



Pós-Graduação em Ciência da Computação

“Uma nova prova de corretude para os N-Grafos”

Por

Ruan Vasconcelos Bezerra Carvalho

Dissertação de Mestrado



Universidade Federal de Pernambuco
posgraduacao@cin.ufpe.br
www.cin.ufpe.br/~posgraduacao

RECIFE, OUTUBRO/2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE INFORMÁTICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

RUAN VASCONCELOS BEZERRA CARVALHO

“Uma nova prova de corretude para os N-Grafos”

ESTE TRABALHO FOI APRESENTADO À PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO.

ORIENTADORA: Profa. Anjolina Grisi de Oliveira

CO-ORIENTADOR: Prof. Ruy José Guerra Barretto de Queiroz

RECIFE, OUTUBRO/2013

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Carvalho, Ruan Vasconcelos Bezerra
Uma nova prova de corretude para os N-Grafos / Ruan
Vasconcelos Bezerra Carvalho. - Recife: O Autor, 2013.
xix, 90 p.: il., fig., tab.

Orientador: Anjolina Grisi de Oliveira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco.
CIn, Ciência da Computação, 2013.

Inclui referências e apêndice.

1. Teoria da Computação – Teoria da Prova. 2. Grafos de Prova
(N-Grafos). I. Oliveira, Anjolina Grisi de (orientadora). II. Título.

004.0151

CDD (23. ed.)

MEI2013 – 146

Dissertação de Mestrado apresentada por **Ruan Vasconcelos Bezerra Carvalho** à Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco, sob o título “**Uma nova prova de corretude para os N-Grafos**” orientada pela **Profa. Anjolina Grisi de Oliveira** e aprovada pela Banca Examinadora formada pelos professores:

Prof. Frederico Luiz Gonçalves de Freitas
Centro de Informática / UFPE

Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Departamento de Filosofia/PUC-Rio

Profa. Anjolina Grisi de Oliveira
Centro de Informática / UFPE

Visto e permitida a impressão.
Recife, 3 de outubro de 2013

Profa. Edna Natividade da Silva Barros
Coordenadora da Pós-Graduação em Ciência da Computação do
Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco.

A Iêda, Renan e Djalma.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família: minha mãe, meu irmão e meu pai. Eles são minhas constantes. Talvez por isso algumas vezes parece que não são fundamentais. Porém, quando as variáveis vão mal, a importância das constantes torna-se evidente.

Também aos meus de colegas de graduação e de mestrado do CIn como Denys, Flavinho, Paulo e Pt (Pedro Antonino). O convívio com eles no cotidiano da universidade tornou o estudo da Lógica mais fácil e mais prazeroso. E também a Caio, Everson, Severo e Yane pelos inúmeros bons momentos no CIn e fora do CIn.

Um dia marcante no mestrado foi sem dúvida o da visita de Gianluigi Bellin. Foi uma grande honra e experiência apresentar o trabalho a ele e seus comentários foram inspiradores.

Sou grato aos professores Fred e Luiz Carlos por aceitarem o convite de participar da banca. Em especial a Luiz Carlos por vir do Rio. Também agradeço a Fred pelo aprendizado em disciplinas na graduação e no mestrado.

Ao Professor Ruy, não só pelo mestrado, mas por toda a contribuição na minha formação desde a graduação. Não há outro professor com quem eu tenha cursado mais disciplinas na universidade. Foi muito bom poder sempre contar com ele. Passei a admirá-lo ainda mais depois do WoLLIC 2013. Espero ter outras oportunidades como a dessa viagem!

Agradeço à minha amiga e parceira de estudo, Laís. Desde o início do mestrado trabalhamos juntos na compreensão dos N-Grafos e depois para desenvolvermos nossas pesquisas. É mais fácil trabalhar quando estamos perto de pessoas brilhantes.

Por último (e mais importante!), agradeço à Professora Anjolina. Sem dúvida, esta é a parte mais difícil de escrever da dissertação. Suas contribuições técnicas a este trabalho são inestimáveis, mas isso não seria surpreendente para uma ótima orientadora. Uma pessoa de muita luz e de grande mansidão. Sempre bastante preocupada comigo e com Laís. Muito mais que uma orientadora.

Numa das inúmeras vezes em que conversei com minha mãe sobre a Professora, minha mãe me disse: “Admiro bastante a relação de vocês. Ela é como uma mãe para você”. Deve ser isso mesmo: talvez eu não tenha uma mãe biológica e uma orientadora, mas sim uma mãe biológica e outra na lógica.

N-Grafos é imperialista: você tenta fugir, mas ele te conquista.
N-Grafos é nazifascista: teoremas se escondem e você segue suas pistas.
N-Grafos é pós-moderno: é dedução natural, mas é simétrico.
N-Grafos é uma abobrinha: suas derivações parecem sopa de letrinhas.
—HUMBERTO GESSINGER (Adaptado de Sopa de Letrinhas)

Resumo

Desde que *proof-nets* para MLL^- foram introduzidas por Girard, vários estudos foram realizados na prova de corretude desse sistema. O primeiro critério foi o *no shorttrip condition*: Girard usou a noção de *trips* para definir impérios e provou que se todas as fórmulas terminais numa *proof-net* R forem conclusões de links \otimes ou de axiomas, então pelo menos um link terminal \otimes divide R em duas partes (a conclusão deste link é chamada de “nó *split*”).

Outro avanço na prova de corretude de *proof-nets* foi obtido pela introdução de um novo tipo de *subnets*. Uma vez que a noção de reinos foi introduzida, Bellin & van de Wiele produziram uma elegante prova do teorema de sequentização utilizando propriedades simples das *subnets* e mostrando como encontrar o nó *split*. Todavia, estas abordagens não se aplicam integralmente aos N-Grafos, uma vez que a noção de reinos não é possível de ser empregada.

Não obstante, a necessidade de identificar o nó *split* está no coração da prova da sequentização. Então, usamos alguns resultados obtidos para as *proof-nets* e apresentamos uma outra abordagem para chegar à prova da sequentização para os N-Grafos. Usando a noção de subprovas, definimos o império do norte, o do sul e o total (*whole empire*) de uma ocorrência de fórmula A . Com isso, além da apresentação de uma nova prova de corretude para os N-Grafos (sem o conectivo \rightarrow), também é dado um método generalizado para realizar cortes precisos em provas.

Palavras-chave: N-Grafos, dedução natural, cálculo de sequentes, MLL^- , *subnets*.

Abstract

Since proof-nets for MLL^- were introduced by Girard, several studies have been made on its soundness proof. The first correctness criterion was the *no shorttrip condition*: Girard used trips to define empires and proved that if all terminal formulas in a proof-net R are conclusions of times or axiom links, then there is at least one terminal link \otimes which splits R (the conclusion of this link is named “split node”).

Another advance in proof-nets soundness proof was achieved by the introduction of a new type of subnets. Once the notion of kingdoms was introduced, Bellin & Van de Wiele produced an elegant proof of sequentialization theorem using simple properties of subnets and showing how to find the split node. However, these approaches do not fully apply to N-Graphs since the notion of kingdoms is useless for the system.

Notwithstanding, the need to identify the split node is at the heart of the proof of the sequentialization. So we need another approach to perform the sequentialization for N-Graphs using the notion of subproofs: we will define the north, the south and the whole empires of a formula occurrence A . With this, besides the presentation of a new proof of soundness criteria for N-Graphs (without the \rightarrow connective), we also give a generalized method to make surgical cuts in proofs.

Keywords: N-Graphs, natural deduction, sequent calculus, MLL^- , subnets.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação e objetivo	1
1.2	Organização	1
2	Proof nets	3
2.1	Introdução	3
2.2	<i>Proof nets</i> para lógica linear	3
2.2.1	<i>Trips</i>	5
2.2.2	CrITÉrio <i>no shorttrip condition</i>	8
2.2.3	CrITÉrio de Danos-Regnier	11
2.3	Subnets	12
2.4	Proof nets para lógica clássica	13
2.5	Conclusão	15
3	N-Grafos	17
3.1	Introdução	17
3.2	Grafos de prova	17
3.3	CrITÉrio de corretude	20
3.4	Fragmento sem a implicação	22
3.4.1	Aciclicidade	23
3.4.2	Conectividade	24
3.5	Conclusão	25
4	Sub-N-Grafos e uma nova prova de sequentização	27
4.1	Introdução	27
4.2	União e intersecção de sub-N-Grafos	28
4.3	<i>Trips</i> para os N-Grafos	30
4.3.1	Premissas e conclusões	30
4.3.2	Links simples	30
4.3.3	Links conjuntivos convergentes	31
4.3.4	Links disjuntivos divergentes	32
4.3.5	Link disjuntivo convergente	32
4.3.6	Link conjuntivo divergente	33
4.4	CrITÉrio <i>no shorttrip</i> para os N-Grafos	33
4.5	Império do norte	35
4.6	Império do sul	46

4.7	Império total	50
4.8	Sequentização	52
4.9	Conclusão	54
5	Comparação das provas de corretude	55
5.1	Prova original da corretude dos N-Grafos	55
5.2	Nós maximais e links <i>splits</i>	57
5.2.1	Link simples inicial	57
5.2.2	Link simples final	58
5.2.3	Link conjuntivo convergente inicial	59
5.2.4	Link disjuntivo divergente final	59
5.2.5	Iniciais disjuntivos divergentes e finais conjuntivos convergentes	60
5.3	Revisão da prova original	62
5.3.1	Meta-aresta	62
5.3.2	Existência do <i>cut branch point</i>	62
6	Conclusão	67
A	Mapeamento de N-Grafos com um único link para o cálculo de sequentes	69
A.1	Regras	69
A.2	Derivações dos links dos N-Grafos	70
B	Correspondência entre os critérios Danos-Regnier e <i>no shorttrip</i>	73
C	Construção do império do norte por meio de <i>trips</i>	77
D	Teorema <i>split</i>	83

Lista de Figuras

2.1	Estrutura de prova representando uma derivação válida.	5
2.2	Estrutura de prova inválida.	5
2.3	“Caixa” de uma fórmula.	6
2.4	<i>Trip</i> num axioma.	6
2.5	<i>Trip</i> numa fórmula terminal.	6
2.6	Times L.	7
2.7	Times R.	7
2.8	Par L.	8
2.9	Par R.	9
2.10	<i>Proof-net</i> sem link <i>par</i> terminal.	10
2.11	Links para o conectivo \rightarrow nas <i>proof-nets</i> de Robinson.	14
3.1	Tipos de links.	18
3.2	Links simples.	19
3.3	Links conjuntivos convergentes.	19
3.4	Links disjuntivos divergentes.	20
3.5	Links chaveáveis.	20
3.6	Apenas a primeira derivação é uma falácia.	20
3.7	Descarte equivocado de hipótese: uma “prova” para $\vdash A \vee B$	21
3.8	Chaveamentos associados ao grafo de prova da Figura 3.7.	22
3.9	Ciclo sem a aresta conjugada e um chaveamento que o contém.	23
3.10	Grafos de prova com chaveamentos acíclicos.	24
4.1	Intersecção de sub-N-Grafos. As arestas voláteis estão destacadas.	29
4.2	<i>Trip</i> numa premissa.	30
4.3	<i>Trip</i> numa conclusão.	31
4.4	<i>Trip</i> num link simples.	31
4.5	<i>Trips</i> num link conjuntivo convergente (chaveamentos <i>L</i> e <i>R</i>).	32
4.6	<i>Trips</i> num link disjuntivo divergente (chaveamentos <i>L</i> e <i>R</i>).	32
4.7	<i>Trips</i> num link de contração (chaveamentos <i>L</i> e <i>R</i>).	33
4.8	<i>Trips</i> num link de expansão (chaveamentos <i>L</i> e <i>R</i>).	33
4.9	Exemplo de <i>shorttrip</i> .	34
4.10	Exemplo de <i>longtrip</i> .	34
4.11	Início da computação do império do norte de $A \wedge B_{10}$.	36
4.12	Continuação do cálculo do império do norte de $A \wedge B_{10}$.	37
4.13	Continuação do cálculo do império do norte de $A \wedge B_{10}$.	38

4.14	Continuação do cálculo do império do norte de $A \wedge B_{10}$.	38
4.15	Resultado após a computação do império do norte de $A \wedge B_{10}$ pelo teorema 4.2.	39
4.16	Componentes $S_{RRR}^{\wedge}(N, A \wedge B_{10})$ e $S_{RRL}^{\wedge}(N, A \wedge B_{10})$.	41
4.17	Se escolhermos a aresta (X_{p_1}, X_c) , obtemos um ciclo.	43
4.18	Impérios do sul de A_6 e C_9 .	47
5.1	N-Grafo com um link simples inicial.	58
5.2	N-Grafo com um link simples final.	58
5.3	N-Grafo com um link conjuntivo convergente inicial.	59
5.4	N-Grafo com um link disjuntivo divergente final.	59
5.5	Nó maximal do N-Grafo de $(\neg A \wedge Z) \vee B, A \vee B \vdash B, B \wedge Z$.	61
5.6	Nós maximais do N-Grafo de $A \vee B \vdash \neg D, D \wedge (A \vee C) \vee (B \vee C)$.	61
5.7	Nó maximal do N-Grafo de $A \vee A \vdash (A \vee A) \wedge (A \vee A)$.	62
5.8	Nós maximais do N-Grafo de $\vdash A \wedge B, (\neg A \vee \neg B) \wedge D, \neg D$.	63
5.9	Nó maximal do N-Grafo de $(\neg A \wedge Z) \vee (\neg A \wedge Z), A \vee B \vdash B \wedge Z$.	64
5.10	Nó maximal do N-Grafo de $\vdash A \wedge B, (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.	64
5.11	O <i>cut branch point</i> não divide a prova em dois N-Grafos devido à meta-aresta.	65
5.12	Não há <i>cut branch point</i> , mas há nós maximais.	65
B.1	Grafo de prova, grafo D-R associado e grafo com as arestas para simular <i>trips</i> .	74
D.1	N-Grafo de $(\neg A \wedge Z) \vee B, A \vee B \vdash B, B \wedge Z$.	83
D.2	N-Grafo de $A \vee B \vdash \neg D, D \wedge (A \vee C) \vee (B \vee C)$.	84
D.3	N-Grafo de $A \vee A \vdash (A \vee A) \wedge (A \vee A)$.	85
D.4	N-Grafo de $\vdash A \wedge B, (\neg A \vee \neg B) \wedge D, \neg D$.	86
D.5	N-Grafo de $(\neg A \wedge Z) \vee (\neg A \wedge Z), A \vee B \vdash B \wedge Z$.	87
D.6	N-Grafo de $\vdash A \wedge B, (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.	87

Lista de Tabelas

A.1	Regras estruturais.	69
A.2	Regras lógicas.	70
A.3	$\vee - I_1 = (A, A \vee B)$ e $\wedge - E_1 = (A \wedge B, A)$.	70
A.4	$\vee - I_2 = (B, A \vee B)$ e $\wedge - E_2 = (A \wedge B, B)$.	71
A.5	$\perp - \text{enfrac. simples} = (\perp, A)$ e $\top - \text{enfrac. simples} = (A, \top)$.	71
A.6	$\wedge - I = \{(A, A \wedge B), (B, A \wedge B)\}$ e $\vee - E = \{(A \vee B, A), (A \vee B, B)\}$.	71
A.7	$\neg - I = \{(\top, A), (\top, \neg A)\}$ e $\neg - E = \{(A, \perp), (\neg A, \perp)\}$.	71
A.8	$\top - \text{enfrac. convergente} = \{(\top, A), (A, A)\}$ e $\perp - \text{enfrac. divergente} = \{(A, A), (A, \perp)\}$.	71
A.9	$\rightarrow - E = \{(A, B), (A \rightarrow B, B)\}$.	71

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Motivação e objetivo

Várias provas de corretude apresentadas para as *proof-nets* para MLL^- apresentam em comum o conceito de *subnets*: fragmentos de uma derivação válida e que também são provas válidas [Gir87, Gir91, BvdW95]. De modo semelhante, o cálculo de Robinson para a lógica clássica também adota o critério de Danos & Regnier e utiliza a noção *subnets* para a prova de corretude [Rob03].

Entretanto, isso não ocorre nos N-Grafos. Embora o sistema adote um critério de corretude semelhante, não há os conceitos de império e reino de uma ocorrência de fórmula. Por essa razão, o teorema de sequentização apresenta um formato diferente na busca por um nó *split*.

Esse trabalho propõe a definição de subderivações nos N-Grafos: os “sub-N-Grafos”. O objetivo é tornar mais evidentes as conexões entre os N-Grafos e a teoria das *proof-nets*. Conforme será discutido no decorrer do texto, a abordagem existente não pode ser aplicada integralmente ao sistema.

Então apresentaremos um novo conceito de subderivações, o qual nos fornecerá um novo método para realizarmos cortes em provas. Esse procedimento é facilmente extensível para qualquer sistema que utilize o critério de Danos & Regnier e apresente links chaveáveis convergentes e divergentes.

1.2 Organização

No capítulo 2 vemos o que são *proof-nets* para o fragmento MLL^- : estudamos o primeiro critério de corretude e a prova de sequentização feitas por Girard em seu artigo de lançamento da lógica linear [Gir87]. Acompanhamos a evolução das provas de corretude: o uso de *subnets* feita por Bellin & van de Wiele [BvdW95] e a generalização realizada por Robinson [Rob03]. Também atentaremos para a contribuição de Danos & Regnier [DR89].

Em seguida, no capítulo 3 apresentamos o sistema de provas para a lógica clássica com o qual trabalhamos aqui: os N-Grafos [dO01, dOdQ03]. Eles apresentam uma solução para a falta de simetria da dedução natural e suas provas são abordadas por uma perspectiva geométrica: o critério de corretude é o de Danos & Regnier e a sua prova de sequentização utiliza um teorema *split* de forma semelhante às *proof-nets* de Girard. No final há uma introdução à verificação de provas para um fragmento do sistema.

Depois, no capítulo 4 é definido o conceito de subderivações válidas num N-Grafo (conceito análogo ao de *subnets* para as *proof-nets*) utilizando algumas ideias vistas no capítulo das *proof-*

nets e apresentamos uma nova prova de corretude, a qual nos fornece uma nova maneira de realizar cortes nas provas.

No capítulo 5 o novo método é comparado com o teorema *split* já existente e são estudadas formas de cortar os N-Grafos em derivações menores. No capítulo 6 apresentamos as considerações finais e sugerimos alguns trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

Proof nets

2.1 Introdução

A lógica linear foi introduzida por Girard no seu famoso artigo [Gir87]. Algumas características que a diferenciam da lógica clássica são: as regras estruturais são limitadas (apenas a permutação não é alterada), é feita a distinção entre conectivos aditivos e multiplicativos (as regras estruturais na lógica clássica eliminam essa diferença), é empregada uma nova abordagem para a negação (o conectivo é involutivo, mas ainda assim a lógica é construtiva) e são adicionados os exponenciais (os quais permitem as regras de contração e enfraquecimento de maneira controlada).

Aqui estamos interessados no estudo das *proof-nets*, a “dedução natural do cálculo de seqüentes linear” [Gir87] (p. 33). Mais especificamente, estudamos o critério de corretude e a prova de sequentização. Esses conceitos são importantes para a nova prova de corretude baseada no estudo de subprovas dos N-Grafos que é apresentado no capítulo 4.

2.2 *Proof nets* para lógica linear

As *proof-nets* permitem o estudo das provas na lógica linear por uma perspectiva geométrica. A parte mais interessante delas compreende o fragmento composto apenas pelos conectivos \otimes (“times”, a conjunção multiplicativa) e \wp (“par”, a disjunção multiplicativa). Esse fragmento é chamado de *lógica linear multiplicativa sem constantes*, ou simplesmente, MLL^- (do inglês *multiplicative linear logic* e o “-” representa a ausência das constantes).

As provas são representadas por “estruturas de provas”, as quais são formadas por ocorrências de fórmulas e por links. Estes podem ser dos três tipos a seguir:

$$\frac{}{A \quad A^\perp} \qquad \frac{A \quad B}{A \otimes B} \qquad \frac{A \quad B}{A \wp B} \qquad (2.1)$$

O primeiro deles é o link de axioma: ele não possui nenhuma premissa, mas apresenta duas conclusões (A e A^\perp). O próximo é o link *times*: duas premissas (A e B) e uma única conclusão ($A \otimes B$). O terceiro é o link *par* e é semelhante ao segundo: sua única diferença é a conclusão ($A \wp B$). A rigor existe também o link da regra do corte, o qual funciona semelhante ao *times*. Porém, como sempre é possível encontrar uma *proof-net* equivalente sem o link da regra do corte [Gir87], não o abordamos aqui.

Os seqüentes são considerados sem fórmulas do lado esquerdo. Portanto, $\Gamma \vdash \Delta$ deve ser

escrito como $\vdash \Gamma^\perp, \Delta^1$. Outra restrição, mas que também não limita o poder do cálculo, é que a negação deve ser aplicada apenas a átomos. Ela é definida pelo conjunto de equações das leis de De Morgan exibido a seguir:

$$A^{\perp\perp} \equiv A \quad (A \otimes B)^\perp \equiv A^\perp \wp B^\perp \quad (A \wp B)^\perp \equiv A^\perp \otimes B^\perp \quad (2.2)$$

Com os seguintes restritos a apresentarem fórmulas apenas do lado direito, as regras dos operadores são reduzidas pela metade, pois não há regras para o lado esquerdo. As regras correspondentes aos três links das *proof-nets* para MLL^- são:

$$\vdash A, A^\perp \quad \frac{\vdash A, \Gamma \quad \vdash B, \Delta}{\vdash A \otimes B, \Gamma, \Delta} \quad \frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \wp B, \Gamma} \quad (2.3)$$

Definição 2.1 (Proof-structure). Uma estrutura de prova (do inglês *proof-structure*) é formada por dois elementos:

1. um conjunto não-vazio de ocorrências de fórmulas;
2. um conjunto de links entre as ocorrências de fórmulas. Cada link deve ser de um dos três tipos vistos anteriormente (axioma, *times* e *par*).

As seguintes condições também devem ser satisfeitas:

- a) cada ocorrência de fórmula deve ser a conclusão de exatamente um link;
- b) cada ocorrência de fórmula deve ser premissa de no máximo um link.

Usando fórmulas e ligando-as com links, é possível montar estruturas de provas. Todavia, nem todas elas correspondem a derivações do cálculo de sequentes da equação 2.3. Por exemplo, em 2.4 temos uma estrutura de prova e a sua respectiva derivação no cálculo de sequentes.

$$\frac{\overline{A \quad A^\perp}}{A \wp A^\perp} \quad \frac{\vdash A, A^\perp}{\vdash A \wp A^\perp} \quad (2.4)$$

Entretanto, não há derivação no cálculo de sequentes para a estrutura de prova ilustrada em 2.5.

$$\frac{\overline{A \quad A^\perp}}{A \otimes A^\perp} \quad (2.5)$$

Quando uma estrutura de prova com conclusões A_1, A_2, \dots, A_n for válida, ela representa uma prova para o *par* de suas conclusões: $A_1 \wp A_2 \wp \dots \wp A_n$. Na Figura 2.1 temos uma estrutura de prova com mais de uma conclusão. Esse é mais um caso correto (a derivação correspondente no cálculo de sequentes pode ser vista em 2.6).

¹A negação aplicada a um contexto representa a negação aplicada a todas as fórmulas deste contexto. Portanto, se $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, então $\Gamma^\perp = \{\gamma_1^\perp, \gamma_2^\perp, \dots, \gamma_n^\perp\}$.

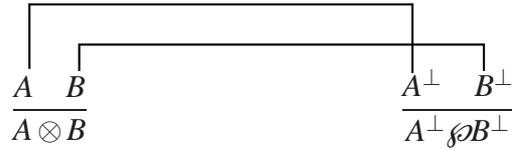


Figura 2.1 Estrutura de prova representando uma derivação válida.

$$\frac{\frac{\vdash A, A^\perp \quad \vdash B, B^\perp}{\vdash A \otimes B, A^\perp, B^\perp}}{\vdash A \otimes B, A^\perp \wp B^\perp} \quad (2.6)$$

Porém, embora a estrutura de prova da Figura 2.2 seja parecida com a anterior, não existe derivação no cálculo de sequentes para $\vdash A \wp B, A^\perp \wp B^\perp$ e portanto ela não é válida. Precisamos caracterizar quais estruturas de provas representam derivações válidas. O primeiro critério de correteza, apresentado por Girard [Gir87], foi o *no shorttrip condition*, o qual usa a noção de *trips*.

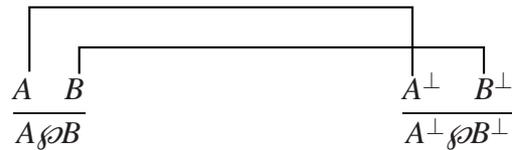


Figura 2.2 Estrutura de prova inválida.

2.2.1 Trips

Cada ocorrência de fórmula é vista como uma caixa em que uma partícula (ou informação) pode viajar através da estrutura de prova no decorrer do tempo. A seguir listamos os conceitos importantes para a noção de *trip*:

- o tempo é cíclico, discreto e finito;
- qualquer fórmula pode ser escolhida para iniciar a *trip*;
- fórmulas são vistas como caixas pelas quais a partícula viaja e possuem duas entradas e duas saídas (Figura 2.3);
- a passagem por uma fórmula A é um evento “instantâneo”: se a informação chega na entrada i_1 num momento, ela imediatamente sai por o_1 e esse instante de tempo é representado por $t(A_\vee)$;
- $t(A^\wedge)$ é definido simetricamente para i_2 e o_2 .

Quando uma partícula sai de uma caixa por uma porta, ela entra em outra caixa através dos links da estrutura de prova. Algumas vezes há apenas um caminho possível para a partícula

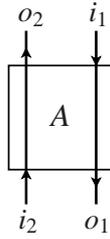


Figura 2.3 “Caixa” de uma fórmula.

seguir. Entretanto, na maioria das vezes existe mais de uma possibilidade. Nesses casos, a rota escolhida é determinada pelo *chaveamento* dos links *times* e *par*.

Um link de axioma não possui chaveamento: ao entrar pelo link, há apenas um caminho a seguir. Ao sair de A pela porta o_2 , a partícula entra em A^\perp por i_1 . Após a partícula sair de A^\perp por o_1 , ela vai para A por i_2 . Em outras palavras: $t(A_{\vee}^\perp) = t(A^\wedge) + 1$ e $t(A_{\vee}) = t(A^\wedge) + 1$ (Figura 2.4).

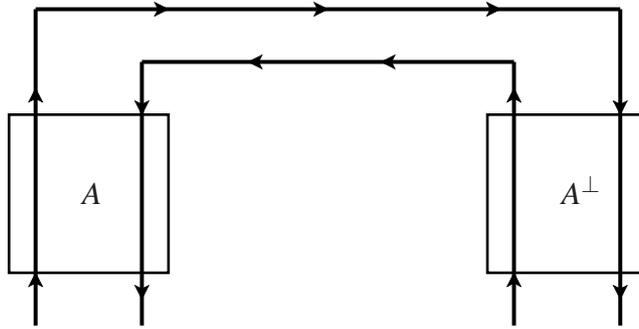


Figura 2.4 *Trip* num axioma.

Para fórmulas que são conclusões da estrutura de prova, também há apenas um caminho a seguir: após sair por o_1 , a partícula entra novamente na fórmula por i_2 . Logo, $t(A^\wedge) = t(A_{\vee}) + 1$ (Figura 2.5).

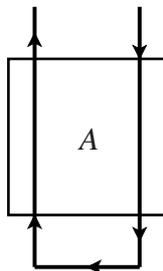


Figura 2.5 *Trip* numa fórmula terminal.

Para o link *times*, há mais de uma alternativa. A rota é determinada pelo chaveamento: L ou R . Para cada link *times* é escolhido um chaveamento independentemente dos demais links da estrutura de prova. Como podemos ver nas Figuras 2.6 e 2.7, o chaveamento define se a

conclusão será visitada de cima para baixo a partir da premissa da esquerda (L) ou da direita (R).

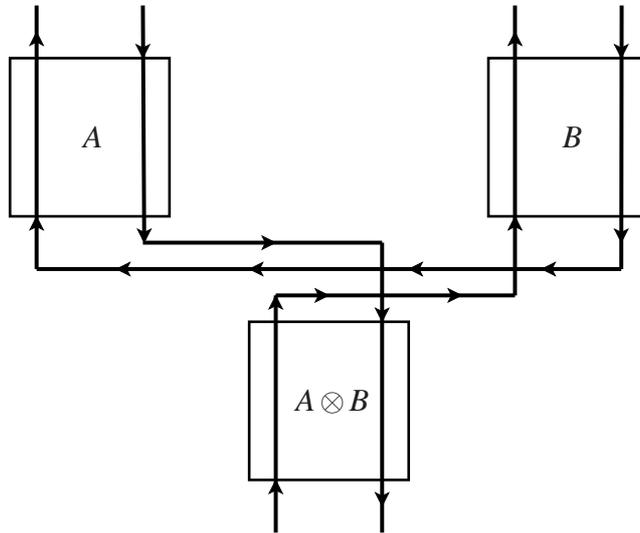


Figura 2.6 Times L.

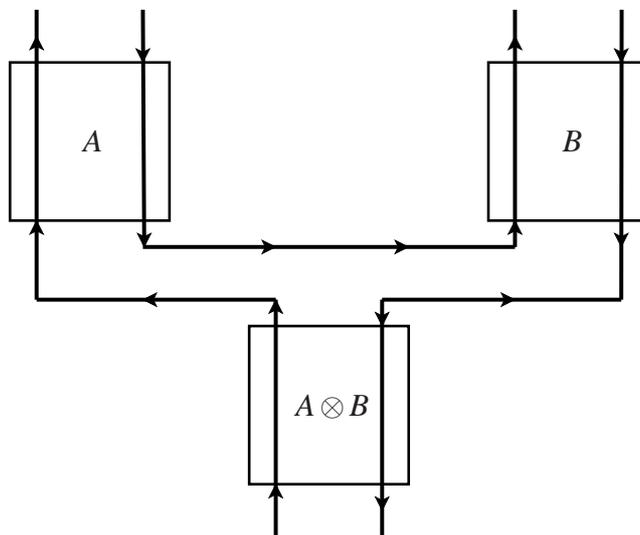


Figura 2.7 Times R.

Nos links *par* também há mais de uma possibilidade e o chaveamento L ou R também decide se a conclusão do link será visitada de cima para baixo pela premissa da esquerda (Figura 2.8) ou da direita (Figura 2.9).

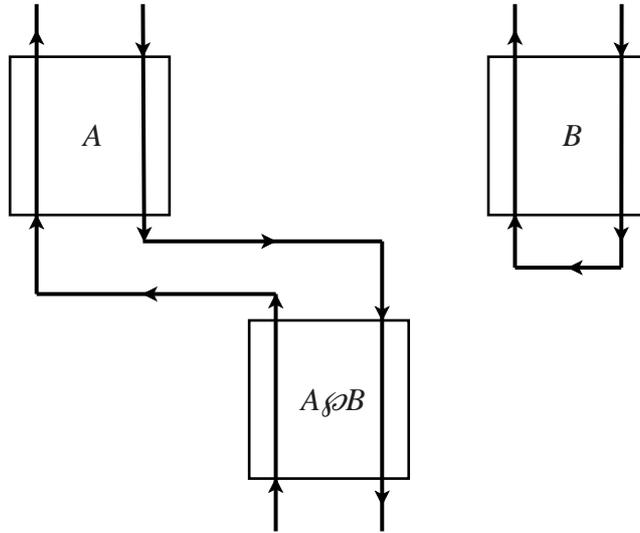


Figura 2.8 Par L.

2.2.2 Critério no *shorttrip condition*

Após o estudo dos links e dos chaveamentos, é definido o critério para verificar se todo grafo de chaveamento associado a um grafo de prova é acíclico e conexo por meio de *trips*:

1. estabeleça um chaveamento qualquer (esquerda ou direita) para cada link *times* e *par*;
2. escolha uma fórmula inicial A e uma porta de saída dela (o_1 ou o_2) no instante 0;
3. seja t o momento em que a partícula entra em A pela porta dual e k o número de fórmulas da estrutura de prova;
4. se $t = 2k$, então temos uma *longtrip*;
5. se $t < 2k$, então temos uma *shorttrip*.

Definição 2.2 (Proof-net). Uma estrutura de prova é uma *proof-net* (uma prova válida) se e somente se ela não admitir *shorttrip*.

Afirmamos que a estrutura de prova da Figura 2.2 não era uma *proof-net*. Agora podemos verificar por meio do critério no *shorttrip*: escolhemos chavear os dois links *par* para L . Ao iniciarmos a *trip* por A^\wedge obtemos:

$$A^\wedge, A^\perp_\vee, A^\perp \wp B^\perp_\vee, A^\perp \wp B^{\perp\wedge}, A^{\perp\wedge}, A_\vee, A \wp B_\vee, A \wp B^\wedge, A^\wedge$$

É gerada uma *shorttrip*. Notamos que as ocorrências de fórmulas B e B^\perp não foram visitadas sequer uma vez. Comparamos agora com a estrutura de prova do exemplo 2.4. Primeiro chaveamos o link *par* para L . Se iniciarmos a *trip* por A^\wedge , o resultado é:

$$A^\wedge, A^\perp_\vee, A^{\perp\wedge}, A_\vee, A \wp A^\perp_\vee, A \wp A^{\perp\wedge}, A^\wedge$$

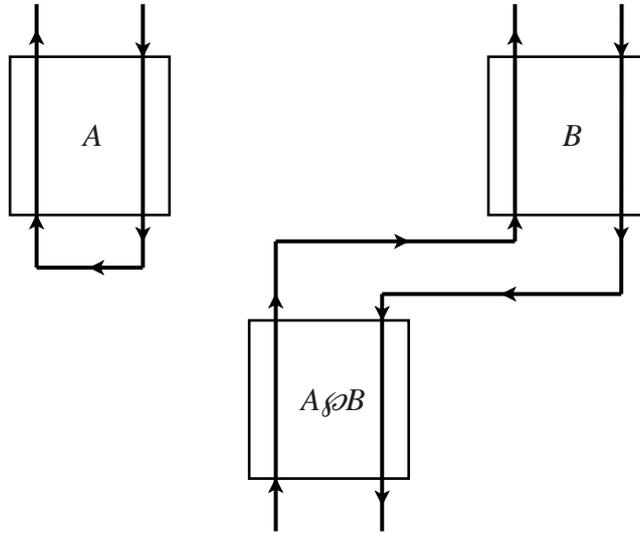


Figura 2.9 Par R.

Como cada fórmula foi visitada uma vez em cada sentido, chegamos a uma *longtrip*. Vejamos o que acontece se chavearmos o link *par* para R (continuamos partindo de A^\wedge):

$$A^\wedge, A^\perp, A \wp A^\perp, A \wp A^{\perp\wedge}, A^{\perp\wedge}, A_\vee, A^\wedge$$

Mais uma vez obtemos uma *longtrip*. Dado que não encontramos nenhuma *shorttrip* para os chaveamentos, concluimos que trata-se de uma *proof-net*.

Girard provou a completude e a corretude do critério *no shorttrip* [Gir87]. Em ambos os casos foi utilizada uma prova por indução sobre o número de links da *proof-net*. O mapeamento de uma derivação em cálculo de sequentes para uma *proof-net* é simples. Entretanto, a direção oposta não é imediata. A seguir, mostramos um esboço da prova de sequentização das *proof-nets*.

Teorema 2.1 (Sequentização de *proof-nets* [Gir87]). *Seja β uma proof-net com conclusões A_1, A_2, \dots, A_n . Então há uma derivação π no cálculo de sequentes para $\vdash A_1, A_2, \dots, A_n$.*

Demonstração. A prova é feita por indução no número de links de β .

1. β possui apenas um link. Então β deve ser da forma $\overline{A \quad A^\perp}$, pois o link de axioma é o único que não usa premissas. Neste caso basta tomar π como $\vdash A, A^\perp$.
2. β possui mais de um link. Pelo menos um dos links deve ser um *times* ou um *par*. Caso contrário, β seria desconexa, o que levaria a *shorttrips*. Então, pelo menos um link terminal deve ser do tipo *times* ou *par*.

(a) *Suponha que β possui pelo menos um link terminal par:*

$$\frac{\beta' \quad A \quad B}{A \wp B}$$

Seja Γ as conclusões de β' (além de A e B). Isso implica que as conclusões de β são Γ e $A \wp B$. É simples verificar que β' é uma *proof-net*: basta chavear o link *par* para L e verificar que uma *longtrip* para β implica numa *longtrip* para β' ; depois é verificado o caso do chaveamento para R .

Como β' é uma *proof-net* e possui um link a menos que β , a hipótese de indução nos dá uma derivação π' no cálculo de sequentes correspondente a β' . Ora, uma derivação para π é obtida aplicando-se a regra do *par* para π' :

$$\frac{\pi'}{\vdash A, B, \Gamma} \\ \vdash A \wp B, \Gamma$$

- (b) *Suponha que nenhuma fórmula terminal é conclusão de um link par*: somos tentados a remover um link terminal *times* para chegarmos em duas *proof-nets* menores e aplicarmos a hipótese de indução.

$$\frac{\beta' \quad \beta''}{A \quad B} \\ A \otimes B$$

Porém, a remoção de um link de β para obtermos duas *proof-nets* menores não é trivial. Por exemplo, na *proof-net* da Figura 2.10, a remoção do link *times* de $A^\perp \otimes B^\perp$ não pode ser escolhido para dividir β em duas componentes disjuntas. Mas o link com conclusão $C \otimes (A \wp B)$, quando removido, produz duas *proof-nets* menores. Neste caso dizemos que o link possui a propriedade *split*. A prova da existência de um link *split* quando não há links terminais do tipo *par* não é simples. Porém, ela é de suma importância para finalizarmos a prova da sequentização.

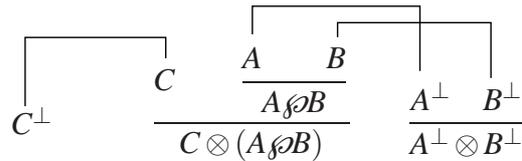


Figura 2.10 *Proof-net* sem link *par* terminal.

Definição 2.3 (Link *split* e nó *split* numa *proof-net*). Seja $l = \frac{A \quad B}{A \otimes B}$ um link terminal numa *proof-net* β . Dizemos que o link l apresenta a propriedade *split* se a sua remoção, juntamente com a conclusão $A \otimes B$, produz duas *proof-nets* disjuntas. Se l for um link *split*, então dizemos que $A \otimes B$ é um nó *split*.

Para provar a existência de um link terminal *times* com a propriedade *split*, Girard definiu os impérios:

Definição 2.4 (Império [Gir87]). Seja $\frac{A}{A \otimes B}$ um link *times* numa *proof-net* β . O império de A , representado por eA , consiste das fórmulas C tais que, para qualquer *trip* partindo de A^\wedge no tempo t_1 , retornando em A_\vee em t_2 , passando por C^\wedge em u_1 e por C_\vee em u_2 , temos $u_1, u_2 \in [t_1, t_2]$. O império de B é definido de maneira análoga.

Lema 2.1 (Construção dos impérios [Gir87]). O império de A atende às seguintes condições:

1. $A \in eA$;
2. se $C \in eA$ ($C^\perp \in eA$) e há um link $\overline{C \quad C^\perp}$, então $C^\perp \in eA$ ($C \in eA$);
3. se $\frac{C}{C \otimes D}$ for um link de β e $C \otimes D \in eA$, então $C, D \in eA$;
4. se $\frac{C}{C \wp D}$ for um link de β e $C \wp D \in eA$, então $C, D \in eA$;
5. se $\frac{C}{C \otimes D}$ for um link diferente de $\frac{A}{A \otimes B}$ e $C \in eA$ (ou $D \in eA$), então $C \otimes D \in eA$;
6. se $\frac{C}{C \wp D}$ for um link tal que $C, D \in eA$, então $C \wp D \in eA$.

Após provar a construção de impérios com *trips*, Girard demonstrou a existência de um nó *split*, concluindo assim a prova da sequentização.

Teorema 2.2 (Teorema *split* [Gir87]). Seja β uma *proof-net* com pelo menos um link terminal *times* e nenhum terminal *par*. Então existe um link terminal *times* $\frac{A}{A \otimes B}$ tal que $\beta = eA \cup eB \cup \{A \otimes B\}$.

2.2.3 Critério de Danos-Regnier

Uma desvantagem do critério *no shorttrip condition* é o seu alto custo: ele é exponencial no número de links *times* e *par*. Um importante avanço para a redução deste custo foi feita por Danos & Regnier [DR89]. Eles provaram que para saber se uma estrutura de prova é uma *proof-net*, basta analisar os chaveamentos dos links *par*.

Definição 2.5 (Grafo D-R para *proof-nets*). Seja β uma estrutura de prova e S um chaveamento dela. Um grafo D-R de β associado a S é representado por $S(\beta)$ e consiste de um grafo não direcionado com as seguintes características:

- os vértices de $S(\beta)$ são as ocorrências de fórmulas de β ;
- existe uma aresta entre dois vértices distintos X e Y se e somente se:
 1. X e Y são conclusões de um único link de axioma;
 2. X é uma premissa de um link *times* e Y é a conclusão deste mesmo link;
 3. X é uma premissa de um link *par*, Y é a conclusão deste mesmo link e X é o vértice escolhido por S neste link.

Teorema 2.3 (Critério Danos-Regnier [DR89]). Seja β uma estrutura de prova. Então β é uma *proof-net* se e somente se todo grafo D-R associado a ela for acíclico e conexo (ou seja, uma árvore).

Com esse critério, Girard provou a corretude para a primeira ordem de maneira mais simples [Gir91]. Para isso ele também usou impérios, mas os redefiniu usando o novo critério:

Definição 2.6 ($S(\beta, A)$, **império**). Seja S um chaveamento associado a uma *proof-net* β e A uma ocorrência de fórmula dela. Caso A seja premissa de algum vértice A' e $(A, A') \in S(\beta)$, então remova a aresta (A, A') e $S(\beta, A)$ é a componente que contém A . Caso contrário, $S(\beta, A) = S(\beta)$. O império de A consiste da intersecção de $S(\beta, A)$ quando S varia sobre todos os chaveamentos.

2.3 Subnets

Outro conceito importante nas *proof-nets* são as *subnets*: *proof-nets* contidas numa *proof-net* dada. Como uma *proof-net* representa uma derivação (prova) válida, as *subnets* são fragmentos de uma prova principal (a *proof-net* dada) que por si só são provas válidas.

Os impérios são *subnets*: Girard os utilizou para quebrar uma *proof-net* com um link *split* $\frac{A \quad B}{A \otimes B}$ em duas menores (o império de A e o de B). Como eA e eB são *proof-nets*, ele usou a hipótese de indução para construir as derivações no cálculo de sequentes para eA e eB e depois aplicou a regra *times* nelas.

Apresentamos agora alguns conceitos e lemas importantes para o estudo das *subnets*.

Definição 2.7 (Subestrutura, *subnets*, portas). Seja β uma *proof-net*. Uma subestrutura dela é um subgrafo que também é uma estrutura de prova. Por sua vez, uma *subnet* é uma subestrutura que é uma *proof-net*. As conclusões de uma subestrutura são chamadas de *portas* (do inglês *doors*).

Lema 2.2 (União e intersecção [BvdW95]). Sejam β_1 e β_2 duas *subnets* de uma *proof-net* β . Então:

1. $\beta_1 \cup \beta_2$ é uma *subnet* se e somente se $\beta_1 \cap \beta_2 \neq \emptyset$
2. $\beta_1 \cap \beta_2$ é uma *subnet* se $\beta_1 \cap \beta_2 \neq \emptyset$

Definição 2.8 (Império de uma fórmula [BvdW95]). Seja A uma ocorrência de fórmula numa *proof-net*. O império de A é a maior *subnet* que possui A como porta.

Sempre é possível construir o império de qualquer fórmula numa *proof-net* [BvdW95]. Ora, se sempre existe pelo menos uma *subnet* contendo A como porta e a intersecção de duas *subnets* não-disjuntas também é uma *subnet*, então sempre podemos construir a menor *subnet* que possui A como uma de suas conclusões.

Definição 2.9 (Reinos). Seja A uma ocorrência de fórmula numa *proof-net* β . O reino de A (do inglês *kingdom*), denotado por kA , é a menor *subnet* de β a qual possui A como uma de suas conclusões.

Definição 2.10 (Premissa hereditária). Considere a relação binária R cujo domínio é as ocorrências de fórmulas de uma estrutura de prova e que o par $(X, Y) \in R$ se e somente X for uma premissa do link que possui Y como conclusão. Então dizemos que A é uma *premissa hereditária* de B quando o par (A, B) pertence ao fecho transitivo de R .

Uma característica importante de qualquer *subnet* é que elas são fechadas sob premissas hereditárias [BvdW95]. As *proof-nets*, como estudamos aqui, não possuem premissas, mas apenas conclusões. Dado que os axiomas são os únicos links que não admitem premissas, para obtermos qualquer *subnet*² contendo A como porta, devemos subir de A até os axiomas, pois essa é única solução para não termos premissas.

Lema 2.3 (Aninhamento império-reino [BvdW95]). *Sejam $\frac{\dots A \dots}{C}$ e $\frac{\dots B \dots}{D}$ links distintos numa proof-net β e suponha que $B \in eA$. Então $D \notin eA$ se e somente se $C \in kD$.*

Demonstração. Dado que $B \in eA \cap kD$, $\beta_1 = eA \cup kD$ e $\beta_2 = eA \cap kD$ são *subnets*. Considere que $D \notin eA$ e $C \notin kD$. Então β_1 é uma *subnet* que contém A como porta e maior que eA (pois contém D): contradição. Agora suponha que $D \in eA$ e $C \in kD$. Dessa vez concluímos que β_2 é uma *subnet* que apresenta D como uma de suas portas, mas é menor que kD (porque não contém C): contradição. \square

Lema 2.4 (Ordem dos reinos [BvdW95]). *Considere a seguinte relação: $A \ll B \leftrightarrow A \in kB$. Então \ll define uma ordem parcial no conjunto de fórmulas que não são conclusões de axiomas.*

A ordem dos reinos permite encontrarmos o nó *split* numa *proof-net* com mais de um link, mas sem nenhum *par* terminal.

Teorema 2.4 (Sequentização [BvdW95]). *Seja β uma proof-net com conclusões Γ . Então há uma derivação π no cálculo de sequentes para $\vdash \Gamma$.*

Demonstração. Se β possui apenas um link, então este deve ser um axioma. Logo, $\pi = \vdash A, A^\perp$. Se β apresentar um link *par* terminal, remova este link para obter uma *proof-net* menor β' , use a hipótese de indução para construir uma derivação π' para β' . Então π é alcançada pela aplicação da regra *par* a π' . Agora considere que em β há mais de um link, mas nenhum deles é *par*. Escolha um nó terminal *times* $X = \frac{A_i \quad B_i}{A_i \otimes B_i}$ maximal em \ll . Afirmamos que $\beta = eA_i \cup eB_i \cup \{A_i \otimes B_i\}$. Suponha que não: há algum link $\frac{\dots C \dots}{D}$ tal que $C \in eA_i$, mas $D \notin eA_i$ (também poderíamos ter essa situação para B_i no lugar de A_i). Todavia, D está acima de algum outro link terminal com conclusão $Y = A_j \otimes B_j$. Pelo lema 2.4 obtemos $X \in kD$. Mas como D está acima de Y , $kD \subsetneq kY$. Isso implica que $X \in kY$, contradizendo nossa escolha do nó X . \square

2.4 Proof nets para lógica clássica

Em 2003, Robinson [Rob03] definiu *proof-nets* para a lógica clássica. As regras do seu sistema baseiam-se no cálculo de sequentes: para cada regra estrutural ou lógica do cálculo de sequentes, há um link correspondente (exceto para as regras de permutação, as quais não são mapeadas para link algum).

Assim como o sistema proposto por Girard, Robinson utiliza regras independentes do contexto e para isso usa as versões multiplicativas das regras do cálculo de sequentes. Como na

²Na verdade, a afirmação pode ser ainda mais forte: qualquer subestrutura deve ser fechada sob premissas hereditárias [BvdW95].

lógica clássica não há restrições sobre enfraquecimentos e contrações, suas *proof-nets* funcionam bem para toda a lógica clássica, diferente das de Girard, as quais não apresentam o mesmo resultado para os conectivos aditivos.

Uma importante observação feita por ele é que a técnica de Danos & Regnier não depende da *lógica* envolvida, e sim do *formato* das regras. Portanto, embora a técnica tenha sido proposta inicialmente para a lógica linear, suas *proof-nets* para a lógica clássica a utilizam como critério de corretude. Dessa forma, dada uma estrutura de prova em seu sistema, para saber-mos se a mesma representa uma derivação no cálculo de seqüentes da lógica clássica, basta verificarmos se todos os chaveamentos associados são árvores.

Mas como escolher quais links são chaveáveis? Na Figura 2.11 são exibidos os links correspondentes às regras da esquerda e da direita da implicação. Cada premissa e conclusão apresentam uma marca *L* ou *R* para indicar o lado da fórmula no símbolo \vdash . As regras do cálculo de seqüentes correspondentes a esses links podem ser vistas na Tabela A.2. A principal diferença no formato das regras $\rightarrow L$ e $\rightarrow R$ no cálculo de seqüentes é que a primeira aplica-se a duas subprovas, enquanto que a segunda deve ser aplicada a fórmulas de uma mesma subprova.

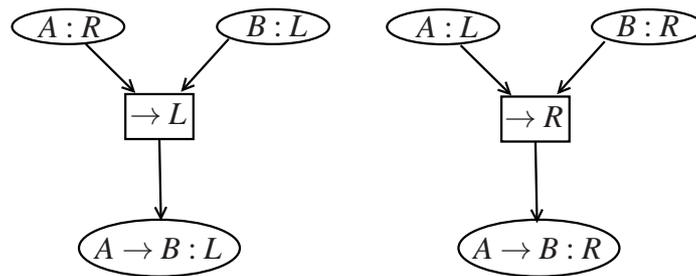


Figura 2.11 Links para o conectivo \rightarrow nas *proof-nets* de Robinson.

Se as duas premissas da regra pertencem a subprovas diferentes, então até o momento da aplicação do link elas não devem estar conectadas. Logo, caso um chaveamento remova alguma aresta do link, o resultado será um grafo desconexo. Portanto, o link $\rightarrow L$ não deve ser chaveável (ele é análogo ao *times*).

Por outro lado, a regra do link $\rightarrow R$ aplica-se a premissas de apenas uma subprova. Logo, essas premissas já devem estar conectadas antes da aplicação do link. Se mantivermos as duas arestas das premissas do link, um ciclo será gerado no grafo de chaveamento. Por isso, o link $\rightarrow R$ deve ser chaveável: uma de suas arestas das premissas deve ser removida, semelhante ao *par*.

Ao olharmos para as regras do cálculo de seqüentes para a MLL^- na Equação 2.3 sob esse ponto de vista, compreendemos porque a técnica de Danos & Regnier remove uma aresta do *par*, mas não do *times*.

A partir dessas observações, Robinson estende os conceitos de *subnets* para o seu sistema e chega a uma generalização da prova feita no teorema 2.4.

2.5 Conclusão

Neste capítulo estudamos as *proof-nets* para a MLL^- . Vimos que a parte mais difícil da prova de sequentização é o teorema *split*. Foram analisadas duas abordagens para essa prova:

1. utilizando impérios definidos por *trips* [Gir87];
2. usando outro tipo de *subnets*, os reinos, para definir uma ordem nos nós e assim achar o nó *split* [BvdW95];

No final comentamos que a técnica de Danos & Regnier pode ser aplicada a outros sistemas como critério de corretude, pois ela depende apenas do formato das regras envolvidas [Rob03]. Com a prova de Robinson, obtemos um procedimento não só para definir critério de corretude, como também para provarmos a sequentização. A principal característica de suas *proof-nets* que permitiu a ele generalizar a prova de Bellin & van de Wiele é que todos os seus links chaveáveis são convergentes (formados por duas premissas e uma conclusão). Com isso, é possível definir os reinos e encontrar facilmente o nó *split*.

CAPÍTULO 3

N-Grafos

3.1 Introdução

Os N-Grafos são um sistema de provas para a lógica clássica proposicional proposto por de Oliveira [dO01, dOdQ03]. Assim como o cálculo de seqüentes, há dois tipos de regras: as lógicas e as estruturais. Todavia, uma vez que as regras de inferência são baseadas na dedução natural, os N-Grafos apresentam suas regras estruturais no estilo da dedução natural. As provas são representadas por dígrafos (grafos direcionados) e o sistema é de múltipla conclusão.

Devido a essas características, o sistema se assemelha a outros de múltipla conclusão para a lógica clássica, que da forma como foram criados, apresentam uma solução para o problema da falta de simetria do sistema de dedução natural. Citamos, por exemplo, as tabelas de desenvolvimento de Kneale [KK62], o refinamento dessa proposta feita por Shoesmith & Smiley [SS78], e o cálculo proposto por Ungar [Ung92].

Além disso, nos N-Grafos as provas são abordadas por uma perspectiva geométrica: o critério de correteza utiliza a técnica da lógica linear para *proof-nets* proposta por Danos & Regnier [DR89]. Na prova de sequentização o teorema *split* é usado de modo semelhante à proposta de Girard [Gir87]. O conectivo da implicação é concebido conforme a abordagem de Statman [Sta74] e são adotadas algumas definições usadas por Carbone no seu trabalho com grafos de fluxo lógico (do inglês *logical flow graphs*) [Car97].

Primeiramente apresentamos o sistema e no fim deste capítulo estudamos a correteza de provas para o fragmento sem o conectivo “ \rightarrow ”.

3.2 Grafos de prova

É adotada a linguagem usual da lógica proposicional: os conectivos “ \wedge ” (conjunção), “ \vee ” (disjunção), “ \neg ” (negação) e “ \rightarrow ” (implicação); as constantes “ \perp ” (falso) e “ \top ” (verdadeiro). As provas são dígrafos (grafos direcionados). Seus vértices são ocorrências de fórmulas (representadas por letras A , B , C etc) e as arestas, as quais simbolizam os passos atômicos da derivação, são reproduzidas pelos links. Em seguida definimos alguns conceitos dos N-Grafos [dOdQ03] inspirados no trabalho de Carbone [Car97].

Definição 3.1 (Ponto de ramificação). Um *ponto de ramificação* em um dígrafo é um vértice com pelo menos três arestas incidentes a ele.

Definição 3.2 (Ponto de ramificação convergente). Um *ponto de ramificação convergente* em um dígrafo é um vértice com duas arestas orientadas para ele.

Definição 3.3 (Ponto de ramificação divergente). Um *ponto de ramificação divergente* em um dígrafo é um vértice com duas arestas orientadas *saindo* dele.

Há três tipos de links:

Definição 3.4 (Link convergente). Um *link convergente* é um conjunto $\{(u_1, v), (u_2, v)\}$ em um dígrafo em que v é um *ponto de ramificação convergente* (Figura 3.1). Os vértices u_1 e u_2 são as *premissas* do link, enquanto v é a *conclusão*.

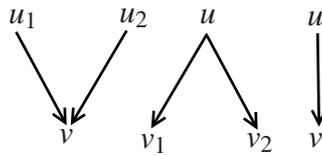


Figura 3.1 Tipos de links.

Definição 3.5 (Link divergente). Um *link divergente* é um conjunto $\{(u, v_1), (u, v_2)\}$ em um dígrafo em que u é um *ponto de ramificação divergente* (Figura 3.1). O vértice u é a *premissa* do link, enquanto v_1 e v_2 são as *conclusões*.

Definição 3.6 (Link simples). Um *link simples* é uma aresta (u, v) em um dígrafo a qual não pertence a um link convergente nem a um divergente (Figura 3.1). O vértice u é a *premissa* do link e v é *conclusão*.

Definição 3.7 (Grafo de prova). Um *grafo de prova* é um grafo conexo orientado o qual atende às seguintes condições:

1. cada vértice é rotulado com uma ocorrência de fórmula;
2. as arestas são de dois tipos (“meta” e “sólida”) e as meta-arestas são rotuladas por um “m” $((u, v)^m)$;
3. há três tipos de links (convergentes, divergentes e simples), os quais podem ser vistos nas Figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5;
4. todo vértice é conclusão de no máximo um link e premissa de no máximo um link.

Caso o conjunto de arestas do grafo de prova seja vazio, ele representa um axioma do cálculo de sequentes. Ou seja, um grafo de prova que contém apenas o vértice A simboliza $A \vdash A$.

Embora os links sejam agrupados de acordo com a sua geometria, os convergentes e os divergentes também podem ser classificados quanto à semântica.

Definição 3.8 (Link conjuntivos). Os links $\wedge - I$, $\rightarrow - E$, $\top - \text{enfraquecimento} - \text{convergente}$, $\perp - \text{link}$ e o de *expansão* são conjuntivos.

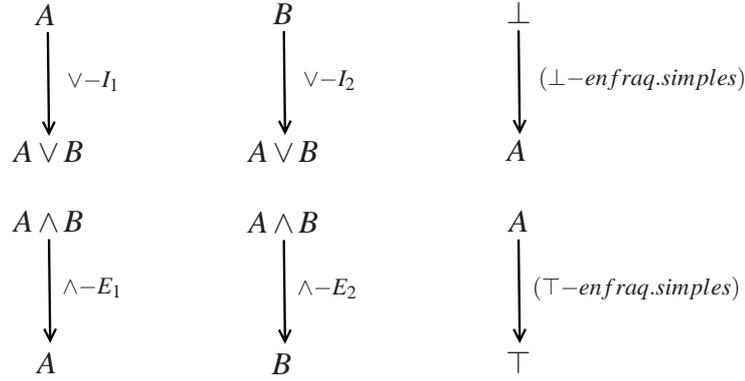


Figura 3.2 Links simples.

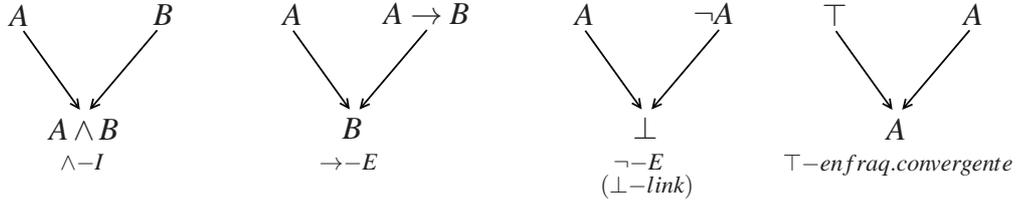


Figura 3.3 Links conjuntivos convergentes.

Definição 3.9 (Link disjuntivos). Os links $\vee - E$, $\top - link$, $\perp - enfraquecimento - divergente$ e o de *contração* são disjuntivos.

Portanto, o único link conjuntivo divergente é o de expansão e o único disjuntivo convergente é o de contração. A semântica deles é contrária à geometria (Figura 3.5). Por isso eles possuem um papel fundamental no critério de corretude, que será detalhado na seção 3.3.

Outra forma de agrupar todos os links é usando a divisão das regras do cálculo de sequentes: estruturais e lógicos.

Definição 3.10 (Links lógicos). Os links $\wedge - I$, $\wedge - E_1$, $\wedge - E_2$, $\vee - I_1$, $\vee - I_2$, $\vee - E$, $\neg - I$, $\neg - E$, $\rightarrow - I$, $\rightarrow - E$ são lógicos.

Definição 3.11 (Links estruturais). Os links estruturais são: $\perp - enfraquecimento simples$, $\top - enfraquecimento simples$, $\top - enfraquecimento convergente$, $\perp - enfraquecimento divergente$, o de *contração* e o de *expansão*.

Definição 3.12 (Grau de entrada sólido). O grau de entrada sólido de um vértice v num grafo de prova é o número de arestas sólidas orientadas *para* ele.

Definição 3.13 (Grau de saída sólido). O grau de saída sólido de um vértice v num grafo de prova é o número de arestas sólidas orientadas *saindo* dele.

Os graus de entrada e saída meta são definidos analogamente. O conjunto de vértices com graus de entrada sólido e meta iguais a zero num grafo de prova G são as premissas e é representado por $PREMIS(G)$. Já o conjunto dos nós com grau de entrada sólido igual a zero e grau de entrada meta igual a um são as hipóteses canceladas de G e representado por $HYPOTH(G)$.

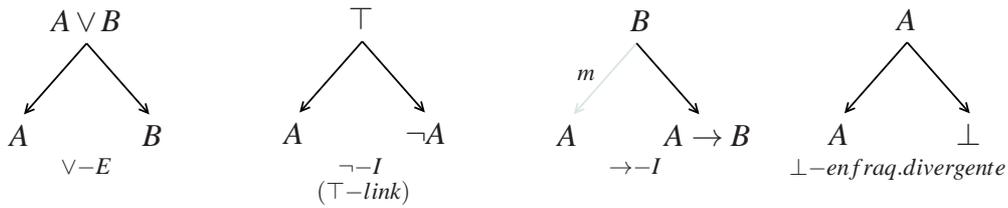


Figura 3.4 Links disjuntivos divergentes.

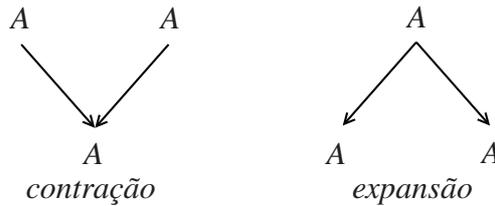


Figura 3.5 Links chaveáveis.

Por outro lado, os vértices com grau de saída sólido igual a zero são as conclusões e esse conjunto é simbolizado por $CONC(G)$. Veremos que, se G satisfizer o critério de corretude, ele representará uma derivação para o sequente $PREMIS(G) \vdash CONC(G)$.

3.3 Critério de corretude

Uma vez que há links convergentes e divergentes, podem surgir ciclos¹ nos grafos de prova (Figura 3.6). O ciclo da primeira derivação é aberto por uma disjunção e fechado por uma conjunção. Isso não ocorre nos demais: no segundo temos dois links disjuntivos (a contração é um link disjuntivo) e no terceiro dois links conjuntivos (a expansão é um link conjuntivo). Além dos ciclos, outra questão a qual pode gerar falácias é o descarte de hipóteses por meio do link $\rightarrow -I$ (o da meta-aresta). Um exemplo é exibido na Figura 3.7.

A conclusão do link $\rightarrow -I$ é $A \rightarrow (A \vee B)$ e dessa forma a veracidade de $A \vee B$ depende de A . Então a hipótese é descartada: como a fórmula $A \rightarrow (A \vee B)$ já carrega consigo a dependência de A (pois A é o antecedente de uma implicação), a meta-aresta remove-a do conjunto de premissas da derivação (A deixa de ser um membro de $PREMIS(G)$ e passa para o conjunto $HYPOTH(G)$).

¹Aqui existe um abuso da notação: a palavra *ciclo* pode significar também semi-ciclo e assim não consideramos a direção das arestas.

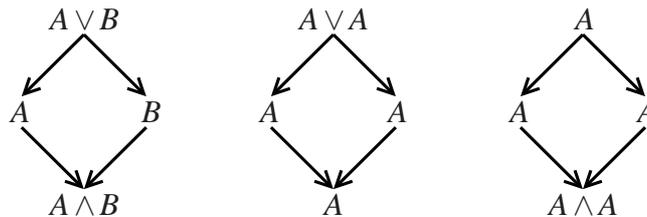


Figura 3.6 Apenas a primeira derivação é uma falácia.

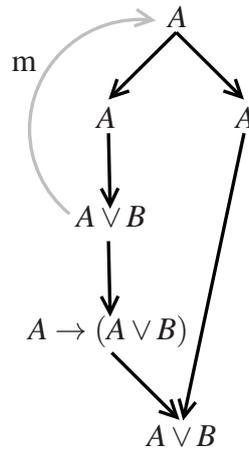


Figura 3.7 Descarte equivocado de hipótese: uma “prova” para $\vdash A \vee B$

Entretanto, há ainda uma ocorrência de A (no lado direito), a qual é usada como uma premissa para o link $\rightarrow -E$ e é aplicado *modus ponens* para obtermos $A \vee B$ como uma fórmula válida (ou seja, $\vdash A \vee B$). A falácia decorre do fato de que o link $\rightarrow -I$ não descartou **todas as ocorrências** da fórmula A . A meta-condição, definida nesta seção, captura esse problema.

Veremos agora como são definidos os grafos de prova os quais são logicamente corretos.

Definição 3.14 (Grafo de chaveamento). Dado um grafo de prova G , um *grafo de chaveamento* S associado com G , denotado por $S(G)$, é um subgrafo gerador de G em que as seguintes arestas são removidas:

- uma aresta de cada link de expansão;
- uma aresta de cada link de contração;
- todas as meta-arestas.

Definição 3.15 (Grafo de chaveamento de expansão). Dado um grafo de prova G , um *grafo de chaveamento de expansão* S_e associado com G é um subgrafo gerador de G em que todas as seguintes arestas são removidas:

- uma aresta de cada link de expansão;
- todas as meta-arestas.

Definição 3.16 (Meta-condição). Dado um grafo de prova G , dizemos que a meta-condição é satisfeita para G sse para cada meta aresta $(u, v)^m$ de um link $\{(u, v)^m, (u, w)\}$ em G :

- o grau de entrada sólido de v é igual a zero;
- em todo chaveamento de expansão $S_e(G)$ há um caminho (ou um semi-caminho) de v para u sem passar pela aresta (u, w) .

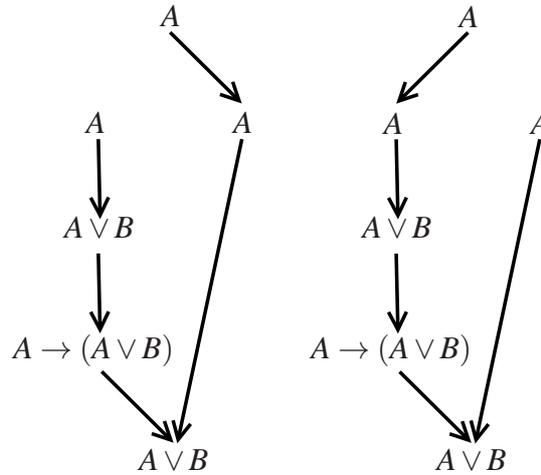


Figura 3.8 Chaveamentos associados ao grafo de prova da Figura 3.7.

Agora podemos aplicar a meta-condição para verificar por qual motivo o grafo de prova da Figura 3.7 não representa uma prova logicamente correta. Na Figura 3.8 estão ilustrados os dois chaveamentos associados. No primeiro deles não há um caminho de $A \vee B$ (a premissa do link $\rightarrow -I$) para a ocorrência de fórmula A superior (a hipótese descartada) sem passar pela outra aresta do link (a que liga $A \vee B$ ao vértice $A \rightarrow (A \vee B)$).

Definição 3.17 (N-Grafo). Um grafo de prova G é um *N-Grafo* se e somente se G satisfaz a meta-condição e todo chaveamento associado $S(G)$ é acíclico e conexo (ou seja, uma árvore).

Existe um mapeamento entre derivações no cálculo de seqüentes e N-Grafos [dO01]:

Teorema 3.1 (Completeness). Dada uma derivação Π de $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ no cálculo de seqüentes clássico (LK), é possível construir um N-Grafo correspondente $NG(\Pi)$ cujos elementos de $PREMIS(NG(\Pi))$ e $CONC(NG(\Pi))$ estão em correspondência um-para-um com as ocorrências de fórmulas A_1, \dots, A_n e B_1, \dots, B_m , respectivamente.

Teorema 3.2 (Sequentização). Dado um N-Grafo G , há um derivação $SC(G)$ de $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ no cálculo de seqüentes clássico cujas ocorrências de fórmulas A_1, \dots, A_n e B_1, \dots, B_m estão em correspondência um-para-um com os elementos de $PREMIS(G)$ e $CONC(G)$, respectivamente.

3.4 Fragmento sem a implicação

Nesta seção estudamos o fragmento do sistema sem o conectivo \rightarrow . De agora em diante muitas vezes iremos nos referir ao sistema sem os links $\rightarrow -I$ e $\rightarrow -E$. Por causa do primeiro, os grafos de prova que abordaremos não possuirão meta-arestas e a meta-condição será trivialmente satisfeita. Portanto, para sabermos se um grafo de prova é um N-Grafo basta que todos os seus chaveamentos sejam acíclicos e conexos. Assim dividimos o estudo da verificação dos grafos de prova em duas partes: a condição de aciclicidade e conectividade.

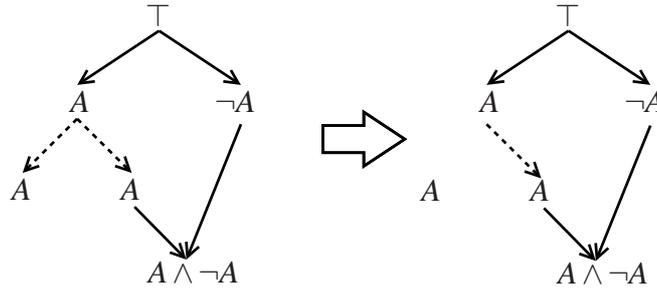


Figura 3.9 Ciclo sem a aresta conjugada e um chaveamento que o contém.

3.4.1 Aciclicidade

Após a análise dos grafos da Figura 3.6 e do conhecimento do critério de corretude, notamos que os links de expansão e contração exercem um papel fundamental na aciclicidade e na conectividade. Sejam e_1 e e_2 as arestas de um link de expansão ou contração em G e S um chaveamento associado. Pela definição 3.14 podemos concluir a seguinte sentença: $e_1 \in S(G) \leftrightarrow e_2 \notin S(G)$. As definições abaixo buscam capturar esse conceito.

Definição 3.18 (Aresta volátil). Uma aresta e num grafo de prova G no fragmento sem o conectivo “ \rightarrow ” é volátil se ela pertence a um link de expansão ou contração, ou seja, se ela pode não estar presente em algum chaveamento.

Definição 3.19 (Arestas conjugadas). Sejam e_1 e e_2 arestas de um link de expansão ou contração. Então dizemos que a aresta conjugada de e_1 , representada por \hat{e}_1 , é e_2 e vice-versa.

Podemos classificar os ciclos em três tipos:

1. não possuem aresta volátil;
2. contêm aresta volátil, mas nenhum par de arestas conjugadas;
3. apresentam pelo menos um par de arestas conjugadas.

Se G tiver um ciclo c do tipo 1, então c estará presente em todos os chaveamentos $S(G)$. Pois, ao criar um chaveamento, uma aresta volátil de cada link de expansão e contração é removida. Como o ciclo c não possui arestas voláteis, ele estará em $S(G)$. Logo, se G contiver um ciclo do tipo 1, ele será um grafo de prova inválido. Esse é o caso do grafo de prova para $A \vee B \vdash A \wedge B$ (Figura 3.6).

Agora considere que c seja um ciclo do grupo 2 e $C = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ seu conjunto de arestas voláteis. Então temos $e \in C \rightarrow \hat{e} \notin C$. Logo, haverá pelo menos um chaveamento $S(G)$ o qual contém todas as arestas de C e conseqüentemente c . Portanto, G também não será válido caso possua um ciclo do tipo 2. Um grafo de prova com esse ciclo pode ser visualizado na Figura 3.9, onde destacamos as arestas voláteis (o chaveamento mostrado é cíclico e desconexo). G é uma “prova” para o sequente $\vdash A, A \wedge \neg A$.

Por outro lado, caso c apresente pelo menos um par de arestas conjugadas e e \hat{e} , então como qualquer chaveamento deve escolher apenas uma das duas, nenhum deles apresentará todas as

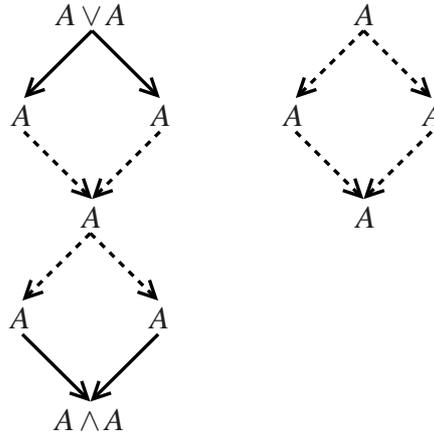


Figura 3.10 Grafos de prova com chaveamentos acíclicos.

arestas de c e concluímos que c não estará presente em nenhum chaveamento. A Figura 3.10 ilustra grafos de prova com esses ciclos. O primeiro é um N-Grafo para $A \vee A \vdash A \wedge A$, ao passo que o segundo não é um grafo de prova logicamente correto.

O lema definido a seguir formaliza esses conceitos e prova quais ciclos são válidos em grafos de prova.

Lema 3.1 (Grafos de prova acíclicos [ACdOdQ13]). *Seja G um grafo de prova. Então todo chaveamento de G é acíclico se e somente se todo ciclo de G contiver pelo menos um link de expansão ou contração completo (i.e. todas as arestas do link estão no ciclo).*

Demonstração.

1. *Ida.* A prova é pela contrapositiva. Suponha que G possua um ciclo c o qual não possui nenhum link de expansão nem de contração completo (c pode até conter arestas voláteis, mas tem um par de conjugadas). Desde que os chaveamentos escolhem uma aresta volátil de cada par de arestas conjugadas, haverá um chaveamento $S(G)$ com todas as arestas de c . Logo, $S(G)$ é cíclico.
2. *Volta.* Considere c um ciclo de G . Então c possui um link de expansão ou contração completo: seja $l = \{e, \hat{e}\}$. Qualquer chaveamento associado a G apresenta exatamente uma das arestas de l . Portanto, c não estará presente em nenhum chaveamento. Como c é qualquer, todos $S(G)$ serão acíclicos.

□

3.4.2 Conectividade

O lema 3.1 nos mostra as condições necessárias e suficientes para que um grafo de prova não tenha chaveamentos com ciclos. Todavia, ele não aborda a questão da conectividade. Por exemplo, o segundo grafo de prova (G_2) da Figura 3.10 apresenta somente um ciclo, o qual tem um link de expansão e um de contração completos. Pelo lema 3.1 concluímos que todos os seus chaveamentos são acíclicos.

Sabemos que G_2 possui quatro vértices e quatro arestas. Mas como há um link de expansão e um de contração, todos os seus chaveamentos ficarão com duas arestas apenas. Ora, um grafo com quatro vértices e duas arestas não é conexo. Portanto, embora todos os chaveamentos de G_2 sejam acíclicos, ele não é um N-Grafo.

Esse caso ilustra como devemos proceder para verificarmos a conectividade. Ainda que o número de chaveamentos cresça exponencialmente com o número de links de contração e expansão e cada um possui um conjunto de arestas distinto, todos eles possuem uma forte ligação: a mesma **quantidade** de arestas.

O lema anterior nos permite descobrir se um número muito grande de chaveamentos são todos acíclicos analisando apenas um único grafo (o grafo de prova). Se soubermos que todos são acíclicos, dado que todos eles têm a mesma quantidade de arestas, será possível verificar a conectividade de forma simples. Afinal, todo grafo não direcionado é uma árvore (ou seja, acíclico e conexo) se e somente se o seu número de arestas for igual ao número de vértices menos um [Har72].

Lema 3.2 (Conectividade em grafos de prova acíclicos [ACdOdQ13]). *Seja G um grafo de prova com todos os seus chaveamentos acíclicos, $|V|$ o número de vértices, $|E|$ o de arestas, l o de links de expansão e contração e m o de meta-arestas. Então todo chaveamento de G é uma árvore se e somente se a seguinte fórmula é válida para G :*

$$|E| - l - m = |V| - 1$$

Demonstração. Todo chaveamento $S(G)$ remove uma aresta de cada link de expansão e contração e todas as meta-arestas. Então há $|E| - l - m$ arestas em todos os chaveamentos. Como todo grafo acíclico e não direcionado é conexo se e somente se seu número arestas for igual a de vértices menos um, então todos os chaveamentos $S(G)$ serão conexos se e somente se a fórmula $|E| - l - m = |V| - 1$ for satisfeita. \square

3.5 Conclusão

Neste capítulo vimos os N-Grafos e fizemos um estudo da corretude de provas para o fragmento sem a implicação. Uma vez que o critério utilizado nesse fragmento é baseado na técnica de Danos & Regnier, ele pode ser aplicado para verificar a corretude de uma prova em qualquer sistema que utilize essa abordagem.

No capítulo seguinte fazemos outro estudo deste tipo nos N-Grafos para o mesmo fragmento: definimos o conceito de subprovas válidas numa prova (semelhante a *subnets* numa *proof-net*). Embora haja dezesseis links que não envolvem o conectivo \rightarrow (Figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5), como estudaremos com uma perspectiva geométrica, nos concentraremos apenas em cinco tipos de links: simples, conjuntivos convergentes, disjuntivos divergentes, contração e expansão. Assim, focando na geometria dos links e não no seu tipo específico, chegamos a uma outra prova de corretude para os N-Grafos.

Sub-N-Grafos e uma nova prova de sequentização

4.1 Introdução

Desde que *proof-nets* para MLL^- foram introduzidas por Girard [Gir87], vários estudos foram realizados na prova de corretude desse sistema. O primeiro critério foi *no shorttrip condition*: Girard usou a noção de *trips* para definir impérios e provou que se todas as fórmulas terminais numa *proof-net* R forem conclusões de links *times* ou de axiomas, então pelo menos um link terminal \otimes divide R em duas partes (a conclusão deste link é chamada de “nó *split*”). Após o trabalho de Danos & Regnier [DR89], tornou-se possível definir impérios usando grafos DR e, com esta nova noção de impérios, Girard provou a sequentização para a primeira ordem [Gir91].

Outro avanço na prova de corretude de *proof-nets* foi obtido pela introdução de um novo tipo de *subnets*. Para uma ocorrência de fórmula A numa *proof-net* R , nós sempre podemos construir a maior e a menor *subnet* de R que possuem A como suas conclusões (o império e reino de A , respectivamente). Uma vez que a noção de reinos foi introduzida, Bellin & van de Wiele produziram uma elegante prova do teorema de sequentização utilizando propriedades simples das *subnets*. Uma delas é a ordem estrita gerada pelos reinos [BvdW95].

Uma bela generalização desta prova foi feita por Robinson [Rob03]. Ele notou que a técnica de Danos & Regnier depende apenas do formato das regras (ou seja, independe da lógica envolvida). Então ele desenvolveu um sistema para a lógica clássica baseado nas regras do cálculo de sequentes e aplicou a caracterização e a prova de sequentização feita por Bellin & van de Wiele [BvdW95] para as suas *proof-nets*.

Todavia, estas abordagens não se aplicam integralmente aos N-Grafos. Há dois motivos fundamentais. As *proof-nets* de Girard e de Robinson possuem links de axiomas e todos os links chaveáveis são convergentes (duas premissas e uma conclusão). Portanto, se uma *subnet* contém uma ocorrência de fórmula A e B está acima¹ de A , então ela também deve conter B . Em outras palavras: as *subnets* de Girard e de Robinson são fechadas sob premissas hereditárias. Logo, se quisermos construir uma *subnet* a qual possua A como porta, devemos subir a partir de A até encontrarmos links de axiomas. Além disso, nas *proof-nets* deles, toda ocorrência de fórmula é conclusão de *exatamente* um link (todo nó tem grau de entrada maior que zero).

Por outro lado, N-Grafos não apresentam links de axioma e, além de haver um link chaveável convergente (contração), também há um chaveável divergente (o link de expansão tem uma premissa e duas conclusões). Então as *subnets* que propomos para a lógica clássica (chamadas de *sub-N-Grafos*) não são necessariamente fechadas sob premissas hereditárias. Adicional-

¹Dizemos que B está acima de A quando B é uma premissa hereditária de A

mente, nos N-Grafos cada ocorrência de fórmula deve ser conclusão de *no máximo* um link: um vértice v pode ter grau de entrada igual a zero (nesse caso dizemos que v é uma premissa da prova). Um grafo de prova composto por um único vértice rotulado por A já é uma derivação válida: representa um axioma no cálculo de sequentes ($A \vdash A$). Dessa forma, não faz sentido o menor sub-N-Grafo que possui A como porta: seria trivialmente o vértice v rotulado por A . Logo, a noção de reinos não é empregada aos N-Grafos.

Não obstante, a necessidade de identificar o nó *split* está no coração da prova da sequentização. A prova é alcançada ao escolher um nó maximal na ordem dos reinos [BvdW95, Rob03]. Então é preciso outra abordagem para chegar à prova da sequentização para os N-Grafos usando a noção de subprovas: definiremos o império do norte, do sul e o total (*whole empire*) de uma ocorrência de fórmula A . O primeiro corresponde à noção de império já existente nas *proof-nets* de Girard e de Robinson, o segundo é o maior sub-N-Grafo que tem A como uma premissa (porta superior). O terceiro é a união das duas anteriores e induzirá uma ordem estrita, a qual será fundamental para encontrarmos o nó *split*.

Com isso, além da apresentação de uma nova prova de corretude para os N-Grafos (sem o conectivo \rightarrow), também é dado um método generalizado para realizar cortes precisos em provas. Isso acontece porque o nó *split* em um N-Grafo pode ocorrer no meio da prova, diferente do que acontece com as *proof-nets*, quando ele é sempre um nó terminal.

4.2 União e intersecção de sub-N-Grafos

Definição 4.1 (Sub-N-Grafo, porta superior, porta inferior). Dizemos que H é um *subgrafo de prova* de um grafo de prova G se H é um subgrafo de G e também um grafo de prova. Se um vértice v rotulado por uma ocorrência de fórmula A é tal que $v \in \text{PREMIS}(H)$ ($v \in \text{CONC}(H)$), então A é uma porta *superior* (*inferior*) de H . Se H também for um N-Grafo, então ele é um *sub-N-Grafo*.

Nos dois lemas definidos a seguir, consideramos N_1 e N_2 sub-N-Grafos de um N-Grafo N .

Lema 4.1 (União de sub-N-Grafos [BvdW95]). $N_1 \cup N_2$ é um N-Grafo sse $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$.

Demonstração. Como N é um N-Grafo, qualquer chaveamento dele será acíclico e conexo. Logo, é impossível que qualquer chaveamento de um subgrafo de N contenha ciclo. Precisamos apenas considerar a conectividade de qualquer chaveamento S associado a $N_1 \cup N_2$ (se provarmos a conectividade de todos os chaveamentos de $N_1 \cup N_2$, ficará imediato que $N_1 \cup N_2$ atende às condições da definição 3.7).

Se $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, não há um caminho entre quaisquer dois nós de N_1 e N_2 e assim todo chaveamento será desconexo. Se $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, considere $A \in N_1$, $B \in N_2$, $C \in N_1 \cap N_2$ e $S(N_i)$ a restrição de $S(N_1 \cup N_2)$ a N_i , $i = 1, 2$. Como N_1 é um sub-N-Grafo, há um caminho entre A e C em $S(N_1)$. Pela mesma razão, existe um entre C e B em $S(N_2)$. Portanto, há um caminho entre A e B em $S(N_1 \cup N_2)$, pois $C \in N_1 \cap N_2$. \square

Lema 4.2 (Intersecção de sub-N-Grafos [BvdW95]). Se $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, então $N_1 \cap N_2$ é um N-Grafo.

Demonstração. Assim como no lema anterior, é suficiente provarmos a conectividade de $N_1 \cap N_2$. Como $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, seja $A \in N_1 \cap N_2$. Se A é o único nó da intersecção, então ela é conexa e portanto é um N-Grafo (axioma). Senão, considere B outro vértice de $N_1 \cap N_2$, S um chaveamento de $N_1 \cap N_2$ e S_i uma extensão de S para N_i , $i = 1, 2$. Uma vez que N_1 e N_2 são sub-N-Grafos, há um caminho π_1 entre A e B em $S_1(N_1)$ e um π_2 em $S_2(N_2)$. Se $\pi_1 \neq \pi_2$, então seria possível construir um chaveamento $S_{12} = S_1 \cup S_2$ para $N_1 \cup N_2$ e existiria um ciclo em $S_{12}(N_1 \cup N_2)$. Todavia, já provamos que $(N_1 \cup N_2)$ é um N-Grafo e assim $\pi_1 = \pi_2$. Portanto, A e B estão conectados em $N_1 \cap N_2$. \square

O caso de $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ não interessa: dado que a intersecção é vazia, não há vértice algum e portanto o resultado não é um N-Grafo. Na Figura 4.1 temos um exemplo de intersecção entre dois sub-N-Grafos. O N-Grafo completo à esquerda representa a distributividade da conjunção em relação à disjunção: $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

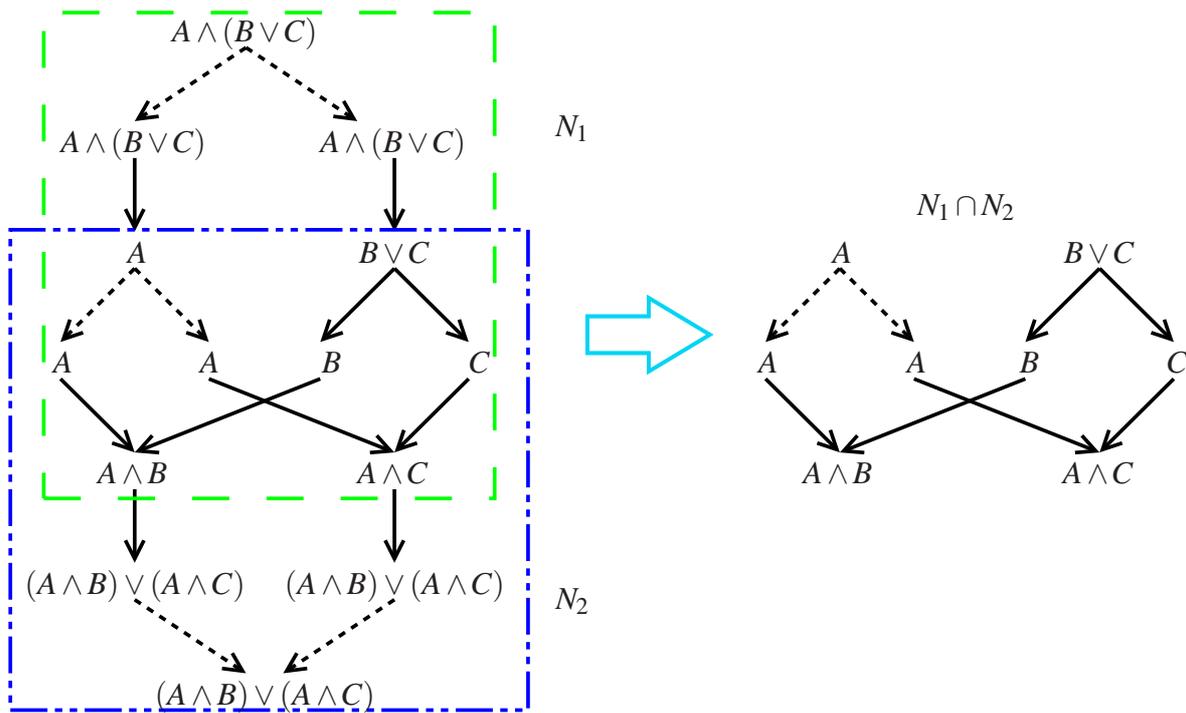


Figura 4.1 Intersecção de sub-N-Grafos. As arestas voláteis estão destacadas.

O sub-N-Grafo superior N_1 possui $A \wedge (B \vee C)$ como porta superior e $A \wedge B$ e $A \wedge C$ como portas inferiores. Logo, N_1 representa a derivação $A \wedge (B \vee C) \vdash A \wedge B, A \wedge C$. Já N_2 possui duas portas superiores A e $B \vee C$ e apenas $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ como inferior. Portanto, esse sub-N-Grafo é uma prova para $A, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Uma vez que a intersecção entre eles não é vazia, $N_1 \cap N_2$ também é um sub-N-Grafo: $N_1 \cap N_2$ é uma prova para $A, B \vee C \vdash A \wedge B, A \wedge C$.

4.3 Trips para os N-Grafos

No capítulo 2 vimos que a primeira prova de corretude das *proof-nets* utilizava o conceito de *subnets* (império). Girard definiu o critério de corretude (*no shorttrip condition*) e a construção de impérios por meio de *trips* [Gir87].

Após o trabalho de Danos & Regnier [DR89], Girard mostrou uma nova prova de corretude [Gir91]. Esta também usava o conceito de impérios, mas dessa vez eles eram construídos com os chaveamentos de Danos & Regnier.

Todavia, ainda que os N-Grafos sem a implicação adotem o mesmo critério de corretude das *proof-nets*, sua prova original de sequentização [dO01] não utiliza o conceito de subprovas. Então neste capítulo buscamos uma prova de corretude para os N-Grafos com a mesma ideia da existente na prova das *proof-nets*.

Para conseguirmos este objetivo, traçamos o mesmo caminho das *proof-nets*. Aqui apresentamos mais uma aplicação das técnicas utilizadas pelas *proof-nets* para os N-grafos: a definição das *trips* para o critério de corretude da mesma forma pela qual Girard lançou as *proof-nets* em [Gir87]. Em seguida usamos a técnica de Danos & Regnier para construir os impérios por outra abordagem e provamos que as duas construções são equivalentes. Finalmente, usamos os sub-N-Grafos para encontrar um novo teorema de sequentização.

Adotamos os mesmos conceitos da seção 2.2.1 para as *trips* nos grafos de prova. A diferença é a comunicação entre as ocorrências de fórmulas: no lugar de usarmos as regras dos links de axioma, *times* e *par*, definimos um novo formato a seguir (de acordo com os links dos N-Grafos).

4.3.1 Premissas e conclusões

Quando a partícula sobe por uma premissa X , como não há outra fórmula superior, ela entra novamente na fórmula em i_1 . Em outras palavras, $t(X_\vee) = t(X^\wedge) + 1$ (Figura 4.2).

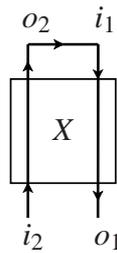


Figura 4.2 Trip numa premissa.

Por outro lado, se X for uma conclusão, ao descer a partícula entra novamente nela, mas por i_2 . Ou seja, $t(X^\wedge) = t(X_\vee) + 1$ (Figura 4.3).

4.3.2 Links simples

Esses links não possuem chaveamentos: assim como as premissas e as conclusões, a partícula possui apenas uma opção para seguir a sua viagem: ao descer pela premissa ela segue para a

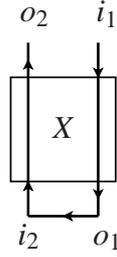


Figura 4.3 Trip numa conclusão.

conclusão e quando sobe pela conclusão, vai para a premissa. Ou seja (Figura 4.4):

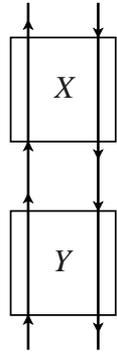


Figura 4.4 Trip num link simples.

- $t(Y_V) = t(X_V) + 1$;
- $t(X^\wedge) = t(Y^\wedge) + 1$.

Os links nos N-Grafos que seguem essa regra são: $\vee - I_1$, $\vee - I_2$, $\wedge - E_1$, $\wedge - E_2$, $\perp -$ enfraquecimento simples e $\top -$ enfraquecimento simples (Figura 3.2).

4.3.3 Links conjuntivos convergentes

Quando uma partícula chega a um link desse tipo, há mais de um caminho possível. Será o chaveamento quem determinará aquele a ser seguido. Os que se enquadram neste tipo são os da Figura 3.3, com a exceção do link $\rightarrow - E$, pois estamos trabalhando com o fragmento sem a implicação. Eles são análogos ao *times*: são “chaveáveis” para as *trips*, mas não são na abordagem de Danos-Regnier (Figura 4.5).

- L: $t(X^\wedge) = t(Y_V) + 1$, $t(Y^\wedge) = t(Z^\wedge) + 1$, $t(Z_V) = t(X_V) + 1$;
- R: $t(X^\wedge) = t(Z^\wedge) + 1$, $t(Y^\wedge) = t(X_V) + 1$, $t(Z_V) = t(Y_V) + 1$.

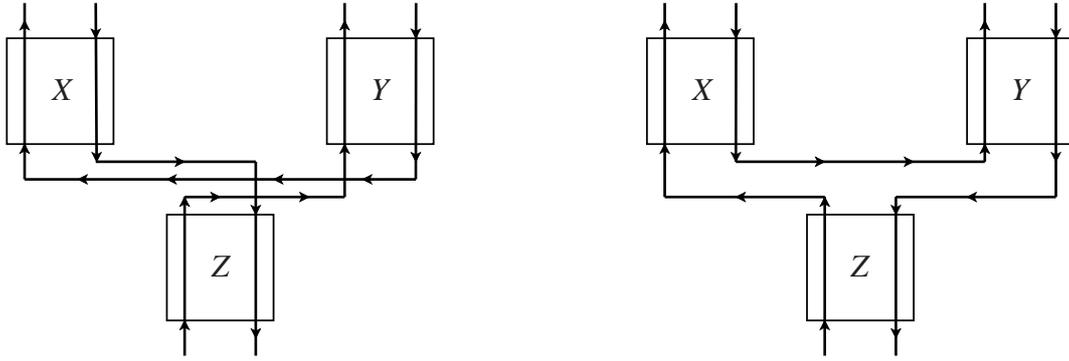


Figura 4.5 *Trips* num link conjuntivo convergente (chaveamentos L e R).

4.3.4 Links disjuntivos divergentes

Os links daqui são os da Figura 3.4, com a exceção de $\rightarrow -I$. Da mesma forma que a geometria desses links (uma premissa e duas conclusões) é contrária à dos conjuntivos convergentes (duas premissas e uma conclusão) o formato da *trip* aqui é uma “inversão” do caso anterior. (Figura 4.6).

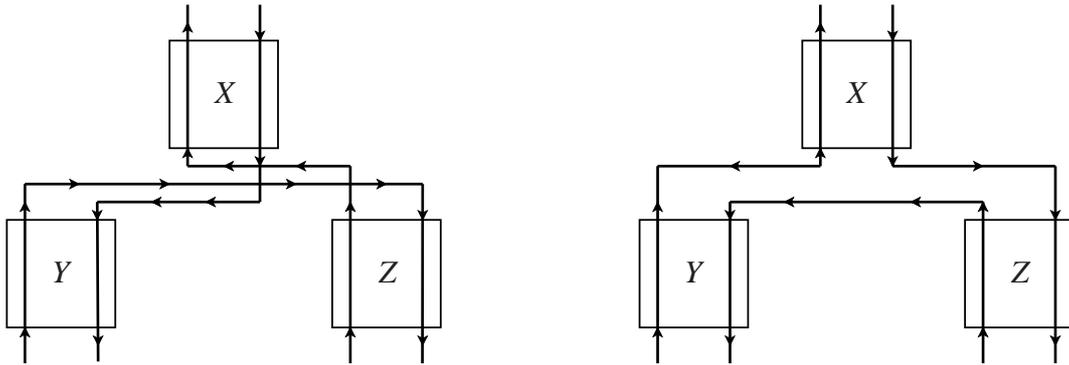


Figura 4.6 *Trips* num link disjuntivo divergente (chaveamentos L e R).

- L: $t(X^\wedge) = t(Z^\wedge) + 1$, $t(Y_\vee) = t(X_\vee) + 1$, $t(Z_\vee) = t(Y^\wedge) + 1$;
- R: $t(X^\wedge) = t(Y^\wedge) + 1$, $t(Y_\vee) = t(Z^\wedge) + 1$, $t(Z_\vee) = t(X_\vee) + 1$.

4.3.5 Link disjuntivo convergente

O único link desse tipo é o de contração. Ele é análogo ao *par*: duas premissas, uma conclusão, significado disjuntivo e chaveável pelo critério Danos-Regnier (Figura 4.7).

- L: $t(X_{p_1}^\wedge) = t(X_c^\wedge) + 1$, $t(X_{p_2}^\wedge) = t(X_{p_2\vee}) + 1$, $t(X_{c\vee}) = t(X_{p_1\vee}) + 1$;
- R: $t(X_{p_1}^\wedge) = t(X_{p_1\vee}) + 1$, $t(X_{p_2}^\wedge) = t(X_c^\wedge) + 1$, $t(X_{c\vee}) = t(X_{p_2\vee}) + 1$.

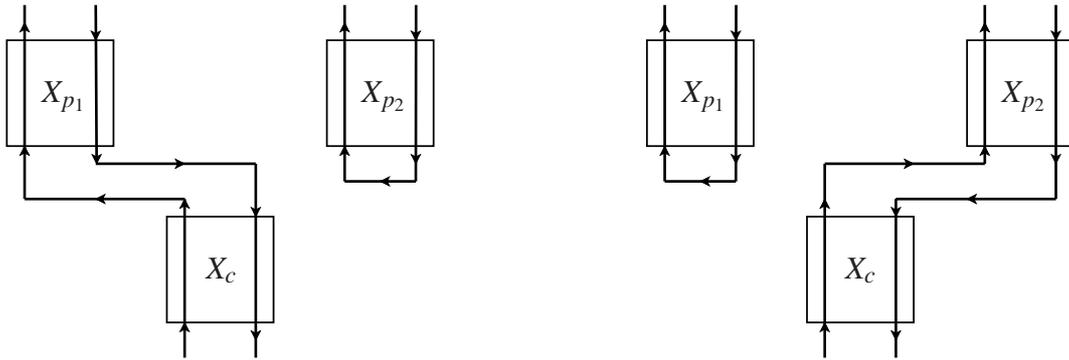


Figura 4.7 *Trips* num link de contração (chaveamentos *L* e *R*).

4.3.6 Link conjuntivo divergente

Este é caso do link de expansão. Assim como o de contração e o *par*, sua semântica é contrária à sua geometria. Isso reflete no formato da sua *trip*: embora uma premissa e duas conclusões (como vimos em 4.3.4), seu chaveamento é como a contração (Figura 4.8). Percebemos assim que há dois formatos de chaveamentos para as *trips* e eles revelam se o link é chaveado no critério de Danos-Regnier.

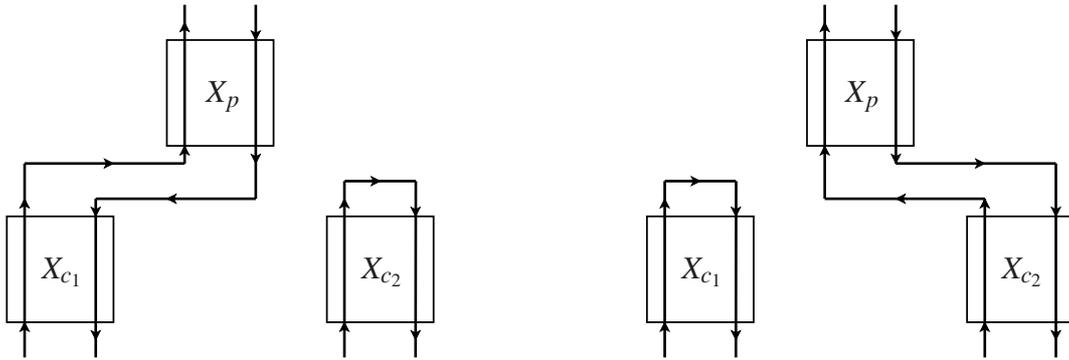


Figura 4.8 *Trips* num link de expansão (chaveamentos *L* e *R*).

- L: $t(X_p^\wedge) = t(X_{c_1}^\wedge) + 1$, $t(X_{c_1^\vee}) = t(X_{p^\vee}) + 1$, $t(X_{c_2^\vee}) = t(X_{c_2}^\wedge) + 1$;
- R: $t(X_p^\wedge) = t(X_{c_2}^\wedge) + 1$, $t(X_{c_1^\vee}) = t(X_{c_1}^\wedge) + 1$, $t(X_{c_2^\vee}) = t(X_{p^\vee}) + 1$.

4.4 Critério no shorttrip para os N-Grafos

As regras para realizar uma *trip* num grafo de prova são as mesmas da seção 2.2.2. Ilustramos um exemplo nos N-Grafos logo abaixo (Figura 4.9). Há um grafo de prova com uma suposta prova de $A \vee B \vdash A \wedge B$. Como não há links de expansão e nem de contração, temos apenas um chaveamento (correspondente ao próprio grafo com todas as arestas), o qual é cíclico e

portanto não satisfaz o critério de corretude dos N-Grafos. Do lado direito há um chaveamento na abordagem de *trips*: o chaveamento “L” foi escolhido tanto para o link disjuntivo divergente (premissa $A \vee B$ e conclusões A e B), quanto para o conjuntivo convergente (premissas A e B e conclusão $A \wedge B$).

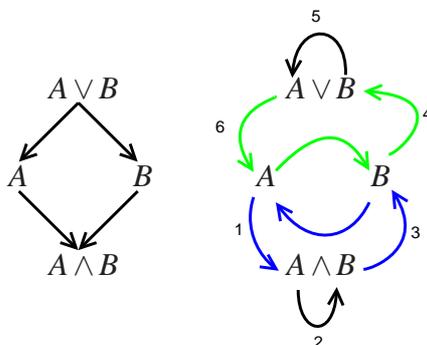


Figura 4.9 Exemplo de *shorttrip*.

É escolhido iniciar a *trip* descendo por A , ou seja, no instante 0 temos A_{\vee} . As arestas estão marcadas de acordo com os links a que pertencem ($a \vee - E$ ou $a \wedge - I$). É gerada a seguinte *trip*:

$$A_{\vee}, A \wedge B_{\vee}, A \wedge B^{\wedge}, B^{\wedge}, A \vee B^{\wedge}, A \vee B_{\vee}, A_{\vee}$$

Embora haja 4 fórmulas, A_{\vee} é visitado no instante 6, pois a *trip* não passa por B_{\vee} nem por A^{\wedge} . Logo, chegamos a uma *shorttrip*. O próximo exemplo ilustra uma *trip* numa prova válida. O grafo de prova da Figura 4.10 representa a derivação de $A \vee A \vdash A$. Apesar de apresentar uma estrutura semelhante ao grafo de prova anterior (4 vértices, 1 link divergente e 1 convergente), um dos links é chaveável na abordagem de Danos-Regnier (a contração no final) e por isso é um N-Grafo (todos os chaveamentos são árvores).

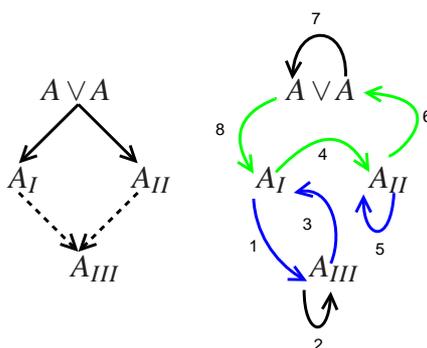


Figura 4.10 Exemplo de *longtrip*.

A *trip* começa como anteriormente, mas dessa vez a “partícula” volta a ponto inicial no instante 8 (para diferenciar as três ocorrências da fórmula A , foram utilizados os índices I, II e III):

$$A_{IV}, A_{III\vee}, A_{III}^{\wedge}, A_I^{\wedge}, A_{II\vee}, A_{II}^{\wedge}, A \vee A^{\wedge}, A \vee A_{\vee}, A_{IV}$$

Uma vez que todas as portas foram visitadas, temos uma *longtrip*. Mesmo alterando o chaveamento do link $\vee - E$ ou da contração para R, ainda assim são obtidas *longtrips*. Logo, a derivação da Figura 4.10 não admite *shorttrip*. Além disso, ela é um N-Grafo. Da mesma maneira pela qual foi provado que uma estrutura de prova representa uma derivação válida no cálculo de seqüentes na MLL^- se e somente se não apresenta *shorttrip*, é possível provar para os N-Grafos o teorema abaixo:

Teorema 4.1. *Seja G um grafo de prova. Então todo chaveamento de G é acíclico e conexo sse G não admitir shorttrip.*

Demonstração. É análoga à prova para MLL^- (seção 5 [DR89]) e é feita no Apêndice B. \square

4.5 Império do norte

Para encontrar o nó *split* numa proof-net em que todos os links terminais são *times*, Girard definiu os *empires* por meio de *trips* no seu artigo de lançamento da lógica linear [Gir87]. Após as simplificações feitas por Danos e Regnier [DR89], ele redefiniu essa estrutura utilizando grafos de chaveamento para provar a corretude da lógica linear multiplicativa com quantificadores [Gir91].

Nesta seção definiremos o *império do norte*, o qual corresponde ao *empire* na lógica linear, para os N-Grafos sem o conectivo \rightarrow . Faremos isso de duas maneiras e provaremos que elas são equivalentes, assim como fizeram Bellin e van de Wiele para MLL^- [BvdW95].

Definição 4.2 (Império do norte [Gir87]). *Seja A uma ocorrência de uma fórmula num N-Grafo N . O império do norte de A , representado por eA^{\wedge} , consiste das fórmulas C tais que, para qualquer *trip* partindo de A^{\wedge} no tempo t_1 , retornando em A_{\vee} em t_2 , passando por C^{\wedge} em u_1 e por C_{\vee} em u_2 , temos $u_1, u_2 \in [t_1, t_2]$.*

Teorema 4.2. *O império do norte de A é fechado sob as seguintes condições:*

1. $A \in eA^{\wedge}$;
2. se $\frac{X}{Y}$ for um link simples e $Y \in eA^{\wedge}$, então $X \in eA^{\wedge}$;
3. se $\frac{X Y}{Z}$ for um link conjuntivo convergente e $Z \in eA^{\wedge}$, então $X, Y \in eA^{\wedge}$;
4. se $\frac{X}{Y Z}$ for um link disjuntivo divergente e $Y \in eA^{\wedge}$ (ou $Z \in eA^{\wedge}$), então $X \in eA^{\wedge}$;
5. se $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ for um link de expansão e $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA^{\wedge}$, então $X_p \in eA^{\wedge}$;
6. se $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ for um link de contração e $X_c \in eA^{\wedge}$, então $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA^{\wedge}$;
7. se $\frac{X}{Y}$ for um link simples, $X \neq A$ e $X \in eA^{\wedge}$, então $Y \in eA^{\wedge}$;

8. se $\frac{X.Y}{Z}$ for um link conjuntivo convergente, $X \neq A \neq Y$ e $X \in eA^\wedge$ (ou $Y \in eA^\wedge$), então $Z \in eA^\wedge$;
9. se $\frac{X}{Y.Z}$ for um link disjuntivo divergente, $X \neq A$ e $X \in eA^\wedge$, então $Y, Z \in eA^\wedge$;
10. se $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ for um link de expansão, $X_p \neq A$ e $X_p \in eA^\wedge$, então $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA^\wedge$;
11. se $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ for um link de contração, $X_{p_1} \neq A \neq X_{p_2}$ e $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA^\wedge$, então $X_c \in eA^\wedge$.

Demonstração. Ver Apêndice C. □

Se um grafo de prova G possuir n links que não são simples, então haverá 2^n chaveamentos para calcular o império do norte de uma fórmula. Todavia, o teorema 4.2 nos mostra como computá-lo de uma maneira mais simples. A primeira condição é o caso base. De 2 a 6 são abordados os casos na direção superior (de conclusões para premissas nos links). As restantes são referentes ao crescimento “ao sul” (de premissas para conclusões). É importante notar que todas estas não permitem que o império do norte desça para uma conclusão da fórmula em questão.

Na Figura 4.1 mostramos um N-Grafo para $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Calcularemos agora o império do norte da fórmula $A \wedge B$ por meio do teorema 4.2. Como algumas fórmulas possuem mais de uma ocorrência, todas as fórmulas estão acompanhadas de índices (Figura 4.11). Inicialmente temos apenas a própria fórmula $A \wedge B_{10}$ no império do norte (conforme a parte 1 do teorema 4.2: o caso base). Em seguida, de acordo com o item 3, adicionamos as premissas do link conjuntivo convergente: A_6 e B_8 (Figura 4.11).

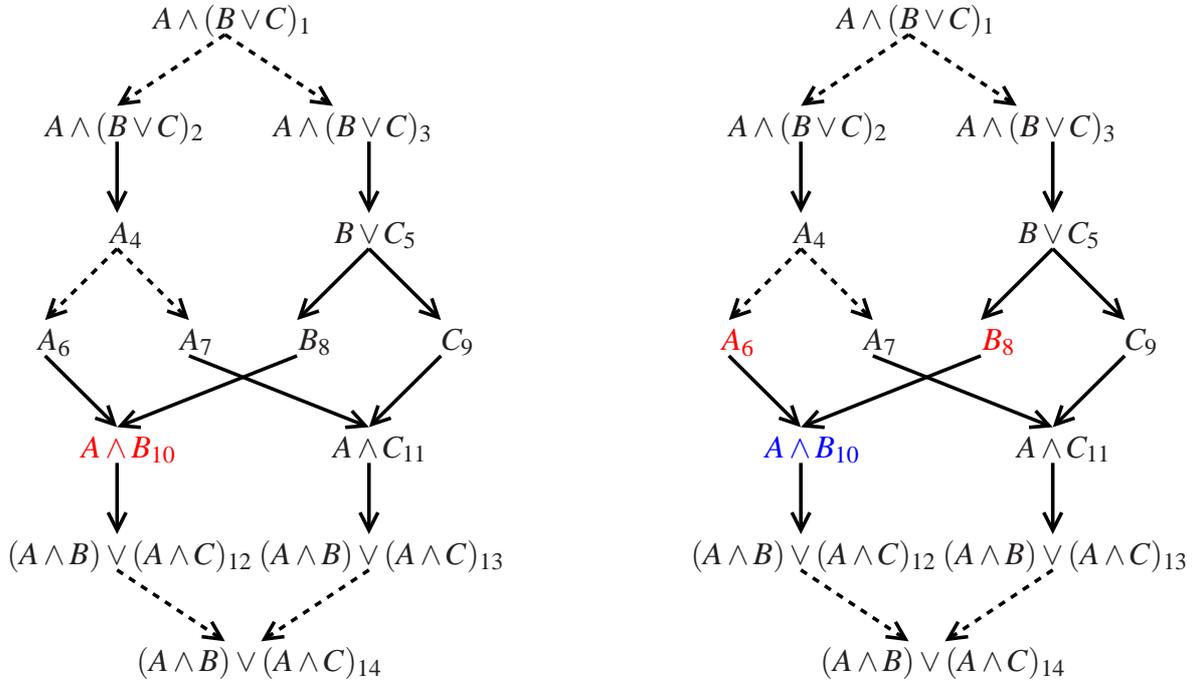


Figura 4.11 Início da computação do império do norte de $A \wedge B_{10}$.

Agora temos 3 fórmulas no império: $A \wedge B_{10}$, A_6 e B_8 . Não é permitido descer por $A \wedge B_{10}$ no link simples, pois a condição 7 do teorema exige que a premissa do link seja diferente da fórmula do império. Também no momento não é possível subir por A_6 no link de expansão: a sentença 5 impõe que a outra conclusão do link também esteja inclusa e ainda não sabemos se A_7 faz parte do império. Logo, a única opção é subir de B_8 para $B \vee C_5$ usando a cláusula 4 (Figura 4.12).

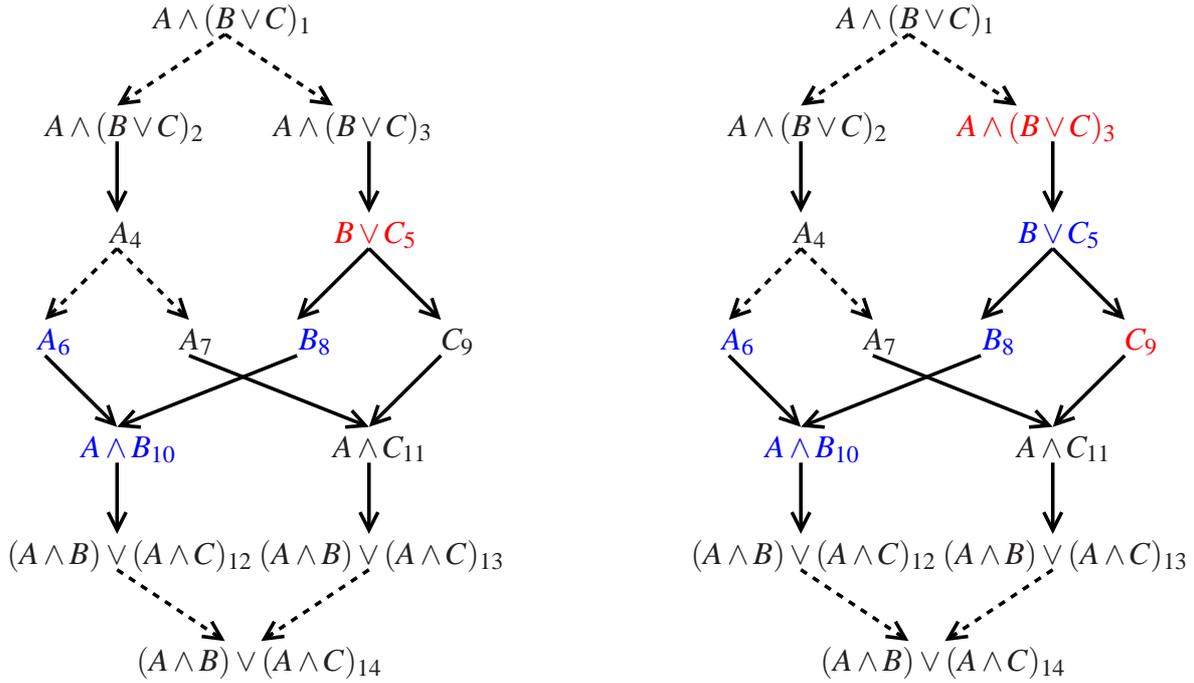


Figura 4.12 Continuação do cálculo do império do norte de $A \wedge B_{10}$.

De $B \vee C_5$ utilizamos as condições 2 e 9 para adicionarmos $A \wedge (B \vee C)_3$ e C_9 , respectivamente. A mesma razão a qual nos impede de subirmos de A_6 para A_4 agora nos proíbe de irmos de $A \wedge (B \vee C)_3$ para $A \wedge (B \vee C)_1$: há apenas uma conclusão da expansão no império. Só nos resta descermos de C_9 para $A \wedge C_{11}$ pela sentença 8 (Figura 4.13).

Não podemos descer de $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{13}$ para $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{14}$ porque a condição 11 pede que a outra premissa do link (que neste caso é $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{12}$) também faça parte do império. Todavia, a computação do império não terminou: como A_7 foi adicionado, temos as duas conclusões do link de expansão com as três fórmulas A . Então a cláusula 11 é satisfeita e A_4 é acrescentado (Figura 4.14).

Mais uma vez usamos a cláusula 11 (agora com A_4 para inserir $A \wedge (C \vee B)_2$). Com isso obtemos as duas conclusões do link de expansão de $A \wedge (C \vee B)$ e assim as premissas da condição 5 são satisfeitas: $A \wedge (C \vee B)_1$ é adicionado. Tentemos expandir o conjunto de fórmulas. Há apenas dois meios: descer por $A \wedge B_{10}$ pelo link simples ou por $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{13}$ pela contração. Entretanto, conforme foi visto antes, a condição 7 requer que a premissa do link seja diferente de $A \wedge B_{10}$ e a 11 precisa de ambas as premissas da contração. Portanto, nenhuma fórmula pode ser acrescentada ao conjunto atual e obtemos o resultado final (Figura 4.15).

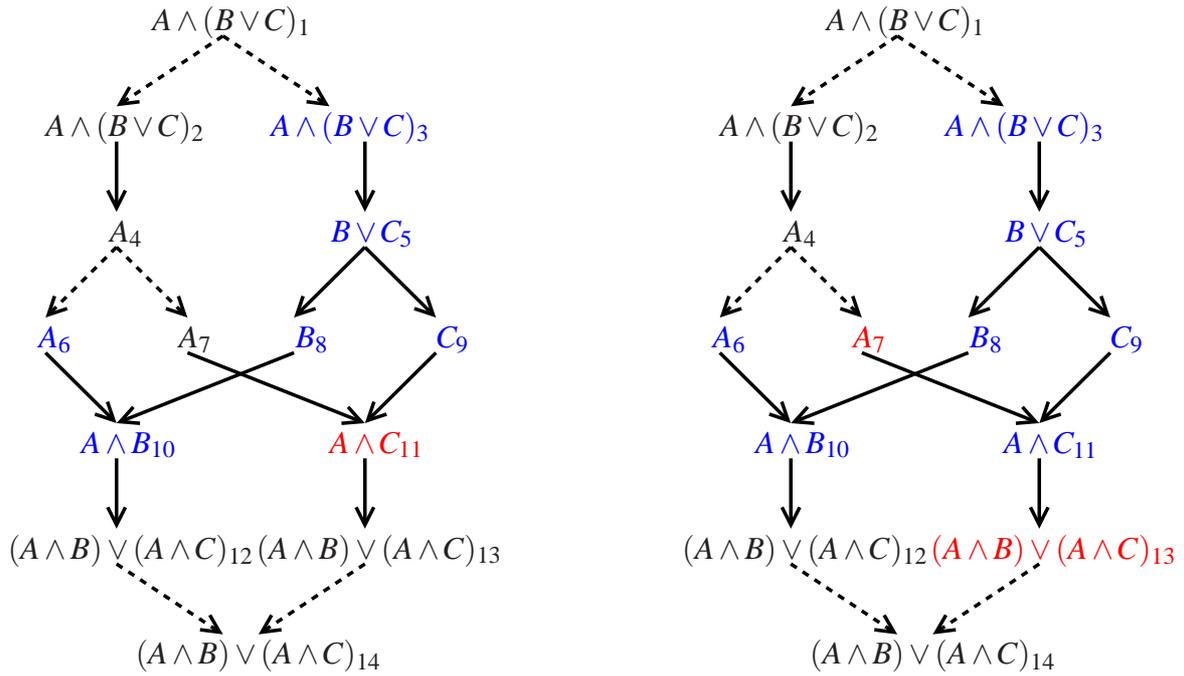


Figura 4.13 Continuação do cálculo do império do norte de $A \wedge B_{10}$.

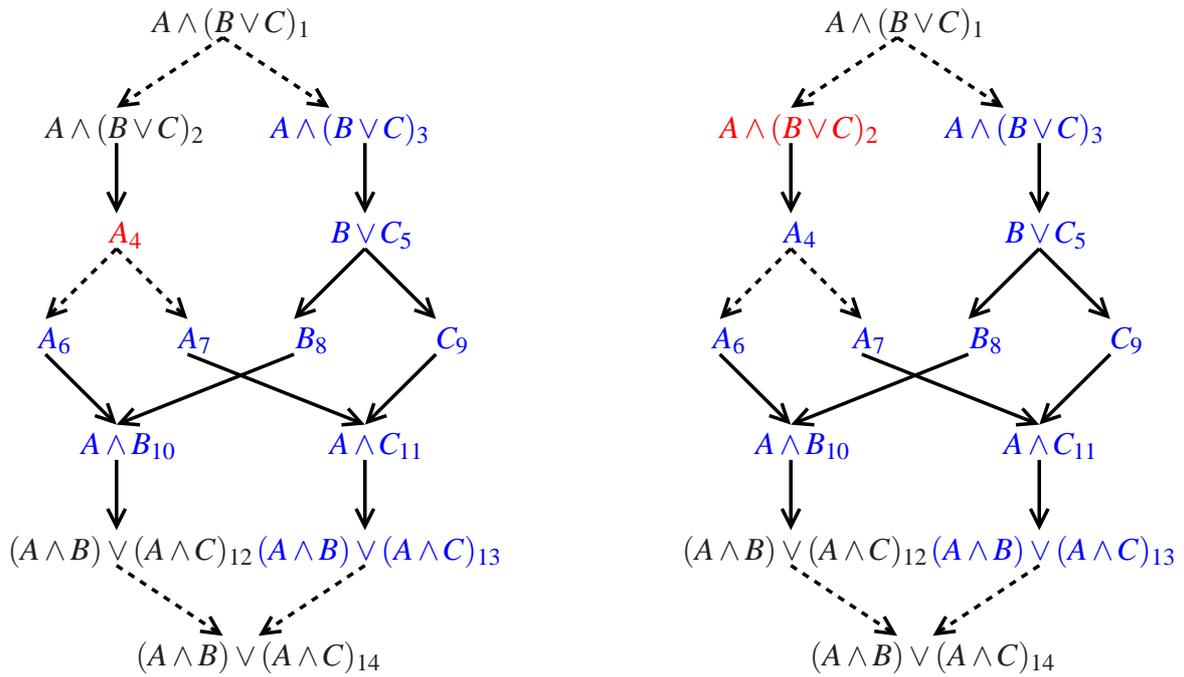


Figura 4.14 Continuação do cálculo do império do norte de $A \wedge B_{10}$.

Algumas propriedades dos impérios do norte podem ser notadas no exemplo feito. Em primeiro lugar, o resultado final não só é um grafo de prova: na verdade é um N-Grafo para $A \wedge (B \vee C) \vdash A \wedge B, (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Por sua vez, esse N-Grafo possui $A \wedge B$ como uma de suas

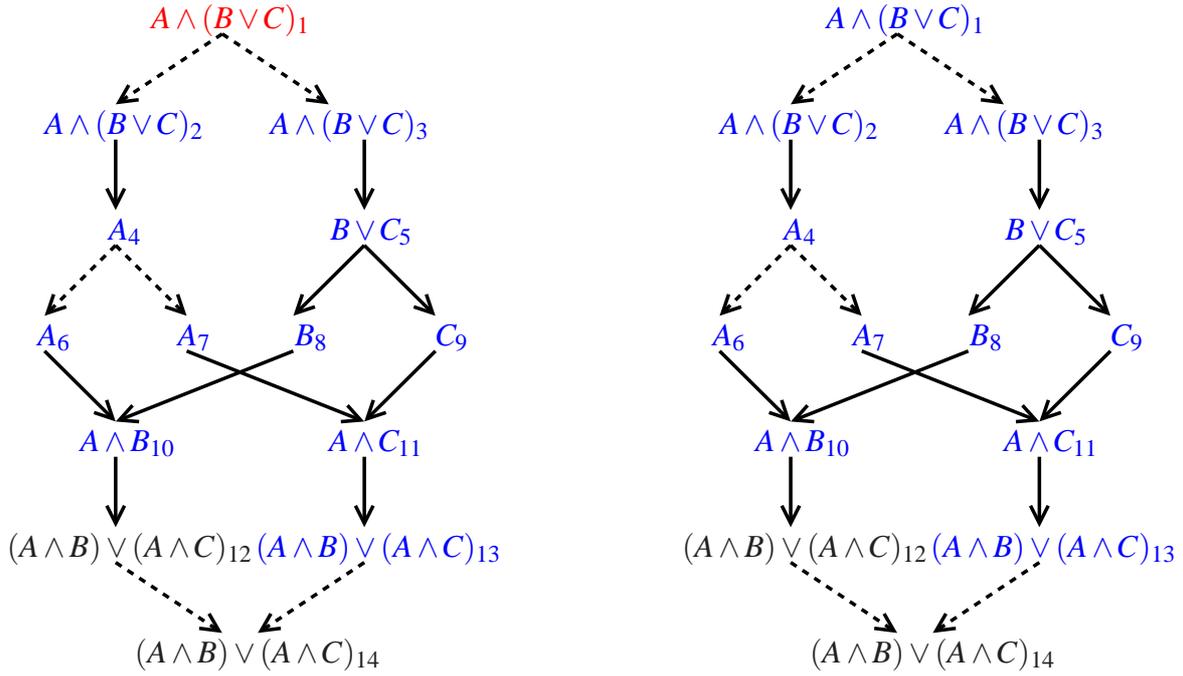


Figura 4.15 Resultado após a computação do império do norte de $A \wedge B_{10}$ pelo teorema 4.2.

portas inferiores (conclusão). Além disso é o maior sub-N-Grafo que apresenta $A \wedge B$ como conclusão. Afinal, constatamos que qualquer tentativa de aumentar o sub-N-Grafo seria com a adição de $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{12}$ (aqui $A \wedge B$ deixaria de ser uma porta inferior) ou de $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{14}$ (o acréscimo dessa fórmula não resultaria sequer num grafo de prova, pois teríamos apenas uma premissa do link de contração). Ainda nesta seção provamos que o império do norte de uma fórmula A define o maior sub-N-Grafo o qual possui A como conclusão.

Lema 4.3. Considere $\frac{X \vee Y}{Z}$ um link conjuntivo convergente num N-Grafo N . Seja t_1, t_2, t_3 os instantes em que a partícula passa por X_\vee, Z^\wedge, Y_\vee , respectivamente. Suponha que ela inicia sua viagem em X_\vee (ou seja, $t_1 < t_2$ e $t_1 < t_3$) e que o link está chaveado para L. Então $t_2 \in [t_1, t_3]$.

Demonstração. Suponha que $t_3 \in [t_1, t_2]$. Então obtemos (Figura 4.5):

$$X_\vee, Z_\vee, \underbrace{\dots}_1, Y_\vee, X^\wedge, \underbrace{\dots}_2, Z^\wedge, Y^\wedge, \underbrace{\dots}_3, X_\vee$$

Se alterarmos apenas o chaveamento do link em questão, geramos a seguinte *trip*:

$$X_\vee, Y^\wedge, \underbrace{\dots}_3, X_\vee$$

Uma vez que chegamos a uma contradição, a suposição de que $t_3 \in [t_1, t_2]$ deve ser falsa. Como $t_1 < t_2$ e $t_1 < t_3$, temos $t_2 \in [t_1, t_3]$. □

Corolário 4.1. Seja $\frac{X \vee Y}{Z}$ um link conjuntivo convergente. Então $eX^\wedge \cap eY^\wedge = \emptyset$. Afinal, quando o link está chaveado para L, os intervalos X^\wedge, \dots, X_\vee e Y^\wedge, \dots, Y_\vee são disjuntos.

Teorema 4.3 (Trip [Gir87]). *Há um chaveamento tal que eA^\wedge é exatamente o intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee .*

Demonstração. Ao iniciar uma *trip* por A^\wedge , há as seguintes possibilidades de sair de eA^\wedge :

1. $\frac{A_{p_1} A_{p_2}}{A_c}$ é um link de contração e uma premissa A_{p_i} é o próprio A (como ocorrência). Então $A_c \notin eA^\wedge$. Como a *trip* começa por $A_{p_i}^\wedge$, caso ela alcance a outra premissa do link de cima para baixo, ela deve retornar para cima (não pode descer para A_{c_\vee}). Logo, para permanecermos em eA^\wedge , devemos *chavear o link para o lado da premissa igual a A* .
2. $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ é um link de contração e apenas uma premissa X_{p_i} pertence a eA^\wedge . Temos então que $X_c \notin eA^\wedge$. Para evitarmos que a *trip* saia de eA^\wedge , o chaveamento deve *escolher o lado da premissa que não pertence a eA^\wedge* . Afinal, quando a partícula alcançar $X_{p_i_\vee}$ (pois $X_{p_i} \in eA^\wedge$), ela não pode seguir para X_{c_\vee} (porque $X_c \notin eA^\wedge$). Com essa escolha, logo após $X_{p_i_\vee}$, a partícula retorna subindo por $X_{p_i}^\wedge$ e assim continua em eA^\wedge .
3. $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ é um link de expansão e somente uma conclusão X_{c_i} pertence a eA^\wedge . Aqui $X_p \notin eA^\wedge$. O raciocínio é o mesmo do passo anterior: para que a *trip* permaneça em eA^\wedge após $X_{c_i}^\wedge$, ela deve voltar por $X_{c_i_\vee}$ (se seguir por X_p^\wedge sai de eA^\wedge). Portanto, é preciso *escolher o lado da conclusão que não pertence a eA^\wedge* .

Os demais links podem ser chaveados de qualquer maneira. É simples verificar por indução que, ao partirmos de A^\wedge , nós permanecemos em eA^\wedge até chegarmos a A_\vee . \square

Agora definimos o império do norte de outra maneira: utilizando os chaveamentos de Danos & Regnier no lugar das *trips*. Logo depois mostramos que as duas definições são equivalentes.

Definição 4.3 ($S^\wedge(N, A)$ [Gir91]). Seja A uma ocorrência de uma fórmula num N-Grafo N e S um chaveamento associado. Se A' for conclusão de um link que contém A como premissa e a aresta (A, A') existir em $S(N)$, então remova-a. $S^\wedge(N, A)$ é a componente que contém A e $S^\wedge(N, A)$ é a(s) outra(s) componente(s).

Mais uma vez elucidamos o novo conceito com o nosso N-Grafo para $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Como há dois links de expansão e um de contração, então há oito chaveamentos. Sejam x, y, z escolhas dos chaveamentos (ou seja, eles podem assumir os valores “L” ou “R”) para os links de expansão de $A \wedge (B \vee C)$ e de A e para o link de contração de $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, respectivamente. Portanto, S_{LRL} representará o chaveamento que escolhe a aresta da esquerda para a expansão de $A \wedge (B \vee C)$, a da direita para a expansão de A e a da esquerda para a contração de $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Para cada chaveamento S_{xyz} , destacamos os nós da componente $S_{xyz}^\wedge(A \wedge B_{10})$. Note que sempre removemos a aresta que parte de $A \wedge B_{10}$, conforme a definição 4.3. Na Figura 4.16 são apresentados dois exemplos.

Estamos interessados em *nós que sempre estão na componente $S^\wedge(N, A \wedge B_{10})$* , independente das escolhas de S . É imediato que $A \wedge B_{10}$ está em $S^\wedge(N, A \wedge B_{10})$ (pois $S^\wedge(N, A \wedge B_{10})$ sempre escolhe a componente a qual contém $A \wedge B_{10}$). Então se começarmos por $A \wedge B_{10}$ e percorrermos arestas não-voláteis (com a exceção de não descermos por $A \wedge B_{10}$ dado que $S^\wedge(N, A \wedge B_{10})$ sempre as arestas que partem do nó principal), encontraremos outros nós do mesmo tipo:

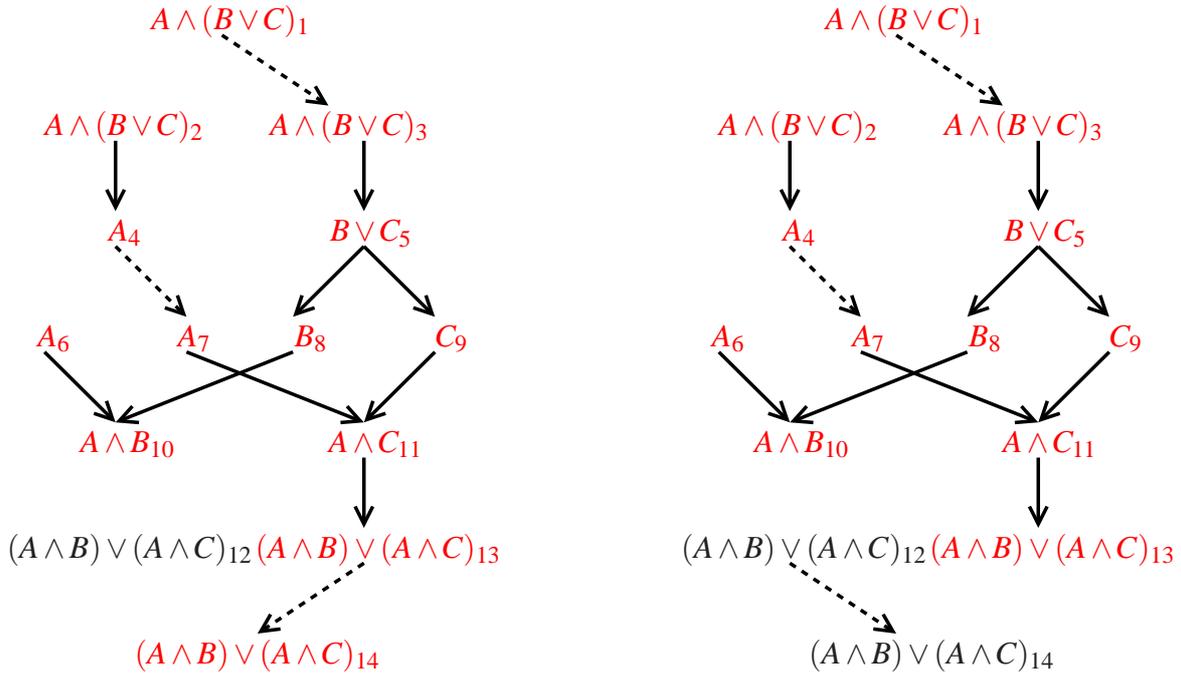


Figura 4.16 Componentes $S_{RRR}^{\wedge}(N, A \wedge B_{10})$ e $S_{RRL}^{\wedge}(N, A \wedge B_{10})$.

A_6 , B_8 , $B \vee C_5$, $A \wedge (B \vee C)_3$, C_9 , $A \wedge C_{11}$, A_7 , $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{13}$. Esses nós correspondem aos destacados em azul no lado esquerdo da Figura 4.14.

Para caminharmos por arestas voláteis, precisamos de uma garantia: vimos que A_6 e A_7 estão sempre na componente $S^{\wedge}(N, A \wedge B_{10})$. Então, independente de S escolher a aresta (A_4, A_6) ou (A_4, A_7) , concluímos que A_4 sempre estará em $S^{\wedge}(N, A \wedge B_{10})$. Atravessando a aresta não volátil por A_4 , chegamos em $A \wedge (B \vee C)_2$ (vértices em azul na primeira metade da Figura 4.15). Como temos as duas conclusões do link de expansão de $A \wedge (B \vee C)$, aplicamos o mesmo raciocínio usado no link de expansão de A e obtemos $A \wedge (B \vee C)_1$ (Fig 4.15).

A componente $S_{RRR}^{\wedge}(N, A \wedge B_{10})$, representada no lado esquerdo da Figura 4.16, possui o vértice $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{14}$, embora saibamos que este nem sempre ficará ligado a $A \wedge B_{10}$ (lembre-se de que removemos a aresta que parte de $A \wedge B_{10}$), pois a outra premissa da contração (a ocorrência $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{12}$) não está sempre presente, diferente do que notamos para os links de expansão desse exemplo.

Todavia, a componente $S_{RRL}^{\wedge}(N, A \wedge B_{10})$ contém exatamente os nós que estão sempre conectados a $A \wedge B_{10}$, conforme foi visto nos dois parágrafos anteriores. Isso ocorre porque S_{RRL} escolhe de forma “inteligente” a aresta do link de contração: como apenas uma das premissas está sempre ligada a $A \wedge B_{10}$ (o nó $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{13}$), S_{RRL} escolhe a outra aresta (a que liga $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{12}$). O chaveamento deste link é importante porque trata-se de “links de fronteira”: dos três nós do link, apenas um está sempre conectado a $A \wedge B_{10}$. O chaveamento dos links de expansão não podem adicionar nós como $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{14}$ (ou seja, que nem sempre estão ligados a $A \wedge B_{10}$).

Por exemplo, consideremos o chaveamento S_{RLL} . A única diferença dele para S_{RRL} é que o primeiro escolhe a aresta (A_4, A_6) e o segundo (A_4, A_7) . Mas já observamos que essa escolha não

interfere, uma vez que ambos A_6 e A_7 estão sempre ligados a $A \wedge B_{10}$. Logo, $S_{RRL}^\wedge(N, A \wedge B_{10}) = S_{RLL}^\wedge(N, A \wedge B_{10})$.

Outro fato importante é que $S_{RRL}^\wedge(N, A \wedge B_{10})$ contém exatamente os mesmos nós do império do norte de $A \wedge B_{10}$ (Figura 4.15). Chamaremos chaveamentos como S_{RLL} de *chaveamento principal*. Em seguida provaremos que a intersecção de todas as componentes obtidas quando variamos por todos os chaveamentos possível é igual ao império norte, o qual é igual à componente do chaveamento principal, ressaltando a semelhança com o teorema 4.3.

Proposição 4.1. $eA^\wedge = \bigcap_S S^\wedge(N, A)$, onde S varia sob todos os chaveamentos de N .

Demonstração. É semelhante à prova para MLL^- [BvdW95].

a) $eA^\wedge \subseteq \bigcap_S S^\wedge(N, A)$

É preciso provar que $\bigcap_S S^\wedge(N, A)$ atende às 11 condições do teorema 4.2.

1. Trivial, pois $S^\wedge(N, A)$ sempre contém A .
2. Como links simples não são chaveáveis na abordagem Danos-Regnier, a aresta (X, Y) estará presente em todos os chaveamentos. Se Y sempre estiver na componente $S^\wedge(N, A)$, concluímos que X também sempre estará na componente. Logo, $\bigcap_S S^\wedge(N, A)$ é fechado sob a condição 2.
3. Uma vez que as arestas de um link conjuntivo convergente não são voláteis, (X, Z) e (Y, Z) estarão em todo chaveamento. Por isso, caso Z sempre esteja na componente $S^\wedge(N, A)$, as arestas (X, Z) e (Y, Z) garantem que X e Y também estarão e assim $\bigcap_S S^\wedge(N, A)$ também é fechado sob a condição 3.
4. Aqui as arestas (X, Y) e (X, Z) também estarão presentes em todos os chaveamentos. Portanto, desde que Y ou Z sempre esteja na componente $S^\wedge(N, A)$, X também estará. Isso prova que $\bigcap_S S^\wedge(N, A)$ atende à condição 4.
5. Visto que (X_p, X_{c_1}) e (X_p, X_{c_2}) são arestas voláteis conjugadas, dado um chaveamento S qualquer, exatamente uma delas pertencerá a S . Mas como nos é dado que tanto X_{c_1} quanto X_{c_2} estão na componente $S^\wedge(N, A)$, independente da aresta escolhida por S , X_p também estará em $S^\wedge(N, A)$ e assim a condição 5 também é atendida.
6. Suponha que $X_{p_1} \notin \bigcap_S S^\wedge(N, A)$: há algum chaveamento S tal que $X_c \in S^\wedge(N, A)$ mas $X_{p_1} \notin S^\wedge(N, A)$. Então S escolheu a aresta volátil (X_{p_2}, X_c) e assim $X_{p_2} \in S^\wedge(N, A)$ (pois $X_c \in S^\wedge(N, A)$). Como $S^\wedge(N, A)$ não contém todos os nós de N , A deve ser premissa de algum link com conclusão A' e X_{p_1} pertence à componente de A' , ou seja, $X_{p_1} \in \overline{S^\wedge(N, A)}$.
Seja π o caminho entre X_{p_1} e A' em $\overline{S^\wedge(N, A)}$. Dado que $X_c \in S^\wedge(N, A)$ e $X_{p_1} \in \overline{S^\wedge(N, A)}$, a aresta $(X_{p_1}, X_c) \notin \pi$ (Figura 4.17). Considere agora S' um chaveamento como S , exceto que o link $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ está chaveado para L : $(X_{p_1}, X_c) \in S'$. Já que $X_c \in \bigcap_S S^\wedge(N, A)$, temos que $X_c \in S'^\wedge(N, A)$ (considere ρ o caminho entre A e X_c em $S'^\wedge(N, A)$). Dessa forma, π pode ser estendido para formar um caminho entre A e A' em S' sem passar pela aresta (A, A') . Isso gera um ciclo em S' : contradição. Logo, $X_{p_1} \in \bigcap_S S^\wedge(N, A)$.

A prova de $X_{p_2} \in \bigcap_S S^\wedge(N, A)$ é análoga e assim a condição 6 é respeitada.

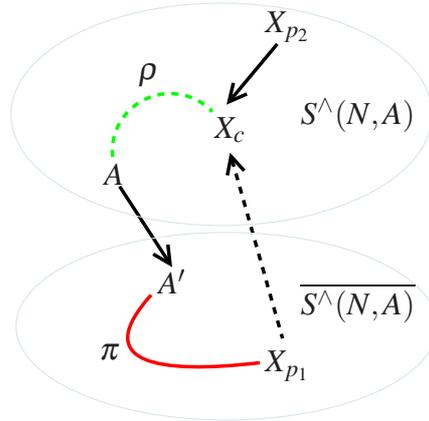


Figura 4.17 Se escolhermos a aresta (X_{p_1}, X_c) , obtemos um ciclo.

7. Se X sempre estiver na componente $S^{\wedge}(N, A)$, dado que $X \neq A$, a aresta (X, Y) também pertencerá a $S^{\wedge}(N, A)$. Logo, Y também estará sempre na componente $S^{\wedge}(N, A)$ e a condição 7 é atendida.
 8. Já que as arestas (X, Z) e (Y, Z) não são voláteis e $X \neq A \neq Y$, se pelo menos uma das duas fórmulas estiver na componente $S^{\wedge}(N, A)$, Z também estará, respeitando à condição 8.
 9. Como as arestas (X, Y) e (X, Z) não são voláteis e $X \neq A$, se $X \in S^{\wedge}(N, A)$, também teremos $Y, Z \in S^{\wedge}(N, A)$.
 10. A prova é análoga à de a6 com um link de expansão no lugar de contração.
 11. (X_p, X_{c_1}) e (X_p, X_{c_2}) são arestas voláteis, porém conjugadas. Portanto, em qualquer chaveamento uma delas estará presente. Então, se em todos os chaveamentos X_{c_1} e X_{c_2} estiverem na componente $S^{\wedge}(N, A)$, como uma das arestas voláteis está em todos eles, X_p também pertencerá a $\bigcap_S S^{\wedge}(N, A)$.
- b) $\bigcap_S S^{\wedge}(N, A) \subseteq eA^{\wedge}$

Seja S_p um *chaveamento principal* cujas arestas são escolhidas conforme o teorema 4.3. Provaremos que $S_p^{\wedge}(N, A) \subseteq eA^{\wedge}$.

Sabemos que $S_p^{\wedge}(N, A) \cap eA^{\wedge} \neq \emptyset$, pois ambos possuem A . Verificamos a seguir que uma vez que estamos numa fórmula de eA^{\wedge} em $S_p^{\wedge}(N, A)$, não há um caminho para alguma fórmula fora de eA^{\wedge} .

- *De cima para baixo*: o passo 1 garante que $S_p^{\wedge}(N, A)$ não contém nenhuma conclusão de A . Logo, é impossível sair de eA^{\wedge} por uma conclusão de A em $S_p^{\wedge}(N, A)$. Movendo-se para baixo a partir de uma fórmula (ocorrência) diferente de A , o único meio de sair de eA^{\wedge} é por um link de contração em que apenas uma premissa pertence a eA^{\wedge} (caso 5 do teorema 4.3). Todavia, o passo 2 de S_p nos assegura que a conclusão será ligada à premissa fora de eA^{\wedge} .
- *De baixo para cima*: pelo teorema 4.2, a única forma de sair de eA^{\wedge} movendo-se para cima é por um link de expansão em que apenas uma conclusão pertence a eA^{\wedge} (caso

5). Porém, o passo 3 da construção de S_p , a premissa do link de expansão (que não pertence à eA^\wedge) é ligada à conclusão que também está fora de eA^\wedge .

Portanto, se estivermos em uma fórmula X de tal que $X \in S_p^\wedge(N, A) \cap eA^\wedge$, não há um caminho de X para qualquer fórmula $Y \notin eA^\wedge$ em $S_p^\wedge(N, A)$. Porém, já vimos que $S_p^\wedge(N, A) \cap eA^\wedge \neq \emptyset$ e assim $S_p^\wedge(N, A) \subseteq eA^\wedge$. Mas como $\bigcap_S S^\wedge(N, A) \subseteq S_p^\wedge(N, A)$, temos que $\bigcap_S S^\wedge(N, A) \subseteq eA^\wedge$.

□

Corolário 4.2. *Seja S_p um chaveamento principal construído de acordo com o teorema 4.3. Então $S_p^\wedge(N, A) = eA^\wedge$.*

Corolário 4.3. *Se A for uma conclusão de N , então $eA^\wedge = N$.*

Demonstramos agora que eA^\wedge é o maior sub- N -Grafo de N que contém A como conclusão.

Lema 4.4. *A é uma porta de eA^\wedge .*

Demonstração. Uma vez que $A \in eA^\wedge$, se A não for uma porta de eA^\wedge , então A é premissa de um link l e pelo menos uma conclusão X desse link pertence a eA^\wedge .

Se l não for chaveável, então A e X estarão ligados em todos os chaveamentos. Se l for um link de contração ou expansão, é garantido que há um chaveamento ligando A e X . Logo, independente do tipo de l , há pelo menos um chaveamento S tal que a aresta $(A, X) \in S$. Entretanto, $S^\wedge(N, A)$ remove essa aresta e assim $X \notin S^\wedge(N, A)$. Como $eA^\wedge = \bigcap_S S^\wedge(N, A) \subseteq S^\wedge(N, A)$, $X \notin eA^\wedge$. Portanto, A é uma porta de eA^\wedge . □

Lema 4.5. *eA^\wedge é um N -Grafo.*

Demonstração. É simples verificar que eA^\wedge é um grafo de prova (ver definição 3.7). Resta então provar que todo chaveamento associado é acíclico e conexo. Seja S um chaveamento de eA^\wedge . Já que todos os passos da criação de um chaveamento principal dizem respeito a nós que não estão em eA^\wedge , podemos estender S para um chaveamento principal S' . Mas S' é um chaveamento de N (um N -Grafo) e portanto $S'(N)$ é acíclico e conexo. Logo, $S(eA^\wedge)$ também é acíclico e conexo. □

Teorema 4.4. *eA^\wedge é o maior sub- N -Grafo de N que possui A como uma de suas conclusões (porta inferior).*

Demonstração. Suponha que haja um sub- N -Grafo N' de N que contém A como porta e um nó Z tal que $Z \in N' - eA^\wedge$. Então existe um chaveamento S tal que $Z \notin S^\wedge(N, A)$. Como A é uma porta de N' , as arestas dos links dos quais A é premissa não influenciam na conectividade entre A e Z em $S(N')$. Mas $S^\wedge(N, A)$ remove de $S(N)$ apenas as arestas em que A é premissa, ou seja, A não está conectado a Z em $S(N')$. Portanto, $S(N')$ é desconexo: contradição. □

Lema 4.6 (Aninhamento de impérios I [Gir91]). *Sejam A e B ocorrências distintas. Se $A \in eB^\wedge$ e $B \notin eA^\wedge$, então $eA^\wedge \subsetneq eB^\wedge$.*

Demonstração. Construa um chaveamento principal S para eB^\wedge conforme o teorema 4.3, mas com alguns detalhes adicionais:

- I *link de contração cuja conclusão está em eB^\wedge* : se a conclusão não está em eA^\wedge , procedemos como faríamos num chaveamento principal para eA^\wedge (ligamos a conclusão à premissa fora de eA^\wedge);
- II *link de expansão cuja premissa está em eB^\wedge* : se a premissa não está em eA^\wedge , agimos como num chaveamento principal para eA^\wedge (ligamos a premissa à conclusão fora de eA^\wedge);
- III *se A é premissa de um link cuja conclusão A' está em eB^\wedge* : S escolhe a aresta (A, A') .

Tentemos partir de A e chegar em B sem passar por (A, A') . Visto que S é principal para eB^\wedge e $A \in eB^\wedge$, todos os nós do caminho de A para B pertencem a eB^\wedge (pois $S^\wedge(N, B) = eB^\wedge$). Porém, dado que $B \notin eA^\wedge$, em algum momento do caminho nós saímos de eA^\wedge . Pelo teorema 4.2, há apenas duas possibilidades de sair de eA^\wedge sem passar por (A, A') :

1. *link de contração e apenas uma premissa pertence a eA^\wedge* : a conclusão e a outra premissa não estão em eA^\wedge . Entretanto, pela condição I acima, S ligou os dois nós fora de eA^\wedge . Logo, é impossível sair de eA^\wedge por um link de contração.
2. *link de expansão e apenas uma conclusão pertence a eA^\wedge* : a premissa e a outra conclusão não estão em eA^\wedge . Todavia, pela condição II acima, S ligou os dois nós fora de eA^\wedge . Portanto, não é possível sair de eA^\wedge por uma expansão.

Ou seja, não há como sair de eA^\wedge e permanecer em eB^\wedge no caminho de A para B em $S(N)$ a menos que $(A, A') \in S(N)$. Isso implica que $S^\wedge(N, A) \subsetneq S^\wedge(N, B)$. Contudo, como $S^\wedge(N, B) = eB^\wedge$ (pois S é principal para eB^\wedge) e $eA^\wedge \subseteq S^\wedge(N, A)$, concluímos que $eA^\wedge \subsetneq eB^\wedge$. □

Lema 4.7 (Aninhamento de impérios II [Gir91]). *Sejam A e B ocorrências distintas. Se $A \notin eB^\wedge$ e $B \notin eA^\wedge$, então $eA^\wedge \cap eB^\wedge = \emptyset$.*

Demonstração.

Seja S um chaveamento principal para eB^\wedge conforme o lema anterior. I e II asseguram que em $S^\wedge(N, B)$ não existem arestas entre eA^\wedge e $\overline{eA^\wedge}$, exceto talvez por (A, A') . Porém, aqui $A \notin eB^\wedge$ e assim $A \notin S^\wedge(N, B)$. Logo, $(A, A') \notin S^\wedge(N, B)$ e por isso não há arestas entre eA^\wedge e $\overline{eA^\wedge}$ em $S^\wedge(N, B)$. Como $eB^\wedge = S^\wedge(N, B)$, não há arestas entre eA^\wedge e $\overline{eA^\wedge}$ em eB^\wedge . Uma vez que $B \notin eA^\wedge$, nenhuma fórmula de eA^\wedge pertence a eB^\wedge . □

Lema 4.8. *Seja $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ um link de contração de N . Então $X_{p_2} \in eX_{p_1}^\wedge$ e $X_{p_1} \in eX_{p_2}^\wedge$.*

Demonstração. Seja S_R um chaveamento qualquer que escolhe a aresta (X_{p_2}, X_c) . Visto que $(X_{p_1}, X_c) \notin S_R$, temos $S_R^\wedge(N, X_{p_1}) = N$ e assim $X_{p_2} \in S_R^\wedge(N, X_{p_1})$. Agora tome um chaveamento S_L que contém a aresta (X_{p_1}, X_c) . De acordo com a condição 6 do teorema 4.2, temos $X_{p_2} \in eX_c^\wedge$ e por isso existe um caminho de X_c para X_{p_2} em S_L sem passar por nenhuma conclusão de X_c . Como subimos por X_c para chegarmos até X_{p_2} , concluímos que há um caminho de X_{p_1} para X_{p_2} sem passar pela aresta (X_{p_1}, X_c) e assim $X_{p_2} \in S_L^\wedge(N, X_{p_1})$. Logo, $X_{p_2} \in eX_{p_1}^\wedge$.

A prova de $X_{p_1} \in eX_{p_2}^\wedge$ é simétrica: $S_L^\wedge(N, X_{p_2}) = N$ e também temos $X_{p_1} \in S_R^\wedge(N, X_{p_2})$ (porque $X_{p_1} \in eX_c^\wedge$). □

4.6 Império do sul

Vimos na seção anterior que o império do norte de uma fórmula A num N-Grafo N representa o maior sub-N-Grafo de N que contém A como **conclusão**. Provamos que existem duas maneiras equivalentes de construí-lo (por meio de *trips* e usando grafos de Danos e Regnier) e também algumas propriedades.

Agora definimos o *império do sul* de uma fórmula A : o maior sub-N-Grafo que apresenta A como **premissa**. Essa noção não faz sentido nas *proof-nets* lançadas por Girard nem nas de Robinson porque ambos utilizam links de axiomas: para que qualquer subestrutura contendo A seja uma *proof-net*, ela deve conter todas as premissas hereditárias de A . Dessa forma, para obtermos uma *subnet* contendo A , em algum momento da computação nós “subimos” até os links de axiomas. Ao “subirmos” por A , esta fórmula deixa de ser uma premissa da *subnet*.

Isso não ocorre nos N-Grafos: um nó X por si só já é um N-Grafo (representa a dedução $X \vdash X$). Além disso, como há um link divergente chaveável (expansão), o corolário da premissa hereditária (2.9.6 [Gir87]) não é válido nos N-Grafos: se X for uma premissa hereditária de Y , não há garantias de que $X \in eY^\wedge$.

Como o império do sul é a contrapartida do norte, muitas vezes abreviaremos algumas provas por elas serem facilmente alcançadas a partir das vistas na seção anterior.

Definição 4.4 (Império do sul). Seja A uma ocorrência de uma fórmula num N-Grafo N . O *império do sul* de A , representado por eA_\vee , consiste das fórmulas C tais que, para qualquer *trip* partindo de A_\vee no tempo t_1 , retornando em A^\wedge em t_2 , passando por C^\wedge em u_1 e por C_\vee em u_2 , temos $u_1, u_2 \in [t_1, t_2]$.

Teorema 4.5. O império do sul de A é fechado sob as seguintes condições:

1. $A \in eA_\vee$;
2. se $\frac{X}{Y}$ for um link simples, $Y \neq A$ e $Y \in eA_\vee$, então $X \in eA_\vee$;
3. se $\frac{X Y}{Z}$ for um link conjuntivo convergente, $Z \neq A$ e $Z \in eA_\vee$, então $X, Y \in eA_\vee$;
4. se $\frac{X}{Y Z}$ for um link disjuntivo divergente, $Y \neq A \neq Z$ e $Y \in eA_\vee$ (ou $Z \in eA_\vee$), então $X \in eA_\vee$;
5. se $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ for um link de expansão, $X_{c_1} \neq A \neq X_{c_2}$ e $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA_\vee$, então $X_p \in eA_\vee$;
6. se $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ for um link de contração, $X_c \neq A$ e $X_c \in eA_\vee$, então $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA_\vee$;
7. se $\frac{X}{Y}$ for um link simples e $X \in eA_\vee$, então $Y \in eA_\vee$;
8. se $\frac{X Y}{Z}$ for um link conjuntivo convergente e $X \in eA_\vee$ (ou $Y \in eA_\vee$), então $Z \in eA_\vee$;
9. se $\frac{X}{Y Z}$ for um link disjuntivo divergente e $X \in eA_\vee$, então $Y, Z \in eA_\vee$;
10. se $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ for um link de expansão e $X_p \in eA_\vee$, então $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA_\vee$;
11. se $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ for um link de contração e $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA_\vee$, então $X_c \in eA_\vee$.

Demonstração. Procedemos conforme explicado no Apêndice C. A diferença é que as provas utilizarão intervalos $A_{\vee}, \dots, A^{\wedge}$ no lugar de $A^{\wedge}, \dots, A_{\vee}$. \square

Os teoremas 4.2 e 4.5 nos mostram que as construções dos impérios do norte e sul são bastante semelhantes. A principal diferença entre eles é que o do norte não permite descer para uma conclusão da fórmula em questão, enquanto que o do sul proíbe a subir para uma premissa. Na Figura 4.18 são apresentados dois exemplos. O leitor pode verificar que o império do sul de A_7 é idêntico ao de A_6 .

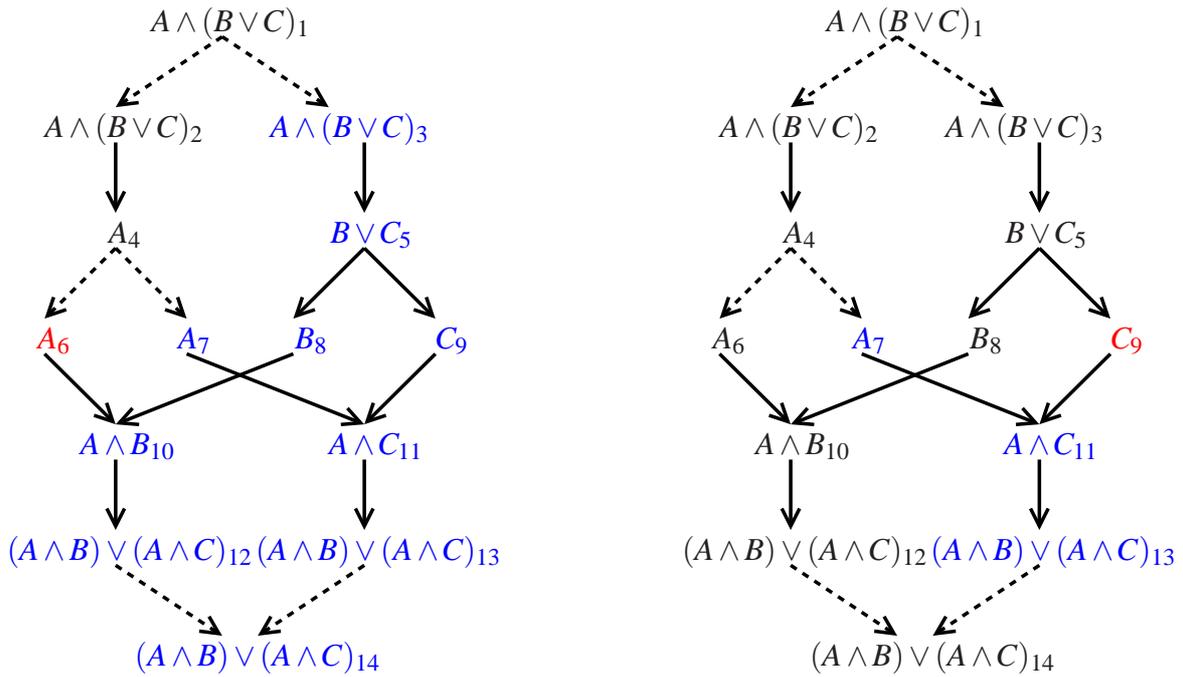


Figura 4.18 Impérios do sul de A_6 e C_9 .

Lema 4.9. Considere $\frac{X}{Y \vee Z}$ um link disjuntivo divergente num N -Grafo N . Seja t_1, t_2, t_3 os instantes em que a partícula passa por $X_{\vee}, Y^{\wedge}, Z^{\wedge}$, respectivamente. Suponha que ela inicia sua viagem em X_{\vee} (ou seja, $t_1 < t_2$ e $t_1 < t_3$) e que o link está chaveado para L. Então $t_2 \in [t_1, t_3]$.

Demonstração. Suponha que $t_3 \in [t_1, t_2]$. Então obtemos (Figura 4.6):

$$X_{\vee}, Y_{\vee}, \underbrace{\dots}_1, Z^{\wedge}, X^{\wedge}, \underbrace{\dots}_2, Y^{\wedge}, Z_{\vee}, \underbrace{\dots}_3, X_{\vee}$$

Se alterarmos apenas o chaveamento do link em questão, geramos a seguinte *trip*:

$$X_{\vee}, Z_{\vee}, \underbrace{\dots}_3, X_{\vee}$$

Uma vez que chegamos a uma contradição, a suposição de que $t_3 \in [t_1, t_2]$ deve ser falsa. Como $t_1 < t_2$ e $t_1 < t_3$, temos $t_2 \in [t_1, t_3]$. \square

Corolário 4.4. *Seja $\frac{X}{Y^Z}$ um link disjuntivo divergente. Então $eY_V \cap eZ_V = \emptyset$. Afinal, quando o link está chaveado para L, os intervalos Y_V, \dots, Y^\wedge e Z_V, \dots, Z^\wedge são disjuntos.*

Teorema 4.6 (Trip). *Há um chaveamento tal que eA_V é exatamente o intervalo A_V, \dots, A^\wedge .*

Demonstração. A prova aqui é semelhante à do teorema 4.3. A diferença é o primeiro passo: utilizado caso A seja conclusão de um link de expansão, enquanto anteriormente se referenciava a um link de contração com uma das premissas sendo o próprio A.

Ao iniciar uma *trip* por A_V , há as seguintes possibilidades de sair de eA_V :

1. $\frac{A_p}{A_{c_1} A_{c_2}}$ é um link de expansão e uma conclusão A_{c_i} é o próprio A (como ocorrência).
Então $A_p \notin eA_V$. Como a *trip* começa por A_{p_i} , caso ela alcance a outra conclusão do link de baixo para cima, ela deve retornar para baixo (não pode subir para A_p^\wedge). Logo, para permanecerem em eA_V , devemos *chavear o link para o lado da conclusão igual a A*.
2. $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ é um link de contração e apenas uma premissa X_{p_i} pertence a eA_V .
Temos então que $X_c \notin eA_V$. Para evitarmos que a *trip* saia de eA_V , o chaveamento deve *escolher o lado da premissa que não pertence a eA_V* .
3. $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ é um link de expansão e somente uma conclusão X_{c_i} pertence a eA_V .
Aqui $X_p \notin eA_V$. Para que a *trip* permaneça em eA_V após $X_{c_i}^\wedge$, é preciso *escolher o lado da conclusão que não pertence a eA_V* .

Os demais links podem ser chaveados de qualquer maneira. É simples verificar por indução que, ao partirmos de A_V , nós permanecemos em eA_V até chegarmos a A^\wedge . \square

Definição 4.5 ($S_V(N, A)$). *Seja A uma ocorrência de fórmula num N-Grafo N e S um chaveamento associado. Se A'' for premissa de um link que contém A como conclusão e a aresta (A'', A) existir em $S(N)$, então remova-a. $S_V(N, A)$ é a componente que contém A e $\overline{S_V(N, A)}$ é a(s) outra(s) componente(s).*

Proposição 4.2. $eA_V = \bigcap_S S_V(N, A)$, onde S varia sob todos os chaveamentos de N.

Demonstração. Mesmo raciocínio da prova da proposição 4.1: notamos que $eA_V \subseteq \bigcap_S S_V(N, A)$ (pois $\bigcap_S S_V(N, A)$ atende às condições do teorema 4.6) e que $\bigcap_S S_V(N, A) \subseteq eA_V$ ao construirmos um chaveamento principal S_V^p de acordo com o teorema 4.6 e demonstrarmos que $S_V^p(N, A) \subseteq eA_V$. \square

Corolário 4.5. *Seja S^p um chaveamento principal construído de acordo com o teorema 4.6. Então $S_V^p(N, A) = eA_V$.*

Corolário 4.6. *Se A for uma premissa de N, então $eA_V = N$.*

Lema 4.10. *A é uma porta de eA_V .*

Demonstração. Uma vez que $A \in eA_V$, se A não for uma porta de eA_V , então A é conclusão de um link l e pelo menos uma premissa X desse link pertence a eA_V .

Se l não for chaveável, então A e X estarão ligados em todos os chaveamentos. Se l for um link de contração ou expansão, é garantido que há um chaveamento ligando A e X . Logo, independente do tipo de l , há pelo menos um chaveamento S tal que a aresta $(X, A) \in S$. Entretanto, $S_V(N, A)$ remove essa aresta e assim $X \notin S_V(N, A)$. Como $eA_V = \bigcap_S S_V(N, A) \subseteq S_V(N, A)$, $X \notin eA_V$. Portanto, A é uma porta de eA_V . \square

Lema 4.11. eA_V é um N -Grafo.

Demonstração. Assim como na prova do lema 4.5, podemos estender qualquer chaveamento S de eA_V para um chaveamento principal S' para todo o N -Grafo. Já que $S'(N)$ é acíclico e conexo, $S(eA_V)$ também o é. \square

Teorema 4.7. eA_V é o maior sub- N -Grafo de N que possui A como uma de suas premissas (porta superior).

Demonstração. Semelhante à prova do teorema 4.4. \square

Lema 4.12 (Aninhamento de impérios III). Sejam A e B ocorrências distintas. Se $A \in eB_V$ e $B \notin eA_V$, então $eA_V \subsetneq eB_V$.

Demonstração. Assim como as demais propriedades do império do sul, a prova desse lema também parte da mesma ideia da propriedade correspondente do norte (lema 4.6). Construa um chaveamento principal S para eB_V conforme o teorema 4.5, mas com alguns detalhes adicionais:

- I *link de contração cuja conclusão está em eB_V* : se a conclusão não está em eA_V , procedemos como faríamos num chaveamento principal para eA_V (ligamos a conclusão à premissa fora de eA_V);
- II *link de expansão cuja premissa está em eB_V* : se a premissa não está em eA_V , agimos como num chaveamento principal para eA_V (ligamos a premissa à conclusão fora de eA_V);
- III *se A é conclusão de um link cuja premissa A'' está em eB_V* : S escolhe a aresta (A'', A) .

De forma equivalente à prova do lema 4.6, concluímos que não existe um caminho de A para B em $S(N)$ caso $(A'', A) \notin S$. Portanto, $(A'', A) \in S$. Isso implica que $S_V(N, A) \subsetneq S_V(N, B)$. Contudo, como $S_V(N, B) = eB_V$ (pois S é principal para eB_V) e $eA_V \subseteq S_V(N, A)$, concluímos que $eA_V \subsetneq eB_V$. \square

Lema 4.13 (Aninhamento de impérios IV). Sejam A e B ocorrências distintas. Se $A \notin eB_V$ e $B \notin eA_V$, então $eA_V \cap eB_V = \emptyset$.

Demonstração. Obtemos um chaveamento principal para eB_V conforme o lema acima. Assim como no lema 4.7, concluímos que não há arestas entre eA_V e $\overline{eA_V}$ em eB_V . Já que $B \notin eA_V$, deduzimos que $eA_V \cap eB_V = \emptyset$. \square

Lema 4.14. *Seja $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ um link de expansão de N . Então $X_{c_2} \in eX_{c_1\vee}$ e $X_{c_1} \in eX_{c_2\vee}$.*

Demonstração. Seja S^R um chaveamento qualquer que escolhe a aresta (X_p, X_{c_2}) . Visto que $(X_p, X_{c_1}) \notin S^R$, temos $S_V^R(N, X_{c_1}) = N$ e assim $X_{c_2} \in S_V^R(N, X_{c_1})$. Agora tome um chaveamento S^L que contém a aresta (X_p, X_{c_1}) . De acordo com a condição 10 do teorema 4.5, temos $X_{c_2} \in eX_{p\vee}$ e por isso existe um caminho de X_p para X_{c_2} em S^L sem passar por nenhuma premissa de X_p . Como descemos por X_p para chegarmos até X_{c_2} , concluímos que há um caminho de X_{c_1} para X_{c_2} sem passar pela aresta (X_p, X_{c_1}) e assim $X_{c_2} \in S_V^L(N, X_{c_1})$. Logo, $X_{c_2} \in eX_{c_1\vee}$.

Da prova acima é imediato concluir também que $X_{c_1} \in eX_{c_2\vee}$. □

4.7 Império total

Vimos que o império do sul de uma fórmula A é a contrapartida do norte: o primeiro é o maior sub-N-Grafo o qual possui a fórmula A como premissa e o segundo é o maior que a apresenta como conclusão. Dada a natureza semelhante deles, verificaremos que os lemas de aninhamento também são verdadeiros entre eles. Essas propriedades sugerem a criação de uma nova estrutura: o *império total* (do inglês *whole empires*), o qual será formado a partir da união dos outros dois impérios. Esse novo império definirá uma ordem parcial entre os nós não-terminais e será usado para encontrar o nó *split*, desempenhando assim o mesmo papel dos reinos para as *proof-nets* de Girard e de Robinson.

Abordamos cada caso possível da intersecção entre o norte e o sul.

Lema 4.15 (Aninhamento de impérios V). *Sejam A e B ocorrências distintas. Se $B \notin eA_{\vee}$ e $A \in eB^{\wedge}$, então $eA_{\vee} \subsetneq eB^{\wedge}$.*

Demonstração. Seja S um chaveamento principal para eB^{\wedge} , mas com os detalhes adicionais vistos no lema 4.12 (nesse caso, no lugar de eB_{\vee} temos eB^{\wedge}). Então não há um caminho de A para B a menos que $(A'', A) \in S_{\vee}(N, B)$. Já que $A \in eB^{\wedge}$, temos $S_{\vee}(N, A) \subsetneq S^{\wedge}(N, B)$ e assim obtemos $eA_{\vee} \subsetneq eB^{\wedge}$. □

Lema 4.16 (Aninhamento de impérios VI). *Sejam A e B ocorrências distintas. Se $B \notin eA^{\wedge}$ e $A \in eB_{\vee}$, então $eA^{\wedge} \subsetneq eB_{\vee}$.*

Demonstração. Construimos um chaveamento principal S para eB_{\vee} com os detalhes observados no lema 4.6 (com eB_{\vee} no lugar de eB^{\wedge}). Então o único caminho de A para B em $S(N)$ é por meio de (A, A') . A partir das arestas escolhidas por S concluímos que $S^{\wedge}(N, A) \subsetneq S_{\vee}(N, B)$ e, como $S_{\vee}(N, B) = eB_{\vee}$, obtemos $eA^{\wedge} \subsetneq eB_{\vee}$. □

Corolário 4.7. *Considere A e B ocorrências diferentes. Se $B \notin eA^{\wedge} \cup eA_{\vee}$ e $A \in eB^{\wedge}$ ou $A \in eB_{\vee}$ (ou seja, $A \in eB^{\wedge} \cup eB_{\vee}$), então $eA^{\wedge} \cup eA_{\vee} \subsetneq eB^{\wedge} \cup eB_{\vee}$.*

Lema 4.17 (Nesting of empires VII). *Sejam A e B ocorrências distintas. Se $B \notin eA_{\vee}$ e $A \notin eB^{\wedge}$, então $eA_{\vee} \cap eB^{\wedge} = \emptyset$.*

Demonstração. Seja S um chaveamento principal para eB^\wedge conforme o lema anterior. De forma semelhante aos lemas 4.7 e 4.13, não há arestas entre eA_V e $\overline{eA_V}$ em $S^\wedge(N, B) = eB^\wedge$. Como $A \notin eB^\wedge$, concluímos que $eA_V \cap eB^\wedge = \emptyset$. \square

Corolário 4.8. *Sejam A e B ocorrências distintas. Se $B \notin eA^\wedge \cup eA_V$ e $A \notin eB^\wedge \cup eB_V$, então, por sucessivas aplicações do lema 4.17, $(eA^\wedge \cup eA_V) \cap (eB^\wedge \cup eB_V) = \emptyset$.*

Lema 4.18. *$eA^\wedge \cup eA_V$ é um sub-N-Grafo.*

Demonstração. Como os intervalos A^\wedge, \dots, A_V e A_V, \dots, A_\wedge são disjuntos, a única fórmula em comum entre eA e eA_V é o próprio A . Dado que $eA^\wedge \cap eA_V \neq \emptyset$, pelo lema 4.1 $eA^\wedge \cup eA_V$ é um N-Grafo. \square

Lema 4.19. *Seja $l = \frac{\dots X \dots}{\dots Y \dots}$ um link tal que, para uma fórmula A nós temos $X \in eA^\wedge \cup eA_V$ e $Y \notin eA^\wedge \cup eA_V$. Então $eA^\wedge \cup eA_V \subsetneq eY^\wedge \cup eY_V$.*

Demonstração.

Uma vez que $X \in eA^\wedge \cup eA_V$, consideraremos dois casos:

1. $X \in eA^\wedge$

Dado que $Y \notin eA^\wedge$, l deve ser um link de contração e a sua outra premissa não pertence a eA . Sendo Y uma conclusão de l , obtemos $X \in eY^\wedge$ e assim $eA^\wedge \cap eY^\wedge \neq \emptyset$. Se $A \notin eY^\wedge$, pelo lema 4.7 teríamos $eA^\wedge \cap eY^\wedge = \emptyset$: contradição. Logo, $A \in eY^\wedge$. Mas, pelo corolário 4.7, concluímos que nesse caso $eA^\wedge \cup eA_V \subsetneq eY^\wedge \cup eY_V$.

2. $X \in eA_V$

Pelo mesmo raciocínio do caso acima, l é um link de contração. Isso implica que $X \in eY^\wedge$ e $eA_V \cap eY^\wedge \neq \emptyset$. Se $A \notin eY^\wedge$, o lema 4.17 nos levaria a $eA_V \cap eY^\wedge = \emptyset$: contradição. Logo, $A \in eY^\wedge$. Novamente, pelo corolário 4.7, chegamos a $eA^\wedge \cup eA_V \subsetneq eY^\wedge \cup eY_V$. \square

Lema 4.20. *Seja $l = \frac{\dots X \dots}{\dots Y \dots}$ um link tal que, para uma fórmula A nós temos $Y \in eA^\wedge \cup eA_V$ e $X \notin eA^\wedge \cup eA_V$. Então $eA^\wedge \cup eA_V \subsetneq eX^\wedge \cup eX_V$.*

Demonstração. Procedemos conforme o lema anterior:

1. $Y \in eA^\wedge$

Já que $X \notin eA^\wedge$, l deve ser um link de expansão e a outra conclusão de l não pertence a eA^\wedge . Então X é a premissa do link e por isso $Y \in eX_V$. Logo, $eX_V \cap eA^\wedge \neq \emptyset$. Se $A \notin eX_V$, pelo lema 4.17 teríamos $eX_V \cap eA^\wedge = \emptyset$: uma contradição. Portanto, devemos ter $A \in eX_V$ e, de acordo com o corolário 4.7, concluímos nesse caso que $eA^\wedge \cup eA_V \subsetneq eX^\wedge \cup eX_V$.

2. $Y \in eA_V$

Da mesma forma como acima, l é um link de expansão, X é a sua premissa, $Y \in eX_V$. Aqui temos $eA_V \cap eX_V \neq \emptyset$. Agora, se $A \notin eX_V$, pelo lema 4.13 obteríamos $eA_V \cap eX_V = \emptyset$: contradição. Então $A \in eX_V$ e o corolário 4.7 nos leva a concluir $eA^\wedge \cup eA_V \subsetneq eX^\wedge \cup eX_V$.

□

Os corolários 4.7 e 4.8 e o lema 4.18 sugerem a definição de uma nova estrutura para a união do império do norte com o do sul de uma mesma fórmula..

Definição 4.6 (Império total). Seja A uma ocorrência de uma fórmula num N-Grafo N . O *império total de A* , representado por wA , consiste das fórmulas do conjunto $eA^\wedge \cup eA^\vee$.

Corolário 4.9. Se A for uma conclusão (premissa) de N , então, pelo corolário 4.3 (4.6): $wA = N$.

Definição 4.7 (Ordem parcial \ll entre fórmulas não-terminais). Sejam A e B ocorrências de fórmulas num N-Grafo N . Se A e B não são premissas nem conclusões de N , então definimos $A \ll B \leftrightarrow wA \subsetneq wB$.

Os teoremas 4.2 e 4.5 nos mostram que os links de contração e expansão têm um papel fundamental: não fossem eles, os impérios do norte e do sul de qualquer fórmula seriam sempre iguais ao N-Grafo. Além disso, os lemas 4.19 e 4.20 nos mostram que esses dois links são importantes na ordem parcial dos impérios totais.

4.8 Sequentização

Conforme visto no capítulo 3, para garantirmos que um N-Grafo representa uma prova logicamente correta, é preciso provar a corretude e a completude do sistema. A prova original é feita por indução e baseada em oito casos [dO01]. O último deles é análogo ao da prova de *proof-nets* em que todos os links terminais são *times*: representam os N-Grafos em que todo link inicial é disjuntivo divergente e todo link final é conjuntivo convergente.

No fragmento MLL^- não é trivial mostrar que há pelo menos um nó terminal *times* com a propriedade *split*. Para os N-Grafos, de Oliveira provou que o caso análogo atende a pelo menos uma das três condições:

1. há um link inicial disjuntivo divergente com a propriedade *split*;
2. há um link final conjuntivo convergente com a propriedade *split*;
3. há um *cut branch point* (nó que é ao mesmo tempo conclusão de uma contração e premissa de uma expansão).

No caso 3 nós temos um nó X tal que sua remoção de N , juntamente com todas as suas arestas, produz três componentes que também são N-Grafos (uma delas é a componente contendo apenas X). Com pelo menos uma das condições acima sendo atendida, é possível “quebrar” o N-Grafo original em três N-Grafos menores, aplicar a hipótese de indução, e obter um sequente para a derivação do N-Grafo original.

Apresentaremos agora uma prova mais simples para a corretude por meio do conceito de sub-N-Grafos para um fragmento do sistema (sem o conectivo \rightarrow). Vamos usar, sem perda de generalidade, \top como $A \vee \neg A$ e \perp como $A \wedge \neg A$, em que a fórmula A faz parte do link em questão.

Teorema 4.8 (Sequentização). *Seja N um N-Grafo que não possui o link $\rightarrow -I$. Então há uma derivação $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ no cálculo de sequentes cujas ocorrências das fórmulas A_1, \dots, A_n e B_1, \dots, B_m estão em correspondência um para um com as premissas e as conclusões de N , respectivamente.*

Demonstração. Por indução sobre o número de links de N .

1) *Caso base: N não contém nenhum link (N contém apenas um vértice A).*

É imediato: $SC(N)$ é $A \vdash A$.

2) *N não contém nenhum nó não-terminal (N possui apenas um link).*

É simples obter uma derivação do cálculo de sequentes para um N-Grafo com apenas um link (ver apêndice A). Por exemplo, o caso de $\vee - I_1$:

$$\frac{A \vdash A}{A \vdash A \vee B} \vee R_1$$

3) *N contém um link de expansão inicial.*

Como N é um N-Grafo, todos os seus chaveamentos são acíclicos e ele também satisfaz o lema 3.2. Seja N_1 o resultado da remoção do link de expansão inicial de N . Desde que removemos um link de N , então não adicionamos nenhum ciclo e concluímos que todos os chaveamentos de N_1 também são acíclicos. Também sabemos que N_1 possui um vértice a menos (a premissa da expansão foi retirada), um link a menos de expansão e duas arestas a menos. Portanto, N_1 também é um N-Grafo.

Pela hipótese de indução temos uma derivação em sequentes Π terminando com $\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}_n \vdash B_1, \dots, B_m$ para N_1 . Então $SC(N)$ é obtido por uma contração à esquerda:

$$\frac{\Pi}{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}_n \vdash B_1, \dots, B_m} \frac{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}_n \vdash B_1, \dots, B_m}{\mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}_n \vdash B_1, \dots, B_m} CL$$

4) *N contém um link de contração final.*

Semelhante ao caso acima, pela hipótese de indução temos uma derivação em sequentes Π terminando com $A, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, B_m$. Aqui $SC(N)$ é obtido por uma contração à direita:

$$\frac{\Pi}{A, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, B_m} \frac{A, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, B_m}{A, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \dots, B_m} CR$$

5) *N contém um link não-terminal e não possui nenhum link inicial de expansão e nenhum final de contração.*

Escolha um nó A maximal em relação a \ll . Então $wA = N$. Suponha que não: seja $W \in N - (eA^\wedge \cup eA^\vee)$ e S_p^\wedge um chaveamento principal para eA^\wedge . Como $W \notin eA^\wedge$, o caminho de A para W em S_p passa por uma conclusão A' de A . Seja A_c o último nó pertencente eA^\vee e Y o primeiro nó fora do império do sul A no caminho até W . Então há duas possibilidades para a aresta incidente a A_c e Y :

- i) (A_c, Y) pertence a um link de contração cuja outra premissa não pertence a eA_V : pelo lema 4.19 nós temos $eA^\wedge \cup eA_V \subsetneq eY^\wedge \cup eY_V$, ou seja, $A \ll Y$. Isso contradiz a maximalidade de A em \ll .
- ii) (Y, A_c) pertence a um link de expansão cuja outra conclusão não pertence a eA_V : pelo lema 4.20 obtemos $eA^\wedge \cup eA_V \subsetneq eY^\wedge \cup eY_V$. Em outras palavras, $A \ll Y$, o que também vai contra a hipótese de que A é maximal em \ll .

Agora sabemos que $wA = N$. Sejam Γ_1, Γ_2 uma partição de A_1, \dots, A_n e Δ_1, Δ_2 uma partição de B_1, \dots, B_m . Como eA^\wedge é um N-Grafo (lema 4.5) e possui A como conclusão (lema 4.4), a hipótese de indução construiu uma derivação $SC(eA^\wedge)$ em cálculo de sequentes terminando com $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A$. Porém, visto que eA_V também é um N-Grafo (lema 4.11) e possui A como premissa (lema 4.10), a hipótese de indução construiu também uma derivação $SC(eA_V)$ para $A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2$. Então $SC(N)$ é obtido pela regra do corte:

$$\frac{\begin{array}{c} SC(eA^\wedge) \\ \Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \end{array} \quad \begin{array}{c} SC(eA_V) \\ A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2 \end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

□

4.9 Conclusão

Neste capítulo vimos o conceito de sub-N-Grafos e demonstramos que, para qualquer ocorrência de fórmula A de um N-Grafo N , sempre é possível construir o maior sub-N-Grafo de N que possui A como conclusão (o império do norte de A) e o maior sub-N-Grafo que apresenta A como premissa (o império do sul de A). Os teoremas 4.3 e 4.6 nos mostram como construir esses impérios em tempo linear.

Com a união dos desses dois impérios, definimos o império total de uma fórmula e uma ordem parcial sobre as fórmulas de N (exceto as premissas e as conclusões). Como parte da prova de sequentização, demonstramos dentro do teorema 4.8 que, caso N não possua um link inicial de expansão nem um final de contração, então ele apresentará uma fórmula A tal que $wA = N$ e $A \notin PREMIS(N)$ e $A \notin CONC(N)$. Portanto, os impérios do norte e do sul de A “cortam” N em dois sub-N-Grafos, cuja intersecção é a fórmula A .

Comparação das provas de corretude

A primeira prova de corretude dos N-Grafos foi feita por de Oliveira [dO01] e está reproduzida em parte aqui no apêndice D. Conforme enunciamos no teorema 3.2, para cada N-Grafo é possível obter uma derivação no cálculo de sequentes. No capítulo 4 foi apresentada uma nova prova para o sistema. Em ambas as provas, assim como também nas provas de Girard [Gir87] e de Robinson [Rob03] para as suas respectivas *proof nets*, o ponto mais importante é quebrar uma derivação em estruturas menores, mas que ainda são derivações válidas (subderivações).

Neste capítulo analisamos a ideia da prova de corretude original dos N-Grafos e em seguida comparamo-la com a do teorema 4.8.

5.1 Prova original da corretude dos N-Grafos

De Oliveira provou a corretude dos N-Grafos usando indução sob o número de nós de um N-Grafo G . A ideia principal é remover algum link de G para obter N-Grafos menores, aplicar a hipótese de indução e assim obter uma derivação do cálculo de sequentes para G [dO01].

Por exemplo, seja u uma premissa de G . Se u for uma premissa de um link simples (u, v) , então se removermos a aresta (u, v) obtemos:

1. uma componente composta apenas por u ;
2. uma componente G' semelhante a G , em que $PREMIS(G') = (PREMIS(G) \cup \{v\}) - \{u\}$ e $CONC(G') = CONC(G)$.

É imediato verificarmos que todo chaveamento de G' é uma árvore se e somente se o mesmo também for válido para todos os chaveamentos de G . Logo, G' também é um N-Grafo e possui um vértice a menos que G . Então a hipótese de indução nos garante que há uma derivação no cálculo de sequentes para G' : $PREMIS(G') \vdash CONC(G')$.

Vimos no apêndice A que é possível obter uma derivação para N-Grafos com apenas um link. Logo, há uma derivação para o link simples (u, v) : $u \vdash v$. Porém, $v \in PREMIS(G')$ e nós aplicamos a regra do corte para obtermos uma derivação para G :

$$\frac{u \vdash v \quad PREMIS(G') \vdash CONC(G')}{u, PREMIS(G') - \{v\} \vdash CONC(G')} \text{ CUT}$$

A mesma idéia pode ser utilizada se G tiver uma conclusão v , a qual é uma conclusão de um link simples (u, v) . Algumas definições importantes para “quebrarmos” um N-Grafo em componentes menores seguem abaixo.

Definição 5.1 (Link simples inicial (final)). Um link simples (u, v) em N-Grafo G é *inicial (final)* se $u \in PREMIS(G)$ ($v \in CONC(G)$).

Definição 5.2 (Link convergente inicial (final)). Um link convergente $\{(u_1, v), (u_2, v)\}$ em N-Grafo G é *inicial (final)* se $\{u_1, u_2\} \subset PREMIS(G)$ ($v \in CONC(G)$).

Definição 5.3 (Link divergente inicial (final)). Um link convergente $\{(u, v_1), (u, v_2)\}$ em N-Grafo G é *inicial (final)* se $u \in PREMIS(G)$ ($\{v_1, v_2\} \subset CONC(G)$).

Definição 5.4 (Propriedade *split* de um link). Seja G' um subgrafo gerador de G obtido pela remoção de um link l . Se G' possuir três componentes disjuntas (duas, caso l seja um link simples), então dizemos que l apresenta a propriedade *split*.

Definição 5.5 (Cut branch point). Um nó u é um *cut branch point* se ele for um ponto de ramificação de uma contração e de uma expansão.

Vimos que é simples cortar G em componentes menores caso ele possua um link simples inicial ou um link simples final. Esse procedimento também é fácil para os cenários abaixo:

1. G possui um link $l = \{(u_1, v), (u_2, v)\}$ *inicial conjuntivo convergente*: a remoção desse link gera três componentes disjuntas: uma composta apenas por u_1 , outra por u_2 e uma componente G' tal que $PREMIS(G') = (PREMIS(G) \cup \{v\}) - \{u_1, u_2\}$ e $CONC(G') = CONC(G)$. Logo, l possui a propriedade *split*.
2. G possui um link $l = \{(u, v_1), (u, v_2)\}$ *final disjuntivo divergente*: retiramos esse link e também são produzidas três componentes disjuntas: a primeira possui apenas v_1 , a segunda somente v_2 e uma componente G' tal que $PREMIS(G') = PREMIS(G)$ e $CONC(G') = CONC(G) \cup \{u\} - \{v_1, v_2\}$.
3. G possui um link $l = \{(u, v_1), (u, v_2)\}$ *inicial de expansão*: a extração aqui produz apenas duas componentes (caso contrário, teríamos chaveamentos desconexos). A primeira possui apenas a premissa da expansão e a segunda é uma componente G' tal que $PREMIS(G') = (PREMIS(G) \cup \{v_1, v_2\}) - \{u\}$ e $CONC(G') = CONC(G)$.
4. G possui um link $l = \{(u_1, v), (u_2, v)\}$ *final de contração*: este caso é como o anterior: apenas duas componentes são obtidas. Numa delas há apenas o vértice v e G' é tal que $PREMIS(G') = PREMIS(G)$ e $CONC(G') = (CONC(G) \cup \{u_1, u_2\}) - \{v\}$.

Assim como nos casos dos links simples (inicial e final), nos listados acima também é simples usar a hipótese de indução para obter uma derivação para G . Nos cenários 1 e 2 nós obtemos uma derivação para as componentes duas unitárias de acordo com o link em questão, aplicamos a hipótese de indução para a componente G' e finalmente obtemos uma derivação para G utilizando a regra do corte sobre as duas derivações anteriores.

Para a derivação no cenário 3, partimos da derivação Π de G' (hipótese de indução). Uma vez que G' possui nas suas premissas as duas conclusões do link de expansão (ocorrências distintas de uma mesma fórmula), a derivação para G pode ser obtida aplicando uma contração à esquerda em Π (ver caso 3 do teorema 4.8).

A contração é análoga: seja Π a derivação de G' obtida pela hipótese de indução. Aqui nas conclusões G' há as duas premissas da contração. Então uma derivação para G é alcançada aplicando uma contração à direita em Π (caso 4 do teorema 4.8).

O problema surge quando todos os links iniciais de G são disjuntivos divergentes e todos os finais são conjuntivos convergentes. Não é trivial quebrar G em N-Grafos menores (esse caso é análogo ao das *proof-nets* quando todos os links terminais são \otimes). Um exemplo desse caso pode ser visualizado na Figura 3.10: não podemos remover o link disjuntivo divergente inicial no primeiro N-Grafo, pois seriam obtidas apenas duas componentes (uma composta apenas por $A \vee A$ e a outra com os demais vértices). Além disso, a maior componente não seria sequer um N-Grafo, pois apresentaria chaveamentos desconexos. Pelo mesmo motivo, também não podemos remover o link conjuntivo convergente final.

No apêndice D reproduzimos a principal parte da prova de sequentização dos N-Grafos feita por de Oliveira [dO01]. Lá mostramos como “quebrar” um N-Grafo cujos links iniciais são todos disjuntivos divergentes e todos os finais são conjuntivos convergentes em N-Grafos menores.

5.2 Nós maximais e links *splits*

Ao compararmos a prova do teorema 4.8 com a do apêndice D, vemos que a primeira agrupa vários casos para provar a existência do nó *split* (N-Grafos com mais de um link, sendo que nenhum inicial é de expansão e nenhum final é de contração), enquanto que a segunda prova a existência de um link *split* (ou de um *cut branch point*) para um grupo menor de N-Grafos (com todos os links iniciais disjuntivos divergentes e todos os finais conjuntivos convergentes).

De forma semelhante ao que foi visto no apêndice D, é bastante simples encontrar um nó maximal em relação a \ll para muitos casos. O único complicado é o mesmo do teorema D.1, ou seja, quando todos os links iniciais são disjuntivos divergente e os finais conjuntivos convergentes. Entretanto, demonstramos também que mesmo neste caso haverá um nó maximal e este será o nó *split*.

Nesta seção mostraremos como encontrar nós maximais nos N-Grafos com mais de um link. Não consideraremos os casos em que todos os links iniciais são de expansão e os finais de contração. Afinal, nesses casos não temos um vértice maximal. Todavia, isso não é problema para a sequentização, pois nesses casos podemos aplicar contrações à esquerda (para cada expansão) e à direita (no caso da contração).

5.2.1 Link simples inicial

Considere N um N-Grafo com algum vértice não terminal (N apresenta pelo menos dois links) e com um link simples inicial (A_1, C) (Figura 5.1). Então N representa uma derivação para $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_m$. Seja N_1 o resultado obtido após a remoção do vértice A_1 e da aresta (A_1, C) . É imediato verificar que todos os chaveamentos associados a N são árvores se e somente se todos os associados a N_1 também o forem. Logo, N_1 também é um N-Grafo.

Mais do que isso, N_1 é um sub-N-Grafo de N e representa uma derivação para $C, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_m$. Desde que C é uma premissa de N_1 , pelo corolário 4.6 sabemos que $eC_V = N_1$.

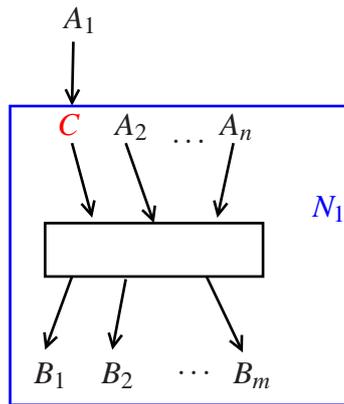


Figura 5.1 N-Grafo com um link simples inicial.

Voltemos agora para N : sabemos que $A_1 \in eC^\wedge$ (de acordo com o item 2 do teorema 4.2). Portanto, concluímos que $wC = eC^\wedge \cup eC_\vee = N$. Logo C é um nó maximal e possui a propriedade *split*.

5.2.2 Link simples final

De maneira análoga nós analisamos o caso em que N apresenta um link simples final (C, B_1) (Figura 5.2). Agora considere N_1 o grafo de prova resultante da remoção do nó B_1 e da aresta (C, B_1) . Como N é um N-Grafo, todos os chaveamentos de N_1 também serão árvores. Portanto, N_1 é um sub-N-Grafo e representa uma derivação para $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash C, B_2, \dots, B_m$. Uma vez que C é uma conclusão de N_1 , o corolário 4.3 nos garante que $eC^\wedge = N_1$. Pela condição 7 do teorema 4.5 sabemos que $B_1 \in eC_\vee$. Deduzimos então que $wC = N$ e obtemos um nó *split* para N .

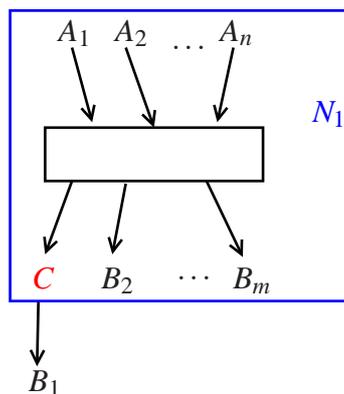


Figura 5.2 N-Grafo com um link simples final.

5.2.3 Link conjuntivo convergente inicial

Suponha que em N há um link convergente inicial $\{(A_1, C), (A_2, C)\}$ e que N_1 é gerado pela remoção das arestas deste link e dos nós A_1 e A_2 (Figura 5.3). Então N_1 é um sub-N-Grafo e representa uma derivação para $C, A_3, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_m$. Assim como na seção 5.2.1, com o corolário 4.6 nós inferimos que $eC_V = N_1$ porque C é uma premissa de N_1 . Com o item 3 do teorema 4.2, deduzimos que $\{A_1, A_2\} \subset eC^\wedge$. Logo, $wC = eC^\wedge \cup eC_V = N$ e provamos que C é maximal.

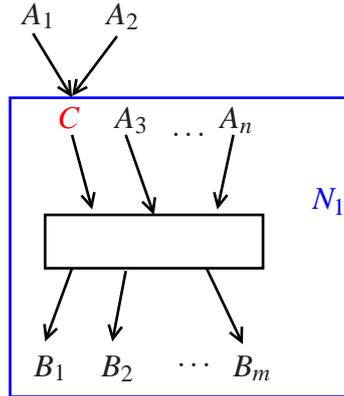


Figura 5.3 N-Grafo com um link conjuntivo convergente inicial.

5.2.4 Link disjuntivo divergente final

Aqui consideraremos o caso em que N possui um link disjuntivo divergente final $\{(C, B_1), (C, B_2)\}$ e N_1 é resultante da eliminação deste link, juntamente com as suas conclusões (Figura 5.4). Dado que N é um N-Grafo, concluímos imediatamente que N_1 é um sub-N-Grafo e representa uma prova para o sequente $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash C, B_3, \dots, B_m$. O corolário 4.3 nos informa que $eC^\wedge = N_1$ e o tópico 9 do teorema 4.5 nos garante que $\{B_1, B_2\} \subset eC_V$. Portanto, $eC^\wedge \cup eC_V = N$ e assim C tem a propriedade *split*.

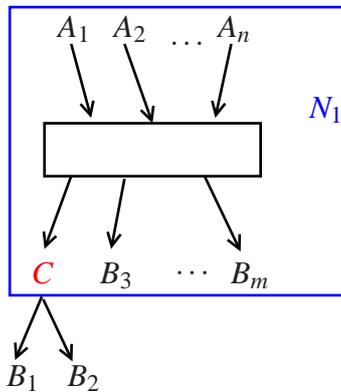


Figura 5.4 N-Grafo com um link disjuntivo divergente final.

5.2.5 Iniciais disjuntivos divergentes e finais conjuntivos convergentes

Diferente dos casos anteriores, aqui não é imediato encontrar um nó maximal, embora saibamos que ele sempre existe. Conforme apresentado no apêndice D, aqui também pode haver mais de um nó com a propriedade *split*. Reproduziremos aqui os N-Grafos utilizados na prova do teorema D.1, destacando os nós maximais na ordem \ll .

O teorema D.1 afirma que para esses N-Grafos há um link inicial com a propriedade *split*, ou um final com a propriedade *split* ou um vértice *cut branch point*. Para cada um desses casos, podemos encontrar nós maximais da seguinte forma:

1. N apresenta um link final conjuntivo convergente $\{(X_1, Y), (X_2, Y)\}$ com a propriedade *split*. A remoção do link gera três componentes:
 - a. N_1 , a qual contém X_1 como uma de suas conclusões;
 - b. N_2 , que possui X_2 nas suas conclusões;
 - c. N_3 composta apenas pelo vértice Y .

Sabemos então que $eX_1^\wedge = N_1$ e $eX_2^\wedge = N_2$. Seja A_1 uma fórmula de N_1 . O caminho de A_1 para X_1 em qualquer chaveamento não passa por nenhuma aresta de N_2 , pois essas componentes são disjuntas. Logo, não passa por nenhuma premissa de X_2 . Concluimos que em qualquer chaveamento haverá um caminho de A_1 para X_2 sem passar por premissas de X_2 : vá de A_1 até X_1 sem passar pela conclusão de X_1 (isso é possível pois $A_1 \in eX_1^\wedge$), passe pela aresta (X_1, Y) e finalmente chegue até X_2 por (X_2, Y) (as arestas podem ser percorridas no sentido contrário).

Portanto, $A_1 \in eX_2^\wedge$. Como A_1 é qualquer nó de eX_1^\wedge e $eX_1^\wedge = N_1$, concluimos que $N_1 \subsetneq eX_2^\wedge$. Pelo item 8 do teorema 4.5, inferimos que $Y \in eX_{1v}$ e $Y \in eX_{2v}$. Logo, $eX_2^\wedge \cup eX_{2v} = N$ e assim X_2 , caso não seja um nó terminal, é maximal. De forma análoga provamos que se X_1 não for terminal, também será maximal.

2. N apresenta um link inicial disjuntivo divergente $\{(X, Y_1), (X, Y_2)\}$ com a propriedade *split*. A remoção aqui também produz três componentes disjuntas:
 - a. N_1 , a qual contém Y_1 como uma de suas premissas;
 - b. N_2 , que possui Y_2 nas suas premissas;
 - c. N_3 composta apenas pelo vértice X .

Aqui é imediato que $eY_{1v} = N_1$ e $eY_{2v} = N_2$. Usando raciocínio semelhante, concluimos que $N_2 \subsetneq eY_1^\wedge$ e $N_1 \subsetneq eY_2^\wedge$. Pelo item 4 do teorema 4.2 deduzimos que $X \in Y_1^\wedge$ e $X \in Y_2^\wedge$. Como é garantido que pelo menos Y_1 ou Y_2 não é uma conclusão de N (se ambos fossem, N possuiria apenas um link), aqui também encontramos um nó maximal.

3. N possui um vértice X cut branch point. Então possível dividir N em dois sub-N-Grafos cuja intersecção é o nó X :
 - a. N_1 possui X como uma de suas conclusões;

- b. N_2 apresenta X como uma de suas premissas. Imediatamente inferimos que $eX^\wedge = N_1$ e $eX_\vee = N_2$. Com isso concluímos que X é maximal.

Vimos que para cada link com a propriedade *split* há até dois nós maximais e todo *cut branch point* também é maximal. Mostramos agora os N-Grafos utilizados na prova do teorema D.1 e destacamos neles todos os nós maximais. Ressaltamos que os terminais não fazem parte do domínio de \ll .

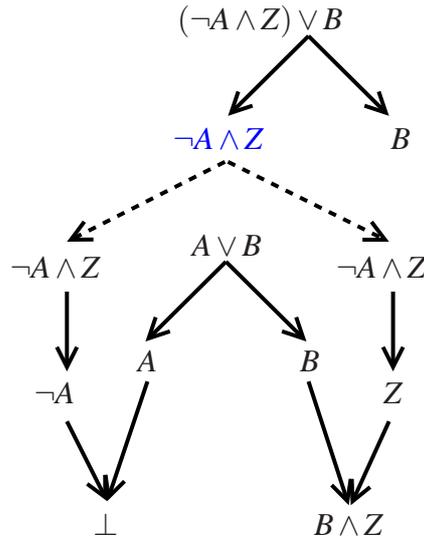


Figura 5.5 Nó maximal do N-Grafo de $(\neg A \wedge Z) \vee B, A \vee B \vdash B, B \wedge Z$.

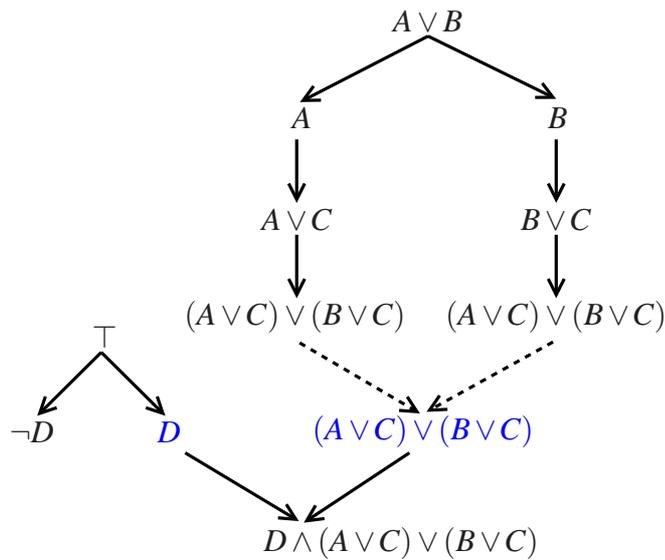


Figura 5.6 Nós maximais do N-Grafo de $A \vee B \vdash \neg D, D \wedge (A \vee C) \vee (B \vee C)$.

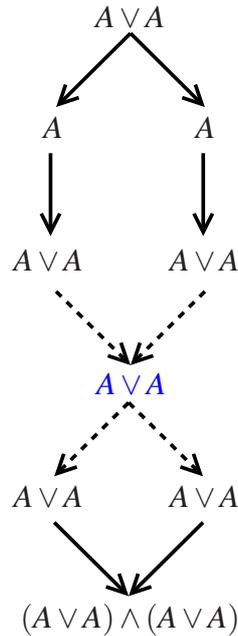


Figura 5.7 Nó maximal do N-Grafo de $A \vee A \vdash (A \vee A) \wedge (A \vee A)$.

5.3 Revisão da prova original

Para o desenvolvimento dos sub-N-Grafos e a construção de uma nova sequentização, a prova antiga foi estudada e alguns problemas foram encontrados nos casos que envolvem um *cut branch point*.

5.3.1 Meta-aresta

Embora os sub-N-Grafos foram feitos apenas para o fragmento sem a implicação, a prova original do teorema *split* aplica-se para o sistema completo [dO01]. Com o link $\rightarrow -I$, o *cut branch point* pode falhar ao tentar dividir a prova em dois N-Grafos menores: um formado pela componente superior ao *cut branch point* e outra pela inferior (Figura 5.11).

5.3.2 Existência do *cut branch point*

Esse problema surge até mesmo para o fragmento formado apenas pelos conectivos $\{\wedge, \vee, \neg\}$. O problema aqui é que, caso não haja nenhum link divergente inicial e nenhum convergente final capaz de dividir o N-Grafo, não temos garantias da existência do *cut branch point*.

No N-Grafo do lado esquerdo da Figura 3.10 há um *cut branch point*. Conforme provamos, o império total desse nó corresponde a todo o N-Grafo. Porém, caso adicionemos um link simples ao nó maximal, o N-Grafo resultante será um contra-exemplo para o teorema D.1 pois não terá mais *cut branch point* (Figura 5.12).

Diferente do caso anterior, este faz parte do fragmento $\{\wedge, \vee, \neg\}$ e os sub-N-Grafos funcionam corretamente: a adição do link simples não “eliminou” o único nó maximal que havia

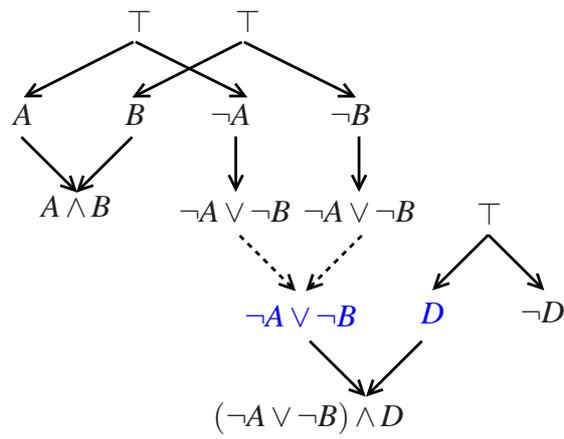


Figura 5.8 Nós maximais do N-Grafo de $\vdash A \wedge B, (\neg A \vee \neg B) \wedge D, \neg D$.

antes. Pelo contrário: o N-Grafo passou a ter dois nós maximais.

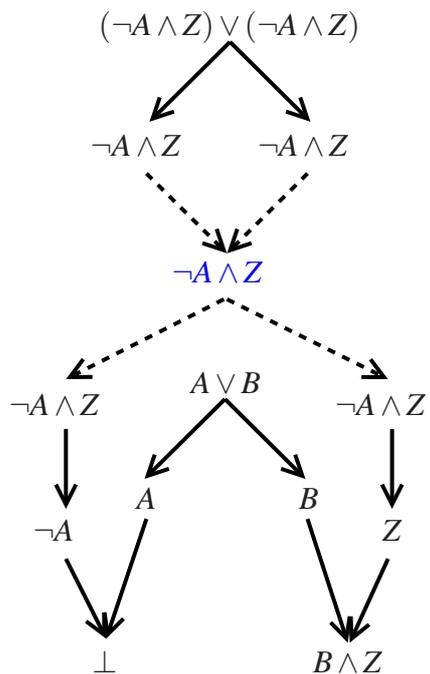


Figura 5.9 Nó maximal do N-Grafo de $(\neg A \wedge Z) \vee (\neg A \wedge Z), A \vee B \vdash B \wedge Z$.

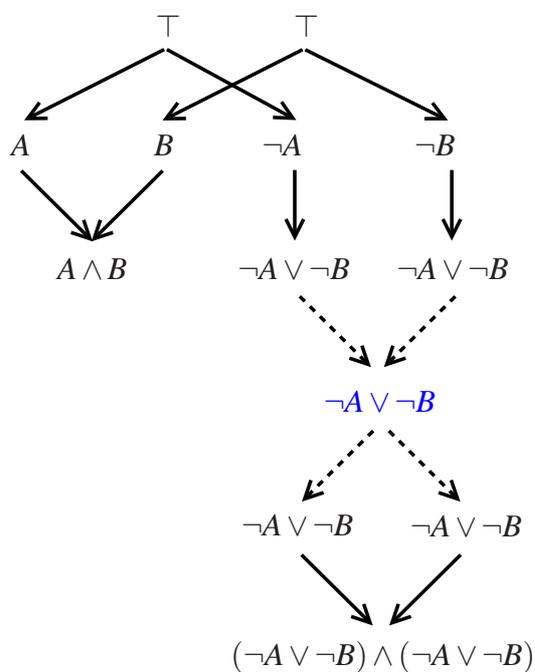


Figura 5.10 Nó maximal do N-Grafo de $\vdash A \wedge B, (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.

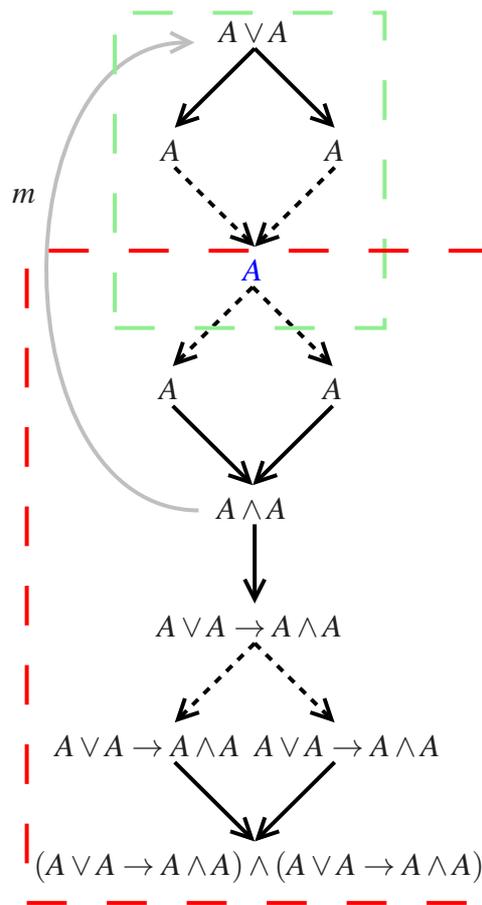


Figura 5.11 O *cut branch point* não divide a prova em dois N-Grafos devido à meta-aresta.

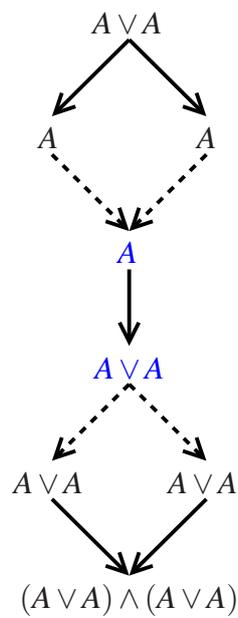


Figura 5.12 Não há *cut branch point*, mas há nós maximais.

Conclusão

Neste trabalho estudamos sistemas de prova que adotam critérios de corretude geométricos. Vimos as *proof-nets* para a MLL^- , estudamos seu critério de corretude e a primeira prova de sequentização, a qual foi feita por Girard e utilizava *trips* [Gir87]. Também analisamos a evolução do critério de corretude e da prova de *soundness*. Um grande avanço foi a técnica de Danos & Regnier [DR89]. A partir destes dois trabalhos, foram definidas as *trips* para os N-Grafos e com elas descobrimos como construir os impérios.

Com o conceito de grafo D-R, surgiram outros trabalhos na área. Girard utilizou o novo critério para provar a corretude das *proof-nets* com quantificadores de forma mais simples [Gir91]. Desse artigo vimos principalmente os lemas de *nesting* dos impérios. Houve também o trabalho de Bellin & van de Wiele, o qual utilizou o conceito de *kingdoms* e a ordem parcial criada por eles para encontrar o nó *split* [BvdW95].

Então Robinson generalizou a prova de sequentização para sistemas que utilizavam o critério de Danos & Regnier, mas sem links divergentes chaveáveis [Rob03]. Embora esses trabalhos nos mostraram que uma boa alternativa seria a definição de uma ordem parcial para encontrarmos o nó *split*, essas abordagens não poderiam ser aplicadas integralmente aos N-Grafos devido ao link de expansão (divergente e chaveável).

Como os impérios e reinos desses sistemas, que não descem pela fórmula principal, não eram suficientes para encontrarmos o nó *split* nos N-Grafos, propomos a contrapartida dos já conhecidos impérios dessas *proof-nets*: o império do sul. Com ele, introduzimos também o conceito de império total e assim foi possível a definição de uma ordem parcial nos nós não terminais (cumprindo o papel dos *kingdoms* nos outros sistemas). Dessa forma, conseguimos encontrar o nó *split*.

Com essas novas estruturas chegamos não somente à sequentização para os N-Grafos, como também a um novo método para realizarmos cortes precisos em provas. Da mesma forma que Robinson [Rob03] generalizou o trabalho de Bellin & Wielle [BvdW95] para obter um método geral para sistemas que adotam o critério de Danos & Regnier, mas que adotam links chaveáveis apenas convergentes, nós estendemos a sua técnica para aplicá-la a sistemas com links chaveáveis dos dois tipos de geometria: convergentes e divergentes.

Embora os links das *proof-nets* de Girard e de Robinson sejam inspirados nas regras do cálculo de sequentes (os primeiros na MLL^- e os segundos na lógica clássica) e os dos N-Grafos sejam baseados na dedução natural, tornamos explícitas as simetrias presentes entre eles. Afinal, os três adotam critérios de corretude semelhantes. Dessa forma tornamos mais transparente a ligação entre esses sistemas de provas.

A partir disso alguns avanços nos N-Grafos podem estar próximos. Agora que as semelhanças entre os sistemas estão melhor evidenciadas, uma investigação nas provas de Girard e Bellin

& Wielle para a corretude das *proof-nets* para a primeira ordem pode revelar uma extensão dos N-Grafos para a lógica de predicados.

O estudo da uma nova prova de sequentização possibilitou a revisão da prova antiga: vimos que com o sistema completo (com a implicação), o teorema *split* antigo pode falhar no momento de cortar a prova ao gerar subgrafos de prova que não são N-Grafos. Verificamos também que o teorema não garante a existência de um *cut branch point*, mesmo quando não há links iniciais e nem finais capazes de dividir a prova. Este último caso funciona bem com a nova prova de sequentização. Porém, o estudo desta dissertação não inclui a implicação. Logo, um trabalho a ser feito é a correção da prova original para o sistema completo.

Outra pesquisa relacionada é a revisão da prova de corretude para o fragmento dos N-Grafos Intuicionistas [QCdOdQdP13] a partir da técnica aqui proposta. Assim como o trabalho para os N-Grafos revelou vários aspectos interessantes vistos aqui, uma discussão na versão intuicionista pode trazer bons resultados. O uso dos impérios também pode revelar um estudo dos ciclos e uma prova da normalização mais simples do sistema do que a existente [AdOdQ11].

Já há um estudo de verificação de grafos-de-prova em tempo linear [ACdOdQ13] e também a busca de um algoritmo de sequentização. Conforme apresentado nos teoremas 4.3 e 4.6, é possível computar os impérios de uma fórmula em tempo linear. A ordenação definida pelos impérios totais pode ser útil para descobrir a ordem das derivações no cálculo de sequentes de um N-Grafo.

Mapeamento de N-Grafos com um único link para o cálculo de seqüentes

Aqui relacionamos as regras do cálculo de seqüentes, o qual foi proposto por Gentzen [Gen64], com os links dos N-Grafos. Inicialmente mostramos as regras do cálculo e depois exibimos como mapear N-Grafos compostos por apenas um link para derivações no cálculo de seqüentes.

A.1 Regras

Os seqüentes mais simples do cálculo, de onde partem as derivações, são os axiomas:

$$A \vdash A$$

Os seqüentes maiores são formados aplicando-se as regras de inferência, que são divididas em dois grupos: as estruturais (Tabela A.1) e as lógicas (Tabela A.2).

Enfraquecimento	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} WL$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} WR$
Contração	$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} CL$	$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} CR$
Permutação	$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta} IL$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'} IR$
Corte	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} CUT$	

Tabela A.1 Regras estruturais.

$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge L_1$	$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge L_2$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge R$
$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee L$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee R_1$	$\frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee R_2$
$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \rightarrow L$	$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow R$	
$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg L$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg R$	

Tabela A.2 Regras lógicas.

A.2 Derivações dos links dos N-Grafos

Mostraremos como N-Grafos com apenas um link podem ser mapeados para derivações em cálculo de sequentes. Este procedimento faz parte da prova do teorema 4.8. Uma vez que grafos-de-prova formados apenas por um link de contração ou expansão não são N-Grafos (pois seus chaveamentos são desconexos), não são feitos mapeamentos para esses links.

Conforme é dito na prova do teorema, usamos sem perda de generalidade: \top como $A \vee \neg A$ e \perp como $A \wedge \neg A$, em que a fórmula A pertence à premissa ou à conclusão do link em questão. Embora o capítulo 4 seja referente ao fragmento sem a implicação, como o link $\rightarrow -E$ é por si só um N-Grafo, sua derivação também é apresentada (diferente do link $\rightarrow -I$, o qual não é um N-Grafo).

A rigor, na maioria das regras as fórmulas no cálculo de sequentes só podem ser operadas quando estão adjacentes ao símbolo “ \vdash ”. Porém, por questões de simplicidade, as permutações são omitidas. Logo, algumas operações são aplicadas a fórmulas que não estão juntas ao *turnstile*.

Os links dos N-Grafos (exceto a contração e a expansão) são exibidos nas Figuras 3.2, 3.3, 3.4. Por conveniência, as suas arestas estão aqui descritas. Eles estão agrupados de forma a ressaltar a simetria do sistema.

$$\frac{A \vdash A}{A \vdash A \vee B} \vee R_1 \quad \frac{A \vdash A}{A \wedge B \vdash A} \wedge L_1$$

Tabela A.3 $\vee - I_1 = (A, A \vee B)$ e $\wedge - E_1 = (A \wedge B, A)$.

$$\frac{B \vdash B}{B \vdash A \vee B} \vee R_2 \quad \frac{B \vdash B}{A \wedge B \vdash B} \wedge L_2$$

Tabela A.4 $\vee - I_2 = (B, A \vee B)$ e $\wedge - E_2 = (A \wedge B, B)$.

$$\frac{A \vdash A}{A \wedge \neg A \vdash A} \wedge L_1 \quad \frac{A \vdash A}{A \vdash A \vee \neg A} \vee R_1$$

Tabela A.5 $\perp - enfraq.simples = (\perp, A)$ e $\top - enfraq.simples = (A, \top)$.

$$\frac{\frac{A \vdash A}{A, B \vdash A} WL \quad \frac{B \vdash B}{A, B \vdash B} WL}{A, B \vdash A \wedge B} \wedge R \quad \frac{\frac{A \vdash A}{A \vdash A, B} WR \quad \frac{B \vdash B}{B \vdash A, B} WR}{A \vee B \vdash A, B} \vee L$$

Tabela A.6 $\wedge - I = \{(A, A \wedge B), (B, A \wedge B)\}$ e $\vee - E = \{(A \vee B, A), (A \vee B, B)\}$.

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{A, A \vdash A} WL \quad \frac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash \neg A} \neg L}{A \vdash A, \neg A} \neg R \quad \frac{\frac{\neg A \vdash \neg A}{\neg A \vdash A, \neg A} \neg R \quad \frac{A \vdash A}{\neg A \vdash A, \neg A} WR}{A \vee \neg A \vdash A, \neg A} \vee L \quad \frac{\frac{A \vdash A}{A \vdash A, A} WR \quad \frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \neg R}{A, \neg A \vdash A} \neg L \quad \frac{\frac{\neg A \vdash \neg A}{A, \neg A \vdash \neg A} \neg L \quad \frac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash \neg A} WL}{A, \neg A \vdash A \wedge \neg A} \wedge R$$

Tabela A.7 $\neg - I = \{(\top, A), (\top, \neg A)\}$ e $\neg - E = \{(A, \perp), (\neg A, \perp)\}$.

$$\frac{\frac{A \vdash A}{A, A \vdash A} WL \quad \frac{\frac{A \vdash A}{A \vdash A, A} WR \quad \frac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash A} \neg L}{A \vee \neg A, A \vdash A} \vee L \quad \frac{\frac{A \vdash A}{A \vdash A, A} WR \quad \frac{A \vdash A}{A, A \vdash A} WL}{A \vdash A, A \wedge \neg A} \wedge R$$

Tabela A.8 $\top - enfraq.convergente = \{(\top, A), (A, A)\}$ e $\perp - enfraq.divergente = \{(A, A), (A, \perp)\}$.

$$\frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A, A \rightarrow B \vdash B} \rightarrow L$$

Tabela A.9 $\rightarrow - E = \{(A, B), (A \rightarrow B, B)\}$.

Correspondência entre os critérios Danos-Regnier e no *shorttrip*

Apresentamos aqui a prova do teorema 4.1. Ela é baseada na prova feita por Danos-Regnier [DR89], quando eles simplificaram o critério *no shorttrip condition*, o qual envolvia o chaveamento de todos os links *times* e *par*, para a conectividade e aciclicidade de uma classe de subgrafos, os quais envolvem apenas os chaveamentos dos links *par*.

Antes de procedermos com a prova, definimos alguns conceitos que serão utilizados por ela.

Definição B.1 (Grafo D-R). Seja G um grafo de prova. Um *grafo D-R* de G é um grafo não direcionado obtido a partir de G da seguinte maneira:

1. para cada link de *contração*, remover uma aresta;
2. para cada link de *expansão*, remover uma aresta;
3. para cada vértice $p \in PREMIS(G)$ e $c \in CONC(G)$, adicionar nós v_p e v_c , juntamente com as arestas (v_p, p) e (c, v_c) . Caso o vértice seja uma premissa e ao mesmo tempo uma conclusão (um axioma), apenas um nó (e a aresta correspondente) deve ser adicionado.

Como os grafos D-R não são direcionados e o critério de corretude diz respeito à conectividade e aciclicidade, a adição de um nó para cada premissa e um para cada conclusão não influenciam no critério.

Os passos para associar cada grafo D-R de G a uma família de *trips* são definidos a seguir:

1. duplicar cada aresta do grafo D-R e atribuir a cada uma delas direções opostas;
2. escolher uma direção L ou R para cada link conjuntivo convergente e para cada link disjuntivo divergente;
3. realizar a *trip* respeitando as regras a seguir:
 - ao chegar num link de *contração* ou *expansão*, segue-se pela aresta com a mesma orientação da qual chegou;
 - ao chegar num link *conjuntivo convergente* ou *disjuntivo divergente*, a escolha da aresta é feita de acordo com a direção escolhida: L ou R (Figuras 4.5 e 4.6).

As escolhas para os links simples, os nós de premissas e os de conclusões são imediatas.

Esses conceitos são mostrados na figura B.1. Inicialmente há um grafo de prova com um link de contração. Em seguida é apresentado um grafo D-R: escolhe-se a aresta da esquerda da contração e são adicionados os vértices p_1 , p_2 e c , cada um com as suas respectivas arestas. Na última parte as arestas são duplicadas e é exibida uma *trip* iniciada subindo em B com ambos os links conjuntivo convergente e disjuntivo divergente chaveados para L .

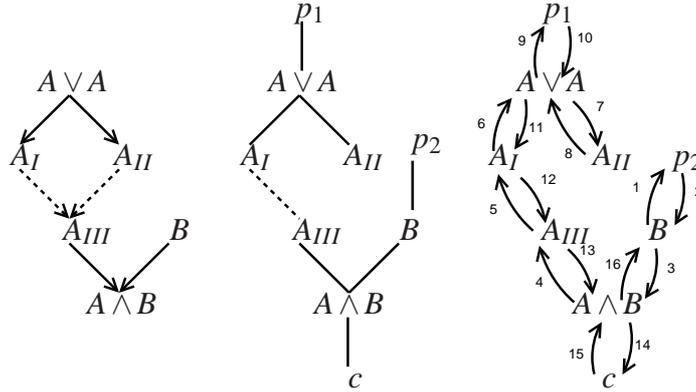


Figura B.1 Grafo de prova, grafo D-R associado e grafo com as arestas para simular *trips*.

Notamos que a ordem de visita das arestas corresponde à *longtrip* obtida quando todos os links do grafo de prova são chaveados para a esquerda:

$$B^\wedge, B_\vee, A_{III}^\wedge, A_I^\wedge, A_{II\vee}, A_{II}^\wedge, A \vee A^\wedge, A \vee A_\vee, A_{I\vee}, A_{III\vee}, A \wedge B_\vee, A \wedge B^\wedge, B^\wedge$$

Algumas visitas da partícula na *trip* são simuladas por duas arestas do grafo. Por exemplo, a *trip* começa em B^\wedge , movimento que é representado pela aresta 1. Porém, o movimento B_\vee é emulado pelas arestas 2 e 3. O mesmo ocorre com A_{III}^\wedge , o qual é realizado em 4 e 5. Logo, notamos que cada movimento da *trip* pode ser simulado por uma ou duas arestas.

Conforme foi afirmado antes, os nós de premissas e conclusões adicionados não influem na conectividade e nem na aciclicidade. Eles são apenas um artifício para simularem as *trips* em premissas (Figura 4.2) e conclusões (Figura 4.3).

O grafo D-R da figura é capaz de simular uma família de *trips*: basta alterar os chaveamentos dos links conjuntivo convergente e disjuntivo divergente. Portanto, ele representa todas as *trips* em que o link de contração está chaveado para a esquerda.

Logo, para provarmos que o critério de corretude dos N-Grafos (todos os chaveamentos devem ser árvores) é equivalente ao *no shorttrip*, basta mostrarmos que, dado um grafo D-R, ele é acíclico e conexo se e somente se todas as suas *trips* associadas são *longtrips*. Procedemos agora com a prova.

Demonstração.

- *Ida.* A prova é feita pela contrapositiva: se o grafo for cíclico ou desconexo, então há alguma *shorttrip*. Considere que o grafo possua um ciclo. Então é possível criar uma *shorttrip* passando pelas arestas duplicadas dos vértices do ciclo (e possivelmente por nós

de premissas e conclusões), pois a ordem de visita das arestas segue os chaveamentos dos links. Se o grafo for desconexo, a obtenção de uma *shorttrip* é imediata.

- *Volta*. A prova é feita por indução no número de nós (incluindo os de premissa e conclusão adicionados). Se o grafo é uma árvore, então existe um nó com apenas uma aresta incidente a ele.
 1. *Caso base: o grafo possui apenas dois nós*. Como sempre adicionamos um nó para a construção do grafo D-R, o caso base consiste de dois vértices. Então ele representa um axioma. Logo, não há *shorttrip*, pois a única *trip* possível é A^\wedge, A_v, A^\wedge .
 2. *Há um nó com grau um ligado a uma premissa de um link de expansão*. Remova a premissa e a aresta incidente a ela: a conclusão da expansão passa a ser uma premissa. O grafo resultante possui um nó a menos. Logo, pela hipótese de indução, todas as *trips* no grafo restante são *longtrips*. Mas a *trip* no grafo completo corresponde a uma *trip* no grafo menor juntamente com os dois movimentos da premissa da expansão. Logo, todas as *trips* obtidas são *longtrips*.
 3. *Há um nó com grau um ligado a uma conclusão de um link de contração*. Este caso é análogo ao 2: removemos a conclusão da contração e a premissa do link passa a ser uma conclusão do grafo menor.
 4. *Há um nó com grau um ligado a uma premissa v de um link simples*. Removemos v , o nó de premissa associado a v e as duas arestas incidentes a ele (a conclusão do link simples passa a ser uma premissa no grafo menor). As *trips* no grafo original correspondem à: descer por v para a conclusão do link simples, realizar a *trip* no grafo menor, subir da conclusão do link simples até v . Pela hipótese de indução, as *trips* associadas ao grafo menor são *longtrips*, pois o grafo menor também é uma árvore. Portanto, as *trips* no grafo original também são *longtrips*.
 5. *Há um nó com grau um ligado a uma conclusão v de um link simples*. O mesmo raciocínio de 4 aplicado a uma conclusão.
 6. *Há um nó com grau um ligado a uma premissa v_1 de um link conjuntivo convergente*. Sejam v_2 e v_c a outra premissa e a conclusão do link conjuntivo convergente, respectivamente. Removemos as arestas do link: (v_1, v_c) e (v_2, v_c) . Como o grafo é acíclico e conexo, o grafo resultante possui três componentes acíclicas e conexas: uma componente formada apenas por v_1 (e seu nó de premissa), uma cuja conclusão é v_2 e a outra cuja premissa é v_c . Uma *trip* no grafo original com o link conjuntivo convergente chaveado para L corresponde a descer de v_1 até v_c , visitar a componente de v_c , subir de v_c para v_2 , visitar a componente de v_2 e descer por v_2 e subir por v_1 (Figura 4.5, lado esquerdo). Pela hipótese de indução, as *trips* das componentes de v_c e v_2 são *longtrips*. Logo, qualquer *trip* com o link conjuntivo convergente chaveado para L também será uma *longtrip*. O caso do chaveamento para R é análogo. Portanto, todas as *trips* associadas ao grafo original são *longtrips*.
 7. *Há um nó com grau um ligado a uma conclusão v_1 de um link disjuntivo divergente*. O procedimento segue do caso 6.

8. *Há um nó com grau um ligado a uma premissa v de um link disjuntivo divergente.* Então há três arestas incidentes ao nó disjuntivo divergente: o vértice da premissa (com grau um) e as duas conclusões. Remova o vértice de premissa, o nó v e as três arestas incidentes a ele. Então essas remoções geram duas árvores (caso contrário, o grafo original não seria acíclico e conexo). Logo, uma *trip* no grafo original consiste das *trips* em cada uma das componentes, mais a orientação do link disjuntivo divergente (L ou R), mais a visita a v (com o seu nó de premissa). Pela hipótese de indução, as *trips* associadas às duas componentes menores são longas. Portanto, as correspondentes *trips* no grafo original também são longas.
9. *Há um nó com grau um ligado a uma conclusão v de um link conjuntivo convergente.* Este caso é similar ao anterior.

□

Construção do império do norte por meio de *trips*

Após definir os *empires* por meio de *trips*, Girard mostra como eles são construídos de acordo com os links da MLL^- (Fatos 2.9.4, [Gir87]). Aqui provamos como os impérios do norte são construídos nos N-Grafos (teorema 4.2).

Demonstração.

1. $A \in eA^\wedge$.

Trivial pela definição de *empires*.

2. **Se $\frac{X}{Y}$ for um link simples e $Y \in eA^\wedge$, então $X \in eA^\wedge$.**

Como $Y \in eA^\wedge$, Y^\wedge e Y_\vee estão no intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee . Uma vez que X_\vee ocorre imediatamente antes de Y_\vee e X^\wedge logo após Y^\wedge (Figura 4.4), X_\vee e X^\wedge também estão no intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee . Portanto, $X \in eA^\wedge$.

3. **Se $\frac{X_Y}{Z}$ for um link conjuntivo convergente e $Z \in eA^\wedge$, então $X, Y \in eA^\wedge$.**

Considere uma *trip* em que $\frac{X_Y}{Z}$ está chaveado para L . Como X_\vee ocorre no instante anterior a Z_\vee , Y^\wedge no momento seguinte a Z^\wedge (Figura 4.5) e $Z \in eA^\wedge$, X_\vee e Y^\wedge estão no intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee .

Agora suponha que Y_\vee e X^\wedge não estão em A^\wedge, \dots, A_\vee . Uma vez que $Z \in eA^\wedge$, há duas possibilidades para uma *trip* partindo de A^\wedge alcançar o link em questão: ou chega primeiro em Z^\wedge , ou em X_\vee . Observe que Z^\wedge e Z_\vee devem ficar dentro de A^\wedge, \dots, A_\vee (pois $Z \in eA^\wedge$), mas Y_\vee e X^\wedge não (essa é suposição).

$$\begin{array}{c}
 \text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, Z^\wedge, Y^\wedge, \underbrace{\dots}_2, X_\vee, Z_\vee, \underbrace{\dots}_3, A_\vee, \overbrace{\underbrace{\dots}_4, Y_\vee, X^\wedge, \underbrace{\dots}_5}}{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge \\
 \\
 \text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, X_\vee, Z_\vee, \underbrace{\dots}_{2'}, Z^\wedge, Y^\wedge, \underbrace{\dots}_{3'}, A_\vee, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, Y_\vee, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{5'}}}{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge
 \end{array}$$

Se alterarmos apenas o chaveamento de $\frac{X_Y}{Z}$ para R e mantivermos o dos demais, obtemos em cada caso (os trechos em reticências enumerados igualmente são comuns a ambas as *trips*):

$$\text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, Z^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_5, A^\wedge$$

$$\text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, X_V, Y^\wedge, \underbrace{\dots}_{3'}, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, Y_V, Z_V, \underbrace{\dots}_{2'}, Z^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{5'}}^{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge$$

Nas duas possibilidades existe contradição. Na primeira é gerada uma *shorttrip* no N-Grafo. Já na segunda Z^\wedge e Z_V são visitados fora do intervalo A^\wedge, \dots, A_V , mas $Z \in eA^\wedge$. Logo, a suposição de que Y_V e X^\wedge estão fora do intervalo A^\wedge, \dots, A_V quando o link está chaveado para L de ser falsa. Portanto, quando o link está chaveado para esquerda, as duas entradas de X e Y são visitadas em A^\wedge, \dots, A_V .

De forma análoga, provamos que isso também ocorre quando o link está chaveado para direita e assim $X, Y \in eA^\wedge$.

4. **Se $\frac{X}{Y^Z}$ for um link disjuntivo divergente e $Y \in eA^\wedge$ (ou $Z \in eA^\wedge$), então $X \in eA^\wedge$.**

Provaremos o caso em que $Y \in eA^\wedge$ (o de $Z \in eA^\wedge$ é análogo). Considere uma *trip* em que $\frac{X}{Y^Z}$ está chaveado para L . Como X_V ocorre imediatamente antes de Y_V (Figura 4.6) e $Y \in eA^\wedge$, então X_V está no intervalo A^\wedge, \dots, A_V . Precisamos mostrar que isso também ocorre com X^\wedge .

Suponha que X^\wedge está fora de A^\wedge, \dots, A_V . Já que $Y \in eA^\wedge$, existem duas possibilidades para uma *trip* iniciada em A^\wedge chegar no link: ou atinge primeiro Y^\wedge , ou X_V . Nessa *trip* as duas entradas de Y devem ser visitadas em A^\wedge, \dots, A_V (pois $Y \in eA^\wedge$), mas X^\wedge não (suposição).

$$\text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1}, Y^\wedge, Z_V, \underbrace{\dots}_{2}, X_V, Y_V, \underbrace{\dots}_{3}, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4}, Z^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{5}}^{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge$$

$$\text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, X_V, Y_V, \underbrace{\dots}_{2'}, Y^\wedge, Z_V, \underbrace{\dots}_{3'}, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, Z^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{5'}}^{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge$$

Se mudarmos apenas o chaveamento de $\frac{X}{Y^Z}$ para R e conservarmos o dos demais, é gerado em cada caso (os trechos em reticências marcados igualmente são comuns a ambas as *trips*):

$$\text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1}, Y^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{5}, A^\wedge$$

$$\text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, X_V, Z_V, \underbrace{\dots}_{3'}, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, Z^\wedge, Y_V, \underbrace{\dots}_{2'}, Y^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{5'}}^{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge$$

Chegamos à contradição nos dois casos. O primeiro representa uma *shorttrip* num N-Grafo. No segundo Y_V e Y^\wedge são visitados fora do intervalo A^\wedge, \dots, A_V , mas $Y \in eA^\wedge$. Portanto, a suposição de que X^\wedge está fora de A^\wedge, \dots, A_V quando o link está chaveado para L deve ser falsa. Concluímos que quando o link está chaveado para esquerda, as duas entradas de X são visitadas em A^\wedge, \dots, A_V .

Se $\frac{X}{Y\bar{Z}}$ estiver chaveado para R , é imediato que X^\wedge está no intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee . Então supomos que X_\vee está fora e procedendo de forma semelhante também chegamos a uma contradição. Logo, $X \in eA^\wedge$.

5. Se $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ for um link de expansão e $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA^\wedge$, então $X_p \in eA^\wedge$.

Se o link estiver chaveado para L , X_{p_\vee} ocorrerá imediatamente antes de $X_{c_{1\vee}}$ e X_p^\wedge depois de $X_{c_1}^\wedge$ (Figura 4.8). Dado que $X_{c_1} \in eA^\wedge$, no caso L temos que X_{p_\vee} e X_p^\wedge estão no intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee .

Quando $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ está chaveado para R , X_{p_\vee} é visitado no momento anterior a $X_{c_{2\vee}}$ e X_p^\wedge no posterior a $X_{c_2}^\wedge$ (Figura 4.8). Uma vez que $X_{c_2} \in eA^\wedge$, aqui X_{p_\vee} e X_p^\wedge também são visitados no intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee . Portanto, $X_p \in eA^\wedge$.

6. Se $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ for um link de contração e $X_c \in eA^\wedge$, então $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA^\wedge$.

Seja uma *trip* em que o link está chaveado para L . Visto que $X_{p_{1\vee}}$ é percorrido logo antes de X_{c_\vee} , $X_{p_1}^\wedge$ depois de X_c^\wedge (Figura 4.7) e $X_c \in eA^\wedge$, as duas entradas de X_{p_1} são visitadas no intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee .

Suponha que $X_{p_{2\vee}}$ e $X_{p_2}^\wedge$ estão fora de A^\wedge, \dots, A_\vee . Como $X_c \in eA^\wedge$, há apenas duas possibilidade para uma *trip* iniciada em A^\wedge chegar em $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$: ou passa primeiro por X_c^\wedge , ou por $X_{p_{1\vee}}$. Em ambos os casos as entradas de X_c são visitadas dentro do intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee (pois $X_c \in eA^\wedge$) e as de X_{p_2} fora (essa é a suposição).

$$\begin{array}{l}
 \text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, X_c^\wedge, X_{p_1}^\wedge, \underbrace{\dots}_2, X_{p_{1\vee}}, X_{c_\vee}, \underbrace{\dots}_3, A_\vee, \overbrace{\underbrace{\dots}_4, X_{p_{2\vee}}, X_{p_2}^\wedge, \underbrace{\dots}_5}}{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge \\
 \text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, X_{p_{1\vee}}, X_{c_\vee}, \underbrace{\dots}_{2'}, X_c^\wedge, X_{p_1}^\wedge, \underbrace{\dots}_{3'}, A_\vee, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, X_{p_{2\vee}}, X_{p_2}^\wedge, \underbrace{\dots}_{5'}}}_{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge
 \end{array}$$

Ao alterarmos apenas o chaveamento do link $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ para R e conservarmos o dos demais, obtemos em cada caso:

$$\begin{array}{l}
 \text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, X_c^\wedge, X_{p_2}^\wedge, \underbrace{\dots}_5, A^\wedge \\
 \text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, X_{p_{1\vee}}, X_{p_1}^\wedge, \underbrace{\dots}_{3'}, A_\vee, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, X_{p_{2\vee}}, X_{c_\vee}, \underbrace{\dots}_{2'}, X_c^\wedge, X_{p_2}^\wedge, \underbrace{\dots}_{5'}}}_{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge
 \end{array}$$

Ambos os cenários levam à contradição. O primeiro é uma *shorttrip* num N-Grafo. No segundo X_c é visitado fora do intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee . Todavia, $X_c \in eA^\wedge$. Portanto a suposição de que as duas passagens por X_{p_2} são feitas fora de A^\wedge, \dots, A_\vee quando o link está chaveado para L deve ser falsa.

No caso em que $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ está chaveado para R , é imediato que $X_{p_2 \vee}$ e $X_{p_2}^\wedge$ estão dentro de A^\wedge, \dots, A_\vee (Figura 4.7). Se supusermos que as duas entradas de X_{p_1} estão fora de A^\wedge, \dots, A_\vee , procedemos analogamente e também chegamos à contradição. Logo, $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA^\wedge$.

7. **Se $\frac{X}{Y}$ for um link simples, $X \neq A$ e $X \in eA^\wedge$, então $Y \in eA^\wedge$.**

Como $X \in eA^\wedge$, então X^\wedge e X_\vee estão no intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee . Uma vez que Y_\wedge ocorre imediatamente antes de X_\wedge e Y_\vee logo após X_\vee (Figura 4.4), então Y_\wedge e Y_\vee também estão no intervalo A^\wedge, \dots, A_\vee . Portanto, $Y \in eA^\wedge$.

8. **Se $\frac{X Y}{Z}$ for um link conjuntivo convergente, $X \neq A \neq Y$ e $X \in eA^\wedge$ (ou $Y \in eA^\wedge$), então $Z \in eA^\wedge$.**

Aqui provaremos o cenário em que $X \in eA^\wedge$. O de $Y \in eA^\wedge$ é semelhante e pode ser facilmente construído a partir do primeiro. Seja uma *trip* em que $\frac{X Y}{Z}$ está chaveado para L . Como Z_\vee é visitado justamente depois de X_\vee (Figura 4.5) e $X \in eA^\wedge$, Z_\vee é percorrido em A^\wedge, \dots, A_\vee .

Suponha que Z^\wedge está fora de A^\wedge, \dots, A_\vee . Uma vez que $X \in eA^\wedge$, uma *trip* partindo de A^\wedge pode alcançar o link de duas maneiras: passando primeiro por X_\vee , ou por Y_\vee . Em ambos os casos, as duas entradas de X devem estar em A^\wedge, \dots, A_\vee (pois $X \in eA^\wedge$) e Z^\wedge fora (suposição).

$$\begin{array}{l} \text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, X_\vee, Z_\vee, \underbrace{\dots}_2, Y_\vee, X^\wedge, \underbrace{\dots}_3, A_\vee, \overbrace{\underbrace{\dots}_4, Z^\wedge, Y^\wedge, \underbrace{\dots}_5}}{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge \\ \text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, Y_\vee, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{2'}, X_\vee, Z_\vee, \underbrace{\dots}_{3'}, A_\vee, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, Z^\wedge, Y^\wedge, \underbrace{\dots}_{5'}}}{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge \end{array}$$

Modificando apenas o chaveamento de $\frac{X Y}{Z}$ para R e preservando o dos outros links, chegamos às seguintes *trips*:

$$\begin{array}{l} \text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, X_\vee, Y^\wedge, \underbrace{\dots}_5, A^\wedge \\ \text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, Y_\vee, Z_\vee, \underbrace{\dots}_{3'}, A_\vee, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, Z^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{2'}, X_\vee, Y^\wedge, \underbrace{\dots}_{5'}}}{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge \end{array}$$

Aqui também encontramos contradição em ambos os cenários: uma *shorttrip* e uma *trip* em que as duas visitas a X são feitas fora de A^\wedge, \dots, A_\vee , embora $X \in eA^\wedge$. Logo, a suposição inicial de que Z^\wedge era percorrido fora de A^\wedge, \dots, A_\vee quando $\frac{X Y}{Z}$ está chaveado para L deve ser falsa.

O caso do chaveamento para direita é simétrico: vemos facilmente que Z^\wedge está em A^\wedge, \dots, A_\vee (pois é visitado antes de X^\wedge e $X \in eA^\wedge$) e a suposição de que Z_\vee está fora leva a uma contradição de forma semelhante. Portanto, $Z \in eA^\wedge$.

9. Se $\frac{X}{YZ}$ for um link disjuntivo divergente, $X \neq A$ e $X \in eA^\wedge$, então $Y, Z \in eA^\wedge$.

Provaremos que $Y \in eA^\wedge$ (a prova de $Z \in eA^\wedge$ é simétrica). Considere uma *trip* em que $\frac{X}{YZ}$ está chaveado para L . Visto que Y_V é visitado no momento seguinte a X_V (Figura 4.6) e $X \in eA^\wedge$, Y_V está em A^\wedge, \dots, A_V .

Suponha que Y^\wedge não é percorrido em A^\wedge, \dots, A_V . Como $X \in eA^\wedge$, uma *trip* iniciada em A^\wedge pode chegar no link pela primeira vez por dois locais: ou atinge primeiro X_V , ou Z^\wedge . Independente disso, X_V e X^\wedge devem ser visitados em A^\wedge, \dots, A_V (pois $X \in eA^\wedge$), mas Y^\wedge não (suposição).

$$\begin{array}{l} \text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, X_V, Y_V, \underbrace{\dots}_2, Z^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_3, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_4, Y^\wedge, Z_V, \underbrace{\dots}_5}}{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge \\ \text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, Z^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{2'}, X_V, Y_V, \underbrace{\dots}_{3'}, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, Y^\wedge, Z_V, \underbrace{\dots}_{5'}}}{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge \end{array}$$

Mudando apenas o chaveamento de $\frac{X}{YZ}$ para R e mantendo o dos outros links, as seguintes *trips* são geradas:

$$\begin{array}{l} \text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, X_V, Z_V, \underbrace{\dots}_5, A^\wedge \\ \text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, Z^\wedge, Y_V, \underbrace{\dots}_{3'}, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, Y^\wedge, X^\wedge, \underbrace{\dots}_{2'}, X_V, Z_V, \underbrace{\dots}_{5'}}}{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge \end{array}$$

Ambas as *trips* levam à contradição. A primeira é uma *shorttrip* e na segunda X^\wedge e X_V são percorridos fora de A^\wedge, \dots, A_V (entretanto $X \in eA^\wedge$). Portanto, a suposição inicial de que Y^\wedge é visitado fora de A^\wedge, \dots, A_V quando $\frac{X}{YZ}$ está chaveado para L deve ser falsa.

O caso em que o link está chaveado para R é análogo: é garantido que Y^\wedge é visitado em A^\wedge, \dots, A_V (pois ele é percorrido antes de X^\wedge e $X \in eA^\wedge$) e se supusermos que Y_V está fora de A^\wedge, \dots, A_V , chegaremos à contradição de forma semelhante. Portanto, $Y \in eA^\wedge$.

10. Se $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ for um link de expansão, $X_p \neq A$ e $X_p \in eA^\wedge$, então $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA^\wedge$.

Considere uma *trip* em que o link $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ está chaveado para L . Já que $X_{c_1}^\wedge$ é visitado imediatamente antes de X_p^\wedge , $X_{c_1 V}$ após $X_{p V}$ (Figura 4.8) e $X_p \in eA^\wedge$, as duas entradas de X_{c_1} são percorridas em A^\wedge, \dots, A_V .

Suponha que $X_{c_2}^\wedge$ e $X_{c_2 V}$ estão fora de A^\wedge, \dots, A_V . Como $X_p \in eA^\wedge$, há duas possibilidades para uma *trip* partindo de A^\wedge chegar no link $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$: passando primeiro por $X_{p V}$, ou por $X_{c_1}^\wedge$. Nos dois casos temos $X_{p V}$ e X_p^\wedge no intervalo A^\wedge, \dots, A_V (pois $X_p \in eA^\wedge$), mas $X_{c_2 V}$ e $X_{c_2}^\wedge$ fora (essa é a suposição).

$$\text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, X_{p_V}, X_{c_{1V}}, \underbrace{\dots}_2, X_{c_1^\wedge}, X_{p^\wedge}, \underbrace{\dots}_3, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_4, X_{c_2^\wedge}, X_{c_{2V}}, \underbrace{\dots}_5}}_{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge$$

$$\text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, X_{c_1^\wedge}, X_{p^\wedge}, \underbrace{\dots}_{2'}, X_{p_V}, X_{c_{1V}}, \underbrace{\dots}_{3'}, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, X_{c_2^\wedge}, X_{c_{2V}}, \underbrace{\dots}_{5'}}}_{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge$$

Alterando apenas o chaveamento de $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ para R e conservando o dos outros links, as seguintes *trips* são produzidas:

$$\text{I } A^\wedge, \underbrace{\dots}_1, X_{p_V}, X_{c_{2V}}, \underbrace{\dots}_5, A^\wedge$$

$$\text{II } A^\wedge, \underbrace{\dots}_{1'}, X_{c_1^\wedge}, X_{c_{1V}}, \underbrace{\dots}_{3'}, A_V, \overbrace{\underbrace{\dots}_{4'}, X_{c_2^\wedge}, X_{p^\wedge}, \underbrace{\dots}_{2'}, X_{p_V}, X_{c_{2V}}, \underbrace{\dots}_{5'}}}_{\text{fora de } eA^\wedge}, A^\wedge$$

Os dois casos chegam à contradição: uma *shorttrip* e uma *trip* em que as duas entradas de X_p são percorridas fora de A^\wedge, \dots, A_V , ainda que $X_p \in eA^\wedge$. Concluímos então que a suposição inicial de que $X_{c_1^\wedge}$ e $X_{c_{1V}}$ estão fora de A^\wedge, \dots, A_V deve ser falsa e assim $X_{c_1} \in eA^\wedge$. A prova de $X_{c_2} \in eA^\wedge$ é simétrica: iniciamos com o link chaveado para direita, supomos que $X_{c_2^\wedge}$ e $X_{c_{2V}}$ estão fora de A^\wedge, \dots, A_V , mudamos o chaveamento para L e obtemos uma contradição.

11. Se $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ for um link de contração, $X_{p_1} \neq A \neq X_{p_2}$ e $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA^\wedge$, então $X_c \in eA^\wedge$.

Numa *trip* em que $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ está chaveado para L , X_{c_V} será percorrido no instante anterior a $X_{p_{1V}}$ e X_{c^\wedge} no posterior a $X_{p_1^\wedge}$ (Figura 4.7). Dado que $X_{p_1} \in eA^\wedge$, então aqui as duas entradas de X_c serão visitadas em A^\wedge, \dots, A_V .

Quando o link estiver chaveado para R , como $X_{p_2} \in eA^\wedge$, usando o mesmo raciocínio, também temos que X_{c_V} e X_{c^\wedge} estarão no intervalo A^\wedge, \dots, A_V . Logo, $X_c \in eA^\wedge$.

□

Teorema *split*

De acordo com o que foi visto na seção 5.1, o caso mais difícil para a prova de corretude original dos N-Grafos ocorre quando todos os links iniciais são disjuntivos divergentes e os finais conjuntivos convergentes. Vimos que o primeiro N-Grafo da Figura 3.10 não possui nenhum link com a propriedade *split*.

Um exemplo diferente pode ser visualizado na Figura D.1. Nele não podemos remover nenhum link conjuntivo convergente final, pois sempre obtemos apenas duas componentes (seria preciso 3 componentes, conforme foi visto para os outros casos com links conjuntivos convergentes e com os disjuntivos).

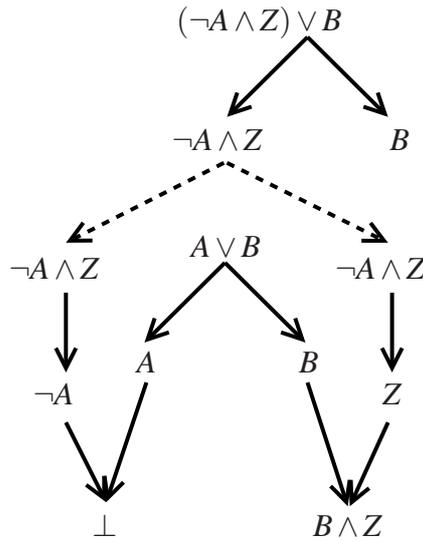


Figura D.1 N-Grafo de $(\neg A \wedge Z) \vee B, A \vee B \vdash B, B \wedge Z$.

O link inicial $\{(A \vee B, A), (A \vee B, B)\}$ também não serve, pois sua extração produz apenas duas componentes. Todavia, o outro link inicial convergente (o que possui $(\neg A \wedge Z) \vee B$ como premissa) apresenta a propriedade *split*.

Um caso diferente surge na Figura D.2: há um link conjuntivo convergente final com a propriedade *split*. Além disso, o \top – link inicial também serve para quebrar o N-Grafo. Vemos então que, caso o link *split* exista, ele não precisa ser único (como vimos, pode haver um final e um inicial).

Mas como ficam os casos em que o N-Grafo não possui links *split*? A outra forma de cortar a prova é por meio de um *cut branch point*. Se um N-Grafo apresenta um vértice com essa característica, então é possível dividi-lo em duas partes: uma acima do vértice (contendo

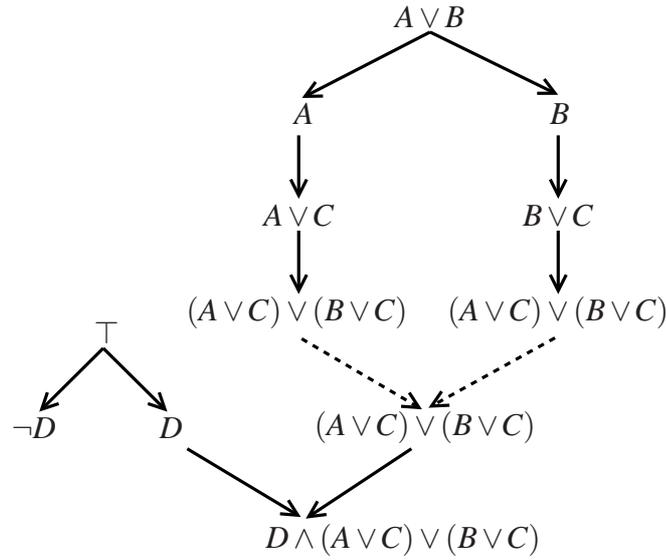


Figura D.2 N-Grafo de $A \vee B \vdash \neg D, D \wedge (A \vee C) \vee (B \vee C)$.

o *cut branch point* como conclusão) e outra abaixo (o vértice como premissa). Essas duas subderivações não possuem nenhuma aresta entre elas. Caso contrário, o N-Grafo original teria algum ciclo inválido. Em casos como esse (Figura D.3), encontramos uma derivação em cálculo de seqüentes para o N-Grafo com o seguinte procedimento (seja X o rótulo do *cut branch point*):

1. como a componente superior, a qual tem X entre suas conclusões é menor que N-Grafo original, use a hipótese de indução para obter uma derivação para ela;
2. faça o mesmo para a componente inferior (a que possui X entre suas premissas);
3. aplique a regra do corte entre as duas derivações anteriores.

Apresentaremos agora o teorema provado por de Oliveira que demonstra que sempre é possível quebrar um N-Grafo cujo todos os links iniciais são disjuntivos divergentes e todos os finais são conjuntivos convergentes. Especificamente no teorema abaixo, “caminho” irá se referir a uma seqüência distinta de vértices v_1, \dots, v_n em que, para cada $1 \leq i < n$, temos que a aresta (v_i, v_{i+1}) pertence ao grafo (ou seja, um caminho direcionado).

Teorema D.1 (Teorema *split* [dO01]). *Seja G um N-Grafo cujo todo link inicial é disjuntivo divergente e todo link final é conjuntivo convergente. Então G apresenta:*

1. *algum link inicial disjuntivo divergente com a propriedade split;*
2. *ou algum link final conjuntivo convergente com a propriedade split;*
3. *ou algum cut branch point.*

Demonstração.

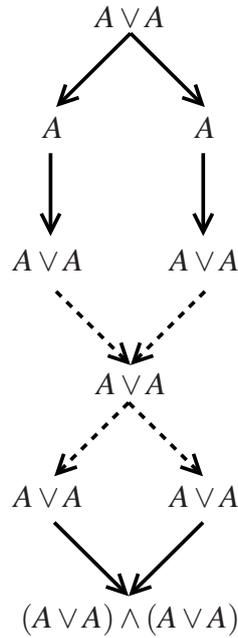


Figura D.3 N-Grafo de $A \vee A \vdash (A \vee A) \wedge (A \vee A)$.

- Seja $\{(u, v_1), (u, v_2)\}$ um link inicial disjuntivo divergente de G sem a propriedade *split*. Então v_1 e v_2 estão conectados por outra maneira, além da conexão do link em questão. Como os chaveamentos de G são acíclicos, essa conexão deve possuir um link completo de contração ou de expansão.

- Há um link de contração* $\{(s_1, t), (s_2, t)\}$. Então existe um caminho ou semi-caminho de ambos v_1 e v_2 para t . Mas, como G não possui link final de contração, então ele possui um link final conjuntivo convergente $\{(x_1, y), (x_2, y)\}$ tal que:
 - há um caminho de t para apenas uma das premissas do link (x_1 ou x_2);
 - ou há um caminho de t para ambas as premissas do link (x_1 e x_2).

No caso **a1** o link final apresenta a propriedade *split*, caso contrário G possuiria algum chaveamento cíclico. Pelo mesmo motivo, no caso **a2** t deve ser um *cut branch point*. O caso **a1** está ilustrado nas Figuras **D.2** e **D.4**, enquanto que o caso **a2** na Figura **D.3**.

- Há um link de expansão* $\{(s, t_1), (s, t_2)\}$. Então aqui temos um caminho ou um semi-caminho de v_1 e v_2 para s . Dado que G não tem link inicial de expansão, ele apresenta algum link inicial disjuntivo divergente $\{(x, y_1), (x, y_2)\}$ tal que:
 - há um caminho de apenas uma das conclusões (y_1 ou y_2) para s ;
 - ou há um caminho de ambas as conclusões (y_1 e y_2) para s .

No cenário **b1** o link inicial $\{(x, y_1), (x, y_2)\}$ tem a propriedade *split*, em caso negativo teríamos um ciclo inválido em G . No caso **b2** concluímos que s é um *cut branch point*. As Figuras **D.1** e **D.5** são exemplos dos casos **b1** e **b2**, respectivamente.

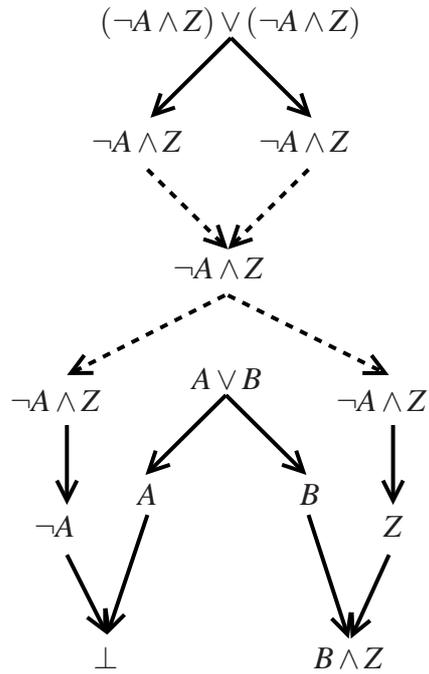


Figura D.5 N-Grafo de $(\neg A \wedge Z) \vee (\neg A \wedge Z)$, $A \vee B \vdash B \wedge Z$.

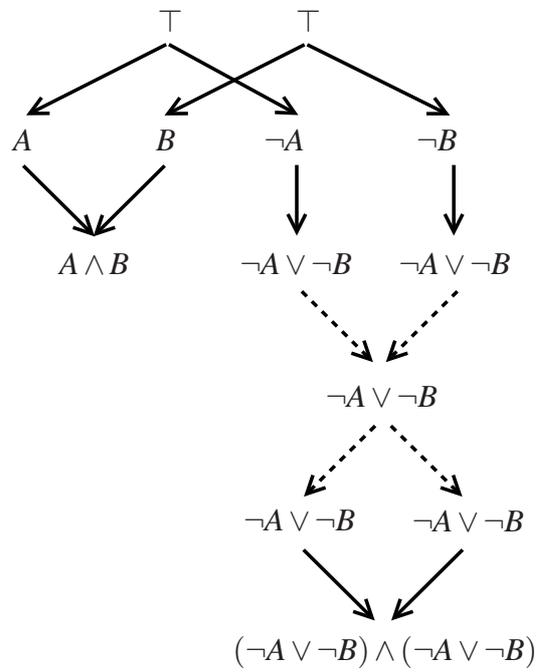


Figura D.6 N-Grafo de $\vdash A \wedge B$, $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.

Referências Bibliográficas

- [ACdOdQ13] Laís Andrade, Ruan Carvalho, Anjolina de Oliveira, and Ruy de Queiroz. Linear time proof verification on n-graphs: A graph theoretic approach. In Leonid Libki, Ulrich Kohlenbach, and Ruy de Queiroz, editors, *Logic, Language, Information, and Computation*, volume 8071 of *Lectures Notes in Computer Science*, pages 34–48. Springer Berlin Heidelberg, August 2013. [24](#), [25](#), [68](#)
- [AdOdQ11] Gleifer V. Alves, Anjolina Grisi de Oliveira, and Ruy J. G. B. de Queiroz. Proof-graphs: a thorough cycle treatment, normalization and subformula property. *Fundamenta Informaticae*, 106(2-4):119–147, September 2011. [68](#)
- [BvdW95] G. Bellin and J. van de Wiele. Subnets of proof-nets in MLL^- . In Jean-Yves Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pages 249–270. Cambridge University Press, 1995. [1](#), [12](#), [13](#), [15](#), [27](#), [28](#), [35](#), [42](#), [67](#)
- [Car97] A. Carbone. Interpolants, cut elimination and flow graphs for the propositional calculus. *Annals of Pure and Applied Logic*, 83(3):249–299, February 1997. [17](#)
- [dO01] Anjolina Grisi de Oliveira. *Proofs from a Geometric Perspective*. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, February 2001. [1](#), [17](#), [22](#), [30](#), [52](#), [55](#), [57](#), [62](#), [84](#)
- [dOdQ03] Anjolina Grisi de Oliveira and Ruy J. G. B. de Queiroz. Geometry of deduction via graphs of proofs. In R. de Queiroz, editor, *Logic for Concurrency and Synchronisation*, Trends in Logic - Studia Logic Library, pages 1–87. Kluwer Academic Publisher, July 2003. [1](#), [17](#)
- [DR89] Vincent Danos and Laurent Regnier. The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, 28:181–203, 1989. [1](#), [11](#), [17](#), [27](#), [30](#), [35](#), [67](#), [73](#)
- [Gen64] Gerhard Gentzen. Investigations into logical deduction. *American Philosophical Quarterly*, 1(4):288–306, October 1964. [69](#)
- [Gir87] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–102, 1987. [1](#), [3](#), [5](#), [9](#), [11](#), [15](#), [17](#), [27](#), [30](#), [35](#), [40](#), [46](#), [55](#), [67](#), [77](#)
- [Gir91] Jean-Yves Girard. Quantifiers in linear logic ii. In G. Corsi and G. Sambin, editors, *Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza*, volume 2, 1991. [1](#), [12](#), [27](#), [30](#), [35](#), [40](#), [44](#), [45](#), [67](#)

- [Har72] Frank Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1972. [25](#)
- [KK62] W. Kneale and M. Kneale. *The Province of Logic*. Oxford University Press, 1962. [17](#)
- [QCdOdQdP13] Marcela Quispe-Cruz, Anjolina Grisi de Oliveira, Ruy J. G. B. de Queiroz, and Valéria de Paiva. Intuitionistic n-graphs. *Logic Journal of the IGPL*, August 2013. [68](#)
- [Rob03] Edmund Robinson. Proof nets for classical logic. *Journal of Logic and Computation*, 13:777–797, 2003. [1](#), [13](#), [15](#), [27](#), [28](#), [55](#), [67](#)
- [SS78] D. J. Shoesmith and T. J. Smiley. *Multiple-Conclusion Logic*. Cambridge University Press, 1978. [17](#)
- [Sta74] R. Statman. *Structural Complexity of Proofs*. PhD thesis, Stanford University, 1974. [17](#)
- [Ung92] A. M. Ungar. Normalization, cut-elimination and the theory of proof. In *CLSI Lecture Notes*, volume 28, Stanford, CA, 1992. [17](#)

