidades de Educação de Jovens e Adultos, Educação Especial e Educação Profissional.

A Figura 3, a seguir, apresenta a organização e estrutura da educação brasileira.

Figura 3 – Organização da educação brasileira



Disponível em www.oei.es/quipu/brasil/estructura.pdf<<acesso em 24 de junho de 2011>>

O diagrama que a Figura 3 exibe, foi elaborado antes da lei nº 11.274 de 06 de fevereiro de 2006, que regulamenta o Ensino Fundamental de nove anos, alterando os artigos 29, 30, 32 e 87 da LDB e tornando obrigatória a matricula nesse nível de ensino de crianças a partir dos seis anos de idade. Com isso, a educação infantil passa a atender às crianças de 0 a 5 anos e não de 0 a 6 anos como foi informado na Figura 3.

Retomando a nossa discussão sobre a Educação de Jovens e Adultos, é importante destacar que, para cursar o Ensino Fundamental, nessa modalidade, é preciso possuir uma idade mínima de 15 anos; já para o Ensino Médio a idade mínima exigida é de 18 anos (conforme destacamos no diagrama).

A LDB dedica o artigo 37 à EJA e estabelece que essa modalidade de ensino será destinada àqueles que não tiveram acesso ou oportunidade de dar continuidade nos estudos no Ensino Fundamental e Médio na idade própria. Ressaltando, ainda, a importância de que seja assegurada uma educação gratuita, de qualidade e que respeite as diversidades desse segmento da população.

Segundo Santos (2008, p. 3), o desafio atual da Educação de Jovens e Adultos é,

> reconhecer o direito do jovem/adulto de ser sujeito; mudar radicalmente a maneira como a EJA é concebida e praticada; buscar novas metodologias, considerando os interesses dos jovens e adultos; pensar novas formas de EJA articuladas com o mundo do trabalho; investir seriamente na formação de educadores; e renovar o currículo – interdisciplinar e transversal, entre outras ações, de forma que este passe a constituir um direito, e não um favor prestado em função da disposição dos governos, da sociedade ou dos empresários.

Uma das dificuldades comuns dos professores e professoras, que atuam com Jovens e Adultos, é justamente encontrar métodos que sejam capazes de atender às especificidades desse público, pois, num mesmo espaço-aula, reúnem-se pessoas de idades, atividades profissionais e sociais muito distantes. O desafio, dentre outros, é como atender a tantas diversidades e tornar úteis para a realidade de cada um os conhecimentos ali desenvolvidos.

É certo que, no Ensino Fundamental, voltado aos que estão na idade própria, essa também é uma questão que preocupa os professores. Na EJA, essa preocupação é ainda mais intensificada devido à “miscelânea de mundos” com olhares, compreensões e formas bastante diversificadas de tratar um mesmo objeto do conhecimento escolar.

Esses estudantes com idades, expectativas em relação à escola, atividades sociais e histórias de vida tão diferentes têm, na sua maioria, ao menos, uma característica comum, foram “expulsos” da escola por não terem se enquadrado no perfil com o qual ela sabe lidar, integrando o fenômeno da evasão escolar.

A evasão escolar é a nomenclatura utilizada para identificar os estudantes que abandonam a escola no decorrer do ano letivo. Os motivos do abandono escolar são, principalmente, provindos do desinteresse pelo que a escola oferece, da falta de estímulos, de motivos sócioeconômicos ou porque se sentem incapazes de serem aprovados.

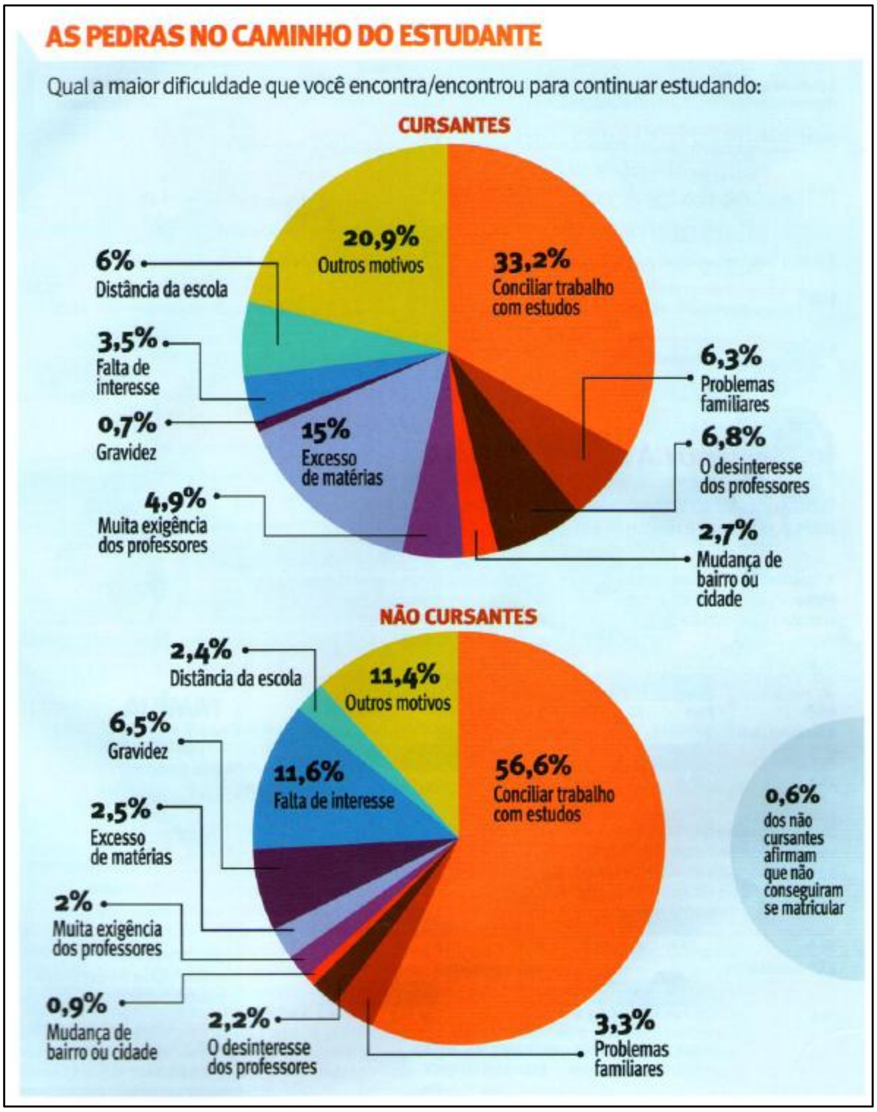
A síntese dos indicadores sociais do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, divulgada em setembro de 2010, aponta que o Brasil tem a maior taxa de evasão escolar do Mercosul. No Ensino Fundamental, a evasão é de 3,2% e no Ensino Médio 10%. A preocupação aumenta ainda mais quando se sabe que 50% dos jovens de 15 a 17 anos, que eram para estar matriculados no Ensino Médio, estão fora da escola, o que evidencia o gargalo do sistema educacional brasileiro.

Pesquisa realizada com 3.365 jovens, dentre esses, estudantes do Ensino Médio e pessoas que haviam largado os estudos entre 2006 e 2009, aponta as dificuldades mencionadas pelos que frequentam a escola e também pelos que precisaram abandoná-la (SOARES, NICOLELLA, GREMAUD, BELLUZZO JUNIOR, SCORZAFAVE, 2010). Segundo os autores, se o estudante espera que a escola seja mais dinâmica e inovadora e não tem o seu desejo atendido, aumentam em 21% as suas chances de abandoná-la. O estudo confirma que condições socioeconômicas, gravidez na adolescência e a defasagem idade-série são fatores que elevam as chances de evasão escolar no Ensino Médio.

O Gráfico 1, publicado pelo instituto Educar para Crescer, sintetiza as respostas dos participantes desta pesquisa para a seguinte questão:

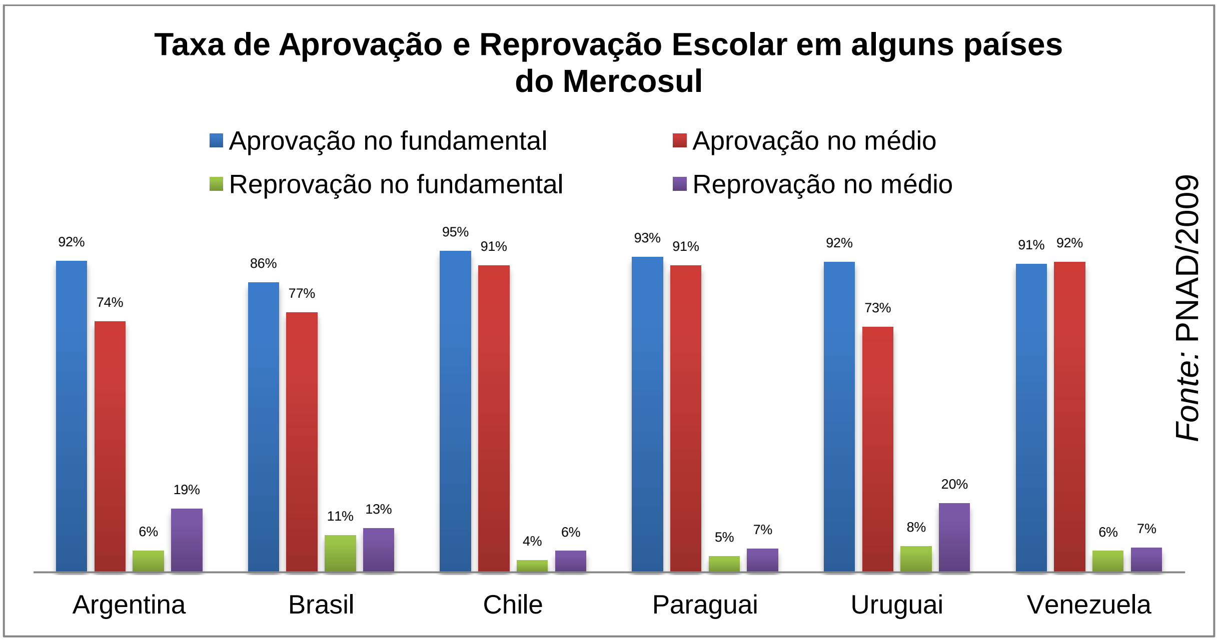
Qual a maior dificuldade que você encontra/encontrou para continuar estudando?

Gráfico 1 – Motivos apontados pelos estudantes para abandonarem a escola



A alta taxa de abandono escolar no Brasil tem sido o principal motivo pelo qual a EJA, criada para corrigir temporalmente a defasagem idade-série, tem se tornado uma política educacional permanente nutrida por um dos mais elevados índices de reprovação dentre alguns países do Mercosul, como mostra o Gráfico 2, que apresentamos a seguir.

Gráfico 2 – Taxa de Aprovação e Reprovação em países do Mercosul



Alguns dos estudantes que se evadem da Educação Básica sentem a necessidade de retornarem a escola mais tarde. Tal desejo costuma concretizar-se por meio da sua integração na Educação de Jovens e Adultos.

Entender as políticas públicas que trouxeram ou excluíram os adultos da escola pode ser um dos caminhos eficazes para uma melhor compreensão e caracterização dos Jovens e Adultos que frequentam atualmente o sistema educacional brasileiro. Por isso, propomos a seguir essa discussão. O ponto de partida do levantamento histórico que fazemos é a década de 30, quando se iniciam no país as principais políticas públicas voltadas para a EJA.

2.1 Um olhar para as políticas públicas na EJA

A primeira década do século XXI foi marcada no país por uma entusiasmada corrente, que comemora o avanço do Brasil em muitos setores da sociedade, inclusive na Educação, o que nos permite afirmar que o momento, ora vivido, pode ser considerado avançado se tomamos por referência a história da humanidade e particularmente a queda significativa da quantidade de brasileiros e brasileiras analfabetos. Além do mais, comemora-se, ainda, a elevação do grau de escolaridade, a redução, mesmo que tímida, do número de pessoas, que vivem abaixo da linha de pobreza e melhores índices de aprendizagem, como indicam as avaliações externas.

Essa euforia, embora tenha a sua razão de ser, não pode considerar a situação atual como o ponto de chegada almejado pelos que aqui vivem, mas como parte de um caminho que ainda não alcançou o seu destino.

O caminho conduzido pelas políticas de redução da taxa de analfabetismo ainda apresenta muitos percalços. Mesmo reconhecendo que houve uma redução do percentual de pessoas com 15 anos ou mais que não sabem ler ou escrever, de 56% nos anos 30 para 9,6% em 2010 (Censo 2010 divulgado pelo IBGE), essa ainda é uma mancha que envergonha e impede um estágio mais avançado no desenvolvimento do Brasil e na história da humanidade. De fato, 9,6% equivale a quase 14 milhões de brasileiros e brasileiras que tiveram negado o direito de conhecer e utilizar os códigos escritos da nossa língua e habilidades básicas de numeramento. Isto é uma questão política e social que indica o acúmulo de problemas do passado e o déficit de medidas governamentais para com essas pessoas.

Discutir e garantir educação para os adultos é reparar uma grande dívida social, tendo em vista que é uma tentativa, mesmo que tardia, mas necessária, de assegurar um direito humano fundamental, que é o exercício consciente da cidadania a um grande grupo de excluídos.

Nas últimas cinco décadas, as habilidades exigidas para identificar que uma pessoa está alfabetizada tem sofrido algumas modificações. Para a UNESCO, por exemplo, em 1958, um indivíduo era considerado alfabetizado se fosse capaz de ler e escrever um bilhete simples relacionado com a sua realidade. Mais tarde, por volta de 1980, a UNESCO sugere novos conceitos, que são os de analfabetismo e alfabetismo funcional. Atualmente, a UNESCO considera como alfabetizada funcionalmente o indivíduo que demonstra saber utilizar a leitura, a escrita e, ainda, apresenta habilidades Matemáticas. Com o domínio dessas habilidades, espera-se que o indivíduo possa fazer uso das mesmas para compreender e intervir nas demandas de seu contexto social e possa dar continuidade ao seu processo de aprendizagem seja na escola ou fora dela.

Para tal, é preciso, na alfabetização, ir além da decodificação das letras e das palavras e permitir aos educandos uma compreensão de mundo e de informações, apresentadas por meio de diversas linguagens, como, por exemplo, a linguagem Matemática. A alfabetização Matemática não pode ser desconsiderada no processo de alfabetização de adultos devido à necessidade contínua que todos têm de quantificar, calcular, medir, ordenar, compreender, tratar informações e se localizar espacialmente. Habilidades, que podem ser potencializadas com a aprendizagem Matemática formal.

A taxa de analfabetismo no Brasil é uma preocupação que se une ao alto índice de alfabetos funcionais, que alcança 21% da população segundo informações do IBGE/Pnad 2008, que sabem ler, mas não conseguem utilizar a leitura, a escrita e o cálculo nas atividades, que precisam desenvolver cotidianamente na comunidade onde vivem. Esse índice é medido pelo Indicador Nacional de Analfabetismo Funcional - INAF, que foi criado em 2001 com o objetivo de conhecer as habilidades de leitura, de escrita e de Matemática dos brasileiros de 15 a 64 anos de idade.

A distribuição dos percentuais de pessoas analfabetas e alfabetas funcionais é bastante desproporcional nas regiões do país. O nordeste brasileiro possui mais da metade dos analfabetos do país, e 31,6% da sua população, apesar de ser alfabetizada, não consegue utilizar as instruções da escola nas suas atividades sociais.

Após termos apresentado sucintamente a situação do povo brasileiro no que tange à escolarização, passaremos a discutir as principais estratégias adotadas no Brasil em favor da redução da taxa de analfabetismo. Nesse sentido, apresentaremos as tentativas de possibilitar e assegurar a essas pessoas a continuidade dos estudos e melhores condições de vida.

A nossa reflexão começa no ano 1930, quando, de acordo com a Câmara da Educação Básica, são encaminhadas as primeiras iniciativas sistemáticas para a Educação de Jovens e Adultos, face à obrigatoriedade da garantia do governo de oferecer ensino primário gratuito. Nesse momento, o Brasil vive uma perturbada situação política marcada basicamente pelo golpe de Estado, o Golpe de 1930, como é conhecido. Esse período foi marcado pelo fim da República Velha com a posse de Getúlio Vargas e pelo intenso processo de industrialização e encharcamento dos centros urbanos.

O sistema educacional brasileiro começa a se destacar por oferecer educação básica gratuita a diversos setores da sociedade, resultado das diretrizes educacionais traçadas pelo governo federal e que contemplou, também, a educação de adultos. Segundo Haddad e Di Pierro (2000, p. 111),

> após uma atuação fragmentária, localizada e ineficaz durante todo o período colonial, Império e Primeira República, ganhou corpo uma política nacional, com verbas vinculadas e atuação estratégica em todo o território nacional.

Com o fim do 1º governo de Getúlio Vargas e da Segunda Guerra Mundial em 1945, a Educação de Pessoas Jovens e Adultas adquire mais espaço, principalmente, com as recomendações da Organização das Nações Unidas – ONU, estimulando a paz e a democracia. A Educação de Adultos passa a ser vista como potencial para o aumento das bases eleitorais.

Em 1947, o governo lança a Campanha de Educação de Adolescentes e Adultos, voltada para moradores do campo, visando alfabetizar a população e reduzir o alto índice de analfabetismo, que atingia 56% da população com 15 anos ou mais. O desencadeamento dessa campanha também foi motivado pelas intensas pressões internacionais realizadas pela UNESCO, fundada em 1945, defendendo o princípio de que *"se a guerra nasce na mente dos homens, é na mente dos homens que devem ser construídas as defesas da paz."*

As abordagens pedagógicas desenvolvidas com os adultos eram as mesmas apresentadas às crianças, porque não eram conhecidos métodos específicos para os alfabetizandos adultos, o que foi suficiente para o surgimento de críticas contra a campanha.

> o material poderia ser usado de qualquer forma, com qualquer alfabetizador, ganhando qualquer coisa. Vê-se, dessa maneira [se referindo ao comentário do Professor Lourenço Filho, que era um dos idealizadores da campanha, onde expressou que ensinar a adultos é mais simples e mais rápido do que ensinar a crianças] que a primeira Campanha Nacional de Alfabetização se assentou sobre alicerces de bases fracas para sustentar um projeto nacional que alfabetizasse a população: foi uma ação emergencial que continuava a propor a erradicação do analfabetismo – visto como um mal em si mesmo – a curto prazo. (GALVÃO & SOARES, 2004, p. 43).

As críticas mais intensas vieram de educadores pernambucanos, principalmente de Paulo Freire que, em 1958, defendeu no II Congresso Nacional de Educação de Adultos que o processo de alfabetização de adultos deveria levar em consideração a sua realidade e que o adulto analfabeto deixasse de ser visto como alguém imaturo e ignorante, passando a ser tratado com um ser participativo e crítico na sociedade.

A campanha nacional de alfabetização lançada pelo governo não conseguiu alcançar uma redução significativa da taxa de analfabetismo, o que levou a causa a ser abraçada pela iniciativa popular, surgindo, assim, nos anos finais da década de 1950 e no início da década de 1960, diversos movimentos de educação popular em diferentes partes do Brasil.

No Nordeste, esses movimentos ganham maior força e expressão, principalmente por ser essa região a que apresenta a maior taxa de analfabetismo do país. A grande parte desses movimentos considerava na sua concepção as propostas freirianas. Entre eles, destacam-se o *Movimento de Educação de Base – MEB* desenvolvido pela Conferência Nacional dos Bispos do Brasil - CNBB, o *Movimento de Cultura Popular* – MCP da Prefeitura do Recife, os *Centros Populares de Cultura* – CPCs, idealizados e organizados pela União Nacional dos Estudantes - UNE, ainda a *Campanha de Educação Popular* - CEPLAR e o *De Pé no Chão Também se Aprende a Ler*, desenvolvido pela Prefeitura de Natal-RN.

A seguir, fazemos uma análise das principais políticas adotadas desde o Governo Militar até o Governo Lula a respeito da Educação de Jovens e Adultos.

2.1.1 A Alfabetização de Adultos no Governo Militar

Em 31 de março de 1964, inicia, no Brasil, o regime Militar e o estado passa a controlar todas as forças de oposição e tudo o que possa ir de encontro às suas imposições. Com a Educação de Adultos não foi diferente; por isso, a maioria dos programas de alfabetização de adultos foram extintos, tendo continuidade apenas o MEB que era promovido pela CNBB. Em contrapartida, em 15 de dezembro de 1967, o governo militar cria, por meio da Lei n.º 5379/67, o Movimento Brasileiro de

Alfabetização - MOBRAL, que se inicia em 1969. Esse movimento tinha como objetivo erradicar o analfabetismo. Além de propor o domínio da escrita e da leitura. O MOBRAL, principalmente a partir da década de 70, oferecia também educação continuada e profissionalizante.

O MOBRAL, apesar do apoio financeiro vindo de recursos da Loteria Esportiva e do imposto de renda, não apresentou resultados satisfatórios, sendo criticado pela falta de problematização e pela rápida duração. Nele, o alfabetizando era treinado para aprender a desenhar o nome, indo de encontro aos pressupostos defendidos pelos movimentos de educação popular.

Em 1985, o MOBRAL é extinto e, com o fim do Regime Militar, é criada a Fundação Educar, integrada ao Ministério da Educação, com a missão de unir governo e sociedade para acabar com o analfabetismo no país em 10 anos.

2.1.2 A Alfabetização de Adultos no Governo Sarney

Em 1984 os brasileiros vivam a esperança de poderem escolher diretamente o seu presidente, visto que, as décadas anteriores tinham sido marcadas por muita repressão, torturas e poucos avanços em quase todos os setores do país, principalmente na educação, que foi fortemente prejudicada com as posturas alienantes da ditadura militar.

O sonho de cada brasileiro poder eleger o seu presidente, precisou ser adiado. Embora, a abertura do processo político por eleições indiretas, já indicava, ao menos, a transição de processo ditador para a democracia do Brasil. O colégio eleitoral elegeu em 1985 para Presidente da República o mineiro Tancredo Neves, que foi internado, na véspera da posse marcada para 15 de março de 1985 e faleceu em 21 de abril do mesmo ano.

Com a morte de Tancredo Neves, assume o governo o vive-presidente José Sarney, dele, espera-se uma nova história para a democracia, o crescimento e a educação do pais.

Com a mobilização de diversos movimentos organizados, foi elaborada uma nova Constituição, considerada um avanço nas nova conquistas de direitos da sociedade. A nova Constituição Federal de 1988, também foi chamada de Constituição dos Direitos (ou Constituição Cidadã), dada a sua importância para todas as dimensões da sociedade.

Na educação, a sua maior contribuição, foi atender os anseios do povo frente ao novo momento que se despontava no país, assegurando-os legalmente, já que numa lista de direitos sociais a educação ocupou lugar privilegiado (Título VIII, Capítulo III, artigo 205),

> A educação direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, artigo 205 da CF).

Particularmente, na Educação de Adultos, a Constituição de 1988, defende no artigo 208 que,

> O dever do Estado com a educação será efetivado mediante a garantia de:
> I – ensino fundamental, obrigatório e gratuito, assegurada, inclusive, sua oferta gratuita para todos os que a ele não tiveram acesso na idade própria;
> II – progressiva universalização do ensino médio gratuito.
> .

A maior contribuição do Governo Sarney, para a Educação de Adultos foi a Constituição Federal de 1988, inclusive, porque, mais uma vez, defendia a educação de qualidade como um direito do cidadão e um dever do estado, independente da idade considerada escolar. O artigo 208, da Constituinte de 1988, foi o marco legal, para muitas das campanhas, projetos e pesquisas que tinham como propósito primeiro reduzir as taxas de analfabetismo do país, ao mesmo tempo em que, estava sendo assegurado um direito do cidadão ainda não escolarizado.

Das campanhas anteriores, ainda permanecia em funcionamento neste governo, àquelas administradas pela Fundação Educar, que como vimos, foi criada, logo após o fim do Regime Militar.

2.1.3 A Alfabetização de Adultos no Governo Collor e Itamar Franco

Fernando Collor de Melo assume a Presidência da República em 1990. O então Ministro da Educação Carlos Alberto Gomes Chiarelli e a Fundação Educar organizam encontros com especialistas e profissionais que atuavam na Educação de Jovens e Adultos para organizarem as estratégias necessárias à execução do Ano Internacional da Alfabetização, que a UNESCO definiu como sendo o ano de 1990.

Ironicamente, a Fundação Educar é extinta em 1990, ano destinado à conscientização das nações mundiais sobre a prioridade que devia ser dada à alfabetização. Com o fim dessa fundação, é desarticulada a Comissão Nacional para o Ano Internacional da Alfabetização - CNAIA e a preocupação com a alfabetização de adultos é deixada de lado. Essa interrupção nas políticas da EJA partia da compreensão de que as necessidades desse público reduziam-se ao mercado de trabalho; portanto, era responsabilidade das empresas oferecerem aos Jovens e Adultos a educação necessária para o desempenho de uma função.

No Ano Internacional da Alfabetização, motivado pelo grande número de seminários, encontros e discussões acerca do problema da Alfabetização de Adultos no Brasil, o Governo Collor lança o Programa Nacional de Alfabetização e Cidadania – PNAC, com o objetivo de reduzir, em cinco anos, em 70% a taxa de analfabetismo no Brasil, que atingia 18% da população com 15 anos ou mais. O Programa logo entra em crise devido a denúncias de investimentos em instituições que não tinham nenhum trabalho voltado para a alfabetização de adultos.

Com o impeachment do presidente Collor, Itamar Franco assume o governo. O novo presidente parece preocupar-se com esta modalidade de ensino, defendendo a alfabetização de adultos e priorizando uma política de continuidade dos estudos, assegurando o Ensino Fundamental voltado também para a Educação de Adultos.

As principais evidências dessa preocupação são: criação de uma Comissão Nacional formada por profissionais que discutem a Educação de Jovens e Adultos no Brasil para traçarem estratégias específicas para esse público junto ao Plano Decenal de Educação - PDE (1993/2003); início das discussões para a reformulação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e a criação em 1994 do documento Diretrizes para uma Política Nacional de Educação de Jovens e Adultos.

Apesar das contradições do governo no espaço ocupado pela EJA nas políticas educacionais, onde de um lado defendia o cumprimento do artigo 208 caput, inciso I, que trata do dever do Estado com a educação ser efetivado mediante a garantia de ensino fundamental, obrigatório e gratuito, inclusive para os que a ele não tiveram acesso na idade própria; de outro, enfatizava que a prioridade não poderia deixar de ser a criança. De todo modo, o plano apresentou contribuições significativas para a EJA, principalmente, por expressar o reconhecimento do papel do governo na Educação de Jovens e Adultos.

Com o fim do Governo Itamar Franco em 1994, Fernando Henrique Cardoso assume em 1995 e, mais uma vez, tem-se uma quebra das políticas públicas voltadas para a Educação de Adultos, como vamos discutir a seguir.

2.1.4 A Alfabetização de Adultos no Governo Fernando Henrique Cardoso

O governo Fernando Henrique Cardoso – FHC, foi marcado por mudanças no sistema econômico do país e por uma preocupação em se aproximar dos princípios neoliberais. Com isso, as prioridades passaram a ser a reforma do estado e o ajuste econômico, considerando as orientações de organismos financeiros internacionais. (DI PIERRO, 2001, p. 323).

Na educação, o propósito era alcançar melhores índices de qualidade, mas com pouca elevação dos gastos públicos. Por isso, o governo prioriza o Ensino Fundamental obrigatório, regulamentando o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Magistério – FUNDEF, por meio da Lei 9.424 em 1996.

No âmbito da Educação de Jovens e Adultos, o governo FHC veta a inclusão desses alunos no FUNDEF, o que desestimula a criação de turmas exclusivas para estudantes da EJA no Ensino Fundamental. Com a falta de investimentos públicos voltados para alunos Jovens e Adultos no Ensino Fundamental, resta a esses alunos frequentar o Ensino Fundamental dito regular e se adaptarem a uma realidade que na maioria das vezes, estava distante daquilo que buscavam na escola.

Adolescentes e adultos passam a conviver numa mesma sala de aula, gerando um cenário desagradável para os dois grupos, devido às diferentes expectativas e aos comportamentos característicos de cada idade.

2.1.5 A Alfabetização de Adultos no Governo Lula

O operário pernambucano Luis Inácio Lula da Silva é eleito presidente em 2002. Essa eleição trouxe para o povo brasileiro a esperança de muitas mudanças, tanto na forma de enfrentamento das políticas econômicas, quanto sociais e educacionais.

Na EJA, esperava-se que o MEC retomasse a coordenação das políticas públicas para essa modalidade de ensino e que o artigo 214 da Constituição Federal, que considera como uma das prioridades do estado a erradicação do analfabetismo, fosse cumprido, assim como os acordos nacionais e internacionais, que exigem do país a oferta de educação pública de qualidade para todos, inclusive aos que não tiveram acesso a ela na idade própria, como também regulamenta a LDB no artigo 37.

A esperança de uma mudança na política econômica do Governo Lula em relação à adotada pelo governo anterior foi morrendo aos poucos, quando nos seus oito anos de governo, o que se viu foi uma continuação do modelo adotado pelos governos anteriores, não acontecendo a ruptura esperada por grande parte da sociedade com as instituições conservadoras.

Ainda no início do governo, educadores, pesquisadores e instituições ligadas à EJA, decepcionadas com a postura de continuidade, até então adotada pelo Governo Lula, mobilizam-se e conseguem em 8 de setembro de 2003 aprovar o decreto 4.834 que regulamenta a Comissão Nacional de Alfabetização e Educação de Jovens e Adultos - CNAEJA. Essa comissão dá continuidade ao diálogo existente entre os movimentos sociais e o governo, o que fora interrompido no Governo FHC.

Dentre as importantes conquistas do CNAEJA, está a inclusão do Educação de Jovens e Adultos nas políticas de financiamento da educação, o que ocorreu com o fim do FUNDEF e a criação do Fundo de Desenvolvimento da Educação Básica - FUNDEB, que passa a considerar no âmbito da contagem e do repasse de recursos, todos os alunos matriculados na Educação Básica, independente da modalidade.

A inclusão dos alunos da EJA, nas políticas financeiras do governo, permitiu a criação de turmas exclusivas para esses alunos, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio, apesar de que o valor destinado aos alunos dessa modalidade foi inferior ao mínimo nacional estabelecido por aluno/ano, chegando a apenas 80% da quantia mínima regulamentada pelo governo.

Essa nova postura do governo abriu caminhos para que a escola pudesse oferecer aos alunos Jovens e Adultos, uma educação mais próxima das suas especificidades, o que certamente, constitui um fator positivo.

É certo que a Educação de Jovens e Adultos não carece apenas de financiamento do governo, sem aqui pretendermos reduzir a importância dessa ação. Mas, sobretudo, carece de uma reflexão mais ampla, que envolva educadores, pesquisadores, governo e sociedade.

Entre essas discussões, está o papel do professor, que atua com esses alunos, que precisa considerar o conhecimento de “mundo” que eles já possuem, para, a partir daí, propor novas situações, que permitam a ressignificação e ampliação desses conhecimentos, sem que jamais o conhecimento do “roceiro” seja tido como menos importante do que o conhecimento que a escola transmite. Por isso, Freire enfatiza que o professor deve partir do conhecimento que os alunos já possuem.

> Tenho de começar pelo lado oposto, ao de meus alunos. Meu conhecimento é uma realidade minha não deles, então, tenho de começar a partir da realidade deles para trazê-las para dentro da minha realidade. (1990, p. 127).

No item seguinte, discutiremos alguns pontos que merecem ser considerados pelos professores, especialmente, pelos que atuam no ensino de Matemática nessas turmas, a fim de atender às particularidades desse público.

2.2 Especificidades do ensino de Matemática na EJA

A preocupação com as especificidades do ensino de Matemática na Educação de Jovens e Adultos tem motivado alguns pesquisadores (PORTO e CARVALHO, 1995; FONSECA, 2002, ALBUQUERQUE, 2010) a investigarem as potencialidades e dificuldades desses estudantes na aprendizagem de conceitos matemáticos. Alguns desses trabalhos, foram desenvolvidos tanto com estudantes da Educação de Jovens e Adultos, quanto com estudantes da Educação Básica regular a fim de identificar possíveis particularidades na aprendizagem de conceitos matemáticos na EJA.

> Reflexões sobre o ensino na Educação de Jovens e Adultos - EJA em situações de capacitação, seminários, eventos científicos diversos, têm confirmado a importância do ensino da Matemática na EJA ao tempo em que indicam preocupação com o descompasso entre esse reconhecimento e os investimentos em estudos que contribuam para qualificação do ensino nesta área (PORTO e CARVALHO, 2000, p. 3).

Nesse texto, faremos uma breve descrição de algumas dessas pesquisas com o objetivo de apontar as especificidades existentes ou não na aprendizagem de alguns conceitos matemáticos por alunos da EJA ou por alunos adultos matriculados na Educação Básica regular. Além do mais, chamamos a atenção para a motivação e objetivos dessa modalidade no Ensino Fundamental.

Iniciamos, destacando que a motivação para a aprendizagem de Matemática na EJA dá-se pela utilidade do conhecimento, que precisa ser significativo, considerar as suas atividades sociais e lhes conferir sentido. Mas, é importante que a dimensão formativa da Matemática não seja deixada de lado, mas tratada de modo diferente do qual os conceitos matemáticos são apresentados às crianças (FONSECA, 2002). Outra questão a ser considerada pelo professor de Matemática que atua na EJA é a formação do aluno leitor, como aponta Cardoso (2000), enfatizando que esse é o principal objetivo do Ensino Fundamental.

No caso de Matemática, isso pode se dar por meio da contextualização do conhecimento, seja a contextualização por meio de uma situação-problema, seja a contextualização histórica e a evolução daquele conhecimento ao longo das civilizações. É certo que essa preocupação não é específica dos profissionais que atuam na EJA, devendo ser também considerada pelos professores do Ensino Fundamental chamado regular.

As situações hipotéticas e forjadas para o ensino regular precisam ser analisadas quanto a sua adequação à EJA, hajam vista as ricas experiências em diversas situações da vida real desses alunos, que vão além do mundo da imaginação, que muitas vezes, é criado na escola.

Porto e Carvalho (2000), com o objetivo de investigarem as formas de conhecer e representar números decimais, evidenciados pelos estudantes da EJA, e motivadas pelas intensas dificuldades apresentadas pelas crianças e adolescentes do 4º ao 6º ano, na aprendizagem destes números, desenvolveram a pesquisa ora apresentada.

Essa investigação tentou responder às seguintes questões: Estariam os estudantes tratando os decimais como se fossem inteiros? Que concepções geradas a partir dos números inteiros estariam subjacentes à utilização dos números decimais? Como as situações de ensino estariam (des) favorecendo a apropriação desse domínio matemático em jovens e adultos/as? Que influência teria os conhecimentos matemáticos prévios de alunos/as jovens e adultos/as na situação de aprendizagem de números decimais?

Os dados da pesquisa foram coletados por meio de 6 duplas de estudantes de uma turma de Educação de Jovens e Adultos do Ensino Fundamental (5º e 6º ano) com idades variando de 18 até 50 anos, num centro público de ensino.

Os procedimentos do estudo envolveram observações de sala de aula, sessões de resolução de situações-problema de comparação e conversão de medidas métricas, temporais e de computação de cálculos com números sem referentes explícitos, e por fim, estudo piloto das tarefas para adequação ao método pensado. Além do mais, realizou-se uma microanálise das situações de estudo--ensino na sala de aula, observando a relação aluno-aluno e professor-aluno no decorrer das atividades propostas.

As ações dos estudantes e do professor foram analisadas como episódios capazes de identificar a emergência de discursos dentro da sala de aula.

Para as autoras a análise do ato pedagógico, no ensino de números decimais (e de modo geral na Matemática), deve considerar três dimensões

> 1. a primeira, um saber matemático específico e socialmente construído: os sistemas de representação numérico e de medição organizados a partir de princípios e normas Matemáticas determinadas e transmitidas culturalmente. Enquanto sistemas numéricos se organizam a partir de agrupamentos diferenciados: unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, para os inteiros e décimos, centésimos, milésimos para os decimais. Os sistemas de medição têm sua organização a partir de unidades de medida: metro, litro, quilo, hora, ano, e suas respectivas sub-unidades. Assim, o conceito de unidade, fundamental para a compreensão de decimais, assume natureza diversa: numérica e de medição;
> 2. a segunda dimensão, estreitamente vinculada a anterior, identifica como o professor faz a transposição desse conhecimento para situações didáticas na sala de aula. Ou seja, como o professor reorganiza ou reestrutura os saberes a partir das necessidades de aprendizagens características dos indivíduos e como os vincula ao seu cotidiano;
> 3. a terceira dimensão abrange a compreensão que os alunos desenvolvem em situações didáticas específicas. Em particular, as pessoas jovens e adultas têm experiências acumuladas ao longo de sua existência e, portanto, pensam, têm motivações, competências, saberes e atitudes particulares (PORTO e CARVALHO, 2000, p. 8).

Os resultados deste estudo apontaram um distanciamento entre uma prática pedagógica voltada para uma aprendizagem significativa de conceitos matemáticos e o que realmente acontece no cotidiano da sala de aula. Os dois professores analisados, não privilegiaram, em nenhum momento dos episódios apresentados, a interação com os estudantes. Além do mais, no ensino dos números decimais, mesmo lidando com adultos, que são ricos em imaginar cenários em que esses conceitos aparecem, utilizaram somente o método memorístico e a falsa crença de que aprender a movimentar vírgulas, num só tipo de representação, é suficiente para o estudante adulto, adolescente ou criança desenvolver a competência de aplicar os números decimais e as suas operações com eficiência em situações práticas do seu dia a dia ou em outros conceitos construídos na escola.

Silva (2006) investigou os saberes de adultos e crianças sobre a aprendizagem e resolução de situações envolvendo números decimais. A sua investigação pretendeu responder à seguinte questão: O que sabem adultos e crianças sobre números decimais, antes e após o ensino formal na escola?

Ainda, estava em questão o papel da instrução escolar sobre o desempenho dos estudantes, uma vez que os participantes do estudo foram organizados em quatro grupos com 16 estudantes em cada um deles, caracterizados do seguinte modo:

O Grupo 1 era formado por estudantes de 9 a 11 anos, que frequentavam o 5º ano do Ensino Fundamental e ainda não possuíam escolarização sobre o conceito de números decimais, tampouco sobre as suas operações.

O Grupo 2 foi constituído por estudantes de 11 a 15 anos, que cursavam o 7º ano do Ensino Fundamental, diferenciando-se do primeiro tanto pela faixa etária quanto pela escolarização sobre os números decimais.

Do Grupo 3 participaram estudantes do Módulo I da EJA (que corresponde ao 1º e 2º ano do Ensino Fundamental regular) de 24 a 73 anos de idade, marcados por possuírem ampla experiência de prática social com os números decimais, mas sem possuírem escolarização sobre esse conceito.

Finalmente, no Grupo 4, estavam estudantes do Módulo IV (8º e 9º ano do Ensino Fundamental regular) de 16 a 39 anos de idade e marcados por experiência social e escolar com os números decimais.

Nesse formato, cada grupo funcionou como controlador dos demais, ou seja, os Grupos 1 e 2 diferenciavam-se na experiência escolar formal com números decimais; no entanto, não possuíam experiência social com esse conteúdo como descrito acima. Já os Grupos 3 e 4, apesar de apresentarem certa experiência social com a aplicação dos números decimais, diferenciavam-se na escolaridade desses números.

A coleta dos dados se iniciou por meio de uma entrevista individual sobre os conhecimentos dos participantes sobre os números decimais. Em seguida, foram apresentadas individualmente 16 questões sobre esses números, recorrendo ao método clínico de coleta de dados.

Os principais resultados deste estudo, apontam para a importância dos conhecimentos cotidianos na aquisição das competências relativas aos números decimais e as suas operações, o que justifica o melhor desempenho dos adultos.

Com essa investigação, a autora conclui que os conhecimentos construídos pelos estudantes fora da escola não podem ser deixados de lado na hora de avançar na construção de conceitos matemáticos na escola, principalmente quando esses referem-se aos números decimais, embora admita que alguns conceitos prévios, sejam eles da vida social ou escolar, possam funcionar como obstáculo para o desenvolvimento de novos conceitos.

A pesquisa confirma que os conhecimentos adquiridos pelos adultos na sua prática social favorecem a resolução de problemas com números decimais, sobretudo no uso de representações orais. Contudo, os adultos e as crianças, até mesmo as escolarizadas, ainda apresentam muitas dificuldades em diversos aspectos da compreensão dos números decimais.

No que se refere à comparação realizada entre adultos e crianças no estudo de Silva (2006) sobre as competências de resolução de problemas com números decimais, os adultos apresentaram melhor desempenho; até mesmo os estudantes adultos da EJA sem escolarização no conteúdo obtiveram mais sucesso nas atividades que as crianças que já haviam estudado números decimais na escola.

Os adultos obtiveram melhor desempenho nas atividades verbais, apresentando em alguns casos erros na hora de escrever um número decimal, sendo o mais frequente a omissão da vírgula.

Outro aspecto importante observado nesta pesquisa foi a falta de influência da escolaridade no desempenho dos grupos estudados.

A aprendizagem do conceito de números decimais tanto por adultos quanto por crianças é fortemente influenciada pelas diferentes situações nas quais os números decimais são abordados, como, por exemplo, o contexto monetário é mais facilmente compreendido por todos os estudantes que o contexto métrico. As formas de representação também trazem características, que podem facilitar ou dificultar a aprendizagem desse conceito.

Estudantes adultos, que não dominam a escrita, preferiram utilizar o cálculo mental para resolver as situações propostas, enquanto as crianças procuram recorrer aos registros até mesmo para responder aos problemas verbais.

Retomando a discussão sobre a influência dos significados na aprendizagem do conceito de decimais nos participantes dessa investigação, Silva (2006) notou que o significado de decimal enquanto fração de um todo parece já ser compreendido pela maior parte dos alunos adultos. Mas, todos os participantes do estudo ainda desconhecem a compreensão de decimais enquanto quocientes.

Com relação às principais dificuldades encontradas nesse estudo sobre a aprendizagem de números decimais, a autora destaca as seguintes concepções apresentadas pelos estudantes: o número maior é o que tem a parte decimal com o maior número de dígitos; o número é maior quando tem mais zeros depois da vírgula; obedece, na parte decimal, à mesma lógica dos números inteiros, exemplo 10,25 > 10,5.

O estudo aqui descrito aponta que trabalhar o conceito de número decimal em contextos variados facilita a aprendizagem sobre os diferentes significados desse conceito, bem como sobre suas propriedades e formas de representação.

Os números decimais também foi objeto de estudo para Gomes e Borba (2008) que investigaram os conhecimentos sobre números decimais de estudantes da EJA, que exercem diferentes profissões, procurando identificar as estratégias utilizadas pelos adultos quando resolviam os problemas envolvendo números decimais, também, foi verificado se as estratégias mobilizadas pelos estudantes em situações, que consideravam o seu cotidiano, seriam aplicadas em outros problemas nos quais o contexto não fosse familiar para os estudantes, mas que apresentassem mesmos significados, mesmas possibilidades de representações simbólicas e os mesmos invariantes.

A pesquisa foi desenvolvida com quatro pedreiros e quatro marceneiros estudantes dos Módulos I e II em uma escola pública. Os participantes responderam a 12 questões apresentadas pelas pesquisadoras por meio de entrevistas clínicas. Os problemas foram elaborados com os seguintes contextos: construção civil, marcenaria e agricultura. O objetivo da escolha desses contextos era verificar a influência do contexto profissional nas estratégias dos participantes.

Os resultados deste estudo indicam que o índice de acertos dos estudantes nas questões foi bastante satisfatórios, sendo superior a 80% em todos os problemas e grupos (pedreiros e marceneiros). A análise das estratégias deixa claro que os profissionais estudantes aplicaram conhecimentos dos contextos, que lhe são familiares para resolver situações onde isso não acontece. O trecho abaixo extraído de Gomes e Borba (2008, pág. 11) comprova essa afirmação:

> “Quase o mesmo problema da primeira pergunta. É, é. Só muda que aqui é que vou trabalhar como pedreiro”. (Marceneiro1)
> “Vou ter de fazer a mesma conta. É, a mesma conta que estava fazendo na cerâmica”. (Pedreiro 2).

A profissão de pedreiros e marceneiros influenciou as estratégias e o sucesso na resolução dos problemas propostas, o que indica que esses profissionais sem escolarização formal sobre os números decimais conseguem resolver situações relacionadas ao seu contexto profissional envolvendo números decimais. No caso de o problema ser de outro contexto, eles também o resolvem, mas “adaptando” as suas atividades profissional, como foi visto acima.

As autores chamam a atenção para a importância dos resultados obtidos nesse estudo para a prática do professor que atua com profissionais estudantes da Educação de Jovens e Adultos.

> Partindo destes resultados, queremos ressaltar que é de grande importância que os alunos da EJA recebam um tratamento diferenciado no que diz respeito à introdução formal do conceito de número decimal na escola, uma vez que muitos deles podem demonstrar ter um conhecimento já construído e bem elaborado deste campo numérico, que precisa ser reconhecido, aproveitado em sala de aula e valorizado pela escola (GOMES e BORBA, 2008, p. 20).

As habilidades apresentadas pelos estudantes profissionais em determinados tipos de problemas ou conceitos, podem, segundo as pesquisadoras, ser aproveitadas para que esses profissionais atuem como mediadores com estudantes, que ainda não possuem as habilidades necessárias para a compreensão do contexto ou dos conceitos nos problemas propostos na sala de aula.

A aplicação de uma estratégia familiar do profissional estudante em um contexto não familiar é uma excelente oportunidade para que o professor provoque o desenvolvimento de novas competências, recorrendo a contextos desconhecidos.

Ferreira (2010) analisou as relações estabelecidas entre os conhecimentos matemáticos escolares e os conhecimentos cotidianos, que são explicitadas por estudantes matriculados no Ensino Médio da EJA. Esse nível educacional tem como proposta uma abordagem mais sistematizada dos conhecimentos. Segundo a autora, essa proposta pode provocar uma tensão principalmente na EJA que requer com mais evidência uma ponte entre conhecimentos cotidianos e conhecimentos escolares. A pesquisa trata do conflito conhecimento cotidiano e conhecimento escolar na EJA a partir de conceitos matemáticos.

O método utilizado para a coleta dos dados foi a observação de 25 aulas, numa turma do 1º ano com 40 estudantes da EJA Médio e a realização de algumas entrevistas estruturadas e não estruturadas com esses estudantes.

O trecho a seguir, foi retirado de Ferreira (2010, p. 87) e mostra parte de um diálogo entre Regina e Rosilene, com 40 e 41 anos respectivamente. A discussão delas começa quando, ao calcular o valor numérico da função dada para x = 0, obtêm-se f(0) = 0 – 1.

> As alunas Rosilene e Regina, que são irmãs, discutem enquanto resolvem o item a da Questão 1:
>
> 1 – Dada a função definida por $f(x) = 2x^2 - 1$, calcule:
>
> a) f(0) b) f(5) c) f(-3) d) f(-1)
>
> Regina (para Rosilene): *Se você não tem nada, vai tirar um como? Não tem jeito...*
> Rosilene: *Vamos fazer de novo, às vezes a gente fez errado...*
> Após algum tempo...
> Rosilene: *Não, dá negativo*. *Lembrei ó: zero menos um é menos um. Como nós são burra, Regina!*

A questão, apesar de tratar do comportamento de uma função quadrática a partir dos valores numéricos assumidos pela variável (**x**), torna-se um obstáculo para Rosilene e Regina por demonstrarem, ao menos a princípio, dificuldade na compreensão do conceitos de números inteiros relativos (*Se você não tem nada, vai tirar um como?*), o que confirma o posicionamento de Borba (2009) ao dizer que a não aprendizagem do conceito e das operações de inteiros relativos perturba a aprendizagem de outros campos conceituais, como ocorre nessa questão.

O estudo mostra que a relação que os estudantes fazem entre conceitos matemáticos cotidianos e conceitos matemáticos escolares apresentam algumas contradições. Se de um lado eles são unânimes em defender a importância da Matemática nas suas atividades diárias, como se vê nos seguintes trechos dos seus discursos *“acho que desde o presidente a um vendedor ambulante todos usam a Matemática”; “eu uso Matemática nas compras do dia-a-dia, porque sou dona de* *casa e faço a administração do dinheiro da casa"; "precisamos dela no nosso cotidiano."* Por outro lado, quando esses estudantes falam de aprender Matemática demonstram suas frustrações e conflitos, questionando a forma como aprendem Matemática na escola e a concepção de incapacidade de conseguir aprender esse tipo de Matemática; *"Matemática não serve pra quem tem preguiça de pensar, e nas memórias fracas como a minha... e olha que eu me esforço..."; "tem dias que a gente quer sumir, que a gente não dá conta da Matemática...".*

A autora defende que esses conflitos são resultados de uma prática pedagógica onde a Matemática é tratada num mundo independente de variáveis externas, o mundo da Matemática. Essa forma de ensinar e entender a Matemática, segundo Ferreira, também é bastante comum nas práticas de numeramento escolares nas quais a repetição é privilegiada em detrimento da reflexão, o que reduz a Matemática a uma atividade puramente escolar.

Analisar a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos em processo de escolarização sobre problemas de estrutura multiplicativa, de modo particular aqueles que tratam do raciocínio combinatório foi a pesquisa realizada por Lima (2010). O estudo envolveu 150 estudantes da EJA de cinco instituições de ensino matriculados desde os módulos correspondentes às séries iniciais do Ensino Fundamental até o Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Jovens e Adultos - PROEJA.

Os participantes do estudo foram organizados em cinco grupos conforme a modalidade de ensino que estavam cursando. As variáveis controladas foram série (Módulo I, II, III, IV e PROEJA) e o tipo de problema (quotição, combinação, partição, permutação, produto cartesiano inverso, multiplicação direta, arranjo e produto cartesiano direto). Além disso, a pesquisadora ainda observou a influência exercida pela profissão dos participantes, anos de estudo e faixa etária.

A coleta de dados foi feita por meio de um de um teste constituído de 16 questões de multiplicação e de combinatória, sendo duas questões para cada tipo de problema. A análise das respostas apresentadas contou com as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.

Um dos objetivos do estudo foi comparar o desempenho dos estudantes adultos em função da escolaridade. Nessa comparação, percebeu-se que a escolarização influenciou no desempenho dos participantes em relação à compreensão dos significados dos problemas. Com isso, os estudantes do PROEJA (Ensino Médio Profissionalizante) apresentaram resultados significativamente superiores àqueles do Ensino Fundamental (Módulos I, II, III e IV). O mesmo aconteceu entre os participantes que estavam matriculados nos módulos, isto é, quanto mais elevado o módulo, mais satisfatório o entendimento dos problemas pesquisados.

Os problemas de combinação e de arranjo foram os que os estudantes apresentaram menor desempenho, talvez porque, geralmente, tentavam resolver essas questões listando as possibilidades, o que, dependendo da natureza dos números, pode tornar-se um obstáculo devido a dificuldade de esgotar todas as possibilidades.

Além da escolarização e do tipo de problema, a profissão demonstrou ter influência no sucesso dos adultos participantes do estudo, onde o grupo formado pelos profissionais ligados ao setor de transportes alcançou resultados mais satisfatórios que o grupo formado pelas trabalhadoras domésticas, por exemplo.

Os problemas compreendidos mais facilmente foram os de multiplicação direta, quotição e partição, o que, segundo a autora, pode ser justificado pelas diversas atividades comuns nas salas de aula desde os anos iniciais de escolarização. Já entre os problemas combinatórios, os do tipo produto cartesiano, permutação, combinação e arranjo foram, nessa ordem, melhor entendidos pelos estudantes.

A autora conclui que a escola exerce um papel essencial no desenvolvimento do conhecimento combinatório principalmente devido à sua influência na formalização e sistematização desses conhecimentos, o que ocorre a partir da percepção dos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação usados pelos estudantes.

Milka Rossana Guerra Cavalcanti de Albuquerque realizou um estudo comparativo com adultos e crianças com o objetivo de responder à seguinte questão: Como adultos e crianças dos anos iniciais de escolarização compreendem a escala representada em gráficos de barras e de linha.

Albuquerque (2010) desenvolveu essa pesquisa com 152 alunos (84 crianças e 68 adultos) de escolas públicas da Região Metropolitana do Recife, sendo os mesmos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental e Módulos I,II e III da Educação de Jovens e Adultos, ambos correspondentes aos anos iniciais de escolarização.

A investigação partiu de quatro variáveis (o tipo de gráfico; o valor da escala; a necessidade de o aluno localizar um valor implícito ou explícito na escala, ou de localizar uma frequência ou uma categoria a partir da escala) apontadas como importantes por estudos anteriores para a compreensão da escala apresentada em gráficos.

A motivação da autora para estudar adultos e crianças partiu da sua crença de que a experiência de vida é um fator muito importante capaz de influenciar no desempenho dos alunos que frequentam a EJA. Já a opção por esses anos de escolarização se deu pela necessidade de investigar a influência da escolaridade na compreensão da escala representada em gráficos.

Os dados foram obtidos por meio de testes aplicados coletivamente na sala de aula e desenvolvidos a partir das dificuldades apresentadas em outros estudos e aproximando-se das atividades que são apresentadas nos livros didáticos no ensino de gráficos. Ainda, na escolha das questões, levou-se em consideração a importância dada por Vergnaud na variedade das situações para a construção de um conceito.

Cada teste foi composto de seis questões. As quatro primeiras questões diferenciavam-se quanto às seguintes variáveis: tipo de gráfico (de barras ou de linha), intervalo da escala (unitário ou não unitário), valor a ser localizado na escala (implícito ou explícito) e questionamento para localizar uma categoria a partir de uma frequência e vice-versa.

A análise dos resultados considerou a quantidade de acertos e os tipos de respostas que os participantes apresentaram. De modo geral, os estudantes, tanto adultos quanto crianças, apresentaram desempenhos insatisfatórios nos testes.

Na comparação entre o desempenho de adultos e crianças, as crianças, principalmente, as do 5º ano tiveram resultados mais satisfatórios que os adultos. O pior desempenho foi o dos adultos dos Módulos I e II, o que pode ter sido provocado pela ênfase dada ao processo de alfabetização visto que esses são os anos responsáveis por tal processo. Daqui, pode-se inferir que a escolarização tem grande influência na aquisição do conceito de escalas em gráficos, o que dialoga com o estudo realizado por D'Ambrósio (2007) onde se constatou que 47% dos sujeitos que se saíram bem em seu estudo tinham o Ensino Médio completo ou superior.

Outro resultado interessante é que, diferentemente do que esperava a autora e do resultado apontado por diversos estudos como o de Oliveira (1999), a profissão exercida pelos adultos não influenciou de modo significativo no desempenho dos mesmos, o que leva Albuquerque a concluir que a experiência de vida parece não contribuir para o aprendizado sobre escala, cabendo à escola trabalhar e sistematizar com os estudantes a compreensão de escalas representadas em gráficos.

Os estudantes tiveram mais facilidade na interpretação do gráfico de barras do que de linha, principalmente quando a escala é unitária. Essa familiaridade é motivada por ser esse tipo de gráfico o mais comum tanto nos livros didáticos quanto nos meios de comunicação.

Os resultados dão indícios de que os leitores entendem as informações vinculadas apresentadas pelas mídias por meio de gráficos, o que não quer dizer que compreendam as escalas utilizadas pelos gráficos. Estudo realizado por Cavalcanti e Guimarães (2008) mostram que 39% dos gráficos apresentam erros de proporcionalidade nos valores da escala utilizada, o que pode ser provocado por uma intencionalidade em manipular as informações. Assim, com a influência da escola ao trabalhar conceitos dessa natureza, espera-se a formação de leitores mais críticos.

Finalmente, quanto ao tipo de questão ser para localizar categoria ou frequência, a localização de uma categoria a partir de uma frequência é melhor compreendida do que a habilidade de localizar uma frequência conhecendo uma categoria, o que foi verificado nos adultos e nas crianças investigadas.

As pesquisas que aqui trouxemos tiveram o objetivo de refletir sobre a aprendizagens de conceitos matemáticos na EJA e no caso das que realizam estudos comparativos, no que o modo como adultos e crianças apreendem Matemática diferem. Desse modo, os estudos aqui mencionados, justificam-se nesta pesquisa, porque eles, como o nosso, se interessam pelas especificidades e potencialidades de pessoas adultas na aprendizagem de conceitos matemáticos.

Do diálogo entre esses estudos percebemos que as atividades cotidianas influenciam na aprendizagem de alguns conceitos matemáticos, como é o caso dos números decimais, onde profissionais sem escolarização alcançam desempenho satisfatório nos problemas propostos. Outra lição, que tiramos daqui, é o anseio dos alunos em integrarem conceitos cotidianos e conceitos escolares. Os resultados do estudo de Gomes e Borba (2008) apontando que os estudantes recorrem ao seu contexto profissional para resolver problemas de realidades estranhas, indicam que os estudantes tentam levar o cotidiano para a escola. Quando a escola fecha as suas portas para o que acontece além dela, nasce o desânimo e a ideologia da incapacidade de aprender Matemática, como ocorre com os participantes da pesquisa de Ferreira (2010) que se decepcionam diante da impossibilidade de ligarem a Matemática da vida à Matemática da escola e à Matemática da Matemática.

No capítulo seguinte, discutimos a Teoria dos Campos Conceituais e o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.

CAPÍTULO 3 - A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E O CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Este estudo busca o entendimento dos invariantes mobilizados por adolescentes, jovens e adultos ao resolverem situação envolvendo as operações de multiplicação e divisão de números positivos e negativos, após a instrução formal desses conceitos na escola. A preocupação de Vergnaud sobre o processo de aquisição de conceitos científicos e técnicos apresenta uma operacionalidade didática, permitindo analisar a sala de aula sobre múltiplos aspectos (processo de aquisição, desenvolvimento e mobilização das competências para resolução de problemas).

Neste capítulo, apresentamos uma síntese da Teoria dos Campos Conceituais, os seus pressupostos e o seu campo de estudo. Como o objeto matemático desse estudo é a multiplicação e divisão de números inteiros, que compõem o campo conceitual das estruturas multiplicativas, nos propomos a discutir os diferentes significados que as operações multiplicação e divisão podem assumir nesse campo.

Como se desenvolvem as competências?

É para responder a esta questão, que, o professor e psicólogo francês Gèrard Vergnaud, desenvolveu a Teoria dos Campos Conceituais - TCC.

Vergnaud avançou em relação a Piaget quando considera que o processo de conceitualização do real envolve aspectos intrassubjetivos e extrassubjetivos. A sua teoria reconhece a importância da mediação na construção dos conceitos, como propunha Vygotsky; por isso, destaca que a escolha das situações exercem papel fundamental na aprendizagem.

O objetivo da TCC é compreender como se dá a aprendizagem de um conceito. Para Vergnaud (2003) um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente quando o nosso interesse é a sua aprendizagem e o seu ensino.

Para Vergnaud a Teoria dos Campos Conceituais tem como finalidade,

> propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo-se por "conhecimentos", tanto as habilidades quanto as informações expressas. As ideias de filiação e ruptura também alcançam as aprendizagens do adulto, mas estas ocorrem sob condições mais ligadas aos hábitos e formas de pensamento adquiridas, do que ao desenvolvimento da estrutura física. Os efeitos da aprendizagem e do desenvolvimento cognitivo ocorrem, na criança e no adolescente, sempre em conjunto (VERGANUD, 1996, p. 87).

O autor defende que a maior parte dos nossos conhecimentos está relacionada com a execução de uma determinada atividade, ou seja, os conceitos são colocados em ação no momento de resolver determinada questão[12].

A capacidade de mobilização dos conhecimentos na resolução de situações reais, Vergnaud chama de competência. Apesar de uma competência sempre estar associada a uma ação, a questão é que nem todas as competências do indivíduo são evidentes a ponto de serem percebidas.

A preocupação do autor com o processo de aprendizagem o leva a propor essa teoria que pretende buscar meios que permita a compreensão e o acesso à dimensão implícita do conhecimento. Em outras palavras, ele busca compreender como ocorre o desenvolvimento das competências. Sendo assim, trata-se de uma teoria cognitivista, o que não a impede de ser utilizada em outras áreas do conhecimento, mais especificamente na didática, apesar de não ser uma teoria didática. Como diz Maia (1999),

> Estamos, assim, diante de uma teoria psicológica, multidimensional e desenvolvimentista do conhecimento. Na realidade, esta é uma teoria cognitiva do sujeito em situação. Enquanto tal, corresponde a uma abordagem psicológica do conhecimento que considera, ao mesmo tempo, o processo de desenvolvimento e de aprendizagem do indivíduo. Neste sentido, a atividade educativa é parte integrante do seu campo de estudo e, em particular, a atividade didática (1999, p. 2).

Nessa perspectiva, a Teoria dos Campos Conceituais apresenta muitas contribuições no processo de conceitualização do real que tem na cognição o seu problema central. Por isso, essa teoria tem sido muito utilizada na Educação Matemática, principalmente, em investigações sobre o modo como se dá o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Ainda, é uma teoria que tem colaborado com a análise de dados de vários estudos em todo o mundo nas últimas duas

---

[12] Não estamos nos referindo à questão como sinônimo de tarefa ou problema escolar, mas a toda situação que requer a mobilização de conceitos.

décadas e é a espinha dorsal dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN de Matemática.

Vergnaud (1996) aponta que é por meio da conceitualização do real que a ação se torna operatória. Com isso, ele nos ensina que a eficácia de uma competência está intimamente relacionada com a construção do conceito, ou seja, para elaborar determinado conceito, o indivíduo precisa mobilizar os conhecimentos de que já dispõe e que foi adquirido em situações anteriores e buscar estratégias que lhe permitam modelar e resolver a nova situação. Por essa razão, todos os conceitos tem um domínio de validade limitado, tendo em vista que, para cada nova situação, exige-se novas mobilizações e a construção de novos conhecimentos.

Um exemplo, da limitação do campo de validade de um conceito, pode ser a ideia trazida pelos estudantes ao estudarem as operações com números naturais, de que de uma quantidade menor não se pode tirar uma quantidade maior.

Ao conhecer novas situações que exigem a ampliação do campo dos números naturais para o domínio dos números inteiros, o estudante precisa reformular os seus conceitos prévios sobre operações com números naturais para um outro campo de validade. Certamente, essa reelaboração dos conceitos prévios dar-se-á com algumas dificuldades, que podem ser superadas mediante novas situações que apresentem outros significados e abranjam, no caso, as operações com números inteiros.

A Teoria dos Campos Conceituais vem nos fornecer um aporte teórico que nos permita enxergar outros fatores, que influenciam e interferem no processo de elaboração de novos conceitos, apresentando ainda que é na situação-problema que os conhecimentos prévios são desarranjados e modelados para dar sentido e construir novos conceitos. É por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança (VERGNAUD, 1996, p. 156).

Vergnaud (1996) aponta que o desenvolvimento de um conceito, como, por exemplo, a aprendizagem do conceito de números inteiros, pode ocorrer mediante duas classes de situações:

1. O sujeito já possui os conhecimentos necessários à sua resolução, por exemplo, resolver a situação 12 – 5 pode não exigir de um determinado aluno que já

domina o conceito de subtração de números naturais a elaboração de novas habilidades. Desse modo, a solução é dada pelo aluno de modo automatizado e relativamente imediato.

2. Já ao solicitar a um aluno que ainda não apreendeu o conceito de números inteiros, tampouco a resolução de subtração no conjunto dos números inteiros, que resolva a situação 5 – 12, vai exigir dele algumas reflexões sobre o campo de validade dos conceitos de que já dispõe para que explorando o que já se conhece e buscando levantar novas informações sobre o “desafio” proposto possa arriscar uma resposta, que, evidentemente, pode está correta ou não.

Buscamos ilustrar essas duas situações para discutir o conceito de esquemas, que nos faz perceber a aproximação entre a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e a teoria da equilibração de Jean Piaget.

Assim como Piaget, Vergnaud chama de esquema o comportamento invariante que um sujeito (ou um grupo de sujeitos) apresenta ao resolver determinado problema. Por exemplo, na primeira situação, na qual o sujeito resolve facilmente a questão que lhe é apresentada, temos possivelmente a utilização de um só esquema, a resolução é realizada pelo aluno de forma automatizada. Enquanto que no caso de o aluno não conseguir resolver imediatamente a questão que lhe foi proposta, como ocorre no segundo caso, temos a mobilização de vários esquemas que vão entrar em conflitos cognitivos, e a obtenção da solução desejada pela questão proposta vai exigir desses esquemas que eles sejam acomodados, descombinados e depois voltem a se combinar novamente, provocando a aquisição de novos conhecimentos.

Na primeira situação, o conceito de esquema é mais evidente e aplica-se, portanto, imediatamente, enquanto que, na segunda categoria, far-se-á necessário estabelecer relações entre o “novo problema” e um conjunto de outras situações e problemas com os quais o aluno já se deparou e observa algum tipo de aproximação com o novo conhecimento, o que não garante que essa ligação entre o já sabido e o novo vá garantir um sucesso imediato na resolução da questão.

No momento em que o aluno começa a estabelecer relações entre um grupo de situações e outro, ele o faz por um conjunto de elementos que lhe permitem estabelecer essas conexões; por isso, é que um esquema sempre tem como um núcleo um conceito implícito.

Para o autor os esquemas desempenham um papel muito importante na aprendizagem de novos conceitos, pois, como vimos, a compreensão do modo como o sujeito organiza e resolve um conjunto de situações semelhantes se dá por meio da análise desses esquemas. Sintetizando, o pesquisador francês defende que é por meio dos esquemas que se pode entender a relação entre os conhecimentos cognitivos de que o sujeito dispõe e a mobilização desses conhecimentos em ações operatórias.

Os conhecimentos que estão implícitos ou explícitos nos esquemas, mesmo em diferentes situações que envolvem um mesmo conhecimento, apresentam algumas características comuns, que Vergnaud chama de invariantes, ou seja, os invariantes são componentes cognitivos embutidos nos esquemas. É importante deixar claro que não são apenas as estratégias de resolução que podem apresentar semelhanças e caracterizar um determinado invariante, mas também outras ações como a interpretação da situação em contextos comuns e até mesmo as invariações dos gestos etc.

Vergnaud (2003) chama de invariantes operatórios as semelhanças cognitivas observadas nos esquemas. Por sua vez, ele denomina de teorema-em-ação e conceito-em-ação os conhecimentos que são identificados quando um sujeito se depara com certa situação. Essa classificação didática (teorema-em-ação e conceito-em-ação) apresentada pelo autor dá-se mediante o estágio de desenvolvimento no qual se encontra a elaboração de um novo conceito pelo sujeito. Além dos invariantes operatórios, um esquema leva em consideração também antecipações do objeto e regras de ação e inferência.

Retomando as ideias de Vergnaud sobre teorema-em-ação e conceito-em-ação, o autor deixa claro que, embora exista uma relação simbiótica entre teorema-em-ação e conceito-em-ação, não se pode confundi-los, tendo em vista que um teorema-em-ação são proposições que os estudantes consideram para escolher determinado procedimento na resolução de uma tarefa; portanto, possui um campo de validade limitado, uma vez que algumas vezes o seu domínio de validade só alcança um conjunto de problemas e ainda, pode ser acionado intuitivamente pelo estudante ao perceber algum tipo de relação entre a operação escolhida e a situação que lhe foi proposta.

Um teorema-em-ação ao ser utilizado, pode garantir tanto o sucesso quanto o fracasso do estudante na resolução do problema. O conceito-em-ação é uma característica, algo que o sujeito acredita poder afirmar veemente; por isso, não lhe cabe o julgamento de ser verdadeiro ou falso, é o atributo que lhe permite dentre um vasto campo de conhecimentos “localizar” quais deles serão mobilizados para a formulação dos teoremas necessários à resolução do desafio que se apresenta.

É importante ressaltar a preocupação do autor em não confundir o teorema-em-ação e o conceito-em-ação, que são partes dos invariantes operatórios, que, por sua vez, estão relacionados com os conhecimentos implícitos com teoremas e conceitos científicos, tendo em vista que esses são elementos do conhecimento explícito.

Ainda, segundo essa teoria, um conceito precisa ser visto como um conjunto formado por três elementos e que só possui sentido quando tratados de modo integrado e horizontal. Para Vergnaud, um conceito é formado pelo conjunto de situações (S), que, quando tratadas pelos sujeitos, apresentam procedimentos[13] invariantes (I) que podem ser identificados, entre outros, por meio de diversas representações simbólicas (&). Resumindo, um conceito se forma a partir da tríade (S, I, &).

Vergnaud (1996) não concebe o ensino e a aprendizagem de um conceito de modo isolado, fragmentado, isto é, para ele uma situação, por mais simples que possa parecer, sempre envolve diversos conceitos, do mesmo modo que um conceito nunca é tratado por um só tipo de situação, ou seja, um conceito sempre engloba diversas situações. Essa compreensão de Vergnaud a respeito da relação entre conceitos e situações ele chama de *campo conceitual*, ou seja, um campo conceitual pode ser entendido como um conjunto de situações envolvendo diversos conceitos.

Como exemplo, podemos citar o campo conceitual das estruturas aditivas que envolvem as situações que tratam das operações de adição de subtração ou

[13] Entende-se aqui por procedimentos os objetos, as propriedades, as relações e as estratégias utilizadas na resolução de uma determinada tarefa.

dos problemas, que combinam essas duas operações. Do mesmo modo, o campo conceitual das estruturas multiplicativas é formado pelo conjunto de problemas que requerem uma multiplicação, uma divisão ou ainda, uma combinação dessas duas operações.

Vergnaud (1996) desenvolveu os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas no âmbito dos números inteiros positivos. A nossa questão considera além destes os números inteiros negativos.

A seguir, apresentamos a estrutura multiplicativa como proposta por Gèrard Vergnaud. O motivo pelo qual, detalhamos apenas o campo conceitual das estruturas multiplicativas, deve-se ao fato de que, estes conceitos melhor se aproximam daqueles estudados nesta pesquisa.

3.1 O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é constituído por todas as situações que podem ser analisadas e/ou resolvidas como proporções simples e múltiplas, onde se aplicam as operações de multiplicação e/ou divisão. Essas situações podem envolver conceitos como os de funções lineares e não lineares, números racionais, proporções, espaços vetoriais, análise dimensional, multiplicação e divisão.

Vergnaud (1996) defende que tratar o campo multiplicativo como uma continuidade do campo aditivo, reduzindo a multiplicação a uma adição de parcelas iguais, é uma incoerência porque essas operações apresentam fundamentos distintos.

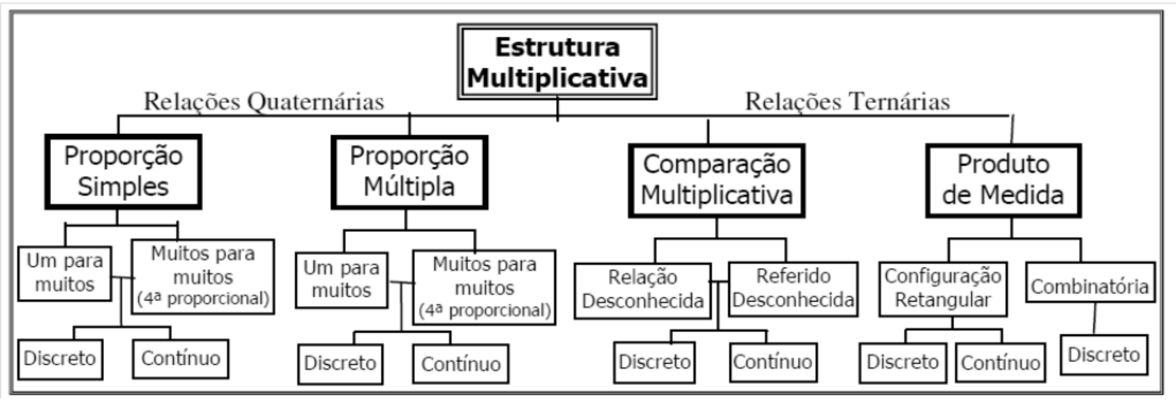
Nunes e Bryant (1997) defendem que a criança, ao estudar o campo multiplicativo, deve entender novos conceitos e mobilizar novos/outros invariantes, como os que envolvem a multiplicação e a divisão, ampliando, portanto, os conceitos de adição e subtração, uma vez que as ideias de multiplicar e dividir não se reduzem às ações de unir e separar, o que não impede que o cálculo da multiplicação seja feito como uma adição de parcelas repetidas, desde que haja entendimento dos sentidos e invariantes exigidos pela multiplicação, já que essa é apenas uma estratégia de cálculo, mas não conceitual.

A representação **3 x 4 = 12** pode assumir a depender da situação, diferentes significados, exigindo a mobilização de esquemas de naturezas e complexidades bem distintas. No campo conceitual das estruturas multiplicativas, Vergnaud apresenta e analisa os diferentes significados e invariantes que podem ser mobilizados nesse campo conceitual.

O psicólogo francês, organiza essas situações em três classes de problemas, envolvendo relações ternárias e quaternárias: *isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporções múltiplas.* Cada uma dessas classificações ainda possui subclasses de problemas.

O quadro a seguir, organizado pelo Grupo de Pesquisa Reflexão, Planejamento, Ação, Reflexão em Educação Matemática – REPARE em EdMat, apresentado por Magina, Santos e Merlini (2010, p. 6) sintetiza o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Quadro 2 – Organização do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas



A operação, seja ela multiplicação, divisão ou uma combinação das duas, não é o que determina o grau de dificuldade para resolver uma ou outra situação, mas sim, a sua estrutura que pode variar em aspectos como: significado, natureza dos números envolvidos e posição da incógnita.

O isomorfismo de medidas constitui-se pelas situações que envolvem relações quaternárias, onde as quantidades diferenciam-se na sua natureza duas a duas, como exemplificaremos adiante. Essa classe de problemas pode ainda ser dividida em: *problemas de multiplicação, problemas de divisão por partição, problemas de divisão por quotição e quarta proporcional*.

O quadro seguinte apresenta um exemplo para cada uma das classificações de isomorfismo de medidas:

Quadro 3 - Classificação e exemplos de problemas das Estruturas Multiplicativas

CLASSIFICAÇÃO	**EXEMPLO**
Multiplicação	Maria Eduarda tem 3 caixas com 4 bombons em cada caixa. Quantos bombons Maria Eduarda tem ao todo?
Divisão por partição	Davi tem 12 carrinhos para igualmente em 4 caixas. Quantos carrinhos serão colocados em cada caixa?
Divisão por quotição	Mateus tem 12 carrinhos e quer colocá-los em caixas de modo que cada caixa tenha 3 carrinhos. De quantas caixas ele vai precisar?
Quarta proporcional	Talyson comprou 4 ingressos por 12 reais. Depois lembrou que um dos seus primos não poderia ir ao parque e devolveu um dos ingressos. Quanto ele pagou pelos três ingressos?

Os problemas de produtos de medidas são aqueles que envolvem relações ternárias, que corresponde ao produto das outras duas; é uma composição cartesiana de duas medidas (problemas de área, de volume e de combinatória).

Exemplo: Maria Eduarda tem 3 saias (azul, rosa e verde) e 4 blusas (branca, preta e marrom). Quantas combinações de roupas ela pode fazer usando sempre uma blusa e uma saía?

As proporções múltiplas também envolvem relações ternárias, mas que não podem ser resolvidas apenas pelo produto das outras duas medidas

Exemplo: Maria Eduarda, Davi, Mateus e Talyson fizeram uma viagem e passaram três dias em um hotel. O gasto total com as diárias foi de R$ 600,00. Quanto custou cada diária?

No capítulo seguinte, apresentamos os objetivos e o percurso metodológico da investigação que ora descrevemos.

CAPÍTULO 4 – OBJETIVOS E MÉTODO

Neste capítulo, apresentamos o objetivo geral e os objetivos específicos desta pesquisa. Ainda, situamos o percurso metodológico escolhido para esta pesquisa. Nele, indicamos as etapas da pesquisa, os participantes, o instrumento utilizado na coleta dos dados e a estratégia de análise dos dados.

Esta pesquisa foi organizada basicamente, em duas etapas, a saber: *estudo piloto* e o *estudo posterior,* que estamos chamando de, *segunda etapa da pesquisa.*

4.1 Objetivos

4.1.1 Objetivos Geral

Analisar e comparar a compreensão de estudantes da 4ª fase da Educação de Jovens e Adultos e do 8º ano do Ensino Fundamental, que são ciclos escolares correspondentes, quando resolvem situações envolvendo multiplicação e divisão de números inteiros relativos.

4.1.2 Objetivos Específicos

- ✓ Identificar as competências mobilizadas pelos estudantes da 4ª fase da EJA e do 8º ano na resolução de situações relativas à multiplicação e divisão de números inteiros;

- ✓ Analisar as possíveis especificidades que cada grupo apresenta em função das suas características (modalidade de ensino, idade, atividade profissional).

4.2 O Método

Nesta seção, apresentamos o percurso desta pesquisa, indicando o método aplicado e a caracterização dos seus participantes.

Dentre os diversos métodos para a coleta de dados num trabalho científico, um deles é a entrevista, que é, segundo Marconi e Lakatos (2010), o encontro entre duas pessoas, onde uma delas busca informações sobre um certo tema, mediante uma conversação. Essa técnica é utilizada frequentemente em investigações sociais, quer seja para coletar dados, quer seja para ajudar no diagnóstico ou tratamento de um problema social.

A entrevista permite abordar temas complexos, explorando-os profundamente. Segundo essas autoras, existem diferentes tipos de entrevistas, entre eles: entrevista padronizada ou estruturada, despadronizada ou não estruturada e a que elas chamam de painel.

Na entrevista semiestruturada, ainda temos as seguintes subdivisões: entrevista focalizada, entrevista clínica e entrevista não dirigida.

A escolha por esse ou aquele tipo de entrevista é feita mediante o objeto de pesquisa, ou seja, o pesquisador recorre à entrevista com as características, que lhe permitam responder e tratar o problema abordado.

Na proposta, ora apresentada, os dados foram coletados por meio de entrevistas clínicas, usando elementos do método clínico-piagetiano, que é caracterizado por Carraher, Schliemann e Carraher (1988) como a metodologia que

> envolve a apresentação de problemas cuidadosamente selecionados aos sujeitos de modo não-padronizado, mas, ao mesmo tempo não casual. O investigador procura descobrir, através da obtenção de justificativas e da apresentação de novos problemas, que forma de raciocínio o sujeito está utilizando. (p. 15).

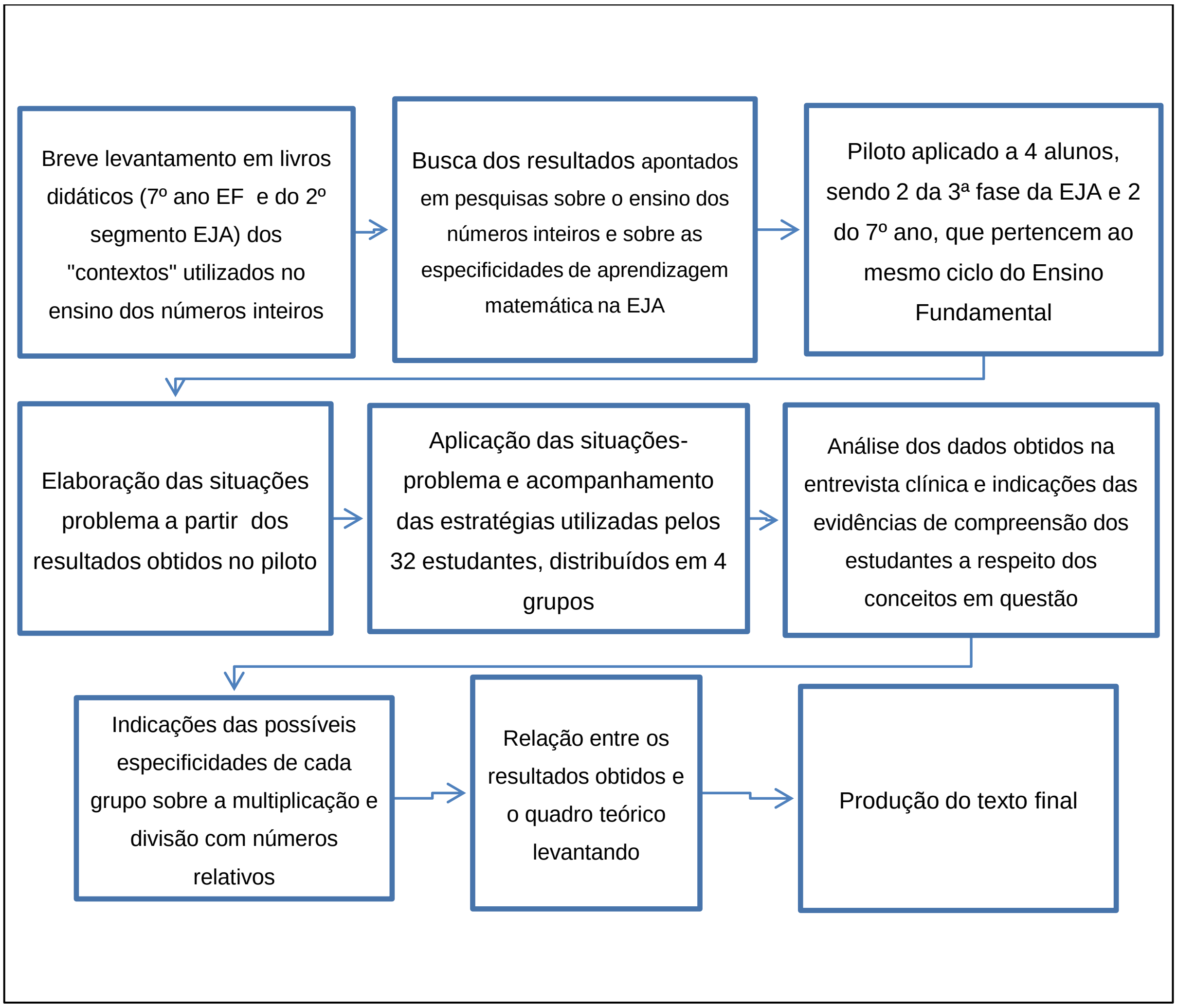
Esse método visa “estudar os motivos, os sentimentos e a conduta das pessoas” (MARCONI e LAKATOS, 2010, p. 180).

A escolha por tal método deu-se em função do nosso interesse de levantarmos evidências sobre a compreensão dos estudantes a respeito dos conceitos matemáticos que estávamos investigando.

Dessa forma, os estudantes foram entrevistados individualmente, em sala isolada, o que nos proporcionou melhores condições de compreensão sobre as justificativas que eles apresentaram para cada ação. As entrevistas foram audiogravadas, mediante autorização de cada estudante, com duração média de 110 minutos, cada uma.

Após as entrevistas, realizamos a transcrição das mesmas. Essa atividade foi necessária, tanto para nos aproximarmos dos dados coletados, quanto para auxiliar na análise dos dados obtidos.

O esquema seguinte, sintetiza o percurso realizado nesta pesquisa.



Para que as etapas apresentadas na ilustração anterior possam ser melhor compreendidas, faremos uma descrição mais detalhada do percurso trilhado.

Inicialmente, realizamos um levantamento em 06 livros didáticos do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) 2011 e PNLD EJA 2011 com o propósito de observarmos os contextos nos quais são trabalhados o ensino dos números inteiros relativos e com vistas à elaboração de nosso instrumento de coleta de dados.

Em seguida, realizamos entrevistas clínicas com quatro estudantes que já possuíam escolarização nas operações multiplicação e divisão de números relativos. Dois desses estudantes pertenciam à 3ª fase da EJA e os outros dois ao 7º ano. O instrumento ora utilizado, foi constituído de 10 questões (apêndice A), elaboradas a partir das situações mais comuns nos livros didáticos que observamos. A essa etapa, demos o nome de estudo piloto.

Com a realização do estudo piloto, reforçamos o nosso entendimento de que as situações, sugeridas pelos livros didáticos, não eram suficientes para a efetiva compreensão das operações que estávamos investigando.

Após tal constatação, elaboramos sete questões para a realização das entrevistas clínicas com os 32 participantes desta pesquisa.

A partir daí, analisamos as evidências de compreensão dos participantes a respeito dos conceitos em questão, comparando o desempenho e as estratégias utilizadas internamente e externamente pelos grupos e dialogando com os resultados obtidos em outros estudos (Capítulo 5).

4.3 Participantes

4.3.1 Participantes do estudo piloto

Participaram do estudo piloto quatro estudantes, sendo dois da 3ª fase da EJA e dois do 7º ano do Ensino Fundamental. Todos os participantes já possuíam escolarização na multiplicação e divisão de números inteiros e pertenciam a duas escolas públicas de Petrolina – PE.

O quadro seguinte apresenta as principais características destes estudantes.

Quadro 4 – Caracterização dos participantes do estudo piloto

GRUPO 1 - ESTUDANTES DA 3ª FASE DA EJA			
NOME	IDADE	PROFISSÃO	DISCIPLINA PREFERIDA
Felipe	46 anos	Pedreiro	Português
Renata	32 anos	Auxiliar de Serviços Gerais	Matemática
GRUPO 2 - ESTUDANTES DO 7º ANO			
NOME	IDADE	PROFISSÃO	DISCIPLINA PREFERIDA
Lucas	16 anos	Entregador (supermercado)	História
Catarina	12 anos	Estudante	Ciências

Os nomes atribuídos aos estudantes, tanto no estudo piloto, quanto no estudo posterior, são fictícios a fim de resguardar o anonimato dos mesmos.

Diante da dificuldade de melhor apresentarmos todos os estudantes, que participaram deste estudo, optamos por fazê-lo apenas com os do estudo piloto, o que é suficiente para, ao menos, nos aproximarmos da realidade dos demais participantes.

Por isso, no tópico seguinte, descrevemos, com mais detalhes, as características dos participantes do estudo piloto. A nossa intenção é situar, brevemente, as “histórias de vida” de alguns dos participantes desta pesquisa.

4.3.1.1 Caracterização dos Participantes do Estudo Piloto[14]

Felipe é estudante da 3ª fase da EJA, trabalha como pedreiro e tem 46 anos. Quando tinha nove anos de idade, foi matriculado numa escola localizada na zona rural de Cabrobó - PE. Estudou por dois anos, mas precisou deixar a escola para trabalhar e ajudar a sua mãe nas despesas domésticas, saiu da escola sem sequer realizar o seu sonho da época, que era escrever o próprio nome. Desse tempo guardou boas lembranças e carregou por cerca de 35 anos o desejo de retornar à escola, o que não foi possível, pois continuava trocando a escola pela necessidade de trabalhar em lugares, muitas vezes, distantes do convívio com a sua família.

---

[14] Lembramos que os nomes dos participantes são fictícios.

Há quase três anos, voltou a estudar, iniciou na 1ª fase da EJA, onde foi alfabetizado e começou a conhecer um mundo que, até então, não lhe tinha sido revelado. Fazendo uso do que descobria a cada dia, que ele chama “outra vida”, começou a colocar no papel os poemas e “repentes”, que fez durante a sua vida.

Renata, 32 anos, é auxiliar de serviços gerais, também estuda na 3ª fase da EJA e trabalha numa escola pública. Na infância, estudou até o 5º ano do Ensino Fundamental numa escola rural multisseriada. Ao concluir o ensino primário, como era denominado na época, ficou impossibilitada de estudar, já que a escola mais próxima ficava a mais de 11 léguas (72,6 quilômetros) do local onde morava, e o seu pai não lhe permitia morar fora de casa e transporte escolar ainda não era uma realidade. Já casada e morando na cidade, deu continuidade aos seus estudos.

Lucas tem 16 anos e estuda no 7º ano do Ensino Fundamental, repetiu por duas vezes o 6º ano, tendo sido a Matemática uma das disciplinas responsáveis pela sua retenção. Para ele, a Matemática é útil no cotidiano das pessoas, mas é muito complicada, porque tem muitas regras e como diz “as coisas mudam toda hora”. Com relação à utilidade que vê para a Matemática, fala do seu uso na hora de comprar e vender, contexto que lhe é muito próximo, porque trabalha como entregador num mercadinho do bairro onde mora.

Catarina também é estudante do 7º ano, tem 12 anos, nunca repetiu uma série, mas diz que não gosta de Matemática porque demora muito para entender as explicações da professora. Ao contrário de Lucas, não trabalha, apenas estuda.

4.3.2 Participantes da Segunda Etapa da Pesquisa

A segunda etapa desta pesquisa foi realizada com 32 estudantes, sendo 16 da 4ª fase da Educação de Jovens e Adultos e 16 do 8º ano, que pertencem ao mesmo ciclo do Ensino Fundamental.

Os estudantes foram distribuídos em quatro grupos, conforme exposto no Quadro 5, a seguir.

Quadro 5 – Caracterização dos participantes da segunda etapa da pesquisa

GRUPO 1 – ADULTOS NA 4ª FASE ORIUNDOS DA EJA			
NOME	IDADE	PROFISSÃO	DISCIPLINA PREFERIDA
Del	19 anos	Empregada Doméstica	Ciências
Cleandro	30 anos	Operador de câmera fria	Português
Roni	27 anos	Vendedor	Ciências
Dênis	32 anos	Marceneiro	Matemática
Potira	22 anos	Merendeira	História
Vanúsia	21 anos	Empregada Doméstica	Ciências
Alberto	27 anos	Agricultor	Matemática
Eridian	19 anos	Estudante	Matemática
GRUPO 2 - ADULTOS NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL			
NOME	IDADE	PROFISSÃO	DISCIPLINA PREFERIDA
Sebastião	23 anos	Entregador (supermercado)	Ciências
Clarice	22 anos	Empregada Doméstica	Matemática
Cristóvão	20 anos	Marceneiro	Inglês
João	19 anos	Agricultor	Ciências
Romário	19 anos	Servente de Pedreiro	Ciências
Charles	20 anos	Ajudante de Padeiro	Ciências
Regivaldo	19 anos	Estudante	História
Jaqueline	20 anos	Empregada Doméstica	Matemática
GRUPO 3 - ADOLESCENTES NA 4ª FASE ORIUNDOS DA EJA			
NOME	IDADE	PROFISSÃO	DISCIPLINA PREFERIDA
Graziela	15 anos	Estudante	Matemática
Vanessa	16 anos	Empregada Doméstica	Matemática
Jonatan	16 anos	Ajudante de Mecânico	Matemática
Mailson	15 anos	Agricultor	História
Jerônimo	15 anos	Estudante	História
Henrique	16 anos	Estudante	Inglês
Tiago	16 anos	Ajudante de Loja	Matemática
Jadnaelson	17 anos	Estudante	Geografia
GRUPO 4 - ADOLESCENTES NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL			
NOME	IDADE	PROFISSÃO	DISCIPLINA PREFERIDA
Doda	13 anos	Estudante	Português
Dorinha	12 anos	Estudante	Português
Bianca	13 anos	Ajudante de Papelaria	Matemática
Juliana	12 anos	Estudante	Inglês
Vítor	13 anos	Estudante	Português
Leonardo	12 anos	Estudante	Ciências
Damiana	13 anos	Estudante	Artes
Thomaz	12 anos	Estudante	Matemática

A mudança da 3ª para a 4ª fase, e do 7º para o 8º ano, derivou da dificuldade que tivemos de, no momento da realização das entrevistas,[15] encontrarmos estudantes que já possuíssem a instrução formal nas operações de interesse deste estudo, o que era condição necessária para a escolha dos participantes.

A organização dos participantes, nestes grupos, se deu em função do interesse em observar a influência dos fatores *modalidade de ensino* e *idade* no desempenho dos estudantes nas operações multiplicação e divisão em $\mathbb{Z}$.

4.4 Instrumentos de Coleta de Dados

Nesta seção, situamos informações sobre o instrumento de coleta de dados nas duas etapas deste estudo.

4.4.1 Instrumento de Coleta de Dados do Estudo Piloto

As situações do estudo piloto (Apêndice A) foram selecionadas, a partir de uma observação em alguns livros didáticos do 7º ano e do 2º segmento da EJA, como já dissemos.

A princípio, a nossa ideia era desenvolver, uma sequência de ensino, tomando como referência para a escolha das questões a Teoria dos Campos Conceituais.

Após o exame de qualificação, aprendemos que, as situações observadas nos livros didáticos, eram insuficientes, para o efetivo entendimento destes conceitos, ou seja, elas poderiam ser resolvidas sem a utilização das ideias relativas aos números inteiros.

[15] O estudo piloto foi realizado no 4º bimestre escolar do ano 2010 e o estudo posterior no decorrer do 3º bimestre de 2011. Segundo, as Orientações Teórico-Metodológicas – OTM's da rede estadual de Pernambuco, onde estavam matriculados, a maior parte dos participantes desta pesquisa, as operações multiplicação e divisão de números relativos, devem ser trabalhadas a partir do 3º bimestre, tanto na 3ª fase da EJA, quanto no 7º ano do Ensino Fundamental.

Esses ensinamentos nos motivaram a algumas modificações no percurso deste estudo, como, por exemplo, a necessidade de elaborarmos situações, que, realmente exigissem o uso da multiplicação e divisão em $\mathbb{Z}$**.**

A seguir, apresentamos as questões que elaboramos para a segunda parte da pesquisa.

4.4.2 Instrumento de Coleta de Dados da Segunda Etapa da Pesquisa

Além do estudo piloto e da TCC, levamos em consideração, uma previsão que realizamos, das dificuldades, potencialidades, estratégias e possíveis respostas que os alunos poderiam apresentar, bem como dos possíveis conceitos que seriam mobilizados nas resoluções e justificativas dadas às questões.

As questões propostas, nesta etapa, foram as seguintes:

01. Resolva as multiplicações abaixo:

a) 4.11
b) 5 . (- 4)
c) (- 36).(- 12)
d) (- 15).13
e) (+ 48). (+ 8)
f) (- 18). (+ 3)
g) (+ 11).(+ 4)

02. Resolva as divisões abaixo:

a) 36 : 12
b) (+ 391): (+ 17)
c) 195: (- 13)
d) (- 450): (- 9)
e) (- 480): (+ 6)
f) (+ 36): (+ 12)

03. O salário de Maria Eduarda é de R$ 900,00 e as suas despesas fixas mensais são de R$ 850,00. Ela comprou uma TV de R$ 480,00 em 6 parcelas fixas e sem juros.

a) Qual o valor de cada parcela da TV?

b) O salário de Maria Eduarda vai ser suficiente para pagar as suas despesas e mais a prestação da TV?

c) Represente numa reta numérica a situação financeira de Maria Eduarda no mês em que pagou a primeira prestação da TV?

d) Qual ponto da reta numérica (Questão anterior) representa o equilíbrio financeiro de Maria Eduarda?

04. Davi tem uma certa quantia no banco que cobra todo mês uma taxa de R$ 36,00 referente a manutenção da sua conta. Há 12 meses (um ano atrás), quanto a mais ele tinha no banco?

05. João é aluno da 3ª fase da EJA e o seu neto Talyson estuda o 7º ano. Eles estão brincando de adivinhar números inteiros. O esquema abaixo mostra os números pensados (N) no decorrer da brincadeira.

a) **N** → **x 8** → **384**

b) **- 480** → **: N** → **- 80**

c) **- 36** → **x (- 12)** → **N**

d) **N** → **: (- 13)** → **+ 15**

Descubra, em cada caso, quais foram esses números, substituindo a letra **N** por esses números.

06. Durante um passeio a Bariloche na Argentina, Hermina anotou em cada dia a medida da temperatura registrada na cidade. Veja as anotações:

1º dia	2º dia	3º dia	4º dia
8 graus negativos	3 graus positivos	1 grau negativo	2 graus positivos

Qual a média de temperatura registrada em Bariloche durante o passeio de Hermina?

07. Responda as questões:

a) o que significa um número relativo?

b) qual a diferença entre os números inteiros relativos e os números naturais?

c) para que servem os números inteiros (positivos, negativos e nulo)?

A seguir, situamos a forma como realizamos a análise dos dados.

4.5 Estratégia de Análise dos Dados

A análise dos resultados foi realizada a partir do entendimento e acompanhamento do modo como os estudantes resolviam as questões, tentando evidenciar as dimensões do conceito de números inteiros utilizadas em termos de regras utilizadas pelos entrevistados a partir da ideia dos invariantes operatórios, segundo terminologia utilizada por Vergnaud. Ainda, observamos, por meio das situações envolvendo as operações multiplicação e a divisão, quais dimensões desse conceito foram aplicadas com mais facilidades pelos participantes.

Por isso, utilizamos na elaboração das questões e na análise dos resultados, a Teoria dos Campos Conceituais, que é uma excelente ferramenta, para a compreensão do processo de conceitualização do real.

Após a coleta dos dados, estudamos as estratégias mobilizadas pelos estudantes de cada grupo, analisando as aproximações e distanciamentos entre eles. Além do mais, observamos as variáveis, dentre as controladas (modalidade de ensino, idade e atividade profissional), que influenciam ou não no desenvolvimento das competências relativas a multiplicação e divisão com números inteiros.

Na análise das questões, apresentamos, primeiro, a frequência de acertos e erros dos participantes. Em seguida, analisamos as estratégias mobilizadas pelos estudantes, ao resolverem cada questão. A relação com o quadro teórico indicado, neste estudo, foi feita ao longo da análise das questões (desempenho e estratégias). Só após, esgotado o estudo de uma questão, seguíamos para a questão seguinte.

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS

Neste capítulo, publicamos os resultados obtidos no decorrer deste estudo. Iniciamos, com algumas considerações, resultantes do nosso olhar sobre alguns livros didáticos do PNLD 2011 (incluindo o PNLD EJA 2011). Em seguida, trazemos à tona, o desempenho e as estratégias dos participantes desta investigação, tanto no estudo piloto, quanto no estudo posterior. A relação entre os resultados, que ora obtemos e o referencial teórico aqui indicado, permeia as nossas análises, no decorrer de todo este capítulo.

5.1 O ensino da multiplicação e divisão em $\mathbb{Z}$ a partir do livro didático

Como situamos anteriormente, realizamos uma breve análise em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental (PNLD 2011 e PNLD EJA 2011). Dessa observação, notamos que o ponto de partida, utilizado em quase todas as obras para explicar as operações de multiplicação e divisão com inteiros relativos, é o conceito de números simétricos ou opostos. Assim, o produto de **– 5** por **- 3**, por exemplo, pode ser obtido, fazendo-se a seguinte representação para essa operação:

$$\mathbf{-(+5).(-3) =} -[(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathbf{-(+5).(-3) =} -[-15] \Longrightarrow \mathbf{-(+5).(-3) = +15}$$

Nesse modo de justificar, na sala de aula, um dos maiores obstáculos encontrados ao se referir às operações com números positivos e negativos, é a questão do *menos vezes menos,* como aponta Assis Neto (1995) e que, por muitos anos, preocupou matemáticos como Diofanto, Leonhard Euler e Haenkel, que aplicaram muitos conceitos, dentre eles: o conceito de números simétricos, a escrita da multiplicação como uma soma onde as parcelas têm o mesmo valor, ou ainda, a depender da natureza da situação, o conhecimento da validade da propriedade comutativa na multiplicação de inteiros relativos, como ocorre, por exemplo, no desenvolvimento do produto **- 5** por **+ 3**, quando se considera a multiplicação como uma soma de parcelas iguais **[- 5.3 = 3.(- 5)]**.

Diante dessas observações, passamos a nos questionar sobre possíveis relações, entre as dificuldades de entendimento na multiplicação e divisão no conjunto $\mathbb{Z}$ e a não compreensão de conceitos anteriores, que são utilizados para justificar o funcionamento das *regras de sinais*. Por isso, é que algumas questões do estudo piloto tinham como objetivo observar as habilidades dos estudantes em relação aos conceitos de números opostos, valor absoluto e propriedades das operações no campo dos números relativos.

Os contextos utilizados por esses livros, para a conceitualização dos números inteiros e suas operações, eram: situações de débitos e créditos, de variação de temperaturas, de depressões e altitudes, em relação ao nível do mar e à localização de números inteiros, ou figuras correspondentes a estes, na reta numérica.

Mesmo alguns estudos (BORBA, 1993; NUNES e BRYANT, 1997; MAIA, 1999; NASCIMENTO, 2002; VERGNAUD, 2003; MAGINA, CAMPOS, NUNES, GITIRANA, 2008; BORBA, 2009) apontando a necessidade de trabalhar na sala de aula, as diversas variações das dimensões de um conceito, percebemos que as situações presentes nestes livros, são limitadas a poucos contextos e, muitas vezes, forçam uma aplicação desnecessária nas atividades de multiplicação e divisão com números relativos.

5.2 Resultados do Estudo Piloto

Discutimos, aqui, os resultados obtidos no estudo piloto, do qual participaram quatro estudantes, apresentados no Capítulo 4.

As respostas dadas pelos participantes foram comparadas às previsões de desempenho e estratégias que fizemos para as mesmas (Apêndice C).

Os resultados do estudo piloto indicaram que o conceito de números opostos, mesmo que com outra denominação, é conhecido pelos estudantes. Catarina diz que a distância da sorveteria ou da lanchonete até a igreja é de um quarteirão (Questão 1). Sua resposta deve-se ao fato de ela desconsiderar, na contagem, o ponto de chegada. Nas perguntas do item **b**, apenas Felipe não obteve sucesso, apesar do enunciado desse item trazer o conceito de números opostos, tomando como referência uma mesma distância em lados simétricos da representação utilizada nesse item (distância da sorveteria e da lanchonete até a igreja), Felipe compreende o oposto de um número como sendo o seu antecessor. Por isso, para ele, a padaria é oposta ao teatro, e a loja de ferramentas oposta à biblioteca. Esse modo de compreensão foi previsto, quando supomos que o entrevistado "consideraria o vizinho (esquerdo ou direito) como o simétrico do número em questão.

A Questão 2, assim como a primeira, tratava da ideia de números opostos e de valor absoluto de um número; porém, aplicados em um outro contexto, que é o das medidas de temperatura. Nessa situação, embora envolva os mesmos conceitos da anterior todos os participantes apresentaram algum tipo de dificuldade. Lucas, entende que **- 4º C** está a **– 4** abaixo de zero, do mesmo modo, **+ 4º C** está a **+ 4** acima de zero, ou seja, o valor absoluto, segundo ele, pode ser positivo ou negativo, conforme o contexto (acima ou abaixo) da situação. Felipe, Renata e Catarina parecem compreender melhor essa questão, mas, equivocam-se quando atribuem sinal ao módulo de **- 2** e de **+ 2**.

Nas nossas antecipações de possíveis respostas (Apêndice B), prevíamos que o valor absoluto de **- 2** ou de **+ 2** é 4, por dois motivos: *ser a medida abaixo ou acima de zero* solicitada nos itens **a** e **b** ou por *realizarem a soma entre **– 2** e **+ 2*** e a conceberem como sendo 4. O primeiro caso é justamente o utilizado por Lucas.

Como já mencionamos, um dos conceitos recorrentes no ensino de multiplicação e divisão no campo dos relativos é o da comutatividade (propriedade válida na adição e multiplicação). Por isso, a Questão 3 visou compreender o domínio dos participantes sobre a propriedade comutatividade da multiplicação.

Se olharmos apenas as representações dos estudantes ao responderem essa questão, concluiríamos, mesmo que antecipadamente, que eles desconhecem a propriedade comutativa na multiplicação, já que apenas Catarina apresentou dentre as possíveis respostas esperadas as que tínhamos como verdadeiras. No entanto, as justificativas de todos eles indicam o contrário, mesmo que não conheçam, ou não lembrem, o nome que atribuímos à propriedade da multiplicação, que justifica a manutenção da igualdade, mesmo quando variamos a ordem dos fatores (comutatividade).

Outra observação, que pensamos ser pertinente pontuar na análise dessa questão, é que o fato da divergência entre as respostas esperadas e tidas como “corretas” e aquelas que os estudantes apresentam pode ser o resultado do contrato didático firmado pela escola/professor que estabelece para quem aprende a necessidade de resolver a questão proposta por meio de operações aritméticas, como se vê na parte da Questão 3, que visava sintetizar o que se observava nos cartões, ou seja, **5 x 7= ?**, quando Felipe e Renata, ao invés, de responderem **7 x 5**, como esperado dão o resultado da multiplicação, ou seja, **35.**

O objetivo da Questão 4 era identificar a ação dos participantes frente à necessidade de escrever uma multiplicação como adição de parcelas iguais, já que essa é uma ferramenta comum nas abordagens dos livros didáticos. Ao que parece, os nossos entrevistados dominam habilidades dessa natureza. Chama-nos a atenção para o procedimento de Renata ao escrever **(- 4).3** na forma de adição de mesmas parcelas, que, diante do obstáculo do multiplicador ser um número negativo, aplica a propriedade comutativa para fazer **(- 4) + (- 4) + (- 4)**, ou seja, o multiplicador e o multiplicando trocam de papéis. Felipe começa com uma compreensão semelhante quando faz **(- 4).3 = 3.(- 4)**, mas equivoca-se e atende à proposta fazendo **(- 4) + (- 4) + (- 4) + (- 4)**. Ele justifica dizendo que esse produto tem de ter quatro termos. Lucas e Catarina, vão no mesmo caminho, apesar de desconsiderarem o sinal dos números - 4 e - 7 nos itens **d** e **e** (ainda na Questão 3), respectivamente.

As dificuldades dos estudantes nessa questão, aproximam-se, na sua maioria, em alguns aspectos, a saber: a compreensão da propriedade comutativa e em algumas *dificuldades na aceitação do sinal de menos com diferentes significados*, como foi observado nos estudos de Borba (2009), Glaeser (1985) e de Nascimento (2002).

Até aqui, as questões da entrevistas foram direcionadas para conceitos adjacentes a realização das operações de multiplicação e divisão com números inteiros. A Questão 5 tinha como objetivo observar como esses adultos e adolescentes resolviam multiplicações de inteiros; além disso, com as justificativas, pretendíamos identificar potencialidades e dificuldades nessa ação e, ainda, se mobilizavam os conceitos de números simétricos, de comutatividade, entre outros.

As nossas hipóteses para essa questão foram desenvolvidas a partir de dois critérios: *a observação de atividades de ensino dessa operação na Educação Básica* e também as *sugestões dos livros didáticos*.

Os resultados indicam que o modo como o livro apresenta a multiplicação com números positivos e negativos não é o que os estudantes apresentam. A nossa observação indica que para os participantes, com algumas exceções, multiplicar números naturais nessa ordem de grandeza, não é uma habilidade difícil. Os erros cometidos foram mais relacionados com a multiplicação dos sinais, o que indica certa fragilidade dos estudantes frente a essa competência.

A estratégia que Felipe mobilizou para resolver essa questão chamou a nossa atenção. A Figura 4, a seguir, apresenta as respostas que ele dá à questão:

Figura 4 – Resolução da Questão 5 por Felipe, 46 anos, 3ª fase da EJA

05. Resolva as multiplicações abaixo:

a) 4 . 11	44
b) 5 . (- 4)	- 16
c) (- 15) . 6	- 75
d) (+ 5) . (+ 7)	+ 47
e) (- 8). (+ 5)	+ 32
f) (- 11). (- 7)	+ 69
g) (+ 6) . (- 7)	- 34
h) (- 12) . (- 4)	+ 32

Como pode ser observado, Felipe erra a resposta de quase todas as questões; no entanto, o seu erro, não é resultado da ignorância, mas sim de um conhecimento mal adaptado como defende Bachelard (1938) na teoria dos obstáculos epistemológicos.

Felipe, ao ser questionado sobre qual seria a justificativa para as respostas que apresentou a cada item, deixa claro, em todos eles, mesmo que, em alguns, cometa erros numéricos, como, por exemplo, nos itens **f** e **g** (Questão 5), os invariantes operatórios que ele mobiliza, o que pode ser identificado no quadro seguinte.

Quadro 6 – Trecho da entrevista de Felipe, 46 anos, 3ª fase da EJA

P: Por que 5.(-4) é igual a – 16?
E: 5.4 é 20, 20 tirando 4 é 16.
P: Por que você escreveu – 16 como resposta, o que justifica o sinal de menos?
F: Mais vezes menos é menos.

É pertinente destacar ainda que, nas demais multiplicações, ele tende a manter a mesma estratégia, inclusive nas que envolvem dois números inteiros positivos acompanhados do sinal de "**+**", o que indica que ele ainda não concebe os diferentes significados do sinal de "**-**", como foi discutido nos estudos de (GLAESER, 1985; BORBA, 1993; ASSIS NETO, 1995; NASCIMENTO, 2002), ou seja, para ele o sinal de menos indica apenas uma subtração.

Esse modo de agir não foi previsto nas hipóteses, que delineamos para as respostas que os participantes dariam a essa questão. Também, não a encontramos nos participantes de estudos anteriores (apresentados no Capítulo 1).

Verganud propõe que o processo de conceitualização do real só é alcançado quando se considera diferentes situações, os esquemas, na forma de invariantes operatórios que os estudantes mobilizam e também as suas formas de representação.

No caso de Felipe, para que ele avance na compreensão da multiplicação e divisão com números inteiros, pensamos ser necessário que a dimensão *situação* seja melhor trabalhada, a fim de que ele possa descobrir, em diversos contextos, os diferentes significados do sinal de menos, já que, em quase todos os itens, ele demonstra conhecer o algoritmo da multiplicação em $\mathbb{N}$, mas erra a questão, por aplicar no campo dos inteiros, conhecimentos limitados ao conjunto dos números naturais.

A Questão 6 pretendia verificar dentre duas estratégias supostas inicialmente: completar toda a tabela realizando multiplicações isoladas do valor da linha pelo da coluna ou se, após o preenchimento de alguns espaços, era notada a regularidade do sistema.

O procedimento utilizado pelos estudantes para resolverem a questão não foi aquele que esperávamos sobre a percepção da regularidade do sistema. Cada lacuna foi preenchida, operando-se o valor da coluna com o valor da linha. Embora não seja pertinente generalizarmos, isso pode indicar que a compreensão da multiplicação de números positivos e negativos via a regularidade do sistema, apesar de ser um caminho possível, não é comum dentre as práticas dos estudantes.

Os estudantes apresentaram alguns erros também nessa atividade ou pelo mau entendimento da sua proposta ou por utilizar de modo incorreto a multiplicação dos sinais. No caso de Lucas, ele realiza na maioria dos casos, a operação de adição ao invés da multiplicação. Também, nota-se, em Felipe e Renata, certa insistência em atribuir um sinal positivo ou negativo para o zero, o que evidencia uma compreensão limitada dos significados do zero, já que, ele tanto pode atuar como um ponto de referência da reta numérica (origem), quanto assumir o papel de número, tendo a mesma natureza e significado dos demais inteiros.

A Questão 7, além de ser uma situação diferente das até aqui apresentadas, ainda se diferenciava pela sua forma de representação e por permitir que os problemas que ela propõe sejam resolvidos por meio de uma multiplicação ou de uma divisão, inclusive sugerido a aplicação de operações inversas, o que no caso das operações adição e subtração em $\mathbb{Z}$, é uma tarefa bem mais difícil Borba (1993; 2009).

Uma das estratégias que esperávamos para essa questão era que o estudante, independente de apresentar ou não a resposta correta, a descobrisse pelo método de tentativas sucessivas, o que não aconteceu, já que, a maioria do estudantes, resolveram a questão mentalmente, sem explicitar por escrito as operações mentais aplicadas. Ainda, de acordo com Borba (1993; 2009), a necessidade de registrar formalmente as operações desenvolvidas pelos estudantes, reduz o desempenho dos mesmos, podendo ser essa, uma das dificuldades de compreensão das operações com números relativos.

Como esperávamos, a Questão 8, que tratava da realização de divisão de inteiros, não apresentou dificuldades diferentes daquelas que já comentamos em outras situações, sobre as dificuldades de compreensão dos diferentes significados dos sinais “**+**” e “**-**”.

É importante considerar também que Felipe, na multiplicação, deixa claro não entender os diferentes significados dos sinais dos números, não aplica aqui o mesmo raciocínio utilizado na multiplicação, não sabemos se pela grandeza dos números ou pelo fato de as operações de divisão apresentadas serem, na sua maioria, bastante familiares.

O objetivo com a utilização da nona questão era identificar uma possível aproximação entre o que os participantes sabem sobre operações com números inteiros relativos e uma situação comum ao cotidiano de todos eles.

Esperávamos que a estratégia mais frequente, senão, a única, fosse a representação do problema utilizando apenas números naturais, como, de fato, aconteceu. Apesar de não ter sido a intenção fundamental dessa questão, a resposta e justificativa de Lucas deixa claro que para ele dividir **300** por **5** é o mesmo que dividir **5** por **300**. O sinal negativo, que ele usa na resposta dada, é justificado pelo fato de o enunciado solicitar uma representação com números positivos e negativos, mais uma vez, ele atende ao contrato que o professor lhe impõe. Com relação ao uso do sinal, Catarina age de modo análogo ao de Lucas, por isso, faz, **60 + 60 + 60 + 60 + 60 = 300**, atendendo ao que a questão solicita.

Finalmente, a Questão 10 tinha como pretensão verificar em quais situações os alunos apresentam maiores dificuldades no que se refere à multiplicação de inteiros, quando o valor desconhecido atua em diferentes posições. Também, observar se essas dificuldades relacionam-se com a não compreensão da multiplicação e divisão como operações inversas.

Nessa fase da vida escolar, já é comum o uso de equações do primeiro grau na resolução de algumas atividades propostas pela escola. Um dos modos esperados era justamente o tratamento dessas questões por meio de equações do 1º grau. Felipe recorreu, em quase todos os itens, ao método de sucessivas tentativas até encontrar um número capaz de atender ou verificar o que ele já conhecia, o que também foi o caminho seguido por Lucas.

Renata utilizou o conhecimento de que a divisão e a multiplicação são operações inversas, assim, quando precisou descobrir qual o número **A** que multiplicado por **12** resultava em **– 204,** utilizou a divisão **– 204** por **12**.

Catarina resolveu todas as questões por meio da multiplicação onde os fatores eram os valores dados e o produto o ainda não conhecido.

Se comparamos as respostas dos quatro participantes nessa questão, podemos perceber que apenas Renata evidencia compreender a multiplicação e a divisão como operações inversas, ou, ao menos, garantir que sabe aplicar essa competência.

De modo geral, nas dez questões apresentadas no decorrer dessa entrevista, não conseguimos identificar diferenças importantes na ação dos adultos e adolescentes frente aos problemas propostos. Isso pode nos indicar, mesmo que provisoriamente, se consideramos a pequenez da nossa amostra, ou que não existem especificidades nas estratégias de adultos e adolescentes ao resolverem diferentes situações aplicando a multiplicação e a divisão de números inteiros.

Albuquerque (2010), também concluiu que, no caso da escala representada em gráficos, não existem especificidades no desempenho e estratégias de adultos e crianças.

No nosso caso, a ausência de particularidades importantes no desempenho e nas estratégias de adolescentes e adultos, podem ser conseqüência do contexto e das características das situações propostas, que como já foi discutido, é uma das variáveis do processo de aquisição e desenvolvimento de competências.

5.2.1 O que aprendemos com o estudo piloto

A escolha das questões propostas, a aplicação das entrevistas e a análise dos resultados trouxeram muitas contribuições para o aperfeiçoamento do nosso estudo, permitindo modificações importantes no instrumento de coleta de dados.

A seguir, pontuamos alguns dos principais ensinamentos deste estudo:

✓ O fato de algumas questões trazerem informações conceituais, como na Questão 1, pode influenciar localmente o modo de fazer e a resposta dada para a Questão;

✓ Em questões com enunciados longos, como as Questões 1 e 7, os participantes tendem a antes mesmo de fazer a leitura falar que não sabe e pedir para resolver outra questão, o que provoca o desinteresse do estudante e certamente influencia os resultados da entrevista;

✓ Questões como a **1**, a **2**, a **3**, a **4** e a **6**, podem ser dispensadas na entrevista, porque medem habilidades que, caso os estudantes as possuam, podem ser verificadas nas demais questões;

✓ Dentre as questões, da segunda etapa desta pesquisa (estudo posterior), percebemos a necessidade de modificar a natureza dos números, a fim de que sejam evitados operações com valores muito familiares nas atividades escolares;

✓ Aprendemos que, as situações propostas no estudo piloto, selecionadas de livros didáticos, eram insuficientes para o desenvolvimento das competências relativas à multiplicação e divisão em $\mathbb{Z}$**.**

Conforme já apresentamos, destas aprendizagens, e das contribuições da Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvemos as situações para as entrevistas da segunda parte deste estudo, da qual, participaram 32 estudantes.

Os resultados obtidos nesta etapa, compõem a discussão que, apresentamos na subseção seguinte.

5.3 Resultados da Pesquisa[16]

Nesta seção, apresentamos e discutimos os resultados obtidos após aplicação de entrevistas clínicas com 32 estudantes já escolarizados sobre o conceito e as operações fundamentais (multiplicação e divisão) envolvendo números inteiros relativos.

[16] Estamos nos referindo, aos resultados da segunda etapa desta pesquisa

O nosso percurso de análise começa com um olhar quantitativo, identificando a frequência de acertos e erros das respostas apresentadas sobre o desempenho dos estudantes da EJA e do Ensino Fundamental Regular, para, então, fazer uma classificação em função das questões que não apresentaram dificuldades e aquelas mais difíceis, em cada grupo, observando as questões nas quais os estudantes alcançaram maior e menor número de acertos.

Faremos uma análise das respostas às questões que apresentaram mais dificuldades, indicando as possíveis razões, que a justificam, e nos casos onde ocorram distanciamentos significativos entre os grupos, seja no número de acertos ou erros, seja nas formas de resolução, procuraremos identificar as possíveis razões para tais distanciamentos. Além do mais, trazemos as principais dificuldades evidenciadas pelos estudantes no decorrer das entrevistas.

Em suma, a nossa proposta é conhecer o que pode dificultar ou facilitar a aprendizagem do conceito de números relativos, a partir dos protocolos e dizeres apresentados pelos adolescentes, jovens e adultos. Para tal, faz-se necessário relacionarmos as respostas dos estudantes em cada item com a discussão teórica apresentada na primeira parte deste trabalho, especialmente na parte que diz respeito às dimensões constituintes de um conceito como apontado por Gérard Vergnaud, na Teoria dos Campos Conceituais, que serviu de base para a elaboração das questões propostas na entrevista e que conduzirá a análise das mesmas.

A Teoria dos Campos Conceituais nos permitirá identificar de que forma as especificidades de cada questão influenciam a compreensão e a ação dos estudantes.

A partir de agora, iniciamos a análise qualitativa e quantitativa das respostas dadas pelos estudantes. Para cada questão, com vistas ao melhor entendimento das respostas dadas pelos participantes e o que elas nos dizem, apresentamos, nessa ordem, *análises dos acertos e erros apresentados*, *indicação das estratégias utilizadas pelos estudantes* e *análises das estratégias referentes aos itens com maior índice de erros e acertos*. As análises tomam por base o referencial teórico, apresentado anteriormente.

5.3.1 Análise das respostas à Questão 1

O objetivo dessa questão foi observar o desempenho dos estudantes em diferentes situações de cálculo numérico sobre o produto de dois números inteiros apresentados com diferentes especificidades. Ao elaborarmos cada item, levamos em consideração aspectos como: *a presença ou não de sinais, a grandeza dos números e o uso de parênteses na apresentação de um ou dos dois fatores.*

A seguir, apresentamos o desempenho dos estudantes nessa questão, chamando a atenção para os acertos e erros mais frequentes observados na mesma.

5.3.1.1 Acertos e erros apresentados

O Quadro 7 expõe a frequência de acertos dos estudantes de cada um dos quatro grupos frente à primeira Questão.

Quadro 7 - Frequência de acertos na Questão 1

FREQUÊNCIA DE ACERTOS POR QUESTÃO E GRUPO

NATUREZA DOS GRUPOS		Adultos na EJA	Adolescentes na EJA	Adolescentes no Ens.Fund.	Adultos no Ens.Fund.	TOTAL
QUESTÃO	QTDE. DE PARTICIPANTES	8	8	8	8	32
Resolva as multiplicações	a) 4.11	8	7	7	7	29
	b) 5.(- 4)	5	5	5	4	19
	c) (- 36).(- 12)	2	2	3	1	8
	d) (- 15).13	4	3	2	2	11
	e) (+ 48).(+ 8)	4	3	2	0	9
	f) (- 18).(+ 3)	5	2	4	2	13
	g) (+ 11).(+ 4)	4	3	6	5	18

6 ou mais acertos (≥75%) | 4 ou 5 acertos (> 50% e < 75%) | Menos de 4 acertos (< 50%)

Como se vê, o item **a** não apresentou dificuldades por parte dos estudantes. A facilidade para resolver a operação indicada nesse item pode ser justificada pelo fato de que ela é análoga à multiplicação de números naturais, além de envolver números de pequena grandeza, o que permite uso do cálculo mental, estratégia adotada por 29 dos 32 estudantes na resolução da referida questão.

Três estudantes erraram o item **a**. Esses estudantes utilizaram-se de estratégias matematicamente válidas (*adição de parcelas iguais, representações por meio de bolinhas e algoritmo da multiplicação*), mas, algumas dificuldades ou equívocos no lidar com essas estratégias impediram que os participantes lograssem êxito na resolução da mesma.

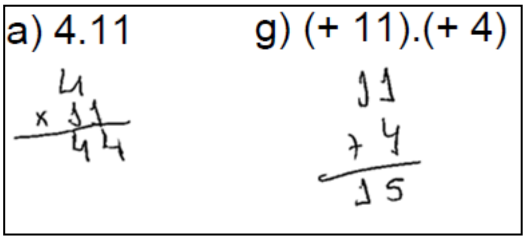
O item **g,** apesar de tratar de uma multiplicação com os mesmos números do item **a,** foi acertado por apenas 56% dos estudantes, enquanto no item **a** o índice de acertos foi superior a 90%.

Os motivos que levam estudantes a acertaram o item **a** e erraram o item **g**, podem está relacionados com a presença dos sinais e dos parênteses nos fatores, ou seja, mudar a forma de representação, nesses dois casos, se tornou suficiente para convencer os participantes a disporem de novas operações mentais. Assim, é que nos parece que, a variação na forma de representação destes itens, foi um obstáculo à sua resolução.

Ao resolverem o item **g**, dois estudantes, Cleandro e Vanessa, acertaram o módulo do produto esperado, mas erraram o sinal. Já 6 dos estudantes efetuaram a adição entre 11 e 4. Isso significa que o sinal de mais (+) foi compreendido não como sinal de número, mas sim como sinal de operação. O invariante operatório aplicado por esses estudantes é diferente do conclamado pelos participantes que obtiveram sucesso nesse produto, ou seja, a forma de representação e a presença do sinal de número, influenciaram a compreensão dos estudantes.

Clarice e outros cinco participantes, que acertaram o produto entre 4 e 11 erram no cálculo do produto entre (+ 11) e (+ 4). Ao menos para esses podemos dizer que o sinal de número é entendido como sinal de operação. A Figura 5 compara a resolução de Clarice nos itens que ora discutimos.

Figura 5 – Resolução dos itens **a** e **g** por Clarice, 22 anos, 8º ano do EF



Clarice, quando em situação, permite-nos identificar nos registros que realiza que o seu entendimento no processo de conceitualização da multiplicação de dois números inteiros positivos apresenta obstáculos, que parecem nascer da dificuldade de compreensão do significado subjacente ao conjunto dos números inteiros. A sua forma de agir no item **g** aponta evidências de que, em multiplicações onde os fatores são dois números inteiros positivos acompanhados do sinal de número, no caso, o sinal de mais (+), ela atua aplicando a seguinte regra: *"nas multiplicações de dois números inteiros acompanhados de sinais de mais, deve-se somar esses dois números".* Essa regra é uma elaboração nossa do que a estudante diz ser necessário para resolver o item **g**. Essa é a síntese do teorema que a estudante aplica e que será utilizado por outros em situações semelhantes.

A partir do momento em que Clarice aplica essa regra de ação em outras situações com as mesmas características desta, começamos a perceber o delineamento de um teorema-em-ação, como propõe Vergnaud (1996). Esse possível teorema-em-ação empregado por Clarice no item **g** é o mesmo aplicado pelos outros cinco estudantes.

Dentre a tríade que para Vergnaud um conceito se constitui, isto é, por meio de um *conjunto de situações, de invariantes operatórios e de formas de representação*, o teorema-em-ação, assim como o conceito-em-ação funcionam como unidades dos invariantes operatórios. Daí, podemos entender o quanto a forma de representação dos itens **a** e **g** convidam os participantes a abandonarem a forma de resolução do item **a** e a elaborarem um novo teorema a partir das características do item **g**.

Os itens **b** e **d**, que são, **5. (- 4)** e **(-15). 13**, respectivamente, se aproximam no fato de que cada um tinha como fator um número negativo apresentado entre parênteses e, distanciam-se na grandeza dos números. Por isso, é que, estamos analisando estes itens conjuntamente. O item **b** oferecia melhores condições de resolução por meio de cálculo mental se comparado com o item **d**, dado que, os fatores são mais familiares e menores que os do item **d**.

O índice de acertos de cada item (cerca de 60% no **b** e de 35% no **d**) apontam que a compreensão do produto **(-15). 13** foi mais difícil do que a do produto **5 . (- 4)**. Esse fosso entre os índices de acertos nos dois itens parece ser consequência imediata da ordem de grandeza dos números, o que facilita o cálculo mental, diferentemente do que ocorre com o item **d** (facilita o erro numérico).

Os erros mais comuns nesses dois itens foram provocados pela dificuldade de compreensão dos diferentes significados do sinal de menos, que também foi uma resistência apresentada pelos participantes de estudos anteriores realizados tanto no Brasil quando em outros países, como os de Borba (1993; 2009) e Nascimento (2002).

Os itens **c**, **e** e **f** visavam identificar a competência dos estudantes ao resolverem multiplicações com números inteiros cujos fatores aparecem entre parênteses e sempre acompanhados de um sinal de número. Além do mais, as multiplicações dos itens **e** e **f** aproximavam-se na ordem de grandeza dos fatores. Outra característica desses produtos é que, nos dois primeiros, os fatores possuem mesmo sinal (ora +, ora -), diferentemente do que ocorre com o último produto (item **f**). Este resultado indica que, em produtos onde os sinais dos números são iguais, os estudantes acertam mais do que naqueles que possuem fatores com sinais diferentes.

O Quadro 7 mostra que desses três itens o mais acertado pelos estudantes foi o item **f** com quase 41% de êxito. Os itens **c** e **e** apresentaram índices de acertos bem próximos, no item c o percentual de acertos foi 25% e no f cerca e 28%. Essa tímida diferença dá-se em função desses produtos apresentarem fatores com diferentes grandezas e, também, porque o produto de quantidades negativas (item **c**), tornou-se mais difícil do que o de quantidades positivas (item **e**).

Analisando o desempenho dos participantes de cada um dos quatro grupos, percebemos que os estudantes da EJA, alcançaram melhores índices de desempenho, mesmo que, com uma pequena diferença. Tal distanciamento, entre os estudantes da EJA e os do Ensino regular, pode ser justificada, pela razão de que a maior parte destes participantes exercem, constantemente, atividades que podem favorecer uma relação entre as situações escolares e aquelas do seu cotidiano.

No próximo ponto, apresentamos as estratégias utilizadas pelos participantes de cada um dos quatro grupos na resolução da Questão 1. No decorrer da exposição dessas estratégias, fazemos algumas inferências sobre as evidências que os estudantes apresentam a respeito do conceito de números inteiros relativos.

5.3.1.2 Estratégias utilizadas para a resolução da Questão 1

Um dos objetivos desta pesquisa é identificar as estratégias mobilizadas pelos estudantes ao resolverem as questões que lhes propomos. Por isso, a nossa intenção nesse tópico é estudar a forma como cada Questão com as suas familiaridades e especificidades em relação às demais faz com que o participante acione diferentes regras de ação.

O nosso olhar está voltado para as estratégias mobilizadas pelos estudantes ao resolver e justificar os sete itens relativos à Questão 1. Mostraremos, por meio de tabelas, a frequência de estratégias utilizada pelos estudantes de cada grupo, item a item, aproximando as formas de ação dos estudantes e os índices de erros e acertos apresentados no tópico anterior.

Antes de adentrarmos na análise das formas de resolução utilizadas pelos estudantes na primeira questão, nomeamos e caracterizamos cada uma das estratégias identificadas nas seis questões deste estudo. Esta escolha, tem a pretensão de evitar repetições na nomeação e caracterização das estratégias citadas ao longo desse texto, já que, na maioria das vezes, as estratégias utilizadas em cada questão se aproximam. Dessa forma, os exemplos que citamos a seguir envolvem não apenas a primeira questão.

Nas resoluções dos estudantes, nas seis questões desta pesquisa, identificamos as seguintes estratégias: *cálculo mental*, *algoritmo da adição*, *algoritmo da subtração*, *algoritmo da multiplicação*, *algoritmo da divisão*, *adição de* *parcelas iguais*, *representações utilizando bolinhas ou tracinhos* e *tabuada da multiplicação*.

Chamamos de *cálculo mental* as situações nas quais os estudantes não realizavam nenhum algoritmo ou outra forma de registro escrito para obtenção da resposta solicitada, podendo essa ser dada de imediato ou depois de um tempo significativo. Como exemplo, apresentamos no Quadro 8, um recorte da entrevista de Eridian, 19 anos, estudante da 4ª fase da EJA. O estudante indica que a resposta do item **g** é 15, ou seja, para ele (+ 11).(+ 4) é igual a 15. Ele não fez qualquer registro em sua resposta, além da própria resposta, mas a explica oralmente.

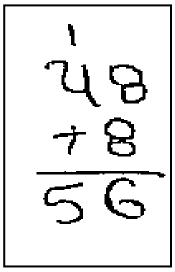
A operação mental que o adulto realiza é a adição, mas, ações dessa natureza, caracterizamos como *cálculo mental* porque, como já dissemos, o participante não recorre a nenhuma forma de registro por escrito.

Quadro 8 – Transcrição de trecho da entrevista de Eridian (item **a** da Questão 2)

P: Por que 15?
E: É 11 mais 4.
P: Por que você fez 11 mais 4?
E: Só tem sinal de mais, dá tudo mais!
P: E qual o sinal do número 15?
E: É sem sinal, mas é como se fosse positivo.
P: Positivo, por quê?
E: Porque é mais com mais.

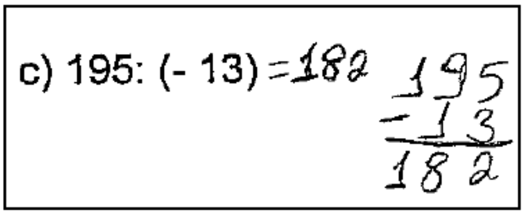
Denominamos de *algoritmo da adição* as vezes nas quais os estudantes respondiam aos itens propostos após aplicarem um processo de cálculo característico da adição, como o da Figura 6.

Figura 6 – Resolução da Questão **1e** por Dorinha, 12 anos, 8º ano do EF



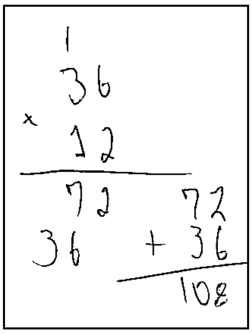
À semelhança do que caracterizamos como algoritmo da adição, qualificamos como algoritmo da subtração, as respostas nas quais a principal estratégia aplicada foi o uso do algoritmo dessa operação. Como exemplo, citamos a Figura 7.

Figura 7 – Resolução da Questão **2c** por Eridian, 19 anos, 4ª fase da EJA



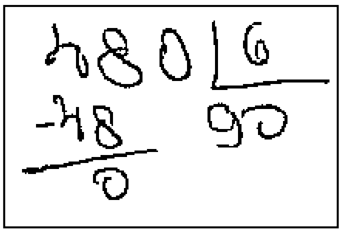
O algoritmo da multiplicação foi a nomenclatura utilizada quando os participantes resolviam a situação, desenvolvendo procedimentos característicos da multiplicação, como é o caso exibido na Figura 8.

Figura 8 – Resolução da Questão **4** por Sebastião, 23 anos, 8º ano do EF



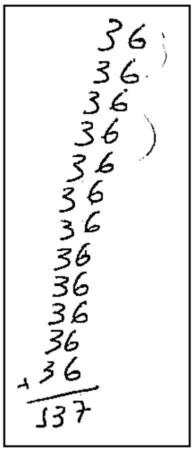
Como já é previsível, chamamos de algoritmo da divisão as formas de resolução resultantes da aplicação do algoritmo dessa operação, ou seja, as resoluções semelhantes a Figura 9.

Figura 9 – Resolução da Questão **3a** por João, 19 anos, 8º ano do EF



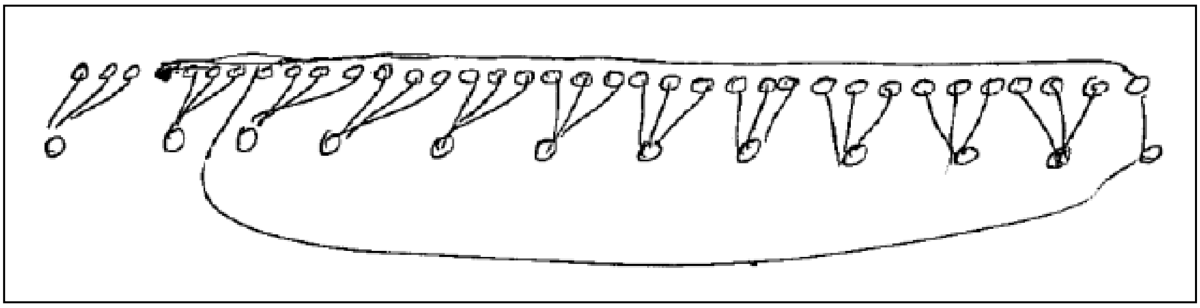
A estratégia que nomeamos como adição de parcelas iguais tem sua origem nas situações que se assemelham à ação de Henrique (Figura 10), ou seja, situações onde os participantes registram e resolvem uma adição onde todas as parcelas são iguais ao multiplicando e a quantidade de parcelas corresponde ao multiplicador.

Figura 10 – Resolução da Questão **4** por Henrique, 16 anos, 4ª fase da EJA



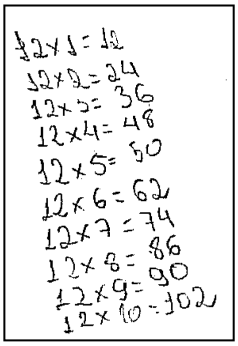
A ação que chamamos de representações com bolinhas ou tracinhos (icônica) refere-se a formas de resolução onde o estudante registra uma bolinha ou tracinho para cada unidade do dividendo em uma região e em outra faz o mesmo para o divisor. Em seguida, efetua uma correspondência biunívoca, associando uma bolinha representante do dividendo com uma bolinha representante do divisor. Faz isso até esgotar todas as bolinhas que representam o divisor. Após isso, continua a associação dividendo-divisor, uma a uma, até esgotar todas as representações do dividendo. Finalmente, conclui que a quantidades de bolinhas do dividendo que está associada a cada uma do divisor representa o quociente, como age Jaqueline ao calcular o quociente entre 36 e 12. Com esta estratégia, a estudante consegue chegar a resposta correta da questão.

Figura 11 – Resolução da Questão **2a** por Jaqueline, 20 anos, 8º ano do EF



Tabuada foi o nome dado para os casos onde os estudantes resolviam as atividades propostas escrevendo a tabuada relativa ao tipo de operação, que precisava resolver. Um exemplo dessa forma de agir é o que podemos observar na Figura 12.

Figura 12 – Resolução da Questão **2a** por Bianca, 12 anos, 8º ano do EF



Bianca compreende que a divisão e a multiplicação são operações inversas. Com essa habilidade, ela escreve a seu modo a tabuada de 12, só após a conclusão dessa tarefa é que ela diz que o quociente entre 36 e 12 é 3.

Uma vez que já caracterizamos as estratégias mobilizadas pelos estudantes, apresentamos agora a frequência na qual os estudantes empregaram essas estratégias. Inicialmente, pontuamos as aplicações dos estudantes na Questão 1.

A Tabela 1, a seguir, mostra as estratégias utilizadas pelos participantes de cada grupo nos itens **a e g** da questão, que ora discutimos.

Tabela 1 – Estratégias utilizadas pelos estudantes nos itens **a** e **g**.

Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
a) 4.11	cálculo mental	6	6	4	3	19
	alg. multiplicação	1	1	3	4	9
	adição de parcelas iguais	0	1	0	0	1
	representações	1	0	1	0	2
	tabuada	0	0	0	1	1
g) (+11).(+4)	cálculo mental	7	6	7	2	22
	alg. multiplicação	1	1	1	4	7
	adição de parcelas iguais	0	1	0	0	1
	alg. adição	0	0	0	1	1
	tabuada	0	0	0	1	1

Optamos por apresentar esses dois itens numa mesma tabela, principalmente, porque eles possuem os mesmos fatores, mas, distanciam-se na sua forma de representação.

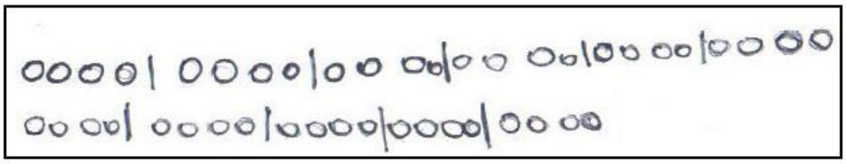
Nesses itens, a estratégia mais utilizada, como já previamos, numa análise a priori das questões, foi o cálculo mental. A justificativa para isso deve ser o fato de que, nesses produtos, os números têm uma grandeza razoavelmente pequena, o que favorece a utilização dessa estratégia. Além do mais, o item **a** aparece desacompanhado de sinais e parênteses o que estimula ainda mais a utilização do cálculo mental. No item **g,** a estratégia cálculo mental foi timidamente mais utilizada que no item **a**. Certamente, devido às formas de representação desses dois itens.

Nos dois grupos nos quais os participantes são adultos, o cálculo mental foi mais utilizado que nos grupos onde os participantes são adolescentes, do mesmo modo, o emprego de outras formas de resolução, diferentes das que recorrem aos algoritmos das operações fundamentais da aritmética, como, por exemplo, o uso de representações com tracinhos ou bolinhas, só foi aplicado por estudantes da EJA.

O uso das estratégias adição de parcelas iguais e recorrência à tabuada foram utilizados por dois estudantes adolescentes do Ensino Fundamental. Isso pode indicar uma retomada de estratégias didáticas utilizadas pelos professores e professoras das séries iniciais do Ensino Fundamental, com a intenção de facilitar a compreensão dos fatos básicos das operações, atribuinho-lhes sentido ou associando o ensino de uma nova operação com outra já conhecida pelo estudante, como é o caso da relação, que se estabelece entre a adição e a multiplicação, tornando a última uma adição de parcelas iguais. Embora, a Tabela 1 indique que essas estratégias foram mobilizadas apenas por estudantes do Ensino Fundamental, isso não quer dizer que elas também não sejam comuns a professores e estudantes da EJA.

A Figura 13 exibe a forma como Del resolve o iten **a**.

Figura 13 – Resolução do item **a** por Del,19 anos, 4ª fase da EJA



O estudante, quando lança mão de estratégias de resolução como essa utilizada por Del, busca atribuir sentido à sua forma de agir numa atividade puramente escolar.

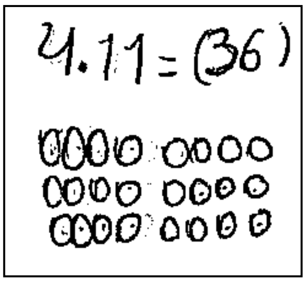
Certamente, a ação de Del também é consequência de alguns mecanismos didáticos aplicados pelos professores com o objetivo de que as ideias subjacentes às operações aritméticas venham à tona com a criação de um cenário capaz de permitir ao estudante a elaboração dos conceitos e competências necessárias para enfrentar e resolver problemas aplicando os diferentes significados relativos às operações fundamentais da aritmética.

Também, é verdade que, como foi discutido na fundamentação teórica deste trabalho, quando nos referimos à teoria dos obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1938; GLAESER, 1985; NASCIMENTO, 2002), ações dessa natureza acabam incutindo nos estudantes ideias e generalizações, que vão além do seu campo de validade, ou que mesmo sendo matematicamente válidas e facilitem a compreensão dos significados das operações aritméticas em determinados contextos, são amplamente exaustivas e em algumas situações quase inviáveis de serem resolvidas por meios de representações com bolinhas ou recorrendo à adição de parcelas iguais.

Ao lançarmos um olhar para as estratégias e percentuais de desempenho apresentados pelos estudantes nos itens **a** e **g**, percebemos que, apesar de adultos e adolescentes utilizarem com maior frequência estratégias diferentes, o índice de acertos nos dois grupos apresentou algumas aproximações, sendo que o item **g** foi ligeiramente mais acertado pelos adolescentes que pelos adultos.

A Figura 14 apresenta a forma utilizada por Graziela para resolver o item **a**.

Figura 14 – Resolução da Questão **1a** por Graziela, 15 anos, 4ª fase da EJA



Quadro 9 – Transcrição de trecho da entrevista de Graziela

P: Por que 36?
E: Eu fiz 4 bolinhas 6 vezes, mais como é onze, aí é quase o dobro, aí aumentei doze.
P: E o sinal é positivo ou negativo?
E: É de mais.
P: Por quê?
E: Porque tá sem sinal, aí é de mais.

A ação de Graziela sobre o produto entre 4 e 11 deixa claro a sapiência da estudante da EJA sobre o significado da multiplicação entre esses números, mesmo que a sua ação não alcance a resposta correta.

Da mesma forma que, nos itens **a** e **g**, o cálculo mental também foi a estratégia mais utilizada pelos estudantes ao responderem o item **b**, mas, já no item **d,** os fatos da multiplicação assumiram a liderança como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Estratégias utilizadas pelos estudantes nos itens **b** e **d**.

Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
b) 5.(- 4)	cálculo mental	7	7	4	3	21
	alg. multiplicação	0	1	3	4	8
	representações	1	0	1	0	2
	tabuada	0	0	0	1	1
d) (-15).13	cálculo mental	2	3	2	0	7
	alg. multiplicação	5	5	6	8	24
	alg. adição	1	0	0	0	1

Como indica a Tabela 2 além do algoritmo da multiplicação e do cálculo mental, os estudantes também empregaram as estratégias representações com bolinhas e tracinhos e tabuada.

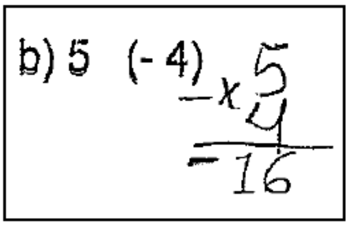
Comparando as formas de resolução mobilizadas por cada um dos grupos, notamos que o cálculo mental foi ligeiramente mais utilizado pelos adultos, do mesmo modo que o algoritmo da multiplicação foi mais aplicado pelos adolescentes.

Nesses dois itens, os adultos acertaram mais do que os adolescentes (Quadro 7), o que não significa necessariamente que o uso do cálculo mental conduz a uma resposta correta, embora, na maioria das vezes isso tenha ocorrido nesse estudo.

Além das estratégias já listadas, pontuamos que cinco estudantes usaram num mesmo item (item **b**) mais de uma das estratégias mencionadas, como é o caso de Potira e Mailson.

A Figura 15 apresenta a ação de Potira, 22 anos estudante da 4ª fase da EJA ao calcular o produto **5. (- 4).**

Figura 15 – Resolução do item b por Potira



A estudante aplica simultaneamente duas das estratégias que mencionamos na Tabela 2. Mas, formas de resolução dessa natureza categorizamos como algoritmo da multiplicação, por ser essa a primeira operação aritmética realizada, mesmo que tenha ficado evidente que, no seu entendimento, situações como essa requerem o emprego de duas operações.

O teorema-em-ação que Potira emprega para resolver o item **b** pode ser elaborado a partir da justificativa que ela apresenta para a sua ação, como apresenta o Quadro 10.

Quadro 10 – Transcrição de trecho da entrevista de Potira

P: Por que 16?

E: 5 vezes 4 dá 20, 20 tirando 4 dá 16.

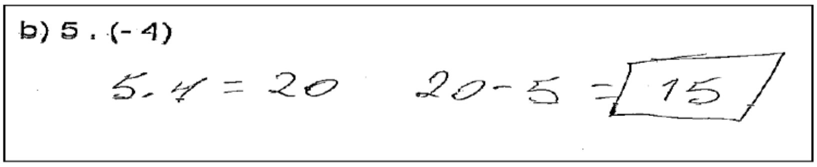
P: Por que ficou negativo?

E: Só tem o sinal de menos aí fica menos.

A atuação de Potira frente ao produto **5 . (- 4)** nos diz que ela sabe resolver multiplicações com números naturais, ao menos, as que envolvem multiplicações de unidades, mas diz também que o sinal é compreendido como indicador de uma operação e não como uma propriedade do número, o que já foi identificado em outras situações.

A compreensão do significado do sinal de número, como sinal de operação, também, foi uma dificuldade apresentada por outros participantes, como, por exemplo, no adolescente Mailson de 15 anos, estudante da 4ª fase da EJA apresenta quando resolve o mesmo item.

Figura 16 – Resolução do item **b** por Mailson



O entendimento de que a situação precisava ser resolvida por meio de uma multiplicação não ofereceu qualquer resistência para Mailson, mas a função do sinal negativo nesse produto exige para ele uma segunda operação, no caso, uma subtração, onde o produto passa a ser o minuendo e o maior fator o subtraendo. O entendimento de Mailson, em situações dessa natureza, pode ser compreendido pela leitura do quadro seguinte:

Quadro 11 – Transcrição de trecho da entrevista de Mailson

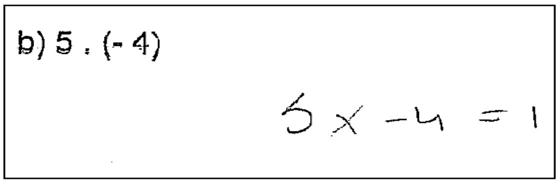
P: Por favor, explique como você fez
E: Cinco vezes quatro vinte, vinte menos cinco quinze
P: Por que você fez 20 menos 5?
E: Porque mais com menos num dá menos
P: Por que você tirou 5 e não 4?
E: Porque o cinco é maior
P: E qual o sinal do 15?
E: É positivo, porque o cinco tá fora do parêntese é como se fosse mais, aí ele é maior

Embora a princípio a ação de Mailson possa parecer ilógica, a ponto de que, se estivéssemos numa situação de sala de aula, com todas as demandas que este espaço apresenta, certamente, o professor consideraria a resolução de Mailson, como errada, o que de fato é, sem ao menos notar que o seu erro é resultado de aprendizagens mal adaptadas, ou seja, é um conjunto de conhecimentos matemáticos corretos aplicados num campo onde eles se tornam inválidos.

Os sinais de mais (+) e de menos (-) têm para muitos estudantes apenas a função de sinais de operação, ou seja, o sinal de mais sempre indica uma adição da mesma forma que o sinal de menos sempre indica uma subtração. Estes sinais, prevalecem, até mesmo entre alguns estudantes que conhecem e fazem apelo a *regra dos sinais*, para quem, o resultado da aplicação destas regras é que indica a operação a ser realizada.

Antes de o participante iniciar a resolução de cada questão, que lhes eram apresentadas em folhas separadas, o pesquisador fazia a leitura do enunciado da mesma, ou seja, o estudante começava ciente de que todos os itens da questão em pauta tratavam da multiplicação de números inteiros. Essa informação dada a priori, logo perdia o sentido, frente à função primeira que os sinais mais e menos possuem para alguns dos estudantes; a exemplo, citamos a Figura 17.

Figura 17 - Resolução do item **b** por Del, 19 anos, 4ª fase da EJA



A resolução de Del aponta que ela estava ciente de que a atividade solicitada referia-se à multiplicação, mas a importância que ela dá ao sinal de menos, que, no caso, é sinal de número, supera essa consciência, e ela termina realizando uma subtração. O significado que ela atribui ao sinal de multiplicação pode ser compreendido com a leitura do Quadro 12, que traz um recorte da entrevista realizada com Del.

Quadro 12 – Transcrição de trecho da entrevista de Del

P: Por que 1?

E: Cinco menos quatro é um.

P: Mas aqui temos uma multiplicação, você entendeu?

E: É mas tem cinco menos quatro também, aí faz primeiro a subtração.

P: E o sinal de multiplicação, pra que serve?

E: Pra saber que tem que fazer o jogo de sinal.

P: Você fez o jogo de sinal aqui?

E: Não precisa, porque o 5 é o maior, aí fica o sinal dele mesmo.

A leitura mais importante desse quadro, é a finalidade dada por Del para o sinal de multiplicação, nos dizendo que o sentido que ela atribui aos “números com sinais” passa longe do conceito de números inteiros que conhecemos, ao mesmo tempo que parece indicar uma tentativa exacerbada de aplicar regras que comumente são ensinadas na escola, o que se percebe principalmente quando a estudante diz que o sinal da multiplicação serve para indicar que ela precisa realizar o que chama de “jogo de sinais”.

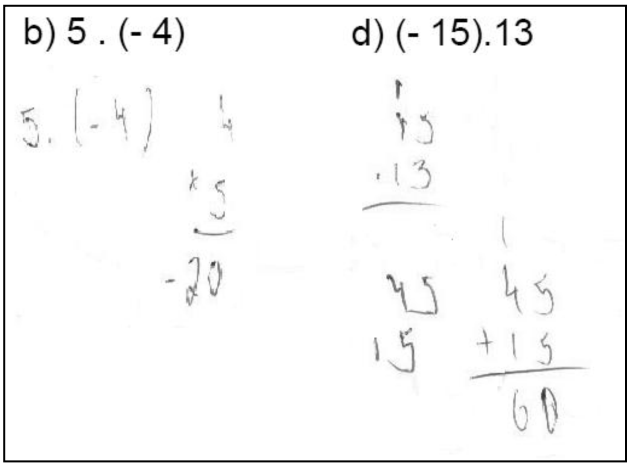
De modos diferentes, os três estudantes trazem à tona que entenderam os itens **b** e **d** como multiplicação, mas os esquemas que eles aplicam, na resolução dos mesmos, deixam claro que eles não compreendem a função do sinal, enquanto característica do número e não indicativo de operação.

A objeção impressa pelas ações desses estudantes no que se refere a atribuir mais de um significado aos sinais de números se aproximam das resistências identificadas em outros estudos (BORBA, 1993; NASCIMENTO, 2002; BORBA, 2009)). Além do mais, avizinham-se de conflitos apresentados por matemáticos como Euler e D’Alambert na aceitação dos números inteiros, que chegaram a considerar esses números como absurdos ou infernais.

A principal especificidade dos itens **b** e **d** é a grandeza dos fatores. Por isso, acreditava-se que o item **b** tinha mais possibilidades de ser acertado pelo cálculo mental do que o item **d**. Os resultados comprovam a nossa hipótese inicial, principalmente, porque todos os estudantes que acertaram o item **d** utilizaram o algoritmo da multiplicação. Mas, nem todos os que recorreram a essa estratégia obtiveram êxito.

A Figura 18 mostra a resolução dos itens **b** e **d** por um mesmo estudante, Sebastião, 23 anos, adulto no Ensino Fundamental. A estratégia que ele utiliza, no primeiro caso, é o cálculo mental, enquanto no item **d** ele recorre ao algoritmo da multiplicação.

Figura 18 – Resolução dos itens **b** e **d** por Sebastião



As justificativas para os procedimentos que ele utiliza no algoritmo da multiplicação estão descritos no Quadro 13 seguinte:

Quadro 13 – Extrato da entrevista de Sebastião

P: Você pode explicar como você fez essa multiplicação?
E: Eu fiz assim, 3 vez 15 dá 45 e 1 vez 15 dá 15, depois eu somei o 45 e o 15.
P: E o sinal, por que ficou menos?
E: Menos com mais dá menos

Nesse caso, o uso do algoritmo da multiplicação levou ao erro um estudante que evidencia ainda não compreender o funcionamento do algoritmo dessa operação.

Vamos discutir agora o desempenho dos participantes nos itens **c**, **e** e **f**, que são nesta ordem, **(- 36).(- 12)**, **(+ 48). (+ 8)** e **(- 18).(+ 3)**.

A Tabela 3, a seguir, apresenta as estratégias mobilizadas pelos estudantes de cada grupo ao resolverem os itens **c**, **e** e **f**. A nossa escolha por relacionar numa mesma tabela esses três itens deu-se em função das aproximações e distanciamentos que esses itens apresentam como o fato de todos os fatores serem apresentados em parênteses e a de estarem sempre acompanhados de algum sinal. Porém, diferencia-se na grandeza dos números, na natureza dos sinais que são, nessa ordem, dois sinais negativos, dois sinais positivos e um sinal negativo e outro positivo.

Tabela 3 – Estratégias utilizadas pelos estudantes nas questões 1c, 1e e 1f.

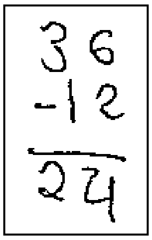
Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
c) (-36).(-12)	cálculo mental	3	3	2	7	16
	alg. multiplicação	4	5	6	0	15
	alg. adição	1	0	0	0	1
	alg. da subtração	0	0	0	1	1
e) (+48).(+8)	cálculo mental	3	3	1	0	7
	alg. multiplicação	5	5	6	6	22
	alg. adição	0	0	1	1	2
	adição de parcelas iguais	0	0	0	1	1
f) (-18).(+3)	cálculo mental	5	4	2	0	11
	alg. multiplicação	2	3	6	6	17
	alg. subtração	1	1	0	0	2
	alg. da adição	0	0	0	1	1
	tabuada	0	0	0	1	1

Uma análise dos dados apresentados nessa tabela nos traz algumas surpresas no sentido de se opor àquilo que esperávamos numa análise prévia que fizemos das questões. O nosso estudo preliminar indicava que o cálculo mental seria mais utilizado no item **f** do que nos demais itens (**c** e **e**) devido à grandeza dos fatores em questão. Mas, contrariamente ao que esperávamos, foi no produto (-36).(-12) que o cálculo mental foi mais utilizado. Isso pode ter ocorrido pelo fato de que os estudantes tenham mais familiaridades com os cálculos mentais nos quais um dos fatores são dezenas ou valores ligeiramente maiores que elas. Ao lançarmos um olhar simultâneo sobre os três itens, percebemos que o algoritmo da multiplicação é a estratégia mais utilizada, chegando a alcançar quase 57% do total de estudantes nos itens em questão e aproximadamente 69% no item **c**. Em segundo lugar, vem o cálculo mental, que foi a estratégia recorrida por cerca de 35% dos estudantes em pauta.

Além das estratégias algoritmo da multiplicação e cálculo mental ainda foram utilizadas as estratégias algoritmo da adição, algoritmo da subtração, adição de parcelas iguais e tabuada. Essas ferramentas de que alguns estudantes se dispuseram para resolver os itens, evidenciam, assim como a estratégia algoritmo da multiplicação, grande ligação com mecanismos e procedimentos que os professores e professoras usam com bastante frequência na escola, mas que aplicados em situações, que vão além do seu campo de validade, muitas vezes, são provocadoras de erros, como foi discutido por Bachelard e Brousseau na Teoria dos Obstáculos Epistemológicos.

A Figura 19 mostra que a compreensão de Dorinha, 12 anos, estudante do 8º ano do Ensino Fundamental aproxima-se daquela evidenciada por Jonatan (Figura 20), sobre a aplicação de um conhecimento adequado a um campo numérico, mas impróprio em algumas situações de outro campo numérico, como a ideia de que o sinal de menos apenas indica uma subtração, que é o que se nota na Figura 19.

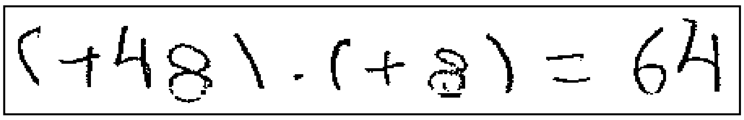
Figura 19 – Resolução do item **c** por Dorinha



O que leva Dorinha a utilizar o algoritmo da subtração numa situação de multiplicação não é a sua falta de habilidade nessa operação, mas, o fato de prevalecer a ideia do sinal como indicativo de operação.

A Figura 20, a seguir, mostra a resolução de Jonatan, 16 anos, estudante da 4ª fase da EJA e nos serve como exemplo para a extrapolação da ideia constituída nas séries (ou fases, no caso da EJA) iniciais do Ensino Fundamental, de que o sinal de mais tem a função de indicar uma adição, ficando o sinal indicativo da operação, que, neste caso, é o da multiplicação e o papel do sinal de mais que, no item, exerce o papel de sinal de número, e não de operação, como foi interpretado pelo adolescente.

Figura 20 – Resolução do item **e** por Jonatan



Jonatan utiliza o cálculo mental e a justificativa que dá a essa resposta pode ser observada no Quadro 14, a seguir.

Quadro 14 – Trecho transcrito da entrevista de Jonatan

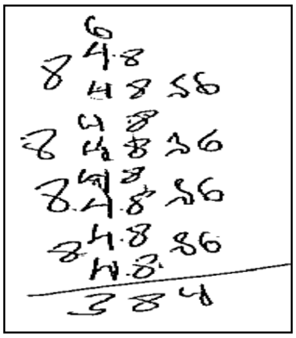
P: Por que o resultado é 64?
E: É só somar 48 mais 8.
P: E porque que é de somar?
E: É mais com mais.

Mesmo o estudante errando ao dizer que 64 é o total obtido quando as parcelas são 48 e 8, a sua justificativa deixa claro que a presença do sinal de mais entre os fatores tem invariante de natureza diferente da sua ação nos caso onde isso não acontece.

Mais uma vez, esses dados indicam que também, nesses três produtos, (**c**, **e** e **f**) os diferentes significados dos sinais não são entendidos pela maior parte dos estudantes, prevalecendo também, a idéia do sinal como indicativo de uma operação.

A Figura 21 traz a resolução de Thomaz, 12 anos, estudante do 8º ano do Ensino Fundamental.

Figura 21 – Resolução do item **e** por Thomaz



O recurso que Thomaz emprega é a adição de parcelas iguais. Destacamos que o modo como ele efetua a adição não é tão comum, principalmente no grupo do qual ele faz parte, ou seja, estratégia dessa natureza é mais comum entre os estudantes adultos, que, por terem maior experiência com situações cotidianas e às vezes, escolares, acabam desenvolvendo recursos próprios para lidarem com a resolução de operações.

A Figura 22 mostra a resolução dada por Alberto, 27 anos, estudante da 4ª fase da EJA.

Figura 22 – Resolução do item **f** por Alberto

f) (- 18). (+ 3)

(-18). (+3 = +21

O Quadro 15 mostra a justificativa de Alberto à sua ação nesse item.

Quadro 15 – Trecho da Entrevista de Alberto

P: Por que o resultado é + 21?
E: 18 mais 3.
P: E o sinal de mais, por quê?
E: É de mais.
P: O sinal de menos do 18 você sabe pra que serve?
E: É pra o jogo de sinal?
P: Você fez esse jogo de sinal?
E: Fiz no mais.
P: Qual mais?
E: Pra saber que é de mais, porque se fosse menos e menos era de menos.

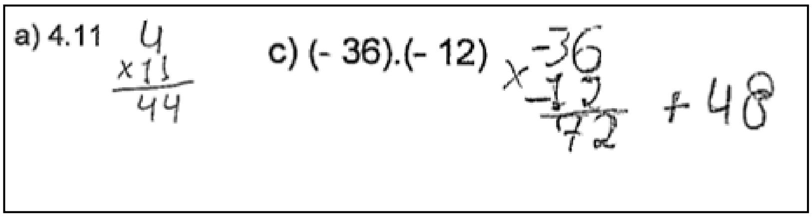
Com essa resolução e justificativa de Alberto, alcançamos todos os itens da primeira questão e reforçamos a discussão que vimos levantando de que os estudantes não compreendem inteiramente o sentido dos números inteiros relativos e quando necessitam efetuar a multiplicação entre números inteiros agem como se todos esses números e os sinais imbricados a eles tivessem a mesma natureza dos números e operações do conjunto N dos números naturais.

Como argumento para essa nossa observação, apresentamos um levantamento das estratégias utilizadas por cada um dos estudantes que erraram os itens **c**, **e** e **f** comparando com as formas de resolução desses participantes nos itens **a**, **b** e **g**.

As principais dificuldades observadas na ação desses estudantes foram: *os números possuem grandeza diferente das apresentadas nos três itens mais acertados* *pelos estudantes (**a**, **b** e **g**) e os dois fatores aparecem entre parênteses*, o que induz alguns participantes a compreenderem que a operação a ser realizada é aquela indicada pelo sinal dos números.

A Figura 23, a seguir, mostra duas resoluções de uma mesma estudante. A forma como ela compreende os itens **a** e **c** é influenciada pela presença dos sinais e parênteses.

Figura 23 – Resolução dos itens **a** e **c** por Potira, 22 anos, estudante da EJA



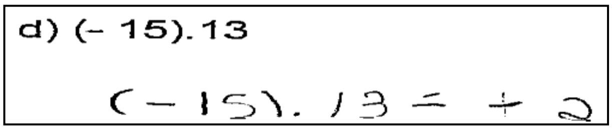
O item **a** foi facilmente compreendido pela estudante. Já os itens onde os dois fatores apareciam entre parênteses, portanto, acompanhados de algum sinal, eram assimilados por ela como situações, envolvendo mais de uma operação (como indica o Quadro 16; por isso, ela apresenta duas respostas para uma mesma operação.

Quadro 16 – Transcrição de trecho da entrevista de Potira

P: Por que você fez duas operações uma multiplicação e uma soma.
E: Num é duas contas.
P: Duas contas, quais?
E: De vezes e de mais.
P: Por que de vezes?
E: O pontinho.

Ao observarmos as estratégias adotadas pelos estudantes que erraram o item **d**, identificamos que três estudantes acertaram o produto **15.13**, mas erraram o sinal de número desse item e 8 participantes agiram na situação somando ou subtraindo os fatores, como se vê nas Figuras 24 e 25.

Figura 24 – Resolução do item **d** por Jonatan, 16 anos, adolescente na EJA



No Quadro 17, dispomos de trecho da entrevista realizada com Jonatan.

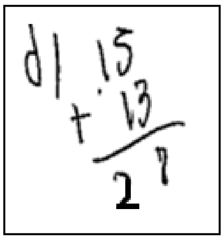
Quadro 17 – Transcrição de trecho da entrevista de Jonatan

P: Você pode explicar porque escreveu 2 como resultado?
E: Porque é 15 menos 13.
P: E o sinal do 2 porque ficou positivo?
E: Porque o 13 tá fora do parêntese e tá sem sinal, aí é como se fosse mais.

A justificativa do estudante legitima que o sinal de número do fator – 15 é entendido por ele como sinal de operação.

De forma bem semelhante é o juízo que Clarice, 22 anos, estudante do 8º ano do Ensino Fundamental faz dessa mesma Questão (item **d**), como indica a Figura 25.

Figura 25 – Resolução do item **d** por Clarice



O Quadro 18 indica a leitura que Clarice faz do produto **(-15). 13** e ainda deixa claro o motivo pelo qual a estudante adiciona os dois fatores.

Quadro 18 – Transcrição de trecho da entrevista de Clarice

P: Por que 28?
E: 15 mais 13
P: Por que 15 mais 13, onde está o sinal de mais?
E: O 13 tá sem sinal aí é como se fosse positivo, fica mais

As justificativas de Jonatan e Clarice indicam que a compreensão do sinal de operação se sobressai ao entendimento do sinal de número. É oportuno colocar que cada questão estava em uma folha distinta e ao entregá-la o pesquisador apresentava a questão dizendo *“nessa questão todos os itens são de multiplicação de números inteiros”*. Mesmo assim, alguns estudantes acabavam deixando de lado a informação antecipada oralmente pelo pesquisador (ou o enunciado da questão), como o fizeram Jonatan e Clarice.

Assim, com essas evidências e a análise de todos os itens propostos na Questão 1, foi possível perceber que, na multiplicação entre números inteiros, as diferentes formas de representação influenciaram significativamente no desempenho dos participantes desta pesquisa a tal ponto de exigir dos estudantes a aplicação de diferentes invariantes operatórios, que podem ser identificados a partir dos argumentos defendidos pelos mesmos quando foram convidados a justificarem suas formas de ação.

No que tange as especificidades de cada grupo, o cálculo mental foi, de forma geral, o procedimento mais utilizado pelos estudantes adultos, com exceção apenas do item **c**, onde 9 estudantes adolescentes utilizaram o cálculo mental enquanto entre os adultos essa estratégia foi utilizada por apenas 6 estudantes. Já, entre os estudantes mais novos, a estratégia mais observada foi a aplicação do algoritmo das operações, principalmente o algoritmo da multiplicação.

Em conformidade com outras análises, isso parece indicar que a forma de agir dos estudantes adultos guarda uma certa relação com as atividades profissionais dos participantes.

Trazemos, no tópico seguinte, o desempenho dos estudantes na segunda questão. De forma semelhante ao que fizemos na primeira questão, analisamos o índice de erros e acertos dos estudantes nessa questão, pontuando as aproximações e distanciamentos nas formas de ação dos 32 participantes, buscando comparar os resultados obtidos com os apresentados em outros estudos.

5.3.2 Análise das respostas à Questão 2

A questão referia-se à divisão de números inteiros. Da mesma forma que, na primeira questão, os itens diferenciavam-se em aspectos como a grandeza dos números, a presença ou ausência de sinais e de parênteses.

Na sequência, apresentamos o desempenho dos participantes de cada grupo, trazemos à tona os erros mais comuns e no que as características de cada item dessa questão influenciam na compreensão e na ação desses estudantes, já, que, os itens possuem especificidades entre si (grandeza dos números, presença ou não de sinais e de parênteses).

5.3.2.1 Acertos e erros apresentados

O Quadro 19 mostra a frequência de acertos na Questão 2:

Quadro 19 - Frequência de acertos da Questão 2

FREQUÊNCIA DE ACERTOS POR QUESTÃO E GRUPO							
NATUREZA DOS GRUPOS		Adultos na EJA	Adolescentes na EJA	Adolescentes no Ens.Fund.	Adultos no Ens.Fund.	**TOTAL**
QUESTÃO	QTDE. DE PARTICIPANTES	**8**	**8**	**8**	**8**	**32**
Resolva as divisões	a) 36 : 12	**6**	**7**	**6**	**7**	**26**
	b) (+ 391) : (+ 17)	**3**	**3**	**4**	**3**	**10**
	c) (+ 195) : (- 13)	**4**	**4**	**3**	**1**	**12**
	d) (- 450) : (- 9)	**1**	**3**	**4**	**2**	**10**
	e) (- 480) : (+ 6)	**3**	**2**	**4**	**2**	**11**
	f) (+ 36) : (+ 12)	**5**	**4**	**5**	**4**	**18**

6 ou mais acertos (≥75%) **4 ou 5 acertos (> 50% e < 75%)** **Menos de 4 acertos (< 50%)**

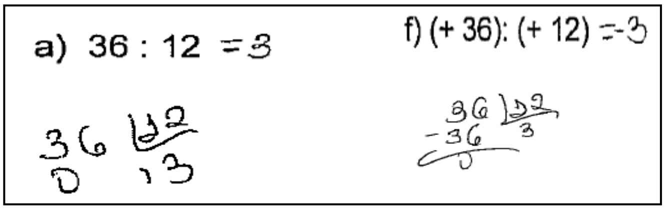
Os itens **a** e **f** apresentaram diferenças importantes nos índices de acertos. Esses se distanciavam apenas pela presença do sinal de mais e dos parênteses, o que certamente influenciou na compreensão dos estudantes a esse item. Se lançarmos um olhar no índice de acertos em função do grupo ao qual o participante pertence, não percebemos grandes diferenças do ponto de vista quantitativo.

A principal justificativa para o distanciamento entre esses dois itens passa pela forma de representação dos mesmos, já que o dividendo e o divisor desses itens eram os mesmos números, porém diferenciando-se pela presença dos sinais de número e de parênteses.

Observando o desempenho dos estudantes nessas duas divisões (**a** e **f**), percebemos que 25% desses acertaram o item **a** e erraram o item **f**. No item **a,** o erro mais frequente foi ocasionado pelas dificuldades no algoritmo da divisão. Já no item **f**, dentre os 14 participantes que erraram a resposta da questão, quase 36% deles disseram que o quociente entre + 36 e + 12 era – 3. Para esses estudantes o quociente entre dois números positivos é um número negativo, quando os sinais estão indicados, ou ainda, na forma como eles dizem "*na divisão mais com mais dá menos*".

A Figura 26 reúne a resolução dos itens **a** e **f** por João, 19 anos, estudante do 8º ano do Ensino Fundamental.

Figura 26 – Resolução dos itens **a** e **f** por João

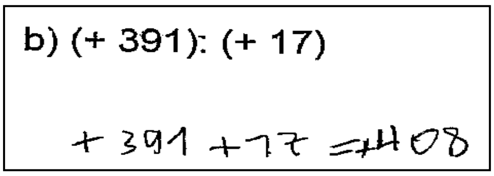


Como vemos, o estudante acerta o item **a** e erra o item **f**. O seu erro é na realização da regra dos sinais, ele aplica a regra erroneamente.

Os itens **b** e **c** tinham em comum o fato de ser uma divisão de uma centena por uma dezena em que o dividendo e o divisor foram apresentados entre parênteses. A especificidade desses itens dá-se nos sinais dos números em questão e na grandeza dos números em questão. O índice de acertos mostra que os estudantes tiveram dificuldades ao resolverem esses dois itens, uma vez que o índice de acertos foi inferior a 38%. O item **c** foi ligeiramente mais acertado que o item **b**. Essa diferença, embora pequena, pode ter sido provocada pela grandeza do dividendo do item **b**, que é maior que a do item **c**. Numa análise, a priori, das expectativas de acertos nesses dois itens esperávamos que o item **b** fosse mais acertado, já que os números desse quociente possuem mesmo sinal.

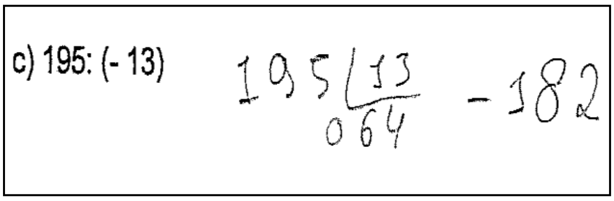
No item **b**, o erro mais comum decorreu de dificuldades dos estudantes ao efetuarem o algoritmo da divisão. Em seguida, vieram os erros referentes às regras de sinais. Também, foram frequentes, os erros associados a incompreensão dos diferentes significados dos sinais de mais e de menos. Como exemplo, apresentamos a Figura 27, na qual, mais uma vez, a explicitação do sinal +, prende o estudante, que deixa passar despercebido o sinal indicativo da operação.

Figura 27 – Resolução do item **b** por Jadnaelson, 17 anos, 4ª fase da EJA



Da mesma forma que no item **b**, os erros mais comuns no item **c** foram relativos às dificuldades para efetuarem a divisão, o entendimento de que o sinal de número assume a função de sinal de operação. A resolução de Potira (Figura 28) exemplifica as resistências citadas nesse item.

Figura 28 – Resolução do item **c** por Potira, 22 anos, 4ª fase da EJA



Potira, ciente de que precisava efetuar o algoritmo da divisão e diante da incompreensão do significado da indicação dos sinais para definir a característica do número, age nessa atividade como se a mesma exigisse a realização de duas operações (divisão e subtração). A seguir, apresentamos os argumentos de Potira frente ao cálculo desse quociente.

Quadro 20 – Transcrição de trecho da entrevista de Potira

P: Você apresentou duas respostas, por quê?
E: É duas contas, uma de dividir e outra de menos.
P: Você pode explicar porque o resultado da divisão deu 64?
E: 1 dividido por 1 dá 0, 9 dividido por 3 dá 6, 5 dividido por 3 é 4.
P: E porque a conta de menos?
E: Num tem menos aqui também.
P: E porque o 182 ficou negativo?
E: Porque mais com menos dá menos.

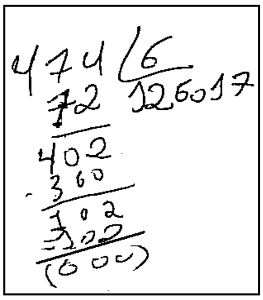
O Quadro 20 indica que Potira, enquanto estudante escolarizada nas operações com números inteiros apresenta a sua competência nas operações com os sinais mais e menos de forma isolada, o que indica certa mecanização na aplicação das chamadas regras de sinais, já que a estudante inábil no conceito e na divisão de números inteiros mostra eficiência no “jogo de sinal” da divisão de números inteiros com sinais diferentes.

Da mesma forma, os itens **d** e **e** apresentavam grandes aproximações como a natureza dos números e a presença dos parênteses. Mas, também, diferenciava-se nos sinais, o que parece não ter apresentado grande influência se consideramos o índice de acertos desses dois itens. Porém, é importante destacar que esses dois itens foram acertados por poucos mais de 30% dos estudantes.

Nesses itens, além das aproximações na frequência de acertos, eles também apresentaram erros semelhantes em frequência e natureza aqueles já pontuamos nas atividades **a**, **f**, **b** e **c**.

Mais uma vez, as dificuldades com a realização do cálculo da divisão assumiu a liderança dos erros mais pontuados, como mostra a Figura 29.

Figura 29 – Resolução do item **e** por Vítor, 13 anos, 8º ano do Ensino Fundamental



A resolução de Vítor indica que, apesar da sua ação no algoritmo da divisão ter forma diferente da apresentada pela escola, ela traz à tona muitos dos ensinamentos dados pelos professores quando instruem os seus alunos a respeito do algoritmo da divisão, o que ocorre, tanto na forma de representar este algoritmo, quanto na análise e escolha da parte do dividendo que é possível de ser dividida pelo divisor (ele começa fazendo **74** dividido por **6**). A questão é que os saberes de Vítor, embora válidos em determinadas condições, estão deslocados. Outra característica da sua ação é que ele da mesma forma que não compreende corretamente o sentido da divisão de números naturais – já que é impensável o quociente de **474** por **6** ser **126.017** – o estudante também diz com a sua forma de agir que o entendimento do sentido da divisão de números inteiros não é uma habilidade da qual podemos dizer que ele dispõe, uma vez que, antes de iniciar a divisão (Figura 29), ele primeiro subtrai **6** de **480**, consequência dos sinais de números que essa atividade apresenta.

As estratégias apresentadas pelos estudantes, em cada grupo, é o que examinamos a seguir. Na ocasião, tentamos compreender os motivos que levam os participantes a mobilizarem tais estratégias a partir das características de cada um dos itens da segunda questão.

5.3.2.2 Estratégias utilizadas para a resolução da Questão 2

As estratégias mobilizadas na Questão 2, embora tenham características próprias, recebem a mesma nomenclatura das que apresentamos na Questão 1. Elas correspondem as mesmas ações apresentadas na questão anterior. Acrescentam-se a essas as categorias algoritmo da divisão e subtrações sucessivas, que diferentemente do que aconteceu na primeira questão, foram estratégias empregadas nessa atividade. Mas, facultamos por definir, logo na apresentação da primeira Questão, todas as estratégias identificadas nesta pesquisa; por isso, é que já caracterizamos naquele momento essas formas de resolução.

A Tabela 4 apresenta a frequência das estratégias utilizadas pelos estudantes nos itens **a** e **f** cujos dividendos e divisores são numericamente iguais, mas dispostos em formas de representação diferentes.

Tabela 4 – Estratégias utilizadas pelos estudantes nos itens **a** e **f**

Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
a) 36:12	cálculo mental	5	5	7	2	19
	alg. divisão	1	1	0	5	7
	representações	2	2	0	0	4
	alg. adição	0	0	0	1	1
	não sabe	0	0	1	0	1
f)(+36):(+12)	cálculo mental	5	4	7	3	19
	representações	0	1	0	0	1
	alg. divisão	0	2	0	3	5
	alg. subtração	1	0	0	1	2
	alg. adição	1	0	0	1	2
	repete resp. **a**	1	1	0	0	2
	não sabe	0	0	1	0	1

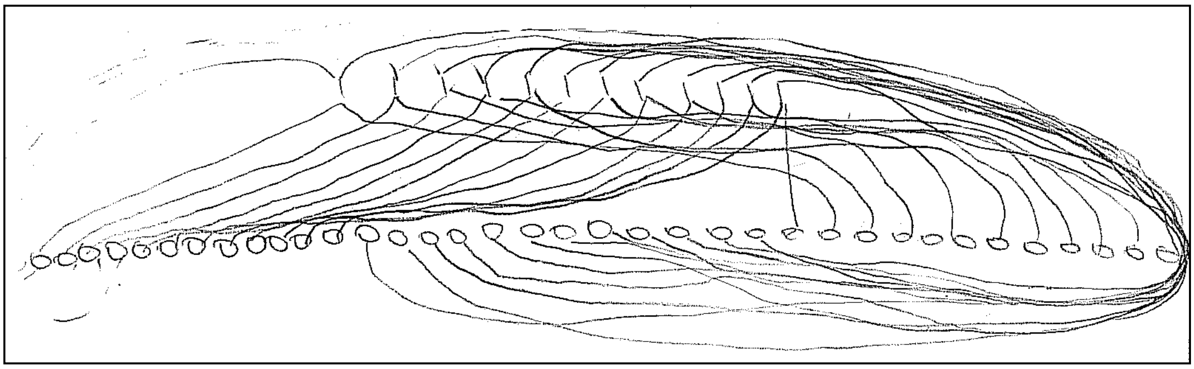
A síntese que a Tabela 4 apresenta indica o cálculo mental como sendo a estratégia mais utilizada pelos estudantes nos dois itens. O percentual de utilização dessa estratégia nos dois itens fica muito próximo de 60%, enquanto que o algoritmo da divisão, segunda estratégia mais utilizada, foi empregada por apenas 19% dos participantes. Esse resultado era esperado, tendo em vista a grandeza dos números que favoreceu o uso do cálculo mental.

Comparando as estratégias mobilizadas nos itens **a** e **f** da Questão 2 com os itens **a** e **g** da primeira questão, notamos que, nas quatro atividades, o cálculo mental foi mais empregado, principalmente nas questões **1a** e **2a**, que, como já indicamos, tinham formas de representação diferente das questões **1g** e **2f**; por isso, é que muitos dos participantes diferenciavam os teoremas de ação que aplicavam em cada uma delas.

A surpresa que a Tabela 4 nos traz é a diversidade de estratégias, que foram mobilizadas pelos participantes nas atividades da Questão 2, o que não aconteceu da mesma forma na Questão 1. Dentre a diversidade de estratégias, tivemos o uso de outros algoritmos, que não o da divisão, como, o uso de representações com bolinhas ou tracinhos para modelar a divisão em questão.

Para ilustrar o uso da estratégia *representação com bolinhas e tracinhos*, numa situação de divisão, trazemos a Figura 30 com a resolução da Questão **2a** por Del, estudante de 19 anos da 4ª fase da EJA.

Figura 30 – Resolução da Questão **a** por Del



Como se vê, ela representa na parte inferior 36 bolinhas e na parte superior 12 tracinhos, em seguida, ela sai ligando uma bolinha a cada tracinho. Quando atinge todos os tracinhos, ela retorna ao primeiro tracinho e continua ligando cada bolinha a um tracinho, repete a estratégia até esgotar todas as bolinhas. Em seguida, conclui que como cada tracinho está ligado a três bolinhas, então **36** dividido por **12** é igual a **3**. O procedimento que ela utiliza é matematicamente correto, a questão é que, para números de grandeza maior, a estratégia torna-se ainda mais exaustiva, o que favorece o erro, devido à grande quantidade de traços e ligações que seriam necessários para resolver a questão.

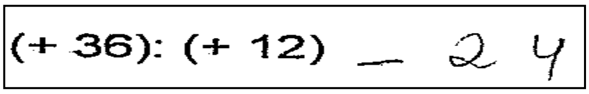
Quanto ao sinal, a estudante justifica que o resultado fica sem sinal, porque nenhum dos números (dividendo e divisor) tem sinal, inclusive esse é um argumento comum a muitos dos participantes e que tem forte relação com a forma de representação dos números inteiros, dado que, em cálculos numéricos, onde os termos são números inteiros desacompanhados de sinais, os estudantes dizem que o resultado é positivo porque *"quando não tem sinal é como se fosse positivo".* A expressão *como se fosse positivo* mencionada pelos participantes já carrega consigo um certo grau de compreensão desses estudantes com relação ao sentido e ao conceito dos números inteiros, de modo que, na fala do estudante, pode estar implícita, a possibilidade do número ser negativo, quando o sinal seria obrigatório.

Essa estudante, com a estratégia que utiliza, evidencia que não consegue resolver a questão pelo algoritmo da divisão e, na justificativa para o uso do procedimento, confessa tal evidência.

Nesses dois itens, dois estudantes resolvem por meio do algoritmo da subtração, embora nenhum dos itens faça qualquer referência a essa operação, já que nenhum dos números envolvidos é negativo, o que justificaria a escolha dessa operação pela não compreensão do significado do sinal de número ao invés de sinal da operação subtração.

A Figura 31 mostra a resposta dada pela estudante da EJA, Potira de 22 anos. A ação de Potira, indica que a regra dos sinais, mais uma vez, conduziu a estudante ao erro.

Figura 31 – Resolução do item **f** por Potira



A justificativa dada por ela a sua ação encontra-se no Quadro 21 a seguir:

Quadro 21 – Transcrição de trecho da entrevista de Potira

P: Por que - 24?

E: 36 tirando 12.

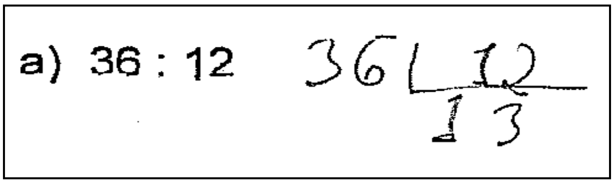
P: Por que 36 menos 12?

E: Porque é mais com mais aí dá menos.

A resposta e a justificativa, que Potira apresenta, indicam que a sua compreensão sobre a função do que comumente é chamado “jogo de sinal” é indicar qual operação deverá ser realizada, assim como ela entende que mais com mais é menos, então a operação a ser empregada, nesse caso, é a subtração, ou seja, a estudante arrisca uma tentativa de compreender o sinal, quando na realidade, ele é desnecessário, neste caso.

É importante lembrar que, ao apresentar cada questão, fazíamos a leitura do enunciado reforçando que a questão solicitava em todos os itens o cálculo da divisão. Mas isso parece ter passado despercebido por alguns estudantes que acabam trazendo à tona a sua forma de agir diante de situações dessa natureza, como aconteceu na primeira questão, que também na divisão de inteiros o sinal de número tem a função de definir a operação aritmética, que deve ser realizada. No caso da resolução de Potira, os sinais de números têm duplo significado, que são os de definir a operação a ser realizada e o de efetuar o “jogo de sinal” para dizer se o resultado é positivo ou é negativo. Essa atitude da estudante é secante ao conceito dos números inteiros, já que, como mostra a Figura 32, o seu entendimento, no item **a,** é completamente diferente do que ela faz no item **f** (Figura 32).

Figura 32 – Resolução do item **f** por Potira



Ao calcular o quociente entre **36** e **12**, a estudante não apresentou dificuldades no entendimento da operação a ser realizada nessa atividade, mas, sim, no algoritmo da divisão.

Potira, em situação nessas duas atividades (itens **a** e **f**), reforça a nossa premissa de que a forma de representação requer dos estudantes a mobilização de novos esquemas e, traz à tona alguns obstáculos epistemológicos, como, os diferentes significados dos sinais de mais e de menos (NASCIMENTO, 2002) e estagnação no estágio das operações concretas (GLAESER, 1985).

A Tabela 5 relaciona as estratégias mobilizadas pelos estudantes ao resolverem os itens **b** e **d** dessa questão. Optamos por observar esses itens paralelamente pelo fato de que ambos apresentam dividendo e divisor com o mesmo sinal e o primeiro deles (item **b**) ser mais difícil de ser resolvido mentalmente que o item **d**, dado que, o quociente entre **– 450** e **– 9** permite uma analogia com a divisão de **45** por **9**.

Tabela 5 – Estratégias utilizadas pelos estudantes nos itens **b** e **d**

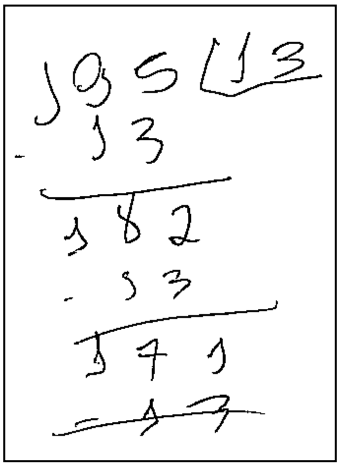
Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
b)(+391):(+17)	cálculo mental	1	0	0	0	1
	alg. divisão	4	0	4	6	14
	representações	2	2	0	0	4
	alg. adição	1	6	1	1	9
	subtrações suc.	0	0	0	1	1
	tentativas (mult)	0	0	2	0	2
	não sabe	0	0	1	0	1
d)(-450):(-9)	cálculo mental	2	3	2	0	7
	representações	0	1	0	0	1
	alg. divisão	3	4	5	6	18
	alg. subtração	1	0	0	1	2
	subtrações suc.	0	0	0	1	1
	alg. adição	1	0	0	0	1
	não sabe	1	0	1	0	2

No item **b**, como previsto, o cálculo mental foi uma estratégia com pouca utilização, tendo sido o recurso de apenas um dos participantes; já no item **d**, 7 dos 32 participantes utilizaram essa ferramenta. É certo que a grandeza dos números em questão no item **d** favoreciam o uso do cálculo mental, diferentemente do que ocorre no item **b**.

Ao contrário do que esperávamos, o algoritmo da divisão foi mais utilizado no item **d** do que no **b**. Isso pode estar relacionado com a dificuldade dos estudantes de efetuarem a operação divisão, o que os convida a buscar outros mecanismos de resolução das questões, que lhes são apresentadas envolvendo tal operação, como por exemplo, representações com bolinhas, tracinhos ou a utilização do algoritmo da multiplicação, por meio do método de tentativas. Uma possível justificativa para o maior uso do algoritmo da divisão no item **d** do que no item **b** pode ser o fato de que, em divisões nas quais o divisor é um número de um só algarismo, os estudantes logram mais sucesso do que naquelas cujo divisor possui dois ou mais algarismos. Por isso, diante da dificuldade de resolver uma divisão com o procedimento comumente utilizado, o estudante acaba criando subterfúgios, ou estratégias que lhe dêem mais chances de acertar, driblando, assim, o método mais comum, que no caso, é o algoritmo da divisão.

Outro aspecto importante que a Tabela 5 nos indica é o uso de sucessivas subtrações como estratégia para resolver uma divisão. Esse método permite que o estudante consiga determinar o quociente, mas requer do mesmo esforço e cuidado e, a depender da grandeza do dividendo, pode tornar-se exaustivo, o que favorece o erro, seja na aplicação do algoritmo da subtração, seja na contagem da quantidade de subtrações realizadas, ou, ainda, estimula o estudante a abandonar o processo, como ocorre com Vitor, 13 anos, estudante do 8º ano do Ensino Fundamental. Nos dois itens (**b** e **d**), ele recorre a essa estratégia, mas acaba abandonando o processo. De forma análoga ao item **b**, ele resolve os itens **c**, **d** e **e**. A Figura 33 trata da resolução iniciada por Vitor ao resolver o item **c.**

Figura 33 – Resolução do item **c** por Vítor



Como podemos perceber, Vitor, a princípio, tenta empregar o algoritmo da divisão, mas diante da sua falta de habilidade para lidar com o algoritmo da divisão, ele recorre a sucessivas subtrações, onde o divisor passa a ser o subtraendo, mas, dado o desgaste desse processo, ele acaba desistindo e prefere dizer que não sabe concluir a resolução da questão. Do ponto de vista matemático, esse método é eficiente para a obtenção do quociente, mas, excessivamente árido, favorecendo o erro, como já mencionado.

A Tabela 6 exibe e agrupa as estratégias dos participantes nos itens **c** e **e**. Essas questões aproximam-se ao exporem dividendos e divisores como sendo números inteiros de sinais diferentes e distanciam-se na grandeza dos divisores, onde o divisor do item **c** possui dois algarismos, enquanto o do item **e** possui apenas um, o que, nesse caso, facilita ainda mais o cálculo mental.

Tabela 6 – Estratégias utilizadas pelos estudantes nos itens **c** e **e**

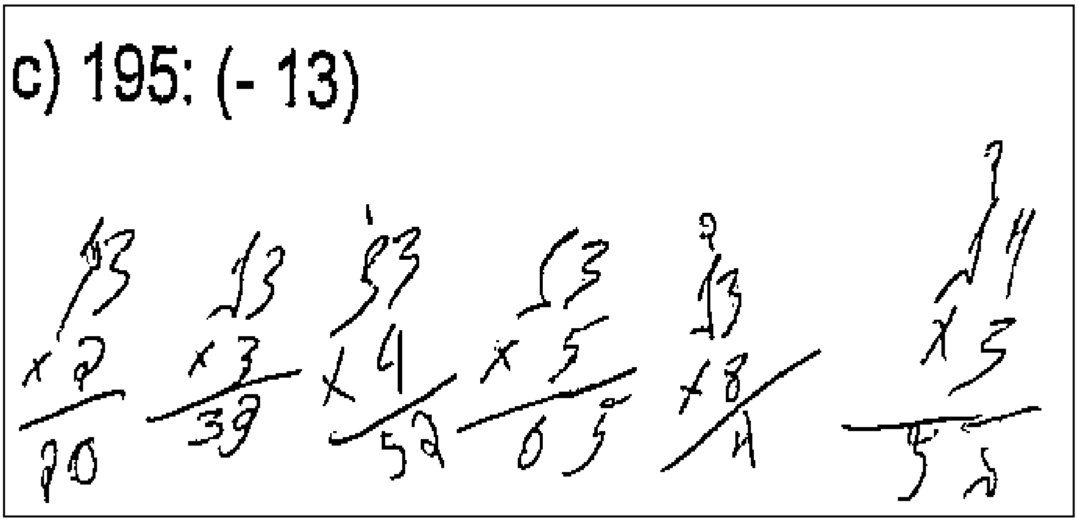
Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
c)(+195):(-13)	alg. divisão	4	6	4	6	20
	representações	2	2	0	0	4
	alg. subtração	1	0	1	1	3
	subtrações suc.	0	0	0	1	1
	tentativas (mult)	1	0	2	0	3
	não sabe	0	0	1	0	1
e)(-480):(+6)	cálculo mental	4	2	3	0	9
	Representações	0	2	0	0	2
	alg. divisão	0	3	4	6	13
	alg. subtração	2	0	0	1	3
	subtrações suc.	0	0	0	1	1
	tentativas (mult)	1	1	0	0	2
	não sabe	1	0	1	0	2

Nos dois itens, o algoritmo da divisão é o recurso mais usual. Os estudantes da EJA diversificam com mais frequência as estratégias que aplicam na resolução desses itens e evitam o uso do algoritmo da divisão, o que não significa necessariamente a falta de competência desses participantes para lidarem com essa forma de resolução. Mas, também, pode ser um primeiro indício do fenômeno da evitação dos algoritmos, o que justificaria a aplicação de outras formas de resolução. Evitar, o uso de algoritmos, como, o da divisão, pode ser um sinal das dificuldades dos estudantes nesta forma de resolução.

À semelhança do que ocorre no conjunto dos números naturais, calcular o quociente de números inteiros pelo algoritmo da divisão não é uma competência habitual dos estudantes concluintes do Ensino Fundamental[17], principalmente entre os estudantes da EJA. O domínio dessa competência tem-se notado ainda mais resistente, como foi indicado pela Tabela 6. Por isso mesmo, recorrem com certa frequência ao método de sucessivas multiplicações, ou seja, para se obter o quociente entre os inteiros **– 480** e **+ 6**, os estudantes fazem por exemplo, **50.6, 60.6, 70.6, 80.6**, isso quando não realizam maior número de tentativas, o que ocorreu na maioria das vezes para obtenção do quociente desejado. Esse método possibilita que o estudante encontre a resposta correta e diz ainda que o estudante reconhece as operações multiplicação e divisão de números inteiros como operações inversas, mesmo que o procedimento seja fisicamente desgastante e motive o erro.

A Figura 34, a seguir, exemplifica os esforços dos estudantes que resolveram alguns dos quocientes indicados pelo caminho das multiplicações sucessivas, como é ação de Thomaz para calcular o quociente entre os inteiros + 195 e – 13.

Figura 34 – Resolução do item **c** por Thomaz, 12 anos, 8º ano do EF



Thomaz, quando escolhe esse árduo caminho para resolver a questão em pauta, evita recorrer ao algoritmo da divisão e, mesmo ciente de que precisava obter

[17] A matriz de referência do SAEB/Prova Brasil aponta que esta deve ser uma competência dos estudantes concluintes do Ensino Fundamental.

um número que multiplicado por 13 fosse igual a 195, após cinco tentativas sem sucesso, acaba apelando para outro produto, quando faz 14 vezes 3.

O Quadro 22 traz à superfície as justificativas dadas por Thomaz à sua ação.

Quadro 22 – Transcrição de trecho da entrevista de Thomaz

P: Por que você fez várias multiplicações?

E: Eu tava procurando um número que multiplicado por 13 desse 195.

P: E você chegou a algum resultado?

E: Não deu tudo muito longe.

P: E porque você multiplicou o 14 e o 3?

E: Pra ver se chegava mais perto, mais num deu também, vou deixar pra lá, num sei essa não.

P: E você não saberia resolver com a "conta" de divisão ao invés de usar multiplicação?

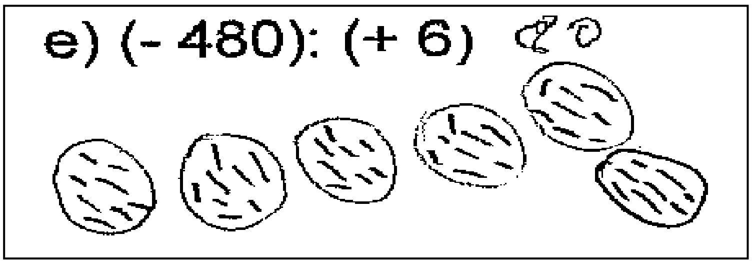
E: Não é de divisão de dois números, essas eu num sei não.

P: Ok, mas você saberia dizer se o resultado dessa divisão seria um número positivo ou negativo?

E: Era pra ser negativo, porque é mais com menos.

Já a forma como Charles resolve o item **e** mostra que ele recorre a um método eficiente, mas, em número de maior grandeza, esse recurso também pode levar o estudante a não obter a resposta correta.

Figura 35 – Resolução do item **e** por Charles, 20 anos, 8º ano do EF



A ação de Charles nos mostra que ele foi capaz de criar um modelo mais simples para calcular um quociente que, a princípio, seria mais laborioso. A sua habilidade, mesmo que seja uma aplicação prática, no caso de ele desconhecer as propriedades aritméticas, que lhes dão tal permissão, é capaz de lhes garantir sucesso nesse e em outros quocientes de natureza semelhante. Com relação ao entendimento de Charles sobre o que significa os sinais de número (menos e mais) na divisão, ora apresentada, trazemos o Quadro 23 com um recorte da entrevista, que fizemos com o estudante.

Quadro 23 – Transcrição de trecho da entrevista de Charles

P: E o 80 não tem sinal?
E: Tem é mais.
P: E porque você não escreveu o sinal de mais?
E: Tem que escrever?
P: Veja, só estou querendo entender, não estou dizendo que tem ou não que escrever o sinal?
E: Num precisa porque quando é mais tanto faz colocar ou não.

A leitura do Quadro 23 nos ensina que a atuação de Charles, assim como a de outros participantes desta pesquisa, reforça as dificuldades dos estudantes na conceitualização dos números inteiros. O que ocorre é que, como esses estudantes foram escolarizados nesse campo numérico, quando normalmente, precisam decorar "regras de sinais" e nos casos onde os números aparecem com sinais, eles precisam aplicar essas regras em algum lugar, mesmo sem compreenderem o sentido dos números relativos, arriscam um ou outro sinal nos resultados das operações, que realizam.

Em suma, em quase todos os itens da Questão 2, os principais erros foram consequências das dificuldades dos participantes em lidarem com o algoritmo da divisão e relativos às resistências no entendimento do sentido e do conceito dos números inteiros relativos, uma vez que, assim como aconteceu na Questão 1, a ação de muitos estudantes mostrou que também em situações de divisão de números inteiros os sinais de número são entendidos pelos participantes como sinais de operação.

No próximo ponto, apresentamos o desempenho dos estudantes na terceira questão dessa investigação.

5.3.3 Análise das respostas à Questão 3

O principal objetivo da Questão 3 foi identificar a compreensão dos participantes em uma situação-problema contextualizada, envolvendo a divisão de números inteiros relativos. Além disso, a referida questão permitia que aos estudantes resolvê-la empregando a divisão de números naturais ou tratando as medidas dadas na situação como números inteiros positivos e negativos, isto é, relacionando-as aos contextos de débitos e créditos. A nossa previsão é que essa seria a forma de resolução mais utilizada. Nesses casos, perguntávamos aos participantes se eles sabiam empregar números positivos e/ou negativos na resolução da Questão.

Outro aspecto da questão foi identificar o domínio de conhecimento dos participantes frente à representação e à leitura de números inteiros na reta numérica, com a intenção de observarmos, se esta ferramenta facilitava a resolução do problema.

Com relação ao uso da reta numérica, embora prevíssemos que os estudantes considerassem essa tarefa difícil, os resultados apresentados na Tabela 7 nos surpreenderam, na medida em que as dificuldades apontadas pelos estudantes nessa competência foram muito além daquilo que esperávamos.

A seguir, apresentamos o rendimento dos 32 participantes nessa questão.

5.3.3.1 Acertos e erros apresentados

O Quadro 24 mostra a frequência de acertos dos participantes nessa questão:

Quadro 24 - Frequência de acertos da Questão 3

FREQUÊNCIA DE ACERTOS POR QUESTÃO E GRUPO

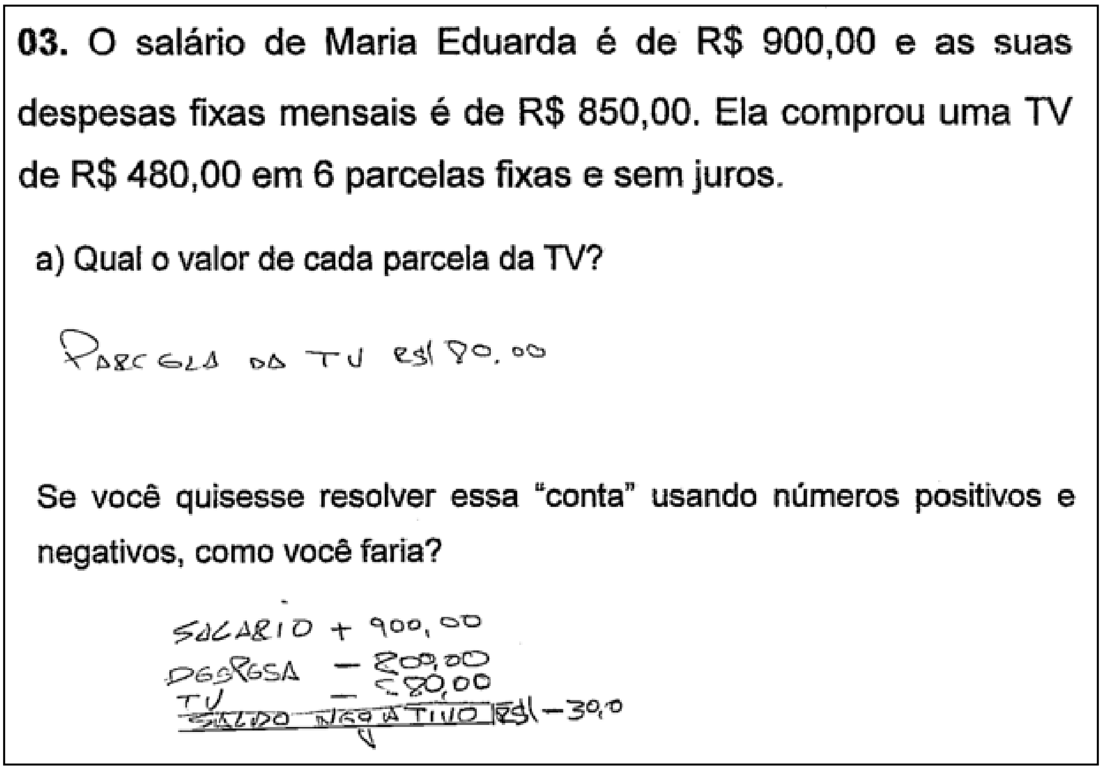
NATUREZA DOS GRUPOS		Adultos na EJA	Adolescentes na EJA	Adolescentes no Ens.Fund.	Adultos no Ens.Fund.	**TOTAL**
QUESTÃO	**QTDE. DE PARTICIPANTES**	**8**	**8**	**8**	**8**	**32**
O salário de Maria Eduarda é de R$ 900,00 e as suas despesas fixas mensais são de R$ 850,00. Ela comprou uma TV de R$ 480,00 em 6 parcelas fixas e sem juros.	a) Qual o valor de cada parcela da TV?	**8**	**7**	**4**	**5**	**24**
	b) O salário de Maria Eduarda vai ser suficiente para pagar as despesas e mais a prestação da TV?	**7**	**6**	**7**	**6**	**26**
	c) Represente numa reta a situação financeira de Maria Eduarda no mês em que pagou a 1ª prestação da TV	**2**	**1**	**2**	**2**	**7**
	d) Qual ponto da reta representa o equilíbrio financeiro de Eduarda?	**0**	**2**	**4**	**3**	**9**

6 ou mais acertos (≥75%) — **4 ou 5 acertos (> 50% e < 75%)** — **Menos de 4 acertos (< 50%)**

Os itens **a** e **b** dessa questão estavam intrinsecamente relacionados já que um dava suporte para responder o outro, de tal modo que o índice de acerto, nesses dois itens, se aproximaram bastante. A maior parte dos estudantes, ao resolverem o item **a**, utilizaram o algoritmo da divisão e trataram o problema apenas como se fosse de números naturais.

Nessa questão, os itens **a** e **b** foram os mais acertados, principalmente pelos estudantes da EJA, no caso do item **a**. De certo modo, esse resultado é natural já que esses estudantes, geralmente, já exercem algumas atividades profissionais e portanto, no seu cotidiano, enfrentam situações como a questionada no item **a**.

Figura 36 – Resolução do item **a** por Roni, 27 anos, 4ª fase da EJA



03. O salário de Maria Eduarda é de R$ 900,00 e as suas despesas fixas mensais é de R$ 850,00. Ela comprou uma TV de R$ 480,00 em 6 parcelas fixas e sem juros.

a) Qual o valor de cada parcela da TV?

PARCELA DA TV R$ 80.00

Se você quisesse resolver essa "conta" usando números positivos e negativos, como você faria?

SALARIO + 900,00
DESPESA − 800,00
TV − 80,00
SALDO NEGATIVO R$ −30,0

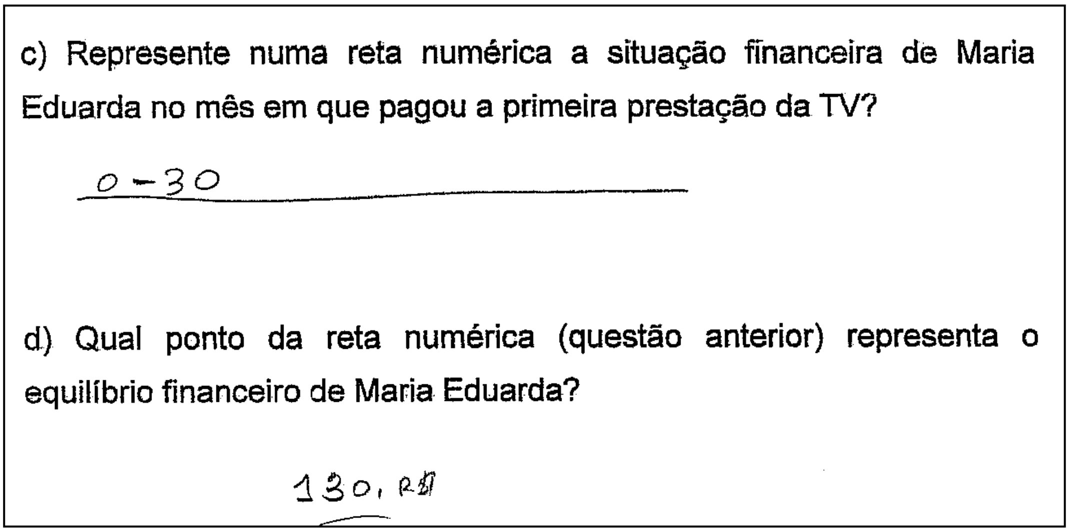
A resposta dada por Roni à questão diz que ele consegue facilmente encontrar o valor da parcela da TV, ele recorre ao cálculo mental para indicar tal resposta. Quando perguntamos se ele é capaz de resolver esse problema empregando números inteiros positivos e negativos, ele, veemente, diz que sim. A sua produção, tem uma relação com crédito **(+ 900)** e débito **(- 800)**, o que indica uma ação legítima. Chamamos a atenção para o registro que ele faz para indicar as despesas mensais de Maria Eduarda **(- 800)**, mas, no cálculo mental que realiza, usa o valor indicado no problema **(R$ 850,00)**.

Nos itens **a** e **b**, os erros mais frequentes partiram das dificuldades dos participantes em efetuarem o algoritmo da divisão.

Os itens **c** e **d** solicitavam a representação de um número inteiro na reta numérica e a identificação do número desta que indicava o equilíbrio financeiro de Maria Eduarda. A resolução desses itens foi de difícil compreensão para os estudantes; o índice de acertos foi relativamente baixo, o que, a princípio, indica a dificuldade dos participantes de representar um número inteiro na reta numérica e de realizar a operação mental exigida (equilíbrio). Da mesma forma que reconhecer na reta dos números inteiros o elemento que traduz o equilíbrio de uma pessoa em uma operação financeira apresentou-se como uma tarefa quase hercúlea.

As respostas mais comuns, nesse caso, deixavam de lado o problema proposto e faziam associações a situações cotidianas à vida dos participantes, principalmente entre os estudantes adultos, como mostra a Figura 37.

Figura 37 – Resolução dos itens **c** e **d** por Cleandro, 30 anos, 4ª fase da EJA


c) Represente numa reta numérica a situação financeira de Maria Eduarda no mês em que pagou a primeira prestação da TV?

0 — 30

d) Qual ponto da reta numérica (questão anterior) representa o equilíbrio financeiro de Maria Eduarda?

130, R$

A resolução de Cleandro, no item **c,** mostra que para ele um número inteiro negativo **(- 30)** fica à direita do zero e não a sua esquerda, onde devem ser localizados os inteiros negativos, já que à direita do zero são posicionados os números inteiros positivos.

O Quadro 25 explicita a razão que leva Cleandro, 30 anos, estudante da 4ª fase da EJA, a dizer que R$ 130 representa o equilíbrio financeiro de Maria Eduarda, personagem do problema em pauta.

Quadro 25 – Transcrição de trecho da entrevista de Cleandro

E: 130 reais. **P:** Por que R$ 130,00? **E:** Vai ficar faltando R$ 30,00 num é, pra ela pagar a prestação da televisão. Aí com mais R$ 130,00 ela vai resolver todos os problemas dela. Paga a dívida e ainda fica com 100 reais pra outras coisinhas que sempre aparecem, a gente nunca pode ficar sem um dinheirinho no bolso.

A justificativa de Cleandro, como já destacamos, dá sinais que os adultos, diante de alguns tipos de problemas escolares que têm alguma relação com contextos, que lhes sãos comuns, apresentam respostas que, numericamente, poderiam ser consideradas incorretas pelos professores, mas que, após a compreensão dos esquemas de pensamento desses estudantes, podemos entender que as respostas que eles registraram podem ser consideradas como válidas, mesmo que o valor numérico não seja o esperado pelo professor.

Na sequência estudamos as estratégias utilizadas pelos estudantes em situação para responder os quatro itens dessa questão.

5.3.3.2 Estratégias utilizadas para a resolução da Questão 3

A maior parte das estratégias empregadas nessa questão foram semelhantes àquelas já mencionadas nas questões anteriores. Mas, dadas as especificidades dessa questão, achamos necessário tecer alguns comentários sobre alguns tipos de respostas identificadas na mesma.

As estratégias aplicadas no item **a** dessa questão estão inseridas no mesmo grupo das questões 1 e 2. Já, quando perguntávamos aos participantes se eles eram capazes de responder o item aplicando uma divisão com números inteiros positivos e negativos, os que responderam sim apresentaram diferentes formas de agir, o que nos fez classificar as diferentes respostas da seguinte maneira:

✓ *não sabem* – casos nos quais os participantes disseram não saber aplicar números inteiros para resolver a questão;

✓ *números na ordem em que aparecem* – os estudantes reescreviam os números apresentados no problema e à frente desses escreviam sinais de mais ou de menos, conforme o significado do referido valor no problema, como na Figura 38;

Figura 38 – Resolução de parte do item **a** por Doda, 13 anos, 8º ano do EF

> Se você quisesse resolver essa "conta" usando números positivos e negativos, como você faria? (+900)-(-850)-(-80)

✓ *acrescentam sinais ao algoritmo da divisão* – quando o participante, após efetuar a divisão com números naturais, apenas acrescenta os sinais de mais e de menos ao termos da divisão, ou seja, ele não faz nenhuma relação entre os sinais que apresenta e os dados do problema.

Figura 39 – Resolução de parte do item **a** por Vanessa, 16 anos, 4ª fase da EJA

> Se você quisesse resolver essa "conta" usando números positivos e negativos, como você faria?
> -480 · (+6)
> +80

✓ *realiza uma operação aritmética* – chamamos dessa forma os casos onde os estudantes escolhiam alguns dos números envolvidos no problema três e realizam com dois ou mais deles uma operação aritmética, acreditando, assim, que haviam resolvido o item **a** do problema 3, aplicando números inteiros. Como exemplo, exibimos a resolução de Tiago, que aplica a adição de parcelas iguais, como mostra a Figura 40.

Figura 40 – Resolução de parte do item **a** por Tiago, 16 anos, 4ª fase da EJA

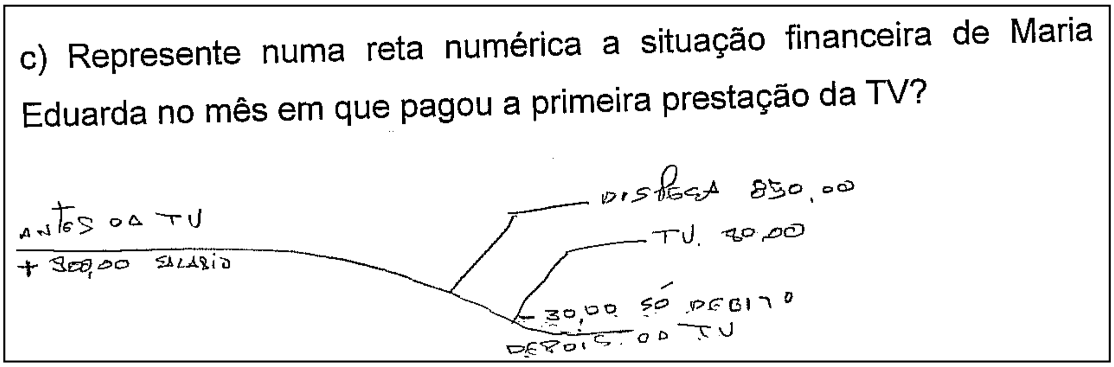
> Se você quisesse resolver essa "conta" usando números positivos e negativos, como você faria? 30+30+30... = 480,00

Nesse e nos itens seguintes, as estratégias empregadas pelos estudantes coincidem com as que já citamos nas análises das questões anteriores, com exceção das categorias *desenha reta*, *desenha quadro* e *outros*. Dessas, vamos exemplificar apenas a que estamos chamando de outros, já que a nomenclatura das outras duas indicam o tipo de ação realizada e ainda serão citadas como exemplos nas análises que fazemos das estratégias.

Na categoria de estratégias, que chamamos de *outras formas de representação*, inserimos, as formas de resolução onde os estudantes, utilizaram retângulos, quadros, tabelas e diagramas para representarem o equilíbrio financeiro de Maria Eduarda numa reta numérica. Não nomeamos outras categorias, porque cada uma destas formas de ação foi utilizada por apenas um estudante.

A Figura 41 exemplifica uma das formas de resposta dada pelos estudantes que classificamos como outras formas de representação.

Figura 41 – Resolução do item **c** por Roni, 27 anos, 4ª fase da EJA



Concluída a apresentação das formas de resolução que foram específicas da Questão 3, citamos a Tabela 7 com as estratégias e a frequência na qual cada uma delas foi aplicada pelos participantes.

Chamamos a atenção para a ausência do item **b** na Tabela 7. Isso se deve ao fato de que, nesse item, perguntávamos apenas se o salário de Maria Eduarda seria ou não suficiente para ela pagar as suas despesas. Assim, a resposta de todos os estudantes era imediatamente dada a partir do resultado dado no item **a**, limitando-se, geralmente, a dizer sim ou não.

Tabela 7– Estratégias utilizadas pelos estudantes na Questão 3

Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
a) Qual o valor de cada parcela da TV?	cálculo mental	1	5	2	0	8
	alg. divisão	3	2	5	5	15
	alg. subtração	2	1	1	2	6
	tentativas (mult)	2	0	0	0	2
	alg.multiplicação	0	0	0	1	1
c) Represente numa reta a situação financeira de Maria Eduarda no mês em que pagou a 1ª parcela da TV	desenha reta	6	8	6	6	26
	desenha Quadro	0	0	0	1	1
	outras	1	0	1	1	3
	não sabe	1	0	1	0	2
d) Qual ponto da reta representa o equilíbrio financeiro de Eduarda?	indica o zero	0	5	2	4	11
	relaciona com situações praticas	4	2	4	2	12
	outras	2	0	0	0	2
	não sabe	2	1	2	2	7

Os questionamentos mais acertados nessa questão foram os dos itens **a** e **d**, com exceção do item **b**, e as estratégias mais utilizadas nesses itens foram respectivamente o algoritmo da divisão e a relação do problema com situações cotidianas aos participantes. Ainda no item **a**, o uso do cálculo mental foi utilizado por oito estudantes, sendo seis deles adultos. Esse resultado foi muito próximo ao que aconteceu com a Questão **2e**, que solicitava a resolução de um cálculo numérico com a mesma operação requerida nesse problema.

Após a apresentação da Questão **3a**, perguntávamos a cada participante se ele conseguia resolver aquela operação (referindo-se, ao cálculo apresentado pelo estudante escrito ou mental) usando números positivos e negativos e, em caso afirmativo, solicitávamos o registro dessa representação. Como foi indicado na Tabela 7, essa atividade apresentou muitas resistências no sentido de que muitos dos estudantes, quase 70%, não conseguiam utilizar números positivos e negativos na operação efetuada. Além do mais, os que diziam ser capaz de tal habilidade, acabam forçando o aparecimento dos sinais de mais (+) ou de menos (-) na sua resolução, como mostram as Figuras 42 e 43 com as respostas dadas pelos estudantes da EJA, Dênis de 32 anos e Joanatan de 16 anos.

Figura 42 - Resolução de parte do item **a** por Dênis, 32 anos, 4ª fase da EJA

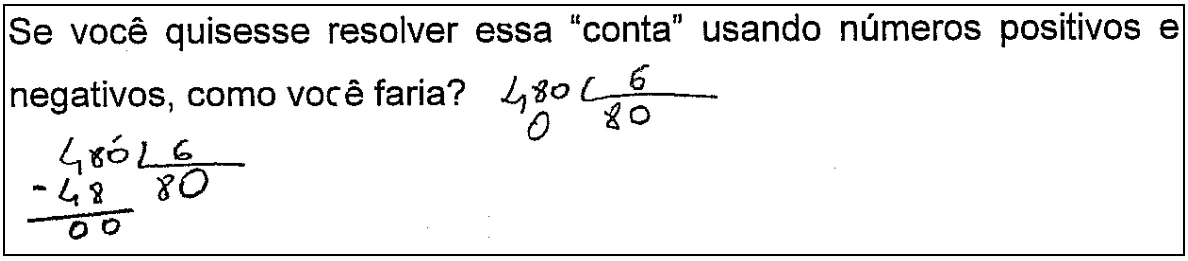
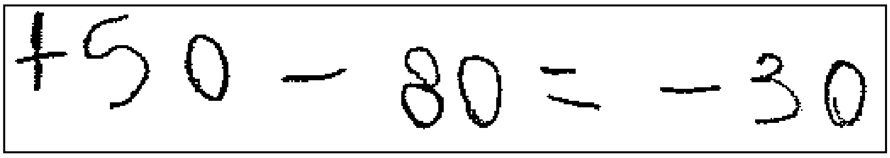


Figura 43 - Resolução de parte do item **a** por Jonatan, 16 anos, 4ª fase da EJA



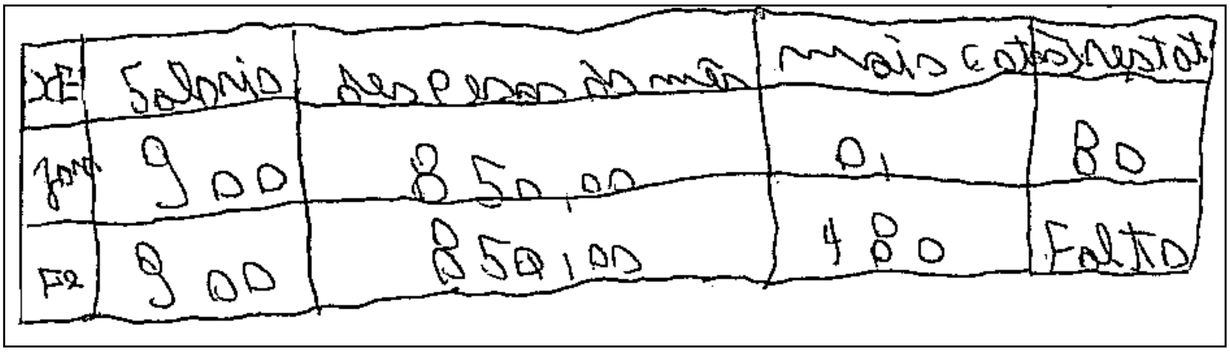
O primeiro estudante refaz a divisão alterando apenas a forma de representar o seu algoritmo, ou seja, a subtração mental, que ele havia realizado no decorrer do algoritmo da subtração, ele entende como sendo necessária a sua exibição para garantir o uso do sinal de menos, como solicitado, pelo pesquisador. O segundo estudante representa a sobra do salário de Maria Eduarda como sendo uma medida positiva, e o valor da parcela que ela deve pagar pela TV como uma medida negativa. Em seguida, ele soma essas duas medidas. Com isso, pretende atender ao que foi pedido, embora tenha obtido o valor da parcela por meio de cálculo mental. Mais uma vez, o sinal é compreendido na sua função primeira, que é indicar uma operação.

A Tabela 3 mostra que a Questão **3a** foi acertada por 75% dos estudantes, mas, como foi discutido anteriormente, quase 70% dos participantes dizem não saber representar a sua solução utilizando sinal de mais ou de menos. Um pareamento desses dois percentuais diz que o conhecimento de operações com números inteiros relativos é dispensável para que o estudante resolva situações de natureza análoga à da Questão 3, embora seja comum no capítulo destinado ao ensino da multiplicação e divisão de números inteiros relativos, problemas semelhantes a esse, como contexto para construção ou aplicação da multiplicação e divisão em $\mathbb{Z}$. Assim, os estudantes resolvem essa questão atuando como se lidassem com números naturais, o que não invalida a resolução, já que, comumente, a indicação da propriedade do número (em relação ao sinal) se faz necessário apenas no resultado.

No item **c**, muitos estudantes fazem a representação da reta numérica, mas apenas 22% são capazes de indicar na reta a situação financeira de Maria Eduarda ao pagar a primeira parcela da TV, mesmo a maioria sendo capaz de identificar o tamanho da dívida da personagem que ilustra a Questão 3.

Dentre os que não fazem a representação da reta numérica, podemos identificar estratégias como a representação de um Quadro ou de um diagrama (como mostrado na Figura 37) com as informações do problema, conforme Figura 44.

Figura 44 – Resolução de Doda, 13 anos, adolescente no 8º ano do EF



Numa situação de débito, como é o caso proposto na Questão 3, o zero é o número inteiro, que indicaria o equilíbrio financeiro, ou seja, a condição na qual o salário é igual as despesas. A estratégia mais comum no item **d** foi a associação dessa questão a alguma situação pratica. Isso justifica o baixo rendimento dos participantes na referida questão, já que, nas justificativas dadas às respostas, principalmente naquelas diferentes de zero, foram bastante comuns respostas como as de Charles, 20 anos estudante do 8º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 26 - Transcrição de trecho da entrevista de Charles

P: Por que 1?   **E:** Porque ela vai tá com as contas em dias e aí sobra uma coisinha pra outras contas que aparece toda hora.

Os resultados e as estratégias apresentadas pelos estudantes na Questão 3 nutrem o que este estudo vem indicando que a dificuldade do estudante está na pouca utilidade prática de alguns aspectos dos números inteiros.

A seguir, apresentamos o desempenho dos participantes desse estudo na Questão 4.

5.3.4 Análise das respostas à Questão 4

A Questão 4 trazia uma situação relacionada à vida bancária e propunha um produto de números inteiros. De modo análogo à Questão 3, essa situação podia ser resolvida pela multiplicação de números naturais, que, da mesma forma que na questão anterior, imaginávamos ser a estratégia mais utilizada, o que realmente aconteceu.

O desempenho dos estudantes, e os erros e acertos mais observados nesses estudo são apresentados no tópico seguinte.

5.3.4.1 Acertos e erros apresentados

O percentual de acertos nesta questão foi de aproximadamente 40%. Entre os estudantes adultos, a porcentagem de acertos foi de quase 65%, o que pode ser constatado ao observarmos o Quadro 27.

Quadro 27 - Frequência de acertos da Questão 4

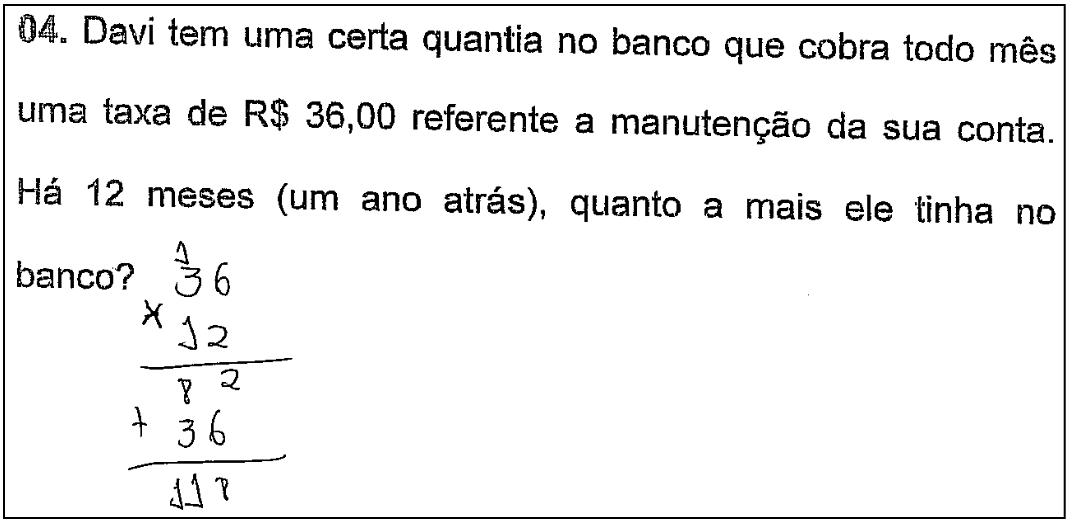
FREQUÊNCIA DE ACERTOS POR QUESTÃO E GRUPO					
NATUREZA DOS GRUPOS	Adultos na EJA	Adolescentes na EJA	Adolescentes no Ens.Fund.	Adultos no Ens.Fund.	**TOTAL**
QUESTÃO / **QTDE. DE PARTICIPANTES**	**8**	**8**	**8**	**8**	**32**
Davi tem uma certa quantia no banco que cobra todo mês uma taxa de R$ 36,00 referente a manutenção da sua conta. Há 12 meses (um ano atrás), quanto a mais ele tinha no banco?	**6**	**4**	**1**	**2**	**13**
6 ou mais acertos (≥75%) **4 ou 5 acertos (> 50% e < 75%)** **Menos de 4 acertos (< 50%)**					

Com a leitura desse quadro e a discussão realizada há pouco sobre o percentual de acerto nessa questão entre adultos e adolescentes, percebemos que a diferença entre o índice de acerto apresentado pelos adultos e os estudantes mais novos foi considerável. Esse distanciamento pode ser entendido pela razão de que pessoas adultas vivenciam com mais frequência no deu dia a dia atividades semelhantes à que o problema 4 apresenta.

A resolução desse problema pode ser modelada como uma multiplicação de números inteiros negativos. Para isso, basta considerarmos que o valor mensal debitado da conta de Davi representa para ele uma medida negativa, do mesmo modo que, se associamos o tempo decorrido e o tempo futuro com os sinais de menos e mais, respectivamente, podemos representar os doze meses do problema em pauta por -12. Assim, o valor que o banco debitou de Davi no decorrer de um ano pode ser calculado pelo produto **(- 36).(- 12)**, que não é a única operação possível.

Os erros mais frequentes nessa questão estiveram relacionados às dificuldades de compreensão do enredo do problema (dificuldade de compreensão do enunciado) e também relativos a resistências dos participantes ao lidarem com o algoritmo da multiplicação .

Figura 45 – Resolução da Questão 4 por Clarice, 22 anos, 8º ano do EF


04. Davi tem uma certa quantia no banco que cobra todo mês uma taxa de R$ 36,00 referente a manutenção da sua conta. Há 12 meses (um ano atrás), quanto a mais ele tinha no banco?

1
36
× 12
72
+ 36
117

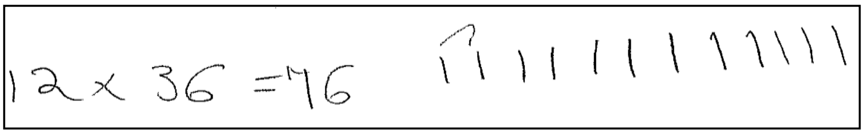
As estratégias mobilizadas pelos estudantes ao resolverem a Questão 4, são apresentadas a seguir.

5.3.4.2 Estratégias utilizadas para a resolução da Questão 4

A Questão 4 trouxe um problema relacionado à vida bancária, um contexto, muito comum para grande parte dos estudantes adultos. As estratégias, que identificamos na resolução dessa questão, foram as seguintes: algoritmo da adição, algoritmo da subtração, algoritmo da multiplicação, algoritmo da divisão, adição de parcelas iguais e correspondência biunívoca.

Chamamos de correspondência biunívoca o caso, onde uma participante fazia contagens nos dedos e a cada doze unidades contadas com os dedos das mãos, registrava um tracinho no papel e continuava a contagem numérica do número onde parou; por exemplo, para as primeiras doze unidades, a estudante registrava um tracinho para indicar que já havia alcançado uma vez o doze, e continuava contando, treze, quatorze, quinze e, assim por diante, até alcançar mais 12 unidades e registrar um novo tracinho no papel, como o fez, Del (Figura 46).

Figura 46 – Resolução da Questão 4 por Del, 19 anos, 4ª fase EJA



A estratégia que a estudante adota é capaz de levá-la ao acerto da questão. Mas, esse procedimento tem grandes chances de provocar o erro, tendo em vista o dispêndio que esse processo causa, principalmente, quando os fatores em pauta são números de maior grandeza. Entretanto, expressa a compreensão do que é solicitado.

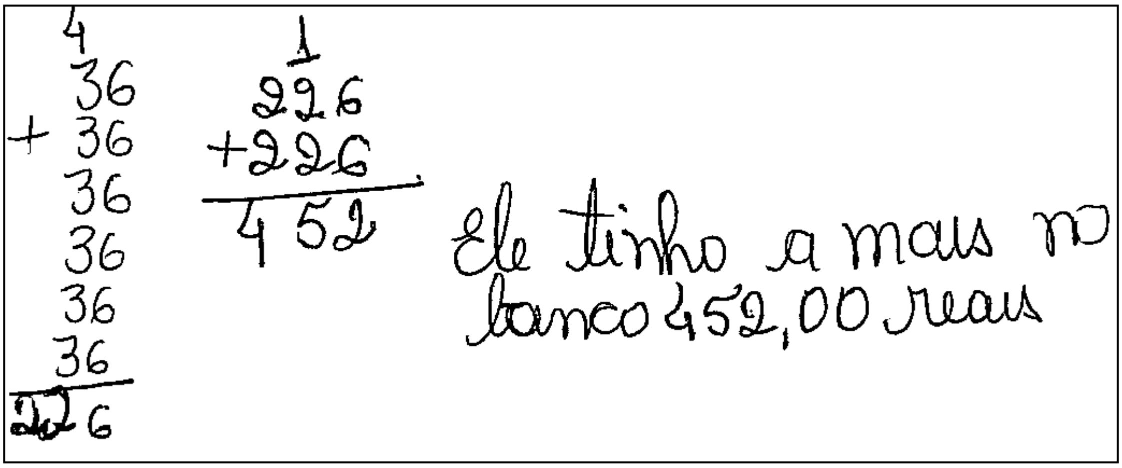
Tabela 8 – Estratégias utilizadas pelos estudantes na Questão 4

Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
Davi tem uma certa quantia no banco que cobra todo mês uma taxa de R$ 36,00 referente à manutenção da sua conta. Há 12 meses (um ano atrás), quanto a mais ele tinha no banco?	alg. adição	1	0	0	1	2
	alg. subtração	1	0	0	0	1
	alg. multiplicação	5	6	5	7	23
	alg. divisão	0	0	1	0	1
	adição de parc. iguais	0	2	2	0	4
	correspondência biunívoca	1	0	0	0	1

O algoritmo da multiplicação foi a estratégia mais utilizada na resolução da Questão 4, sendo utilizada por quase 41% dos participantes. Em seguida, vem a adição de parcelas iguais com aproximadamente 13% de utilização.

A Figura 47, a seguir, mostra a resolução de Vanessa, 16 anos, estudante da 4ª fase da EJA.

Figura 47 – Resolução da Questão 4 por Vanessa



Esse protocolo indica uma ação competente da estudante ao resolver a questão. Ela usa inicialmente, a adição de parcelas iguais, mas, para evitar infortúnios, a estudante adiciona o valor das seis primeiras parcelas, para, em seguida, realizar outra adição, o que lhe garantiria um resultado correto para a questão. Como foi indicado no protocolo, a estudante erra ao somar as unidades da primeira adição, em vez de 36, diz que a soma é 46, o que, por cadeia, faz-lhe errar o valor da dezena.

No tangente às especificidades dos grupos não identificamos diferenças que sejam significativas nas estratégias utilizadas pelos estudantes de cada um dos quatro grupos.

No próximo tópico, tratamos do desempenho, dos acertos e erros mais frequentes e também das estratégias empregadas pelos estudantes ao resolverem a Questão 5.

5.3.5 Análise das respostas à Questão 5

A Questão 5 envolvia tanto a multiplicação quanto a divisão de números inteiros, porém a situação tinha natureza diferente da que foi apresentada nos itens anteriores. Em vez de problemas ou cálculos numéricos, a situação trouxe 4 diagramas, cada um deles exigia diferente forma de resolução, onde a especificidade estava na operação, na natureza dos números, na presença ou não dos parênteses e dos sinais.

A seguir, apresentamos o percentual de acertos dos estudantes nesta questão.

5.3.5.1 Acertos e erros apresentados

Depois da Questão 6, a Questão 5 foi aquela na qual os estudantes obtiveram o menor desempenho, conforme indica o Quadro 28.

Quadro 28 - Frequência de acertos da Questão 5

FREQUÊNCIA DE ACERTOS POR QUESTÃO E GRUPO

NATUREZA DOS GRUPOS		Adultos na EJA	Adolescentes na EJA	Adolescentes no Ens.Fund.	Adultos no Ens.Fund.	TOTAL
QUESTÃO	QTDE. DE PARTICIPANTES	8	8	8	8	32
João é aluno da 3ª fase da EJA e o seu neto Talyson estuda o 7º ano. Eles estão brincando de adivinhar números inteiros. O esquema mostra os números pensados (N) no decorrer da brincadeira. Descubra, em cada caso, quais foram esses números, substituindo a letra N por esses números.	a) N → x 8 → 384	6	6	6	3	21
	b) - 480 → : N → - 80	1	3	2	0	6
	c) - 36 → x (- 12) → N	4	5	1	2	12
	d) N → : (- 13) → + 15	1	1	0	1	3

6 ou mais acertos (≥75%) — 4 ou 5 acertos (> 50% e < 75%) — Menos de 4 acertos (< 50%)

Como já discutimos, essa foi uma Questão considerada muito difícil. O quadro indica que os itens **a** e **c** foram mais acertados que os itens **b** e **d**.

A principal resistência dos participantes a essa questão deu-se no entendimento do que cada item solicitava. É notório que as operações e os termos das mesmas, nessa questão, são os mesmos que já foram resolvidos pelos estudantes nas questões anteriores. Mas, a forma de representação desses itens fez com que o nível de dificuldade aumentasse consideravelmente. Daí, o distanciamento nos resultados das atividades propostas nessa questão com o que foi observado em outras situações com operações e números semelhantes.

A utilização das setas, em vez do sinal de igual, e o fato de em quase todos os itens, o termo desconhecido não ser o resultado da operação, parecem ter dificultado a compreensão e a resolução desta questão. Quando o termo desconhecido deixa de ser o valor final e passa a ser um dos fatores ao invés do produto (no caso da multiplicação) ou ocupa o lugar do dividendo ou do divisor ao invés do quociente (no caso da divisão) é uma dificuldade que já foi apontada por outras pesquisas (BORBA, 1993; 2009).

A Questão **1c**, **(- 36).(- 12)** foi acertada por 25% dos participantes, enquanto que, no item **c** da Questão 5, o percentual de acertos foi de quase 38%. Da mesma forma, a Questão **2c**, **(+ 195):(- 13)**, foi acertada por cerca de 38% dos participantes, enquanto o item **d** da questão, que ora estudamos, foi acertada por menos de 10% dos estudantes.

Esses resultados indicam que o tipo de situação e as formas de representação das operações de multiplicação e divisão de números relativos influenciaram os invariantes operatórios que os estudantes mobilizaram para resolver cada questão.

Nos diagramas onde as operações indicadas eram a multiplicação (itens **a** e **c**) os participantes alcançaram melhor proveito do que naqueles onde o sinal de operação indicada era a divisão.

Um olhar sobre o desempenho dos grupos nessa questão mostra que os estudantes da Educação de Jovens e Adultos lograram mais sucesso que os estudantes adolescentes em todos os itens.

As estratégias dos estudantes frente à Questão 5 serão discutidas a seguir.

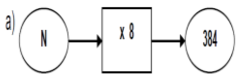
5.3.5.2 Estratégias utilizadas para a resolução da Questão 5

As estratégias identificadas nessa Questão foram semelhantes àquelas já descritas nas atividades anteriores, não sendo identificada nenhuma ação que mereça uma nomenclatura particular em relação às demais questões.

Com vistas a uma melhor compreensão, optamos por separar os itens na exposição das estratégias empregadas pelos estudantes de cada grupo, já que cada um deles apresenta características diferentes.

Na Tabela 9, expomos as estratégias dos participantes ao resolverem o item **a**.

Tabela 9 - Estratégias utilizadas pelos estudantes na Questão 5a

Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
	cálculo mental	0	0	1	0	1
	alg. subtração	0	0	0	0	0
	alg. multiplicação	3	2	0	2	7
	alg. mult.(tentativas)	4	6	7	4	21
	alg. divisão	1	0	0	2	3

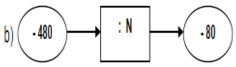
A estratégia mais frequente nesse item foi o uso do algoritmo da multiplicação pelo método de sucessivas tentativas. Esse procedimento foi adotado por mais de 65% dos participantes. Possivelmente, essa ação se deu em função da grande dificuldade de compreensão da competência de que a divisão e a multiplicação são operações inversas[18]. Além do mais, a presença do sinal de multiplicação já evidencia que a situação é resolvida com tal operação.

Essa opção dos estudantes tem um certo custo de tempo, devido ao processo de resolução tornar-se a depender da quantidade de tentativas, exaustivo, o que expõe a maior risco a obtenção da resposta correta. Outro aspecto, nesse caso, que facilita o acerto, é que os fatores e o produto são números inteiros positivos sem a presença do sinal de **+**. Isso evita, ou, ao menos, reduz consideravelmente, erros relacionados ao sinal do número **N**, em questão, já que, em muitas das situações

[18] As demais questões deste estudo, não nos deu condições de observar, se os estudantes possuíam esta competência em outras situações.

desse estudo, tem sido concebido o acerto do módulo do produto ou do quociente de uma questão e, ao mesmo tempo, o erro do sinal do número correspondente à resposta considerada como correta, ou seja, situações, onde o estudante realiza corretamente a operação indicada, mas equivoca-se na operação com os sinais da mesma.

Tabela 10 – Estratégias utilizadas pelos estudantes na Questão **5b**

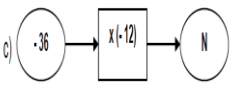
Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
	cálculo mental	3	2	4	0	9
	alg. subtração	0	1	2	1	4
	alg. mult.(tentativas)	1	2	2	1	6
	alg. divisão	2	2	0	5	9
	não sabe	2	1	0	1	4

No item **b**, diferentemente do que ocorreu no item **a**, as estratégias mais frequentes foram o cálculo mental e o algoritmo da divisão. Ainda, é conveniente indicar a descentralização dos recursos mobilizados pelos estudantes ao resolverem essa questão, ou seja, outras estratégias foram utilizadas por uma quantidade razoável de participantes, como os algoritmos da subtração e da divisão e o da multiplicação por meio de sucessivas tentativas.

Da mesma forma que o cálculo mental foi mais utilizado pelos estudantes adultos, o algoritmo da divisão foi mais utilizado pelos participantes matriculados no Ensino Fundamental.

Na Tabela 11, temos a quantificação das estratégias que os participantes utilizaram para responder o item **c**.

Tabela 11 – Estratégias utilizadas pelos estudantes no item **c**

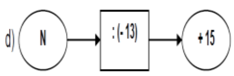
Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
	cálculo mental	1	0	1	0	2
	alg. adição	0	0	0	2	2
	ad. de parc.iguais	0	2	1	0	3
	alg. multiplicação	5	6	6	5	22
	não sabe	2	0	0	1	3

Nesse caso, o algoritmo da multiplicação foi a estratégia mais utilizada, chegando a alcançar quase 70% de aplicação. Esse alto percentual de aplicação do algoritmo da multiplicação foi antevisto numa análise prévia, que realizamos a respeito das possíveis respostas e estratégias a serem obtidas em cada um dos itens.

O motivo pelo qual o algoritmo da multiplicação foi muito utilizado pelo participantes deve-se por se tratar de uma multiplicação onde o produto é o elemento desconhecido, cabendo ao estudante apenas efetuar a multiplicação. Além do mais, é mais comum, no cotidiano escolar dos estudantes, desenvolverem-se situações onde o resultado é desconhecido do que aquelas onde as partes é que funcionam como incógnitas. Nesse caso, apesar de a operação a ser realizada ser uma multiplicação, já indicada, no diagrama apresentado no item, apenas 37,5% dos participantes obtiveram êxito no item. Os erros decorrentes podem ser justificados, pelo menos, por uma mais das razões seguintes: dificuldades com o desenvolvimento do algoritmo da multiplicação com dezenas, dificuldades com a compreensão da multiplicação de números inteiros negativos, não compreensão do que o item solicitava ou erros ao lidar com o produto de números onde o segundo fator é um número inteiro negativo, o que pode ter indicado que a operação era de subtração.

A Tabela 12 mostra as estratégias dos estudantes ao resolverem o item **d**.

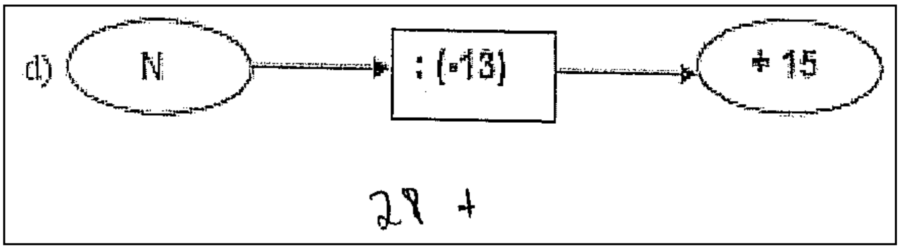
Tabela 12 – Estratégias utilizadas pelos estudantes no item **d**

Item	Estratégia	Quantidade de estudantes por grupo				TOTAL
		Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF	
	alg. adição	2	2	2	1	7
	ad. de parc.iguais	0	2	1	0	3
	alg. subtração	1	1	1	1	4
	alg. multiplicação	0	3	1	3	7
	alg. mult.(tentativas)	2	0	3	1	6
	alg. divisão	2	0	0	1	3
	não sabe	1	0	0	1	2

Uma forma de resolução desse item com brevidade seria por meio do algoritmo da multiplicação, obtendo, assim o produto entre os inteiros **-13** e **+ 15**. Essa forma de resolução só foi seguida por 7 dos 32 estudantes. Esse resultado pode indicar que poucos estudantes perceberam que uma forma de resolução seria mediante o uso da operação inversa à indicada no diagrama. Também 7 estudantes utilizaram o algoritmo da adição e outros 4 utilizaram o algoritmo da subtração. Dentre esses estudantes, foram comuns as respostas **+ 28**, **- 28**, **+ 2** ou **- 2**.

As respostas apresentadas por alguns desses estudantes, como já dissemos, foram consequências da aplicação do algoritmo da adição de números inteiros. Aqueles que indicaram + 28 ou – 28 como resposta obtiveram esse valor adicionado os módulos de -13 e + 15 e, em seguida, realizando a operação entre os sinais, como o fez Clarice, 22 anos estudante do 8º ano do Ensino Fundamental, conforme mostra a Figura 48 a seguir:

Figura 48 – Resolução do item **d** por Clarice



A justificativa dada pela estudante para a resposta apresentada está indicada no Quadro 29, a seguir:

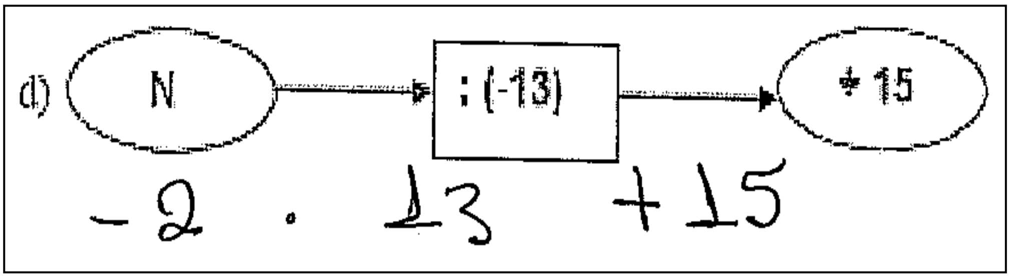
Quadro 29 - Transcrição de trecho da entrevista de Clarice

P: Por que o resultado deu 28?
E: Porque é 13 mais 15.
P: Por que você entendeu que essa é uma conta de mais?
E: Porque mais com menos dá mais.
P: E o 28 é positivo ou é negativo?
E: É positivo.
P: Positivo, por quê?
E: Porque é mais com menos aí dá mais.

À semelhança do que acontece com o invariante apresentado por Clarice, outros estudantes efetuaram a adição entre os módulos dos números inteiros **– 13** e **+ 15**, realizando, em seguida, a operação entre os sinais, apresentando assim, **- 28** como sendo a resposta para o item **d**.

Ainda, outros estudantes apresentaram como resposta **+ 2** ou **– 2**. Esses foram os que realizaram a subtração entre os números inteiros **– 13** e **+ 15**, como é o caso de Vanessa, 16 anos, estudante da 4ª fase da EJA, como mostra a Figura 49.

Figura 49 – Resolução do item **d** por Vanessa



Se uma primeira vista sobre o registro, que Vanessa faz nessa questão, deixa alguma dúvida sobre a sua ação, a justificativa que ela dá para o mesmo, conforme Quadro 30, esclarece a sua compreensão sobre a questão:

Quadro 30 - Transcrição de trecho da entrevista de Vanessa

P: Por que - 2?

E: Porque num tem que ser um número que o resultado dê 15, aí eu fiz 15 – 13

P: Por que 15 – 13?

E: Por que o 15 é maior, num é o maior menos o menor

P: E o sinal por que ficou negativo?

E: Porque menos com mais dá menos.

Como já apontamos, a Questão 5 foi uma das mais difíceis deste estudo, também foi uma questão que pôs ainda mais em evidência o papel das representações na aplicação dos esquemas de resolução por parte dos estudantes.

A seguir, analisamos o desempenho dos participantes na Questão 6, identificando os percentuais de acertos, os erros mais comuns e as possíveis justificativas às ações desses estudantes.

5.3.6 Análise das respostas à Questão 6

O objetivo da Questão 6 foi o de identificar, em situação contextualizada, as habilidades dos estudantes na divisão de números inteiros. O contexto em pauta envolvia o cálculo da média de temperaturas de uma cidade.

Uma breve observação que fizemos nos livros didáticos do PNLD 2011 (e PNLD EJA 2011) apontaram que a maior parte dos livros ilustram com muita frequência as operações com números inteiros, recorrendo aos contextos relativos a medidas e variações de temperatura, sendo que a maior parte dessas situações apontadas nos livros didáticos funcionam muito mais como pretexto do que para dar sentido aos números inteiros, ou seja, os problemas propostos podem ser resolvidos sem a utilização do conceito e das operações com números inteiros. Por isso, buscou-se criar uma situação em que o uso dos números inteiros tivesse realmente sentido.

No nosso caso, desenvolvemos um problema que requeria dos estudantes o cálculo da média aritmética de algumas medidas de temperatura, cujo saldo era uma temperatura negativa. Assim, fazia-se necessário que o estudante produzisse o quociente entre uma medida negativa e um número inteiro positivo.

A questão à qual nos referimos é a que apresentamos no Quadro 31, a seguir.

Quadro 31 – Questão 6 do roteiro de questões aplicadas aos alunos

Durante um passeio a Bariloche na Argentina, Hermina anotou em cada dia a medida da temperatura registrada na cidade. Veja as anotações:

1º dia	8 graus negativos
2º dia	3 graus positivos
3º dia	1 grau negativo
4º dia	2 graus positivos

Qual a média de temperatura registrada em Bariloche durante o passeio de Hermina?

A seguir, apresentamos o desempenho dos estudantes na questão, que ora apresentamos.

5.3.6.1 Acertos e erros apresentados

A Questão 6 foi a mais difícil do nosso roteiro de investigação, como já prevíamos.

Quadro 32 - Frequência de acertos da Questão 6

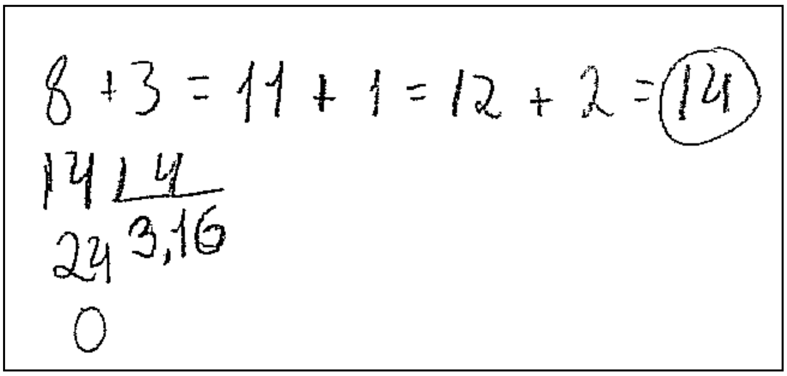
<table>
<tr><th colspan="6">FREQUÊNCIA DE ACERTOS POR QUESTÃO E GRUPO</th></tr>
<tr><th>NATUREZA DOS GRUPOS</th><th>Adultos na EJA</th><th>Adolescentes na EJA</th><th>Adolescentes no Ens.Fund.</th><th>Adultos no Ens.Fund.</th><th>TOTAL</th></tr>
<tr><td>QTDE. DE PARTICIPANTES
QUESTÃO</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>32</td></tr>
<tr><td>Durante um passeio a Bariloche na Argentina, Hermina anotou em cada dia a medida da temperatura registrada na cidade. Veja as anotações:
<table>
<tr><td>1º dia</td><td>8 graus negativos</td></tr>
<tr><td>2º dia</td><td>3 graus positivos</td></tr>
<tr><td>3º dia</td><td>1 grau negativo</td></tr>
<tr><td>4º dia</td><td>2 graus positivos</td></tr>
</table>
Qual a média de temperatura durante o passeio de Hermina?</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="6">6 ou mais acertos (≥75%)   4 ou 5 acertos (> 50% e < 75%)   Menos de 4 acertos (< 50%)</td></tr>
</table>

Essa questão exigia que o participante tivesse habilidade com o cálculo de média aritmética. Porém, o nosso objetivo com ela foi o de observar a competência dos participantes ao resolverem problemas que verdadeiramente exigisse uma compreensão global dos números inteiros.

Nesta questão, diferentemente de outras situações e contextos, exigia-se a consideração dos sinais de número, tanto no decorrer, quanto no resultado da operação, o que trazia à tona, uma necessidade prática para os números inteiros.

O erro mais comum na Questão 6 ocorreu em função das dificuldades dos estudantes de compreenderem o sentido dos números inteiros, principalmente porque, nessa questão, o sinal da medida de temperatura aparecia em linguagem natural, o que motivou ainda mais os participantes a adicionarem esses valores, desconsiderando o sinal de número, ou seja, a natureza dos números inteiros. Além disso, muitos dos estudantes ainda erraram no lidar com o algoritmo da divisão. A Figura 50 mostra a resolução de Leonardo nesta questão.

Figura 50 – Resolução da Questão **6** por Leonardo, 12 anos, 8º ano do EF



O estudante, além de não compreender o sentido do sinal das medidas de temperatura, ainda é inábil no lidar com o algoritmo da divisão. Neste, o estudante tanto comete erro de cálculo relacional quanto erro de cálculo numérico, como também ocorreu com grande parte dos estudantes ao resolverem esta questão.

A seguir, apresentamos as estratégias mobilizadas pelos estudantes na questão que ora estudamos.

5.3.6.2 Estratégias utilizadas para a resolução da Questão 6

A primeira impressão que podemos ter sobre os indutores de dificuldades nesta situação, pode ser a exigência da questão sobre a competência dos estudantes no cálculo de média aritméticas e o cansaço devido à quantidade de questões já resolvidas. Com relação ao conceito de média, antes de apresentarmos tal questão, fazíamos um momento de instrução com os participantes sobre o cálculo de médias e, quanto ao cansaço, embora esse possa ter alguma relação com o baixo desempenho dos estudantes nessa questão, é importante destacar que, ainda na primeira questão, nos itens **c** e **d**, o desempenho também foi pequeno, mesmo os estudantes ainda estando no início das atividades.

Nessa questão, várias estratégias foram observadas e classificadas da maneira a seguir: *apenas soma os módulos, efetua a soma dos módulos e diz que a divisão é impossível, soma e efetua a divisão, diz não saber responder a questão,* mesmo após algumas intervenções do pesquisador, como instrução sobre o cálculo de médias aritméticas.

Categorizamos as estratégias adotadas, como *apenas soma dos módulos* os casos onde os estudantes apenas realizam a soma dos módulos das medidas de temperaturas, desconsiderando o fato de a temperatura ser negativa ou positiva. Nesse caso, alguns estudantes apresentaram como resposta + 14 e outros – 14. Para a escolha dos sinais, eles retornavam ao quadro onde apareciam, em linguagem natural, as expressões *negativos, positivo, negativo, positivos* e efetuavam o que chamam de jogo de sinais para obtenção do sinal positivo ou negativo a depender da compreensão que fazem das operações desses sinais.

Da mesma forma, chamamos de *efetua a soma dos módulos e diz que a divisão é impossível* os casos onde os estudantes após obter a soma dos módulos das medidas de temperaturas indicadas (como na categoria anterior) justificavam que a divisão era impossível de ser realizada, isso porque, na maioria das vezes, tentavam efetuar a divisão entre **14** e **4**; como a divisão não é exata, eles concluíam ser impossível tal operação.

A categoria *soma e efetua a divisão* são os casos nos quais os estudantes efetuam a adição entre as quatro medidas de temperaturas e, em seguida, efetuam a divisão por quatro com o propósito de obter a temperatura média no decorrer dos quatro dias indicados na situação proposta.

Finalmente, a última categoria foi a que aloca os estudantes que disseram não saber responder a questão, mesmo com a instrução recebida do pesquisador sobre o cálculo de médias aritmética e os questionamentos do mesmo sobre a compreensão do problema pelo participante.

A Tabela 13 apresenta as estratégias mobilizadas pelos estudantes frente à Questão 6.

Tabela 13 – Estratégias utilizadas pelos estudantes na Questão 6

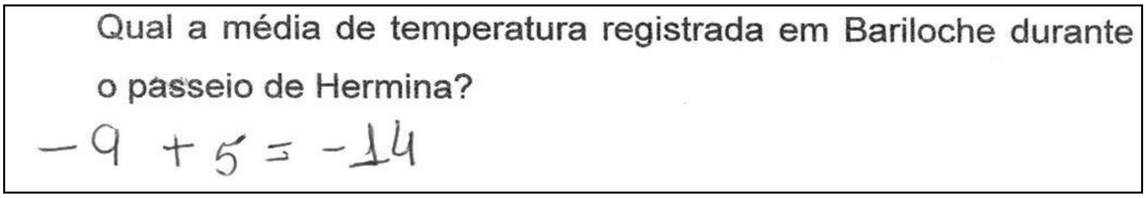
<table>
<tr><th rowspan="2">Item</th><th rowspan="2">Estratégia</th><th colspan="4">Quantidade de estudantes por grupo</th><th rowspan="2">TOTAL</th></tr>
<tr><th>Adulto EJA</th><th>Adulto EF</th><th>Adolescente EJA</th><th>Adolescente EF</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Durante um passeio a Bariloche na Argentina, Hermina anotou em cada dia a medida da temperatura registrada na cidade. Veja as anotações:
1º dia — 8 graus negativos
2º dia — 3 graus positivos
3º dia — 1 grau negativo
4º dia — 2 graus positivos
Qual a média de temperatura durante o passeio de Hermina?</td><td>apenas soma os módulos</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>soma dos módulos e diz que a divisão é impossível</td><td>1</td><td>7</td><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>soma e efetua a divisão</td><td>4</td><td>0</td><td>4</td><td>7</td><td>15</td></tr>
<tr><td>não sabe</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td></tr>
</table>

A Tabela 13 mostra que, mesmo a Questão 6 tendo sido a que teve o menor percentual de acertos, quase metade dos participantes recorreram a um procedimento matemático eficiente no sentido de permitir a obtenção da resposta correta, que é o cálculo do saldo das medidas de temperaturas nos quatro dias e, em seguida, calcular o quociente entre o saldo de temperatura e a quantidade de dias do passeio.

Dizer que era impossível efetuar a divisão entre a soma dos módulos das medidas de temperatura pela quantidade de dias foi a ação de 9 dos 32 estudantes. Esses estudantes apresentaram dificuldades no algoritmo da divisão e não sabiam como agir diante do fato de o quociente entre **14** e **4** não ser um número inteiro, já que, para esses, a soma das temperaturas era igual a **14**.

Quatro estudantes apenas efetuavam a soma dos módulos das medidas de temperatura (usando ou não o sinal de número no resultado indicado) e afirmavam que nenhuma ação a mais era necessária (Figura 51), ou seja, o total para esses já indicavam a média de temperatura.

Figura 51 – Resolução da Questão **6** por Vanessa, 16 anos, 4ª fase da EJA



Qual a média de temperatura registrada em Bariloche durante o passeio de Hermina?

$-9 + 5 = -14$

O Quadro 33 indica a justificativa dada por Vanessa à sua ação.

Quadro 33 – Trecho da entrevista realizada com Vanessa

P: Por que – 14?
E: 9 mais 5.
P: E por que o sinal de menos no 9?
E: Por que tem mais menos.
P: E o resultado porque ficou negativo?
E: Porque é menos com mais, aí dá menos.

A justificativa de Vanessa, indica que a sua conceitualização de números inteiros encontra-se em processo, uma vez que, ela já consegue evidenciar algumas propriedades destes números, como, por exemplo, realizar, isoladamente, a adição de medidas positivas e negativas.

Apenas quatro estudantes disseram não saber resolver a questão. Isso é mais uma justificativa que, ao menos, ameniza a relação entre o baixo desempenho nessa questão e o fator cansaço, dada a posição da mesma no instrumento de coleta de dados.

A seguir, apresentamos os resultados obtidos na Questão 7.

5.3.7 Análise das respostas à Questão 7

O Quadro 34 exibe as respostas mais comuns dadas pelos 32 participantes. Para que melhor possamos analisá-las e principalmente, observar a natureza das respostas de cada grupo, essas respostas aparecem separadas por grupo.

Quadro 34 – Síntese das respostas dos participantes à Questão 7

Item	Adulto EJA	Adulto EF	Adolescente EJA	Adolescente EF
a) O que significa um número relativo?	toda a nossa vida.	números que podem ser positivo ou negativo de acordo com o homem.	quando é positivo ou é negativo.	número positivo.
	os que tem + e -.	números positivos e negativos.	para entender os valores e ter as respostas.	forma de resolver as contas.
	números de débito e crédito.	um meio de aprendizado de sustentabilidade para toda a população.	Números positivos e negativos.	significa tudo.
	Relativo é quando tá no zero.	número que tem sinal.	receber o salário e pagar as contas todo mês.	número exato.
	Números das necessidades diárias.	um jeito mais fácil de trabalhar com a cabeça.		número acima ou abaixo do zero.
				números que podem ter dois sinais.
b) Qual a diferença entre os números inteiros e os naturais?	os naturais não usa + ou -.	os relativos são os inteiros e os naturais não.	os inteiros é positivos e negativos e os naturais só positivos.	a mesma coisa só muda o sinal.
	natural é o mais fácil de resolver sem sinal.	os inteiros é nas contas de tirar.	um negativo maior não é maior do que um menor positivo.	um jeito de resolver as contas.
	os inteiros são os positivos e os relativos são os negativos.	os inteiros sempre pode dividir ou somar, os naturais nem sempre.	inteiro é ele completo ou é + ou é -, natural se divide.	os negativos e positivos dão uma soma mais legal do que os naturais.
	inteiros resolvem contas mais rápido e os relativos mais devagar.	uns tem sinal e é mais difícil os naturais num tem sinal, aí é mais fácil.		o natural a pessoa faz as contas com mais facilidade.
c) Para que servem os números inteiros	os negativos servem para o ser humano fracassar na vida e os positivos pra subir na vida.	para calcular a quantia que você deve pagar.	calcular e perceber diferenças percentuais.	para dar sentido a fração.
	para um número ser + ou -.	para somar e dá um número certo.	para responder as nossas contas.	para ajudar numa soma.
	resolver problemas na profissão.	para fazer as contas.	saber se estamos devendo ou estamos com crédito.	para multiplicar e dividir.
	para verificar a temperatura.	para saber com quanto vai ficar no final do mês.	serve pra vida da gente toda.	para dizer o que deve e o que não deve.
	para fazer as contas.		para escrever de 0 a infinito.	para a conta ser exata.

As aplicações que os participantes atribuem aos números inteiros, em alguns dos casos, parecem ser bem próximas às atividades cotidianas dos participantes de cada grupo, enquanto é muito comum entre os adultos respostas relativas a profissão, a salario, a débito e a crédito. Entre os adolescentes, as aplicações do números inteiros são mais internas à própria Matemática, evidenciando compreenderem os números inteiros como aqueles que servem para resolver as contas como a multiplicação e a divisão.

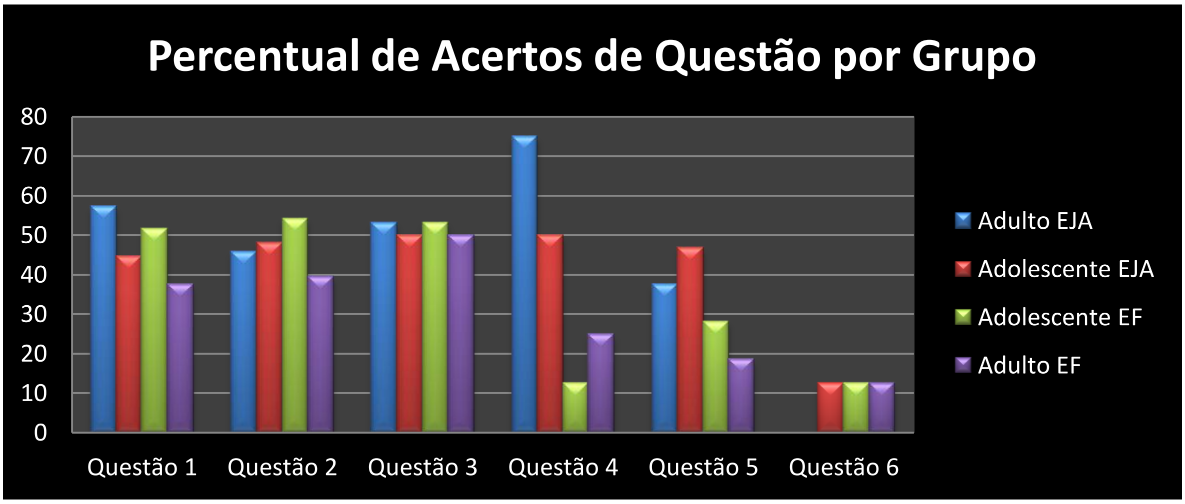
É verdade que, em algumas operações, principalmente no algoritmo da divisão, os participantes apresentaram resistências relevantes, mas, a maior parte dos erros aqui observados não foram consequências das dificuldades no desenvolvimento dos algoritmos, já que, mesmo em situações mais simples, onde a operação poderia ser realizada com cálculo mental, dada a familiaridade dos números, muitos estudantes assinalaram não entender os diferentes significados dos sinais de número.

5.3.8 Especificidades entre os grupos

Embora no decorrer das análises que fizemos ao longo das questões, já tenhamos chamado a atenção para as aproximações e distanciamentos observados entre os grupos, apresentamos aqui uma breve discussão sobre o comportamento dos grupos em cada uma das seis questões.

O Gráfico 3, mostra o percentual de acertos de cada grupo, nas seis questões.

Gráfico 3 – Percentual de acertos de cada Questão por Grupo



Os adultos da EJA obtiveram melhor desempenho nas questões 1 e 4, enquanto que os adultos estudantes do Ensino Fundamental obtiveram melhor desempenho na Questão 3. O mesmo acontece com os estudantes adolescentes da EJA. A Questão 5 teve maior percentual de acertos entre os estudantes adultos. O grupo dos adolescentes não se destaca em nenhuma das questões, se comparado ao grupo constituído pelos estudantes adultos. A Questão 6 foi a que obteve, em todos os grupos, o menor percentual de acertos. Nenhum adulto da EJA acertou esta questão.

A proposta da Questão 7 foi identificar o domínio dos estudantes ao expressar em linguagem natural o conceito de números inteiros, ou seja, verificar se eles eram capazes de conceituar os números relativos, para, a partir das suas respostas, compararmos as ações que os mesmos apresentaram ao responder e justificar as questões propostas com as evidências teóricas, que apontavam ter sobre esse conjunto de números.

As respostas que os estudantes deram a essa questão parecem deixar muito claro que os mesmos evidenciam, pelas suas expressões escritas e justificativas orais, que, estão a caminho da construção do conceito de número inteiro, principalmente, quando compreendemos um conceito da forma defendida por Vergnaud, ou seja, uma unidade constituída de um conjunto de situações, de invariantes operatórios e de formas de representação diversas. Mas, eles tem muitas dificuldades de explicitar as especificidades deste corpo de números, dando exemplos que são comuns ao conjunto dos números naturais.

Finalmente, percebemos que, no desempenho dos grupos não foram identificadas diferenças importantes, o que quer dizer que, na multiplicação e divisão de números inteiros, as atividades cotidianas e a modalidade de ensino não apresentaram influências que sejam importantes na compreensão destes conceitos por parte dos estudantes, diferentemente, do que tem sido observado em pesquisas que compararam o desempenho de crianças e adultos em conceitos relativos aos números decimais (PORTO e CARVALHO, 2000; SILVA, 2006; GOMES e BORBA, 2008; FERREIRA, 2010).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa nasce do cotidiano da sala de aula, da observação de estudantes adolescentes e adultos *em situação*. Enquanto professor, vivenciamos situações que nos fazem refletir sobre as ações e questões levantadas pelos nossos alunos.

Numa miríade de questões comuns às salas de aula de diferentes lugares e contextos, uma nos chamou a atenção: *Professor, menos com menos é menos ou é mais?*

Essa questão, tão comum entre os estudantes da Educação Básica, indica que a compreensão do conceito dos números inteiros relativos ainda apresenta muitas dificuldades, que podem ou não ter relação com as características dos estudantes.

Diante disso, a nossa questão de origem tomou a seguinte forma: *Quais as principais competências e dificuldades evidenciadas por adultos e adolescentes escolarizados em relação à multiplicação e divisão de números inteiros e que aspectos específicos (modalidade de ensino, idade, atividade profissional) podem influenciar a compreensão e as estratégias mobilizadas pelos estudantes?*

A investigação, que ora concluímos, teve como principal objetivo analisar e comparar a compreensão de estudantes da 4ª fase da Educação de Jovens e Adultos e do 8º ano, que são ciclos correspondentes do Ensino Fundamental, quando resolvem situações envolvendo multiplicação e divisão de números inteiros relativos.

A fim de atingir o objetivo proposto, identificamos as competências mobilizadas pelos estudantes da 4ª da EJA e do 8º ano, na resolução de situações referentes à multiplicação e à divisão de números inteiros. Em seguida, analisamos as formas de resolução empregadas pelos participantes das duas modalidades de ensino, com vistas a levantar possíveis especificidades na compreensão ou nas estratégias aplicadas pelos estudantes.

A pesquisa foi realizada por meio de entrevistas clínicas aplicadas a 32 estudantes já escolarizados na multiplicação e na divisão de números inteiros, ou seja, os participantes já tinham recebido na escola a instrução formal sobre essas operações. Os estudantes foram distribuídos em quatro grupos, a saber:

- Adultos na 4ª fase oriundos da EJA;
- Adultos no 8º ano do Ensino Fundamental.
- Adolescentes na 4ª fase oriundos da EJA;
- Adolescentes no 8º ano do Ensino Fundamental;

A organização desses grupos se deu em função das especificidades relativas à *modalidade de ensino* e *idade,* com a finalidade de criarmos algumas condições de controle sobre essas variáveis.

Esta pesquisa foi desenvolvida em duas etapas. Na primeira parte, observamos nos livros didáticos do 7º ano do PNLD 2011 e PNLD EJA 2011 as situações propostas para o ensino da multiplicação e divisão dos números inteiros relativos. A partir daí, selecionamos dez questões que foram aplicadas a quatro estudantes escolarizados na multiplicação e na divisão de números inteiros, sendo dois da 3ª fase da EJA e dois do 7º ano, que são etapas correspondentes do Ensino Fundamental.

Da primeira parte, que chamamos de estudo piloto, apreendemos que as situações propostas nos livros didáticos talvez fossem insuficientes para o desenvolvimento eficaz das competências relativas à multiplicação e divisão de números inteiros relativos e, sobretudo, à verificação das estratégias mais utilizadas na resolução das operações apresentadas. Daí, a necessidade de elaboração de situações que melhor atendessem aos nossos objetivos.

A segunda parte constituiu-se da construção de sete questões sobre o nosso objeto de estudo. Para a elaboração dessas questões, levamos em consideração a Teoria dos Campos Conceituais de autoria do psicólogo francês Gèrard Vergnaud. Definidas as situações, entrevistamos cada um dos participantes. Em seguida, tomando por referência a Teoria dos Campos Conceituais e dos estudos apontados na fundamentação teórica, analisamos as respostas, justificativas e estratégias empregadas por cada um dos participantes. Tal análise, considerou as formas de representação, o tipo de situação e os invariantes mobilizados pelos estudantes.

Os resultados indicaram que todos os participantes ainda apresentam muitas dificuldades na compreensão do conceito dos números inteiros relativos, já que como defendido por Vergnaud na Teoria dos Campos Conceituais, a aprendizagem de um conceito requer o domínio das situações que envolvem esse conceito, a mobilização de invariantes operatórios, que são os esquemas mobilizados pelos sujeitos em situação, identificados por meio das representações, simbólicas ou não, empregadas pelos estudantes. Essas condições teóricas, apresentadas por Vergnaud, implicam que ser competente, no conjunto dos números inteiros, é também, ser capaz de efetuar operações entre os elementos desse conjunto, entre elas, a multiplicação e a divisão.

Os participantes resolveram mais facilmente as situações de cálculo numérico, nas quais os termos da multiplicação (Questão 1, item **a**) ou da divisão (Questão 2, item **a**), não possuem sinal de número. Nesses casos, o percentual de acertos foi superior a 90% na multiplicação e a 81% na divisão. Nas mesmas situações, quando inserimos o sinal de número positivo (Questão 1, item **g** e na Questão 2, item **f**), o desempenho dos estudantes reduziu-se consideravelmente, alcançando apenas 57% de acertos, tanto na multiplicação quanto na divisão.

O distanciamento no índice de acertos dos estudantes, nas questões sem sinal de número e nos cálculos onde os termos possuem sinal, indica que a forma de representação das operações multiplicação e divisão de números inteiros, no que se refere à presença ou não do sinal de número, influenciou na compreensão dos estudantes, o que vai ao encontro da Teoria dos Campos Conceituais, quando aponta que a forma de representação de uma situação é uma dimensão, que influencia na compreensão de um conceito.

Nos demais itens das questões 1 e 2, que tratavam, respectivamente, da multiplicação e da divisão de números inteiros, percebemos que a grandeza dos termos e o tipo de operação também influenciaram na compreensão e no desempenho dos estudantes (Questão 1, item **b**; Questão 2, itens **d** e **e**).

No item **b** (Questão 1), onde os fatores eram números constituídos de apenas um algarismo, o desempenho dos estudantes foi mais satisfatório do que nas multiplicações onde isso não ocorria. Já nos cálculos de divisão (Questão 2, itens **d** e **e**) onde o divisor era um número de um só algarismo não houve diferenças importantes no desempenho dos estudantes, em relação aos demais itens, excluindo-se dessa comparação os itens **a** e **f**.

Nas operações de multiplicação de números inteiros cujos fatores são números de um só algarismo, onde ao menos, um deles possui sinal de número, o desempenho é mais satisfatório do que em cálculos semelhantes, nos quais os fatores possuem mais de um algarismo. Enquanto que, na divisão, a ordem de grandeza do dividendo e do divisor não exerceu tanta influência no rendimento dos participantes. De todo modo, nas situações, cujos termos possuem maior ordem de grandeza, principalmente na multiplicação, os estudantes apresentaram menor rendimento.

A natureza das situações propostas intervieram fortemente no rendimento dos estudantes, mesmo nos casos, onde os valores numéricos e as operações em pauta eram as mesmas, como nas questões **1c**, **4** e **5c**, que podiam ser resolvidas aplicando o mesmo cálculo numérico, ou seja, (- 36).(- 12). Nessas três questões, o percentual de rendimento foi respectivamente cerca de, 22%, 41% e 33%.

De forma semelhante, as questões **2e**, **3a** e **5b** traziam de diferentes modos, divisões nas quais os dividendos e os divisores eram os mesmos, mas que foram resolvidas pelos participantes com a mobilização de diferentes invariantes operatórios, o que também pode ser identificado pelos percentuais de desempenho dos participantes, que foram nessa ordem, 34%, 75% e 19%.

As situações-problema, que se aproximam de atividades comuns aos estudantes e que podem ser resolvidas sem uma relação imediata com os números relativos, apresentam índices de desempenho mais elevados, como ocorre na Questão **3a**. Quase todos os estudantes da EJA, adolescentes ou adultos, acertaram essa questão, recorrendo, principalmente, ao cálculo mental. Esse resultado confirma o que Arnay (1998) defende sobre a importância do conhecimento cotidiano na compreensão e ação das pessoas, pois a resolução de atividades cotidianas análogas à que foi apresentada na Questão **3a** é uma tarefa frequente entre os estudantes da EJA, que, como mostra o Quadro 5 no Capítulo 4, já exercem, na sua maioria, algum tipo de atividade profissional e, portanto, lidam com situações de compra e venda. É oportuno destacar que a resolução de problemas dessa natureza dispensa a necessidade do uso de sinais, podendo o estudante indicar se o resultado representa um crédito ou um débito.

O bom desempenho apresentado pelos estudantes nas situações cotidianas, que não requerem um tratamento específico dos números inteiros, aproxima-se dos resultados obtidos por Borba (2009), nos quais até mesmo crianças não escolarizadas nesse campo numérico foram capazes de resolver alguns tipos de adição e subtração, envolvendo o campo dos números inteiros, principalmente aquelas nas quais os problemas são diretos e os inteiros se apresentam como uma medida, como é o caso da Questão **3a**, embora no nosso estudo as operações aritméticas envolvidas sejam diferentes.

A Questão **3c** solicitava dos estudantes a habilidade de representar um número inteiro na reta numérica. O desempenho dos mesmos nessa questão foi inferior a 22%, o que indica que essa, ainda, é uma tarefa árdua para esses estudantes.

O baixo rendimento dos participantes dos quatro grupos estudados, na representação de um número relativo na reta numérica, pode ser uma consequência da plena falta de compreensão do sentido de um número inteiro e certo apego a magnitude dos números, o que Glaeser (1985) identificou como um dos obstáculos epistemológicos à compreensão dos números relativos, citando que grandes matemáticos como Jean Le Rond D’Alembert (1717–1783) e Lazere Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823) apresentaram tal resistência.

Assis Neto (1995) reconhece que a substancialidade do número, que predominou entre os matemáticos até o século XIX, aproxima-se das dificuldades observadas entre os estudantes no entendimento dos números inteiros.

O estudo de caso desenvolvido por Nascimento (2002) também confirmou que a concretude, característica dos números naturais, apresentou-se como um obstáculo epistemológico para a compreensão dos números inteiros. Entre os estudantes que ele acompanhou, percebeu-se que atividades, envolvendo a reta numérica, no papel ou num ambiente computacional, foram importantes para a evolução dos participantes, tanto no entendimento do sentido de um número inteiro, quanto na resolução das operações adição e subtração, envolvendo esses números, favorecendo, assim, a superação desse obstáculo.

A Questão 5 foi uma das menos acertadas pelos estudantes. Esse resultado deve-se ao uso de setas em vez do sinal de igual, como comumente é empregado nos cálculos numéricos, e também ao fato de que, em quase todos os seus itens (exceto no item **c**), as operações não eram diretas, ou seja, os elementos desconhecidos eram uma das partes e não o todo, o que requer a aplicação da operação inversa à indicada ou a resolução por meio do método de tentativas, que foi a estratégia mais empregada pelos estudantes nessa questão.

Mais uma vez, percebemos que modificar a forma de apresentação de uma situação intervém na compreensão, no desempenho e nos esquemas que os estudantes aplicam na sua solução. Nesse caso, como dissemos, a variação deu-se no uso de setas em vez do sinal de igual e na posição ocupada pelo termo desconhecido.

A falta de situações-problema, que realmente exijam o emprego de números inteiros negativos, e a importância da reta numérica para a compreensão do conceito desses números nos motivaram a desenvolver a Questão 6 desta pesquisa, na qual criamos um modelo que convidava os participantes a acompanharem a variação de temperaturas de uma cidade no decorrer de quatro dias e, em seguida, determinar a temperatura média registrada nessa cidade e cuja resolução exigiria uma compreensão global dos números inteiros.

Essa foi a questão na qual os estudantes apresentaram o menor índice de rendimento. Menos de 10% dos participantes conseguiram resolver e acertar esse problema.

As dificuldades dos estudantes, nas questões **3c** e **6**, indicam que a reta numérica, embora seja uma ferramenta que contribui com a compreensão do conceito e das operações no campo dos números relativos, parece não ser uma habilidade dos estudantes que participaram dessa investigação. Esse resultado aproxima-se do obstáculo epistemológico *dificuldade de unificar a reta numérica*, que também foi apontado na pesquisa de Glaeser (1985).

Com as respostas apresentadas pelos estudantes na Questão 7, percebemos que eles, mesmo com dificuldades de se referirem às especificidades dos números inteiros ou para exemplificarem contextos exclusivos desse campo numérico, o que não é fácil, tentam relacionar esses números às atividades ou tarefas do seu cotidiano.

Examinando os erros apresentados pelos estudantes na resolução das questões que propomos, percebemos que o erro mais comum foi a utilização do sinal de número como sinal de operação. Essa é uma consequência da falta de entendimento dos diferentes significados que os sinais possuem, que não apenas o de indicar a realização de uma operação. Essa resistência também foi identificada em outros estudos como os de Nascimento (2002) e Borba (1993; 2009). Em várias situações, identificamos um verdadeiro teorema em ação que guiava a solução do problema: *realização da multiplicação ou divisão, seguida da operação de adição ou subtração, conforme o sinal do número relativo.*

Com relação ao desempenho dos estudantes de cada um dos quatro grupos, ao contrário do que esperávamos e dos resultados de outras pesquisas, que compararam o desempenho de crianças, jovens e adultos (SILVA, 2006; ALBUQUERQUE, 2010) não foram identificadas diferenças importantes no índice de desempenho dos participantes de cada grupo.

Também, diferentemente dos resultados de outras pesquisas (PORTO e CARVALHO, 2000; SILVA, 2006; GOMES e BORBA, 2008; FERREIRA, 2010), a atividade profissional dos estudantes não influenciou no desempenho dos mesmos nas operações multiplicação e divisão de números inteiros relativos, quando essas envolviam cálculos numéricos ou situações-problema, que se distanciavam do seu cotidiano, como é o caso da Questão 6.

Ao analisarmos as estratégias empregadas pelos adolescentes e adultos, percebemos que os adultos recorrem com maior frequência a diferentes formas de resolução, enquanto que os adolescentes se apegam mais vezes aos algoritmos da multiplicação e da divisão, isto é, mesmo que o desempenho dos participantes de cada grupo, tenham sido semelhantes, as estratégias utilizadas por eles foram diversificadas.

O caminho percorrido até aqui nos garantiu condições de responder a questão, que foi o ponto de partida dessa investigação. Com isso, aprendemos que as principais dificuldades dos estudantes foram relativas ao tipo de situação, à presença do sinal de número nos termos das operações que estudamos e a resistência ao lidarem com a representação de inteiros na reta numérica. Comparando o desempenho dos grupos, concluímos que não existem especificidades entre os estudantes da 4ª fase da EJA e do 8º ano do Ensino Fundamental dito regular. Mas, como já dissemos, identificamos particularidades nas formas de ação desses estudantes.

Aprendemos, ainda, que, embora os participantes desta pesquisa ainda apresentem muitas resistências nas resoluções de multiplicação e divisão de números inteiros, eles estão a caminho da compreensão desses conceitos, confirmando que a aquisição da competência de um campo conceitual é uma ação processual e que requer muitas rupturas. E isso, é claro, não acontece numa só fase ou série da Educação Básica. Por exemplo, quando o estudante diz *“quando não tem sinal fica o mesmo sinal”* ao se referir ao sinal de número do produto ou quociente da situação em pauta, pode ser considerado com expressão de uma construção em curso no que se refere à conceitualização dos números inteiros relativos.

As ações dos estudantes e as justificativas dadas no decorrer das entrevistas clínicas que realizamos, bem como a natureza dos obstáculos epistemológicos e dificuldades na aquisição do conceito dos números inteiros, indicadas nas pesquisas, que aqui citamos, nos fazem pensar que as operações multiplicação e divisão nesse campo numérico, embora tenham algumas aplicações cotidianas, funcionam muito mais como ferramentas para a própria Matemática do que para resolver problemas comuns ao dia a dia das pessoas. É claro que isso não reduz a sua relevância e importância no currículo escolar, dado que a Matemática não pode ser vista apenas como uma ciência de aplicação imediata.

Esses resultados nos ensinam que ainda se faz necessário o desenvolvimento de situações que realmente apliquem a multiplicação e a divisão de números inteiros e que tenham a reta numérica em $\mathbb{Z}$ como suporte ao entendimento desses conceitos, já que muitas das situações apresentadas nos livros didáticos funcionam apenas como pretexto para o ensino dessas operações.

Dessa forma, quanto maior for o número de situações que realmente imponham o emprego da multiplicação e divisão de números inteiros, mais próximo o estudante estará do processo de conceitualização desse campo numérico.

Ao terminar esta pesquisa, nos damos conta que muitas outras questões sobre o que nela investigamos, ainda precisam ser respondidas, como, por exemplo: Qual seria uma sequência de ensino mais eficiente para o entendimento dos estudantes da multiplicação e divisão com inteiros? Qual a relação entre as formas didáticas utilizadas pelos professores e professoras e aquelas empregadas pelos estudantes na resolução de situações com multiplicação e divisão em $\mathbb{Z}$? Como estudantes não escolarizados na multiplicação e divisão de números inteiros agiriam na resolução de situações envolvendo tais operações?

Também nos questionamos sobre o efeito que seria provocado na aprendizagem dos estudantes se, em vez de o professor iniciar o ensino das operações com números inteiros pela adição e subtração, o fizesse a partir da multiplicação e da divisão com esses números, pois, como foi apontado por Borba (2009), iniciar o ensino de conceitos matemáticos por situações mais complexas tem se mostrado mais eficiente, que a partir de problemas mais simples. Como Borba (2009) apontou estudantes ainda não escolarizados em números inteiros já possuem alguns domínios de medidas e representações não explícitas com estes números, o que certamente, favorece o desenvolvimento de competências mais complexas nesta campo numérico.

Os limites desta pesquisa não nos permitiu observar, por exemplo, o que acontece na sala de aula, em relação à forma como os professores e professoras conduzem o ensino do conceito e das operações com números relativos; por isso, essa, também, é uma perspectiva futura, que pode ser investigada a partir da observação dos resultados deste estudo.

Essas e outras questões, que surgem a partir desta pesquisa, ficam como indicações para futuras investigações, a fim de, cada vez mais, nos aproximarmos de uma dinâmica mais eficiente no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos, que não podem ser tratados como meras definições.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Milka Rossana Guerra de. **Como adultos e crianças compreendem a escala representada em gráficos**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2010 (Dissertação de Mestrado).

ALVES, Evanilton Rios. **Academos**, v. III, n. 3, jul-dez, 2007.

ARNAY, José. **Conhecimento Cotidiano, escolar e científico: representação e mudança. A construção do conhecimento escolar.** São Paulo: Ática, 1998.

ASSIS NETO, Fernando Raul. **Duas ou três coisas sobre o menos vezes menos dá mais.** Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática: Recife, 1995

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1938.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática.** 7º Ano. São Paulo: Moderna, 2006.

BORBA, Rute. **O ensino de números relativos: contextos, regras e representações**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Psicologia, 1993 (Dissertação de Mestrado).

BORBA, Rute. **O ensino e a compreensão de números relativos**. A compreensão de conceitos matemáticos: ensino e pesquisa, in Schliemann, Analúcia e Carraher, David. Campinas: Papirus, 1998.

BORBA, Rute. **O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números relativos**. A pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula, in Borba, Rute e Guimarães, Gilda. São Paulo: Cortez, 2009.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRANDÃO, Carlos Rodrigues. **A Questão política da educação popular**. 4. ed. São Paulo: Brasiliense, 1984.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília: Senado, 1988.

BRASIL. Ministério da Educação. Parecer CNE/CEB nº 11/2000, de maio de 2000. Homologa as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos. **Diário Oficial da União.** Poder Executivo, de 9 de junho de 2000. Disponível em <www.retsus.epsjv.fiocruz.br/.../parecer_cne_11_2000_proeja.pdf> Acesso 18/10/2010.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE : Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: Ensino Fundamental: **matrizes de referência, tópicos e descritores.** Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática, Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/ SEF, 1998.

CARDOSO, Cleusa de Abreu. **As contribuições da Matemática na formação de leitores jovens e adultos.** In: Encontro Mineiro de Educação Matemática. Belo Horizonte. Anais, 2000.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1988.

CAVALCANTI, Milka Rossana; GUIMARÃES, Gilda Lisboa. **Gráficos apresentados pela mídia impressa***.* 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT). Recife, 2008.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **A relevância do projeto Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional – INAF como critério de avaliação da qualidade do ensino de Matemática.** In FONSECA, M. C. F. R. (org).*Letramento no Brasil: Habilidades Matemática*s. São Paulo, Global Editora, 2007.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **EtnoMatemática: Elo entre as tradições e a modernidade***.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

DI PIERRO, Maria Clara. **Descentralização, focalização e parceria: uma análise das tendências nas políticas públicas de educação de jovens e adultos**. Educação e Pesquisa, São Paulo, v.27, n.2, p.321-337, jul./dez. 2001.

EVES, Howard. **Introdução à historia da Matemática***.* Trad.: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA. Ana Rafaela. **Práticas de numeramento, conhecimentos escolares e cotidianos em uma turma de e Ensino Médio da Educação de Pessoas Jovens e Adultas.** Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Educação, 2010 (Dissertação de Mestrado).

FONSECA, Maria da Conceição F.R. **Educação Matemática de Jovens e Adultos: especificidades, desafios e contribuições.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FREIRE, Paulo. **Alfabetização: Leitura da palavra leitura do mundo.** Tradução Lólio Lourenço de Oliveira, Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1990.

GALVÃO, Ana Maria de Oliveira; SOARES, Leôncio José Gomes. **História da alfabetização de adultos no Brasil. A alfabetização de jovens e adultos em uma perspectiva de letramento,** In Albuquerque, Eliana Borges Correia de Leal, Telma Ferraz. Belo Horizonte: Autêntica, 2004

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhosos mundo da Matemática**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GLAESER, Georges. **Epistemologia dos números relativos**. Trad. Lauro Tinoco. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, nº 17, 1985.

GOMES, Maria José; BORBA, Rute**. Pedreiros e marceneiros da Educação de Jovens e Adultos fazendo Matemática: conhecimentos de números decimais em contextos familiares e não familiares.** In: 31a Reunião da Associação Nacional de

Pesquisa e Pós-graduação em Educação, 2008, Caxambú. Anais da 31a Reunião Anual da ANPEd, 2008.

HADDAD, Sergio e DI PIERRO, Maria Clara. **Escolarização de Jovens e Adultos**. Revista Brasileira de Educação, São Paulo, v. 14, 110-130, mai-ago, 2000.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade.** 7º Ano. São Paulo: Atual, 2009

IMENES, Luis Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática.** 7º Ano. São Paulo: Moderna, 2009.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Metodologia do Trabalho Científico***.* 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

LIMA. Rita de Cássia Gomes de. **O raciocínio combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adultos: do início da escolarização até o ensino médi**o. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2010 (Dissertação de Mestrado).

MACHADO, Maria Margarida. **A trajetória da EJA na década de 90: políticas públicas sendo substituídas por solidariedade.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 21. Caxambu. São Paulo: ANPED, 1998.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia; NUNES, Terezinha; GITIRANA, VERÔNICA. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** Editora PROEM, 3ª ed. São Paulo, 2008

MAGINA, Sandra; SANTOS, Aparecido dos; MERLINI, Vera. **Quando e como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental?** Contribuição para o debate. In: Revista Em Teia - UFPE, Recife, vol. 1, 2010.

MAIA, Lícia. **A Teoria dos Campos Conceituais: Um novo olhar para a formação do professor.** In: Revista do GEPEM – UERJ, Rio de Janeiro, 1999.
Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

MEDEIROS, Cleide Farias de. **Por uma Educação Matemática como Intersubjetividade.** In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). Educação Matemática (Reedição). 2 ed. São Paulo: Centauro Editora, 2005.

NASCIMENTO, Ross Alves do. **Um estudo sobre obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos: explorando a reta numérica dinâmica**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2002 (Dissertação de Mestrado).

NUNES, Terezinha Nunes; BRYANT, Peter**. Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem**. In *Revista Brasileira de Educação,* nº. 12, ANPEd, 1999.

PORTO, Zélia; CARVALHO, Rosângela. **Educação Matemática na Educação de Jovens e Adultos: Sobre aprender e ensinar conceitos.** 23ª Reunião Anual da Associação de Pós-Graduação em Educação (ANPEd) Caxambu, 2000.

QUEIROZ, Flávia da Costa. **Números relativos:** uma análise de natureza epistemológica de alguns livros didáticos nacionais do terceiro ciclo do Ensino Fundamental. 2006. 56 f. Monografia (Especialização em Matemática) – Programa de Pós-Graduação. Universidade Federal Fluminense. Niterói/RJ, 2006

ROSA NETO, Ernesto. In: **O ensino de Matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios.** Ática, São Paulo, 2007

SADOVYSK, Patrícia. **O ensino de Matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios.** Tradução: Antônio de Pádua Danesi. Ática, São Paulo, 2007

SANTOS, Ivonete Maciel Sacramento dos . **A Educação de Jovens e Adultos no Brasil.** Disponível em: http://www.webartigos.com/articles/4105/1/a-educacao-de-jovens-e-adultos-no-brasil/pagina1.html. Acesso em 29/05/2011.

SILVA, Valdenice Leitão da. **Números decimais: no que os saberes dos adultos difere do das crianças.** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2006 (Dissertação de Mestrado).

SOARES, Luís Havelange. **Os conhecimentos prévios e o ensino dos números inteiros**. Campina Grande: Universidade Estadual da Paraíba, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Sociedade, 2007 (Dissertação de Mestrado).

SOARES, Magda. **Linguagem e escola - uma perspectiva social**. 14ª ed. Rio de Janeiro, Ática, 1996.

SOARES, Tufi Machado; NICOLELLA, Alexandre; GREMAUD, Amaury Patrick; BELLUZZO JUNIOR, Walter; SCORZAFAVE, Luis. **Determinantes do abandono do ensino médio pelos jovens no Estado de Minas Gerais**. In: 32 SBE, 2010, Salvador. 32 SBE, 2010.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de Saber Matemática.** 7º Ano. São Paulo: FTD, 2009.

TEIXEIRA, Leny Rodrigues Martins. **Aprendizagem Operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades.** Revista Pró-Posições, vol. 4, nº 1[10], UNICAMP. Março, 1993.

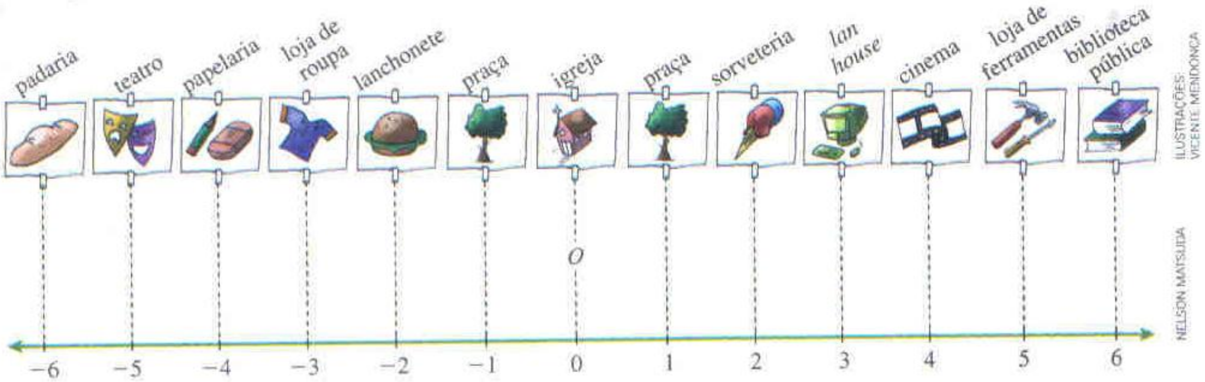
VALLE, Ione Ribeiro; RUSCHEL, Elizete. **Revista Portuguesa de Educação.** A meritocracia na política educacional brasileira (1930-2000). Revista Portuguesa de Educação, Vol. 22, Núm. 1, 2009, pp. 179-206, Universidade do Minho, Portugal.

VERGNAUD, Gérard. **A gênese dos campos conceituais.** In. GROSSI, E. (org.) Por que ainda há quem não aprende? A teoria. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

VERGNAUD, Gérard. **A Teoria dos Campos Conceptuais.** In. BRUM, Jean, (org.) Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

APÊNDICE A – QUESTÕES DO ESTUDO PILOTO

01. (Adaptada de Bianchini) Na avenida principal da cidade de Montes Felizes, você encontra a igreja matriz, as casas de comércio e alguns importantes centros de entretenimento e cultura. Luana representou essa avenida em uma folha de papel e associou a essa representação uma reta numérica. De acordo com a representação, a igreja o ponto associado ao número zero e cada quarteirão da avenida corresponde a um número inteiro. Veja:



Em relação a igreja (ponto O), a posição da sorveteria é dada pelo número inteiro 2. Isso significa que ela está a 2 quarteirões da igreja. Observe também que a posição da lanchonete é dada pelo número inteiro – 2.

a) Qual a distância (em quarteirões) da sorveteria até a igreja? E da lanchonete até a igreja?

b) Como -2 e 2 estão a mesma distância da origem (zero) porém localizados em lados opostos dizemos que -2 e 2 são números opostos ou simétricos.

Assim: - 7 é o oposto de 7 e vice-versa: - (-7) = + 7

Ainda observando a Figura acima, responda:

- *O que está oposto ao teatro?_______ -5 é o oposto de qual número? _______*
- *O que está oposto a biblioteca?______6 é o simétrico de qual número? ______*

02. (Adaptada de Iezzi, Dolce e Machado) As temperaturas que o repórter está anunciando pela TV são bem diferentes, mas têm algo em comum.

a) A temperatura de – 4 ºC indica uma quantidade de quantos graus abaixo de 0 ºC?

b) A temperatura + 4 ºC indica uma quantidade de quantos graus acima de 0 ºC?

Essa quantidade comum às duas temperaturas é chamada valor absoluto dos números -4 e + 4.

c) Qual o valor absoluto de – 2 e de + 2?

03. Abaixo temos a representação de alguns cartões, ligue os cartões que representam o mesmo valor:

5 x 7	8 x 4
4 x 8	8 x (-2)
-2 x 8	7 x 5

Resumindo, 5 x 7 = $\boxed{}$ *Assim como* $\boxed{}$ *= 8 x 4 e – 2 x 8 =* $\boxed{}$

Você sabe qual é a propriedade da multiplicação que justifica essas igualdades?

04. A multiplicação também equivale a uma soma de parcelas iguais. Assim:

5 . 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3

Represente como adição de parcelas iguais as seguintes multiplicações:

a) 4 . 12
b) 6 . (- 2)
c) 3 . (- 9)
d) (- 4) . 3
e) (- 7) . 5

05. Resolva as multiplicações abaixo:

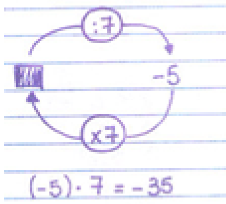
a) 4 . 11
b) 5 . (- 4)
c) (- 15) . 6
d) (+ 5) . (+ 7)
e) (- 8). (+ 5)
f) (- 11). (- 7)
g) (+ 6) . (- 7)
h) (- 12) . (- 4)

06. Observe a Tabela e complete os Quadros que faltam:

X	**- 2**	**- 1**	**0**	**+ 1**	**+ 2**
+ 2				**+ 2**	
+ 1					**+ 2**
0			**0**		
- 1					
- 2					

07. (Adaptada de Souza e Pataro, p. 108) Veja a pergunta que Roger fez a Heloísa:

Para responder à pergunta Heloísa fez o seguinte esquema:



Observando o caderno de Heloísa, notamos que ela realizou uma multiplicação para encontrar o valor desconhecido. Isso ocorre porque a multiplicação é a operação inversa da divisão e vice-versa. Assim, temos que: (-35) : 7 = - 5 pois (- 5) . 7 = - 35. Portanto, o número que Roger pensou foi – 35.

Agora é a sua vez:

a) Qual é o número que ao ser dividido por 4 resulta em – 6? A divisão de um certo número por – 12 dá igual a 3, qual é esse número?
b) Por qual número você deve dividir 40 para que o quociente obtido seja – 5?

08. Resolva as divisões:

a) (+ 60) : (+ 5)
b) (+ 32) : (- 4)
c) (- 18) : (- 3)
d) (- 16) : (+ 4)
e) (+ 55) : (- 11)
f) (- 48) : (- 12)
g) (- 9) : (+ 3)
h) (+ 28) : (+ 7)

09. (Imenes & Lellis, p. 214) O senhor Silva vai pagar uma dívida de R$ 300,00, dividindo-a em 5 parcelas iguais. Represente essa situação usando uma operação com números negativos e positivos.

10. (Adaptado de Imenes & Lellis) Descubra o valor de A, em cada caso:

a) $\boxed{A} \xrightarrow{\text{x } 12} \boxed{-204}$

b) $\boxed{9} \xrightarrow{\text{x } A} \boxed{-135}$

c) $\boxed{A} \xrightarrow{\text{x } (-11)} \boxed{165}$

d) $\boxed{-13} \xrightarrow{\text{x } 13} \boxed{A}$

APÊNDICE B – QUADRO DE PREVISÃO DE RESPOSTAS DO ESTUDO PILOTO

<u>Questão 1</u>

ANÁLISE DA SITUAÇÃO	FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	CONCEITOS ENVOLVIDOS DO PONTO DE VISTA DO ESTUDANTE
a) A situação apresenta um contexto mais próximo da realidade tanto de adultos quanto de crianças por se aproximar de localização de "locais" em uma avenida. Como segundo plano traz um contexto matemático que é a reta numérica associada a esses "locais". Assim, não possui especificidades que a caracterize como desse ou daquele público.	**<u>Numérica:</u>** 3, 2, 1,-1, - 2, -3 **<u>Icônica:</u>** desenho da reta numérica com ícones que representam os locais; **<u>Nominal:</u>** padaria, lanchonete (pontos da avenida); **<u>Oral:</u>** no caso da entrevista (sem representação explícita no papel). ***<u>Questão:</u>*** Será que essa representação é mais fácil? E se for, qual grupo obtém, nessa forma, melhor desempenho?	Correspondência uns em relação aos outros (um a um – ponto da avenida a número ou número a ponto; Calcula distâncias; Mede considerando o número e não o seu valor absoluto. **<u>Ex.:</u>** Da lanchonete para a sorveteria faz -2 + 2 = 0 (igreja).
b) Essa situação tem um contexto mais matemático. Apesar de se referir a locais de uma avenida utiliza uma linguagem própria da Matemática como oposto/simétrico. Também não possui especificidades que a torne mais adequada para determinado grupo (EJA ou regular).	*o teatro é oposto da ... e -5 é o oposto da...* **<u>Numérica e nominal:</u>** loja de ferramentas e + 5; padaria e – 6; papelaria e -4; igreja e 0; praça e -1; **<u>Icônica:</u>** Pontos da avenida ***<u>Questão:</u>*** quando o oposto se refere a pontos da avenida (que estamos chamando de local - igreja, padaria...) o desempenho é melhor que quando se faz referência a oposto de um número? No caso da entrevista apenas falar a resposta, será que facilita?	Localiza pontos na reta numérica; Utiliza à distância à origem como oposto; Considera o "vizinho" (esquerda ou direita) como oposto; Tem o oposto de **n** como a distância **n** incluindo na medida o ponto de origem e o ponto de chegada, ou seja, considera que o oposto do teatro é a praça.

Questão 2

ANÁLISE DA SITUAÇÃO	FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	CONCEITOS ENVOLVIDOS DO PONTO DE VISTA DO ESTUDANTE
Essa situação apresenta um contexto mais voltado para a realidade dos alunos mais "velhos" por se tratar da variação de temperatura que é uma grandeza física melhor compreendida por aqueles que conhecem o significado de expressões como -4 º C abaixo de zero ou + 4 º C acima de zero. Certamente, muitos alunos do Ensino Fundamental também compreenderão esse tipo de situação, até porque é um contexto bastante utilizado nos livros didáticos no ensino de números positivos e negativos. Ela também pode ser contextualizada a partir do ponto de vista matemático quando se compara o termômetro com a reta numérica, já ampliada para os números inteiros. No caso, a Questão é por si, instrutiva e puxa para o contexto matemático quando define o que é o valor absoluto de um número no último item, recorrendo a uma linguagem Matemática para falar do que na linguagem mais convencional se conhece por "***distância***".	**<u>Numérica:</u>** 5 4 3 -5 - 4 -3 (itens **a** e **b**) 4 2 1 0 - 2 -1 (item **c**) **<u>Nominal:</u>** Nome do ponto, considerando a distância como o número inteiro correspondente.	Relaciona distância com o número correspondente na reta numérica; Considera o zero como ponto de referência para medir distâncias; Efetuar a operação +2 – 2 (item **c**). Também em **c** diz que o valor absoluto de -2 ou de +2 é 4 por conceber que o valor absoluto de um número é sempre 4 (generaliza a informação do Quadro para outros números de modo mal adaptado).

Questão 3

ANÁLISE DA SITUAÇÃO	FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	CONCEITOS ENVOLVIDOS DO PONTO DE VISTA DO ESTUDANTE
Essa situação está inserida num contexto matemático. Pode ser resolvida pelos alunos dos dois grupos, desde que o estudante conheça, mesmo que implicitamente a propriedade comutativa da multiplicação. Por outro lado, ela é um tanto quanto infantilizada por solicitar a ligação entre os cartões que apresentam o mesmo valor.	Ligação ou criação de códigos que associe os Quadros da esquerda com os Quadros da direita. Alguns alunos podem não reconhecer a igualdade entre -2 x 8 e 8 x (-2) por apresentar o parêntese, que pode ser encarado como um diferenciador na representação. No reconhecimento da propriedade pode aparecer: *igual, a ordem dos fatores, comutativa...* Penso que essa representação (ligação dos cartões) não apresenta diferenças que sejam significativas, se a Questão fosse apresentada assim na forma 8 x 4 = 4 x 8 e questionássemos sobre a veracidade ou não da igualdade.	Reconhece que a ordem dos fatores não altera o produto; Percebe a igualdade entre as multiplicações como uma mera “inversão” da ordem na qual aparecem os números. Não aceita a igualdade -2 x 8 = 8 x (-2); **NOTA:** podemos pensar na possibilidade de criar Quadros que não se associe a nenhum outro para ver se o acerto é decorrente do contrato didático (considerar que toda Questão tem uma resposta).

Questão 4

ITEM	FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	CONCEITOS ENVOLVIDOS DO PONTO DE VISTA DO ESTUDANTE
a) 4 . 12	12 + 12 + 12 + 12 $\underbrace{4 + 4 + 4 + ...+ 4}_{12 \text{ vezes}}$	Reconhecer a multiplicação como uma adição de parcelas iguais Considerar qualquer um dos fatores como o multiplicador.
b) 6 . (- 2)	-2 + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) -2 – 2 – 2 – 2 – 2 - 2 4 12 ou - 12	Reconhecer a multiplicação como uma adição de parcelas iguais Reconhecer que na adição de números negativos o sinal de + pode ser suprimido Efetuar a subtração entre os valores dados Realizar a multiplicação e errar/acertar o sinal.

* Para os demais itens realizou-se análise análoga aos aqui apresentados

<u>Questão 5</u>

ITEM	FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	CONCEITOS ENVOLVIDOS DO PONTO DE VISTA DO ESTUDANTE
a) 4 . 11	44 – 44 11 + 11 + 11 + 11 = 44	Efetua a multiplicação tratando os números como naturais; Efetua a multiplicação e considera o produto negativo; Realiza a multiplicação partindo da ideia de que multiplicar é somar parcelas iguais.
b) 5 . (- 4)	1 -20 ou + 20 (-4) + ... + (-4) = - 20 - n + n	Efetua a subtração e desconsidera a multiplicação; Efetua a multiplicação e acerta/erra o sinal; Efetua a multiplicação como soma de parcelas iguais; Considera como resultado um número qualquer negativo (erra o módulo); Considera como resultado um nº qualquer positivo.
c) (- 15) . 6	- 90 ou + 90 6 + 6 + ...+ 6 (15 vezes) (-15) + ... + (-15) 6 vezes - 9 - n + n	Efetua a multiplicação corretamente e acerta/erra o sinal; Efetua a multiplicação como soma de parcelas iguais e desconsidera o sinal; Efetua a multiplicação como soma de parcelas iguais e considera a comutatividade; Efetua a subtração e desconsidera a multiplicação; Considera como resultado um número qualquer negativo (erra o módulo); Considera como resultado um nº qualquer positivo.
d) (+ 5) . (+ 7)	+ 35 ou 35 -35	Efetua a multiplicação (5.7) e considera ou não o sinal + ; Efetua a multiplicação e considera +.+ = -; Outros conhecimentos semelhantes aos já citados, como considerar a multiplicação como soma de parcelas iguais.

* Para os demais itens realizou-se análise análoga aos aqui apresentados

Questão 6

A maior parte dos alunos preenchem a Tabela utilizando a multiplicação de inteiros ao invés de perceber a regularidade do sistema de numeração. Assim, mobilizam conhecimentos relacionados a multiplicação (como na Questão 5).

Questão 7

ITEM	FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	CONCEITOS ENVOLVIDOS DO PONTO DE VISTA DO ESTUDANTE
a	4. (- 6) N : 4 = -6 - 6 . n	Compreende como uma multiplicação inversa e a resolve com um das estratégias já apontadas na q.6 Monta a divisão e tenta descobrir o valor de n que satisfaça a igualdade Entende que o número a procurado deve ser multiplicado por – 6.

* Para os demais itens realizou-se análise análoga aos aqui apresentados

Questão 8

Para esta Questão, realizou-se análise análoga a da Questão 5. Mas, com diferentes formas de representação e invariantes.

Questão 9

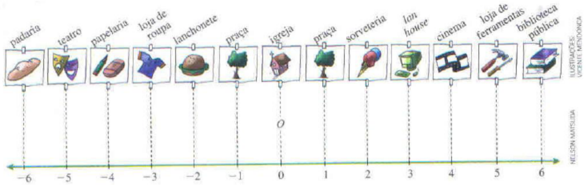
PÚBLICO AO QUAL SE DESTINA	FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	CONCEITOS ENVOLVIDOS DO PONTO DE VISTA DO ESTUDANTE
Adultos	(+300): (-5) - 300: 5 = - 60 300 : 5 = 60, dívida de 60 reais 300 : 5	Representa a divisão e usa os sinais na ordem que aparecem na Questão; Considera a dívida de 300 como -300 e faz a divisão (ou pode apenas realizar a representação). O resultado é uma dívida mensal de 60 reais; Resolve a Questão tratando os números como naturais e entende que a resposta é uma dívida de 60 reais; Representa a situação com números naturais.

Questão 10

ITEM	FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	CONCEITOS ENVOLVIDOS DO PONTO DE VISTA DO ESTUDANTE
a) A . 12 = - 204	216	Soma 12 e 204, desconsidera o sinal (- 204);
	A + 12 = - 204 A = - 216	Trata a multiplicação como uma soma onde uma das parcelas é desconhecida e opera algebricamente;
	204.12 = 2 448	Multiplica 204 por 12 e desconsidera o sinal negativo (- 204);
	17 ou - 17	Encontra como resultado 17 por meio da divisão 204 por 12 ou por tentativas recorrendo a multiplicação e desconsidera o sinal ou justifica que (-).(+) = + e não é necessário colocar o sinal, quando positivo, ou ainda apresenta como resposta -17.

* Para os demais itens realizou-se análise análoga aos aqui apresentados

APÊNDICE C – QUADRO SÍNTESE DAS RESPOSTAS ESPERADAS E OBTIDAS NO PILOTO

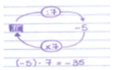
QUESTÃO	HIPÓTESES DE RESPOSTAS	ESTUDANTES DA EJA		ESTUDANTES DO EF	
		Felipe	Renata	Lucas	Catarina
01. ***(Adaptada de Matemática – Edwaldo Bianchini p. 16)*** Na avenida principal da cidade de Montes Felizes, você encontra a igreja matriz, as casas de comércio e alguns importantes centros de entretenimento e cultura. Luana representou essa avenida em uma folha de papel e associou a essa representação uma reta numérica. De acordo com a representação, a igreja o ponto associado ao número zero e cada quarteirão da avenida corresponde a um número inteiro. Veja:  Em relação a igreja (ponto O), a posição da sorveteria é dada pelo número inteiro 2. Isso significa que ela está a 2 quarteirões da igreja. Observe também que a posição da lanchonete é dada pelo número inteiro – 2. *a) Qual a distância (em quarteirões) da sorveteria até a igreja? E da lanchonete até a igreja?* *b) Como -2 e 2 estão a mesma distância da origem (zero) porém localizados em lados opostos dizemos que -2 e 2 são números opostos ou simétricos.* Assim: - 7 é o oposto de 7 e vice-versa: - (-7) = + 7 *Ainda observando a figura acima, responda:* • *O que está oposto ao teatro?_______ -5 é o oposto de qual número? _______* • *O que está oposto a biblioteca?______6 é o simétrico de qual número? ______*	a) Faz correspondência biunívoca (ponto da avenida a número que o representa ou número a ponto); Calcula as distâncias indicadas; Considera apenas os números correspondentes aos pontos dados e soma (-2 + 2 = 0). b) Localiza pontos na reta numérica; Utiliza à distância à origem como oposto; Considera o “vizinho” (esquerda ou direita) como oposto; Tem o oposto de **n** como a distância **n** incluindo na medida o ponto de origem e o ponto de chegada, ou seja, considera que o oposto do teatro é a praça.	a) 2 quarteirões b) padaria; 6 loja de ferramentas; 5	a) 2 quarteirões e – 2 quarteirões b) loja de ferramentas; 5 padaria; -6	a) 2 quarteirões b) loja de ferramentas; - 5 = + 5 padaria; - 6	a) 1 quarteirão b) loja de ferramentas; + 5 padaria; - 6

QUESTÃO	HIPÓTESES DE RESPOSTAS	ESTUDANTES DA EJA		ESTUDANTES DO EF	
		Felipe	Renata	Lucas	Catarina
02. (Adaptada de Iezzi et al p. 18) As temperaturas que o repórter está anunciando pela TV são bem diferentes, mas têm algo em comum.  *a) A temperatura de – 4 °C indica uma quantidade de quantos graus abaixo de 0 °C?* *b) A temperatura + 4 °C indica uma quantidade de quantos graus acima de 0 °C?* c) Qual o valor absoluto de – 2 e de + 2?	Relaciona distância com o número correspondente na reta numérica; Considera o zero como ponto de referência para medir distâncias; Efetua a operação +2 – 2 (item **c**). Diz que o valor absoluto de -2 ou de +2 é 4 por conceber que o valor absoluto de um número é sempre 4 (generaliza a informação do Quadro para outros números de modo mal adaptado); Relaciona distância com o número correspondente na reta numérica; Considera o zero como ponto de referência para medir distâncias; Efetuar a operação +2 – 2 (item **c**).	a) 4° C b) 4° C c) 2 e - 2	a) + 4 b) + 4 c) - 2	a) - 4° C b) + 4° C c) – 4° C e + 4° C	a) 4 b) 4 c) - 2

QUESTÃO	HIPÓTESES DE RESPOSTAS	ESTUDANTES DA EJA		ESTUDANTES DO EF	
		Felipe	Renata	Lucas	Catarina
03. Abaixo temos a representação de alguns cartões, ligue os cartões que representam o mesmo valor: 5 x 7 8 x 4 4 x 8 8 x (-2) -2 x 8 7 x 5 *Resumindo, 5 x 7 = ☐ Assim como ☐ = 8 x 4 e – 2 x 8 = ☐* *Você sabe qual é a propriedade da multiplicação que justifica essas igualdades?* ____________________	Reconhece que a ordem dos fatores não altera o produto; Percebe a igualdade entre as multiplicações como uma mera “inversão” da ordem na qual aparecem os números. Não reconhece a igualdade -2 x 8 = 8 x (-2).	35; 32; 16; igualdade	35; 32; - 16; em branco	7 x 5; 35; + 16; divisão	7 x 5; 4 x 8; 8 x (-2); inversas
04. A multiplicação também equivale a uma soma de parcelas iguais. Assim, 5 . 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 Represente como adição de parcelas iguais as seguintes multiplicações: a) 4 . 12 b) 6 . (- 2) c) 3 . (- 9) d) (- 4) . 3 e) (- 7) . 5	a) Reconhecer a multiplicação como uma adição de parcelas iguais; Considera qualquer um dos fatores como o multiplicador b) Reconhecer a multiplicação como uma adição de parcelas iguais; Reconhece que na adição de números negativos o sinal de + pode ser suprimido; Efetua a subtração; Realiza a multiplicação e erra ou acerta o sinal.	a) 12 + 12 + 12 + 12 b) (-2) + ...+ (-2) (6 parcelas de -2) c) (-9) + (-9) + (-9) d) (-4) +...+ (-4) (4 parcelas) e) (-7) + ...(-7) (5 parcelas)	a) 12 + 12 + 12 + 12 b) (-2) + ...+ (-2) (6 parcelas de -2) c) (-9) + (-9) + (-9) d) (-3) +...+ (-3) (4 parcelas) e) (-5) + ...(-5) (7 parcelas)	a) 12 + 12 + 12 + 12 b) -2 + -2 + -2 + -2 + -2 + -2 c) -9 + 9 - 9 d) 3 + 3 + 3 + 3 e) 5 + 5 + ...+ 5 (7 parcelas)	a) 12 + 12 + 12 + 12 b) 2 + -2 + -2 + -2 + -2 + -2 c) - 9 + -9 + - 9 d) 3 + 3 + 3 + 3 e) 5 + 5 + ...+ 5 (7 parcelas)

QUESTÃO	HIPÓTESES DE RESPOSTAS	ESTUDANTES DA EJA		ESTUDANTES DO EF	
		Felipe	Renata	Lucas	Catarina
05. Resolva as multiplicações abaixo: a) 4 . 11 b) 5 . (- 4) c) (- 15) . 6 d) (+ 5) . (+ 7) e) (- 8). (+ 5) f) (- 11). (- 7) g) (+ 6) . (- 7) h) (- 12) . (- 4)	a) Efetua a multiplicação tratando os números como naturais; Efetua a multiplicação e considera o produto negativo; Realiza a multiplicação partindo da ideia de que multiplicar é somar parcelas iguais. b) Efetua a subtração e desconsidera a multiplicação; Efetua a multiplicação e acerta/erra o sinal; Efetua a multiplicação como soma de parcelas iguais; Considera como resultado um número qualquer negativo (erra o módulo); Considera como resultado um nº qualquer positivo. c) Efetua a multiplicação corretamente e acerta/erra o sinal; Efetua a multiplicação como soma de parcelas iguais e desconsidera o sinal; Efetua a multiplicação como soma de parcelas iguais e considera a comutatividade; Efetua a subtração e desconsidera a multiplicação; Considera como resultado um número qualquer negativo (erra o módulo); Considera como resultado um nº qualquer positivo.	a) 44 b) – 16 c) – 75 d) + 47 e) + 32 f) + 69 g) – 34 h) + 32	a) 4.11 = 44 b) 5(-4) = – 20 c) (-15).6= – 90 d) (+5).(+7) = 35 e) (-8).(+5) = - 40 f) (-11).(-7) = 77 g) (+6).(-7) = – 43 h) (-12).(-4) = 48	a) 44 b) – 20 c) – 90 d) - 35 e) - 40 f) + 77 g) – 42 h) + 48	a) 44 b) – 20 c) – 90 d)+ 35 e) - 40 f) + 77 g) – 42 h) + 48

<table>
<tr><th rowspan="2">QUESTÃO</th><th rowspan="2">HIPÓTESES DE RESPOSTAS</th><th colspan="2">ESTUDANTES DA EJA</th><th colspan="2">ESTUDANTES DO EF</th></tr>
<tr><th>Felipe</th><th>Renata</th><th>Lucas</th><th>Catarina</th></tr>
<tr>
<td>06. Observe a tabela e complete os quadros que faltam:
<table>
<tr><th>X</th><th>- 2</th><th>- 1</th><th>0</th><th>+ 1</th><th>+ 2</th></tr>
<tr><td>+ 2</td><td></td><td></td><td></td><td>+ 2</td><td></td></tr>
<tr><td>+ 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>+ 2</td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>- 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>- 2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
<td>Preenche o Quadro utilizando a multiplicação de inteiros ao invés de perceber a regularidade do sistema de numeração.
Mobilizam conhecimentos relacionados a multiplicação (como na Questão 5).</td>
<td><table>
<tr><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>+2</td><td>+4</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td><td>+2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>+2</td><td>+0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>-4</td><td>+2</td><td>0</td><td>-2</td><td>-4</td></tr>
</table></td>
<td><table>
<tr><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>+2</td><td>+4</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td><td>+2</td></tr>
<tr><td>-0</td><td>--0</td><td>0</td><td>-0</td><td>+0</td></tr>
<tr><td>+2</td><td>+1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>+4</td><td>+2</td><td>0</td><td>-2</td><td>-4</td></tr>
</table></td>
<td><table>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>+2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>+2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
</table></td>
<td><table>
<tr><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>+2</td><td>+4</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>+1</td><td>+2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>+2</td><td>+1</td><td>0</td><td>-1</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>+4</td><td>+2</td><td>0</td><td>-2</td><td>-4</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>07. (Adaptado de Souza e Pataro p. 108) Veja a pergunta que Roger fez a Heloísa:


Para responder à pergunta Heloísa fez o seguinte esquema:


Observando o caderno de Heloísa, notamos que ela realizou uma multiplicação para encontrar o valor desconhecido. Isso ocorre porque a multiplicação é a operação inversa da divisão e vice-versa. Assim, temos que: (-35) : 7 = - 5 pois (- 5) . 7 = - 35. Portanto, o número que Roger pensou foi – 35.
Agora é a sua vez:
a) Qual é o número que ao ser dividido por 4 resulta em – 6?
b) A divisão de um certo número por – 12 dá igual a 3, qual é esse número?
c) Por qual número você deve dividir 40 para que o quociente obtido seja – 5?</td>
<td>a) Compreende como uma multiplicação inversa e a resolve como na q.6
Monta a divisão e tenta descobrir o valor de n que satisfaça a igualdade;

Entende que o número procurado deve ser multiplicado por -6.</td>
<td>a) – 24
b) – 36
c) em branco</td>
<td>a) – 24
b) – 36
c) - 8</td>
<td>a) 16
b) –6
c) - 8</td>
<td>a) – 24
b) – 12.3 = 36
c) 8</td>
</tr>
<tr>
<td>08. Resolva as divisões:
<table>
<tr><td>a) (+ 60) : (+ 5)</td><td>e) (+ 55) : (- 11)</td></tr>
<tr><td>b) (+ 32) : (- 4)</td><td>f) (- 48) : (- 12)</td></tr>
<tr><td>c) (- 18) : (- 3)</td><td>g) (- 9) : (+ 3)</td></tr>
<tr><td>d) (- 16) : (+ 4)</td><td>h) (+ 28) : (+ 7)</td></tr>
</table></td>
<td>representações e invariantes são semelhantes à Questão 5, diferenciando-se apena a operação a ser realizada com os números (divisão ao invés da multiplicação).</td>
<td>a) + 12
b) – 8
c) + 6
d) - 4
e) - 5
f) + 4
g) – 3
h) – 4</td>
<td>a) + 12
b) – 8
c) + 6
d) - 4
e) - 5
f) + 4
g) – 3
h) + 4</td>
<td>a) + 12
b) – 8
c) + 6
d) - 4
e) - 5
f) + 4
g) – 3
h) - 4</td>
<td>a) + 12
b) – 8
c) + 6
d) - 4
e) - 11
f) + 2
g) – 3
h) + 4</td>
</tr>
</table>

QUESTÃO	HIPÓTESES DE RESPOSTAS	ESTUDANTES DA EJA		ESTUDANTES DO EF	
		Felipe	Renata	Lucas	Catarina
09. (Imenes & Lellis p. 214) O senhor Silva vai pagar uma dívida de R$ 300,00, dividindo-a em 5 parcelas iguais. Represente essa situação usando uma operação com números negativos e positivos.	Representa a divisão e usa os sinais na ordem que aparecem na Questão Considera a dívida de 300 como -300 e faz a divisão. O resultado é uma dívida mensal de 60 reais; Resolve apenas com números como naturais e entende que a resposta é uma dívida de 60 reais; Representa a situação com números naturais.	300: 5 = 60	300: 5 = 60	- 5 : 300 = - 60	-60 + 60 + 60 + 60 + 60 = - 300
10. (Adaptada de Imenes & Lellis) Descubra o valor de A, em cada caso: a) $A \xrightarrow{x\ 12} -204$ b) $9 \xrightarrow{x\ A} -135$ c) $A \xrightarrow{x\ (-11)} 165$ d) $-13 \xrightarrow{x\ 13} A$	Soma 12 e 204, desconsidera o sinal (- 204); Trata a multiplicação como uma soma onde uma das parcelas é desconhecida; Multiplica 204 por 12; Faz 204:12 ou por tentativas recorrendo a multiplicação e desconsidera o sinal ou justifica que (-).(+) = + ou ainda resposta -17.	a) + 17 b) + 15 c) - 55 d) - 169	a) - 17 b) - 15 c) - 15 d) - 169	a) 17 b) 15 c) 15 d) 169	a) - 2448 b) - 1215 c) - 1305 d) - 169

QUESTÃO	HIPÓTESES DE RESPOSTAS	ESTUDANTES DA EJA		ESTUDANTES DO EF	
		Antônio	Pedro	Lucas	Paulo
03. Abaixo temos a representação de alguns cartões, ligue os cartões que representam o mesmo valor: 5 x 7 8 x 4 4 x 8 8 x (-2) -2 x 8 7 x 5 *Resumindo, 5 x 7 =* $\boxed{}$ *Assim como* $\boxed{}$ *= 8 x 4 e – 2 x 8 =* $\boxed{}$ *Você sabe qual é a propriedade da multiplicação que justifica essas igualdades?* ______________________________	Reconhece que a ordem dos fatores não altera o produto; Percebe a igualdade entre as multiplicações como uma mera "inversão" da ordem na qual aparecem os números. Não reconhece a igualdade -2 x 8 = 8 x (-2).	29 32; 16; igualdade	33; 32; - 16; em branco	9 x 5; 35; + 17; divisão	8 x 5; 4 x 8; 8 x (-2); inversas
04. A multiplicação também equivale a uma soma de parcelas iguais. Assim, **5 . 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3** Represente como adição de parcelas iguais as seguintes multiplicações: a) 4 . 12 b) 6 . (- 2) c) 3 . (- 9) d) (- 4) . 3 e) (- 7) . 5	a) Reconhecer a multiplicação como uma adição de parcelas iguais; Considera qualquer um dos fatores como o multiplicador b) Reconhece a multiplicação como uma adição de parcelas iguais; Reconhece que na adição de números negativos o sinal de + pode ser suprimido; Efetua a subtração; Realiza a multiplicação e erra ou acerta o sinal.	a) 12 + 12 + 12 + 12 b) (-2) + ...+ (-2) (6 parcelas de -2) c) (-9) + (-9) + (-9) d) (-4) +...+ (-4) (4 parcelas) e) (-7) + ...(-7) (5 parcelas)	a) 12 + 12 + 12 + 12 b) (-2) + ...+ (-2) (6 parcelas de -2) c) (-9) + (-9) + (-9) d) (-3) +...+ (-3) (4 parcelas) e) (-5) + ...(-5) (7 parcelas)	a) 12 + 12 + 12 + 12 b) -2 + -2 + -2 + -2 + -2 + -2 c) -9 + 9 - 9 d) 3 + 3 + 3 + 3 e) 5 + 5 + ...+ 5 (7 parcelas)	a) 12 + 12 + 12 + 12 b) 2 + -2 + -2 + -2 + -2 + -2 c) - 9 + -9 + - 9 d) 3 + 3 + 3 + 3 e) 5 + 5 + ...+ 5 (7 parcelas)