



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thamires Santos Cruz

**Resultados de existência para um sistema acoplado de equações
diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira
em três pontos**

Recife

2012



Thamires Santos Cruz

**Resultados de existência para um sistema acoplado de equações
diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira
em três pontos**

*Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática da UFPE, como requisito para a
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.*

Orientador: Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo

Coorientador: Prof. Dr. Marcos Luiz Henrique

Recife

2012

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Cruz, Thamires Santos

Resultados de existência para um sistema acoplado de equações diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira em três pontos / Thamires Santos Cruz. - Recife: O Autor, 2012.

55 folhas: il., fig.

Orientador: Marcos Napoleão Rabelo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Análise (Matemática). 2. Equações diferenciais fracionárias. 3. Análise funcional. I. Rabelo, Marcos Napoleão (orientador). II. Título.

515

CDD (23. ed.)

MEI2012 – 040

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado

/ Marcos Luiz Henrique, UFPE
Co-Orientador

(
/ Airton Temístocles Gonçalves de Castro, UFPE

/ Juliano Bandeira Lima, UFPE

**RESULTADOS DE EXISTÊNCIA PARA UM SISTEMA ACOPLADO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS NÃO LINEARES COM
CONDIÇÕES DE FRONTEIRA EM TRÊS PONTOS**

POR

Thamires Santos Cruz

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro – 2012

Aos meus pais, irmão e noivo.

RESUMO

Neste trabalho, foi mostrado a existência de solução para um sistema acoplado de equações diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira em três pontos, onde algumas condições são satisfeitas. Para isto, precisou-se de um estudo sobre integrais e derivadas fracionárias e teoremas de ponto fixo. Estudou-se ainda a existência e unicidade da solução do problema de Cauchy para funções lipschitzianas, com condições iniciais de ordem fracionária. Além disso, foi analisada uma aplicação de derivadas fracionárias, a viscoelasticidade linear.

PALAVRAS-CHAVE: integrais fracionárias, derivadas fracionárias, equações diferenciais fracionárias, sistema acoplado, problema de fronteira, problema de Cauchy fracionário, ponto fixo, viscoelasticidade.

ABSTRACT

In this work, was shown the existence of solution to a coupled system of fractional differential equations with nonlinear boundary conditions in three points, where some conditions are met. For this, needed is a study of integral and fractional derivatives and fixed point theorems. It also studied the existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem for Lipschitzian functions with the initial conditions of fractional order. Furthermore, we examined the application of a fractional derivatives, the linear viscoelasticity.

KEYWORDS: fractional integrals, fractional derivatives, fractional differential equations, coupled system, border problem, fractional Cauchy problem, fixed point, viscoelasticity.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela coragem e oportunidades que tem me dado.

Aos meus pais, Ednilde e Tavares, pelo apoio, amor e incentivo aos estudos. Mesmo sabendo que seus desejos maiores eram que eu voltasse para casa, para estar ao lado deles.

Ao meu irmão Júnior, pela credibilidade.

Ao meu noivo Everton, pelas horas de paciência, compreensão e apoio. Pelos momentos em que compartilhamos conhecimentos, pelos momentos difíceis, por estarmos longe um do outro, enfim, é tanta coisa que tenho para agradecê-lo que só Deus, eu e ele sabemos.

Aos meus amigos e colegas, em especial Clessius, Fábio, Cris, Tarciana, Wergete, Binho, e Gigi.

Ao Prof. Dr. Marcos Rabelo, pela proposta de trabalho e orientação.

Aos demais professores, de quem fui aluna e aos que me ajudaram como Marcos Henrique, Airton e Miguel Frasson.

A todos os funcionários da pós-graduação, em especial Tânia e Cláudia.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Derivada e Integral Fracionárias	11
1.1.1 Propriedades	13
1.1.2 Equação diferencial de ordem inteira <i>versus</i> fracionária	14
1.2 Aplicações	15
1.2.1 Viscoelasticidade	16
1.2.2 Modelos de ordem inteira	16
1.2.3 Modelos de ordem fracionária	19
2 Resultados de existência	23
2.1 Teoremas de Ponto Fixo	23
2.2 Problema de Cauchy	26
3 Existência de solução	35
3.1 Introdução ao problema	35
3.2 Resultados existentes	35
3.2.1 Aplicação do problema	50
Referências Bibliográficas	52

Introdução

Equações diferenciais fracionárias têm despertado a atenção de pesquisadores nos últimos anos, devido principalmente às suas várias aplicações no campo de ciência e engenharia.

Sistemas envolvendo derivadas fracionárias podem ser usados como ferramentas na modelagem de problemas físicos que aparecem de maneira natural em áreas como engenharia e ciências aplicadas. É bem conhecido que alguns fenômenos que aparecem em física, química, aerodinâmica, eletrodinâmica, reologia de polímeros entre outros, por exemplo a viscoelasticidade, podem ser modelados por meio de sistemas de equações diferenciais parciais fracionárias. De fato, a análise quantitativa e qualitativa das equações diferenciais fracionárias está ganhando muita importância e atenção. Para maiores detalhes, indica-se ao leitor [5, 8, 10, 12, 16, 19, 27, 26, 1, 2]. Por outro lado, o estudo de sistemas acoplados envolve dificuldades maiores, principalmente quando se usa técnicas, para obtenção de soluções, utilizando ferramentas de ponto fixo.

Este trabalho é dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, são apresentadas definições, exemplos e propriedades de derivada e integral fracionárias, que são de grande importância para um bom entendimento do texto. Ainda neste capítulo, tem-se uma motivação para o estudo, através da comparação da forma da solução de um problema de valor inicial envolvendo equação diferencial ordinária com a equação diferencial de ordem fracionária. Em seguida, há uma aplicação de derivada fracionária: a viscoelasticidade linear.

No segundo capítulo, vê-se alguns conceitos de análise funcional e teoremas de ponto fixo, em especial o do ponto fixo de Schauder, que usamos na demonstração do teorema principal. Depois, é analisado o problema de Cauchy, a fim de caracterizar a solução desse problema e em seguida, desde que a função considerada satisfaça a condição de Lipschitz, se garante a unicidade dessa solução. O estudo do problema de Cauchy de ordem fracionária em espaços

de dimensão finita pode ser generalizado para o problema abstrato de Cauchy, o qual se pretende dar prosseguimento em trabalhos posteriores.

No terceiro capítulo, é apresentado o problema com condição de fronteira para um sistema acoplado de equações diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira em três pontos e alguns resultados que auxiliarão na demonstração da existência de solução para este problema. Por fim, sob algumas condições sobre as funções envolvidas no problema em questão, mostra-se a existência da solução para este problema, utilizando como ferramenta fundamental o teorema do ponto fixo de Schauder.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Derivada e Integral Fracionárias

Nesta seção foram usadas as referências [3, 9, 18]. Veja a seguir a definição de derivada fracionária.

Definição 1.1 (Derivada fracionária) *A derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$ de uma função contínua f , mensurável e localmente integrável, é definida como*

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - s)^{n-(\alpha+1)} \cdot f(s) ds, \text{ com } n - 1 \leq \alpha < n,$$

desde que o segundo membro seja pontualmente definido em (a, ∞) .

Daqui em diante, será adotada a seguinte notação:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t - s)^{n-(\alpha+1)} \cdot f(s) ds.$$

Veja um exemplo geral, em que $\beta - \alpha \geq 0$.

Exemplo 1.2 *Considere a função $f(t) = t^\beta$, então:*

$$D^\alpha t^\beta = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t - s)^{n-\alpha-1} s^\beta ds.$$

Faça a seguinte mudança de variável: $z = \frac{s}{t}$, então $dz = \frac{1}{t}ds$. Logo,

$$\begin{aligned}
D^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^1 (t-tz)^{n-\alpha-1} (tz)^\beta t dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^1 t^{n-\alpha-1} (1-z)^{n-\alpha-1} t^\beta z^\beta t dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1-z)^{n-\alpha-1} z^\beta dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^{n+\beta-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^{n+\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)t^{n+\beta-\alpha-n}}{\Gamma(n+\beta-\alpha-n+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Observe que acima usa-se a definição da função beta

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \text{com } \operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0.$$

Note que, se $q = \alpha$, então

$$D^\alpha t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n-q+\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^{n-1} = 0.$$

Vale ressaltar que, para $q = m$ ($\leq r-1$ ($r \in \mathbb{R}$)) inteiro, tem-se

$$\frac{d^m}{dt^m} t^{r-1} = (r-1)(r-2) \dots (r-m) t^{r-m-1} = \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r-m)} t^{r-m-1}.$$

Além disso, foi usado acima a seguinte propriedade da função Gamma:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Assim, vê-se que a derivada fracionária é uma extensão da derivada de ordem inteira para ordem arbitrária.

Definamos agora a integral fracionária.

Definição 1.3 (Integral Fracionária) A integral fracionária de ordem $\alpha > 0$, de uma função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, mensurável e localmente integrável, é definida como

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \cdot f(s) ds,$$

desde que a integral exista.

Calcule a integral fracionária de ordem α da função t^β , com $\beta \in \mathbb{R}$, usando novamente a definição da função beta.

Exemplo 1.4 Considere $f(t) = t^\beta$ na definição (1.3). Logo,

$$I^\alpha t^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta ds.$$

Fazendo $z = \frac{s}{t}$, tem-se $dz = \frac{1}{t} ds$. Assim,

$$\begin{aligned} I^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-tz)^{\alpha-1} (tz)^\beta t dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-z)^{\alpha-1} t^{\beta+1} z^\beta dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^\beta dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} t^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

1.1.1 Propriedades

O operador integral fracionário $I^\alpha f(t)$, já definido anteriormente, satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $I^0 f(x) = f(x)$; (identidade)

(b) $I^\alpha [c \cdot f(x) + d \cdot g(x)] = c I^\alpha f(x) + d \cdot I^\alpha g(x)$,

onde c e d são constantes arbitrárias; (linearidade da integral)

c) $D^\alpha [c \cdot f(x) + d \cdot g(x)] = c D^\alpha f(x) + d \cdot D^\alpha g(x)$,

onde c e d são constantes arbitrárias; (linearidade da derivada)

$$(d) \quad D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t);$$

$$(e) \quad I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t).$$

Note que $D^q I^\alpha f(t) = I^{\alpha-q} f(t)$, com $\alpha - q > 0$, pois

$$D^q I^\alpha f(t) = D^q I^q I^{\alpha-q} f(t) = I^{\alpha-q} f(t).$$

1.1.2 Equação diferencial de ordem inteira *versus* fracionária

Antes de analisar o problema principal, veja uma motivação inicial. Considere a equação diferencial ordinária linear não-homogênea com condições iniciais:

$$D^n y(t) = f(t), \quad b \leq t \leq c. \quad (1.1)$$

Então $\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$ é o conjunto fundamental da correspondente equação homogênea em (1.1). Se $f(t)$ é uma função contínua sobre o intervalo $[b, c]$, então, para qualquer $a \in (b, c)$,

$$y(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(\tau) d\tau, \quad t \in [b, c], \quad (1.2)$$

é a única solução da equação (1.1), com as seguintes condições iniciais:

$$y^{(k-1)}(a) = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ou, equivalentemente, na notação fatorial,

$$y(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{\Gamma(n)} \cdot f(\tau) d\tau. \quad (1.3)$$

Trocando-se n por α , no qual $\text{Re } \alpha > 0$, obtém-se

$$y(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot f(\tau) d\tau, \quad (1.4)$$

Seja agora $a = 0$ e $t > 0$ no problema de valor inicial

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = f(t), \\ y^{(k-1)}(0) = c_k, \quad 1 \leq k \leq n. \end{cases} \quad (1.5)$$

Aplicando o método da transformada de Laplace e, em seguida, a inversa da transformada de Laplace, obtém-se a solução do problema (1.5) :

$$y(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{\Gamma(n)} \cdot f(\tau) d\tau = I^n f(t). \quad (1.6)$$

Assim, a solução geral do problema de valor de ordem inteira (1.5), é

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{\Gamma(n)} \cdot f(\tau) d\tau. \quad (1.7)$$

Considere agora uma equação diferencial fracionária com condições iniciais:

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = f(t), \\ y^{\alpha-k}(0) = c_k, 1 \leq k \leq n, \end{cases} \quad (1.8)$$

em que n é o menor inteiro maior do que α .

De maneira análoga, chega-se à solução do problema (1.8):

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot f(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

Veja uma E.D.O. fracionária semilinear:

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \\ y^{\alpha-k}(0) = c_k, 1 \leq k \leq n, \end{cases} \quad (1.10)$$

em que n é o menor inteiro maior do que α . Então, da mesma forma, tem-se que a solução desta E.D.O. é:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (1.11)$$

Observe que, na solução (1.11), temos, no lado direito, na integral fracionária, uma dependência da solução y . A partir disto, surge a necessidade de se utilizar teoremas de ponto fixo.

1.2 Aplicações

Esta seção é dedicada a uma aplicação de derivada fracionária: a viscoelasticidade linear. Foi usada como referência principal [18].

1.2.1 Viscoelasticidade

O cálculo clássico permite modelar e explicar uma gama de problemas espalhados nas muitas áreas da ciência. Entretanto, ele não se mostra tão eficiente no tratamento de sistemas complexos na natureza, com comportamento anômalo, como a dinâmica de materiais viscoelásticos, o processo de difusão celular, a transmissão de sinal através de campos magnéticos fortes, entre outros. Para tal propósito, usa-se o cálculo fracionário.

A viscoelasticidade parece ser o campo das aplicações mais extensivas de operadores integrais e diferenciais fracionários, e talvez o único em que têm sido publicadas pesquisas amplas. As considerações discutidas abaixo mostram que o uso de derivadas fracionárias para a modelagem matemática de materiais viscoelásticos é frequentemente natural. O amplo uso de polímeros em vários campos da engenharia é a principal razão para o desenvolvimento da teoria.

Considera-se, a seguir, uma série de abordagens para a teoria de viscoelasticidade linear de modelos de ordem inteira para modelos de cálculo fracionário.

1.2.2 Modelos de ordem inteira

Um modelo bem conhecido para sólidos (lei de Hooke - As forças deformantes são proporcionais às deformações elásticas produzidas) é

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) \quad (1.12)$$

e para fluidos Newtonianos

$$\sigma(t) = \eta \frac{d\epsilon(t)}{dt}, \quad (1.13)$$

em que

$$E = \frac{Fl_0}{A\Delta l} \text{ é o módulo de elasticidade ou de Young;}$$

F := força;

l_0 := comprimento inicial;

A := área da secção através da qual é exercida a tensão;

Δl := variação do comprimento;

η é a viscosidade dinâmica;

σ é a tensão;

e ϵ é a deformação.

As relações (1.12) e (1.13) não são leis universais, mas somente modelos matemáticos para um material sólido e um fluido ideais, nenhum dos quais existem no mundo real. De fato, materiais reais combinam propriedades desses dois casos limites e estão em algum lugar entre sólidos e fluidos ideais, quando os materiais são classificados quanto à firmeza deles.

Para representar o elemento elástico, Hooke usa a mola, enquanto Newton representa o elemento viscoso por meio do amortecedor. Veja a figura 1.1 que mostra o desenvolvimento dos modelos de ordem inteira de viscoelasticidade linear.

Numa primeira etapa, a fim de combinar as propriedades do elemento elástico de Hooke e do elemento viscoso de Newton, surgiram os modelos de viscoelasticidade de Maxwell e de Voigt, sendo que, no primeiro, os elementos são conectados em série e, no segundo, são conectados em paralelo, embora ambos os modelos tenham desvantagens óbvias.

No modelo de Maxwell, que é descrito pela relação:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \\ \sigma = \text{constante} &\rightarrow \frac{d\epsilon}{dt} = \text{constante}, \end{aligned}$$

ou seja, se a tensão é constante, então a deformação cresce infinitamente.

No modelo de Voigt, σ e ϵ são relacionados por

$$\sigma = E\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt},$$

do qual segue que

$$\epsilon = \text{constante} \rightarrow \sigma = \text{constante}.$$

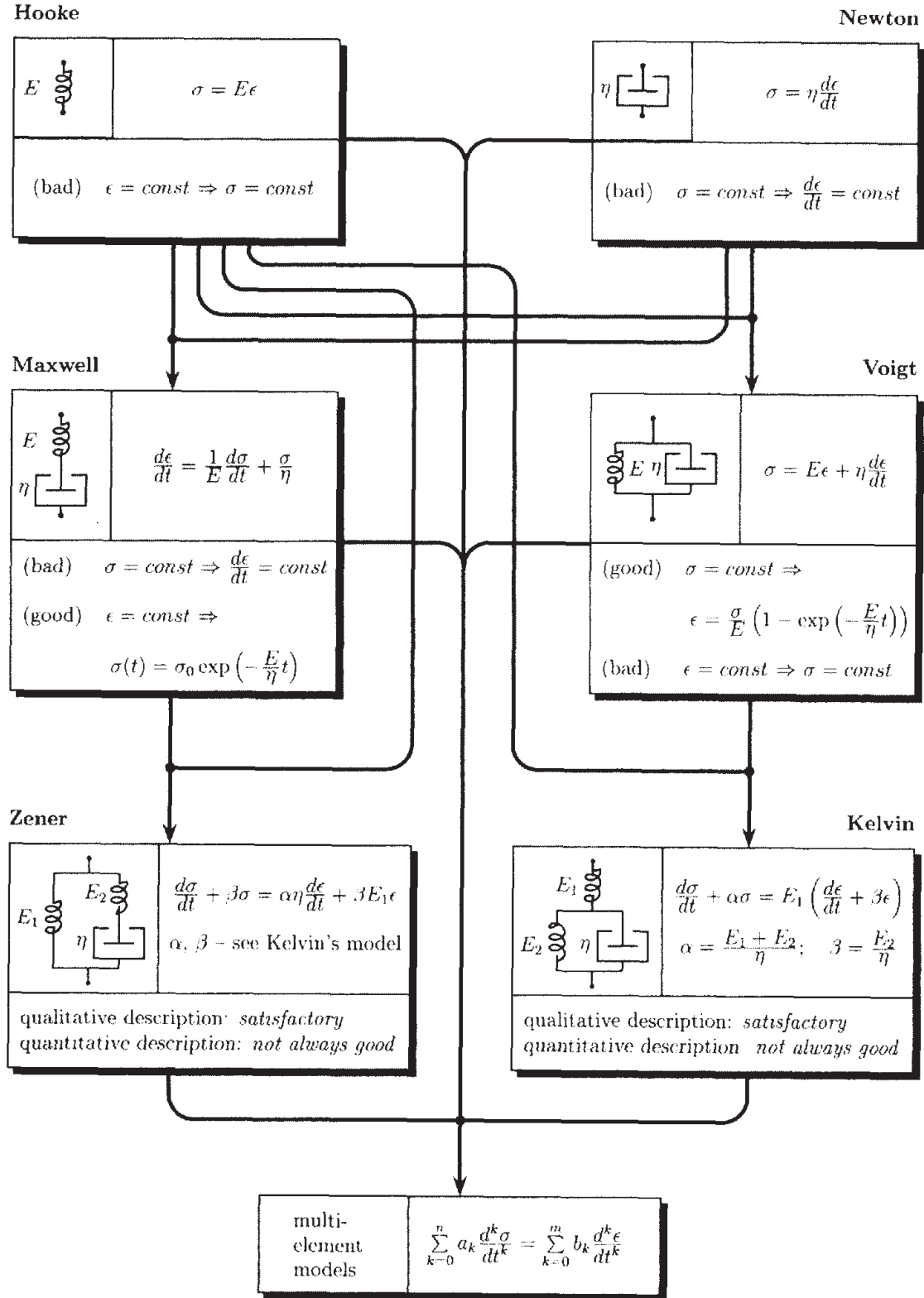


Figure 1.1: Development of linear models of viscoelasticity [18]

Vê-se que o modelo de viscoelasticidade de Voigt não reflete a tensão de relaxação observada experimentalmente. A fim de amenizar as desvantagens, a conexão em série do elemento viscoelástico de Voigt e do elemento elástico de Hooke fornece o modelo de viscoelasticidade de Kelvin:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\sigma = E_1 \left(\frac{d\epsilon}{dt} + \beta\epsilon \right). \quad (1.14)$$

Conectando o elemento viscoelástico de Maxwell e o elemento de Hooke, obtém-se o modelo de viscoelasticidade de Zener:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \beta\sigma = \alpha\eta \frac{d\epsilon}{dt} + \beta E_1 \epsilon. \quad (1.15)$$

Para ambos os modelos, α e β são dados por

$$\alpha = \frac{E_1 + E_2}{\eta}; \quad \beta = \frac{E_2}{\eta}.$$

Ambos os modelos de Kelvin e Zener fornecem boas descrições qualitativas, mas não são considerados tão satisfatórios do ponto de vista quantitativo [17, 24]. Por causa disto, mais tarde, foram desenvolvidos mais modelos consistindo de elementos distintos de Kelvin ou Maxwell combinado com o elemento elástico de Hooke. No caso mais geral, chega-se no modelo da forma

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k \epsilon}{dt^k}, \quad (1.16)$$

e, em cada caso, a melhor adequação foi alcançada para $n = m$.

Usando (1.14), (1.15) e (1.16) como as leis básicas de deformação de materiais viscoelásticos chegamos a equações diferenciais complicadas de ordem alta, o que torna difícil formular e resolver vários problemas aplicados, apesar de as equações diferenciais resultantes serem lineares. Porém, existe uma solução que preserva a linearidade de modelos e, ao mesmo tempo, fornece um nível de adequação mais alto.

1.2.3 Modelos de ordem fracionária

Não é natural supor, que para materiais “intermediários” a tensão pode ser proporcional à derivada da deformação de ordem “intermediária” (não-inteira), como tem sido feito por G. W. Scott Blair [6],:

$$\sigma(t) = E {}_0D_t^\alpha \epsilon(t), \quad (0 < \alpha < 1), \quad (1.17)$$

em que E e α são constantes materiais.

No mesmo período em que surgiu a idéia acima, A. N. Gerasimov [11] sugeriu uma generalização similar da lei básica de deformação, que pode ser escrita, usando a derivada fracionária Caputo, na forma:

$$\sigma(t) = k {}^C D_t^\alpha \epsilon(t),$$

em que

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n - 1 < \alpha < n$$

ou, desde que, para o limite inferior em $-\infty$, a derivada Caputo coincida com a derivada fracionária Riemann-Liouville,

$$\sigma(t) = k {}_{-\infty} D_t^\alpha \epsilon(t), \quad (0 < \alpha < 1), \quad (1.18)$$

na qual k é uma constante material (viscosidade generalizada). A. N. Gerasimov também considerou dois problemas descrevendo o movimento de um fluido viscoso entre duas superfícies móveis. Estes problemas conduzem às equações:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k D^\alpha \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right), \quad \rho x^3 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x} (D^\alpha y) \right), \quad y = y(x, t); \quad D^\alpha \equiv {}_{-\infty} D_t^\alpha.$$

Kolwankar e Gangal [15] consideraram a equação diferencial parcial fracionária da seguinte forma:

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4} \chi_\Omega(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (0 < \alpha \leq 1; \quad x \in \mathbb{R}; \quad t > 0), \quad (1.19)$$

na qual

$$D_t^\alpha f(t) = \lim_{y \rightarrow x+} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \int_t^y \frac{f(t) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(t) (s - t)^k / k!}{(y - t)^{\alpha-n+1}} dt;$$

$$n = [\alpha] + 1;$$

$$\chi_\Omega(t) \text{ é a função característica de um conjunto } \Omega \subset \mathbb{R}_+.$$

Eles obtiveram a solução explícita do problema de Cauchy (1.19) com condição inicial $u(x, 0) = \delta(x)$, em que $\delta(x)$ é a função Delta de Dirac.

Ainda outra formulação de uma generalização das leis básicas de deformação foi sugerida por G. L. Slonimsky [23]:

$$\epsilon(t) = \frac{1}{k} {}_0 D_t^{-\alpha}, \quad (k = \text{constante}; \quad 0 < \alpha < 1), \quad (1.20)$$

na qual, sob a condição $\epsilon(0) = 0$ as leis de Scott Blair e Slonimsky, respectivamente (1.17) e (1.20), são equivalentes. Além disso, sob a hipótese de que a função desconhecida e todas as funções dadas são iguais a zero para $t < 0$, a fórmula de Gerasimov (1.18) se torna equivalente à de Scott Blair e Slonimsky. Assim, ao invés de considerar estas abordagens separadamente, referimo-nos à lei de Scott Blair (1.17).

Como visto acima, modelos de vários elementos complexos, consistindo de elementos de Hooke e Newton, foram usados para modelar o comportamento viscoelástico de materiais reais. Assim, é natural tentar obter modelos de vários elementos deste tipo também para o elemento viscoelástico de Scott Blair.

Ajustando os parâmetros das partes estruturais destes modelos, que consistem de um número infinito de molas clássicas (Hooke) e amortecedores (Newton), é possível alcançar para todo modelo uma equação da forma (1.17).

Agora, temos três elementos básicos (Hooke, Newton, Scott Blair) para a construção de modelos reológicos. Há duas opções: combinar mais do que um destes, ou usar somente o elemento de Scott Blair, desde que ele contém os outros dois elementos como casos particulares.

A lei de Hooke (1.12), que é um modelo de um parâmetro, e a lei de Scott Blair (1.17), que é um modelo de dois parâmetros (E e α), podem ser mais generalizadas adicionando mais termos em ambos os lados. Isto conduz, por exemplo, aos modelos generalizados,

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= b_0\epsilon(t) + b_1D^\alpha\epsilon(t), \\ \sigma(t) + a_1D^\alpha\sigma(t) &= b_0\epsilon(t), \\ \sigma(t) + a_1D^\alpha\sigma(t) &= b_0\epsilon(t) + b_1D^\beta\epsilon(t),\end{aligned}$$

respectivamente, de Voigt, Maxwell e Zener. Além desses, modelos mais gerais foram sugeridos por H. Schiessel, R. Metzler, A. Blumen e T. F. Nonnenmacher em [22].

O modelo generalizado de Zener pode ser simplificado, desde que foi observado experimentalmente em [20, 4] que a modelagem da maioria dos materiais resultam em $\alpha = \beta$. Em adição às observações experimentais, R. L. Bagley e P. J. Torvik provaram teoricamente que o modelo de cinco parâmetros de Zener satisfaz as restrições termodinâmicas se $\alpha = \beta$. Esta conclusão fornece o modelo de quatro parâmetros,

$$\sigma(t) + a_1D^\alpha\sigma(t) = b_0\epsilon(t) + b_1D^\alpha\epsilon(t), \quad (1.21)$$

que proporciona uma descrição satisfatória da maioria dos materiais reais. É interessante notar que, entre os modelos de viscoelasticidade de ordem inteira, somente nos modelos de Zener e Kelvin a derivada da tensão de ordem mais alta é igual à derivada da deformação de ordem mais alta. Veja também que o modelo de quatro parâmetros (1.21) poderia ser formalmente obtido dos modelos de Zener e Kelvin de ordem inteira trocando-se as derivadas de primeira ordem pelas derivadas fracionárias de mesma ordem.

Capítulo 2

Resultados de existência

2.1 Teoremas de Ponto Fixo

Nesta seção, são apresentados alguns resultados que serão utilizados nas seções subsequentes.

Definição 2.1 (Espaço de Banach) *Um espaço de Banach é um espaço linear normado que é completo na métrica definida por sua norma.*

Exemplo 2.2 *Os espaços considerados a seguir são de Banach:*

- *Os números reais e os complexos, onde a norma é o valor absoluto;*
- *O espaço das funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ reais contínuas, com a norma $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$;*
Denotamos por $C(X, Y)$ o espaço das funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ com a norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|_Y < \infty.$$

- *Os espaços $L^p(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável, definido da seguinte forma:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} < \infty, 1 \leq p < \infty\},$$

em que a norma é

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p}.$$

e

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{\Omega} |f| < \infty\},$$

com norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\Omega} |f|.$$

- *Todo espaço de Hilbert, isto é, qualquer espaço vetorial completo com produto interno.*

Vejamos a seguir o conceito de funções uniformemente limitadas.

Definição 2.3 *Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções é dita uniformemente limitada se existe $M > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

Exemplo 2.4 *Considere a sequência de funções $\{f_n(x)\}$, com $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, definida por*

$$f_n(x) = \sin(nx).$$

Assim, a sequência $\{f_n(x)\}$ acima é uniformemente limitada por $M = 1$.

Definição 2.5 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções de um espaço métrico (X, ρ) em outro espaço métrico (Y, d) . Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma família equicontínua se, e somente se,*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall x \in X, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \rho(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Vejamos agora a noção de conjunto relativamente compacto.

Definição 2.6 *Um subconjunto $A \subset X$, onde X é um espaço normado, é relativamente compacto quando seu fecho é compacto.*

O próximo teorema também será utilizado na demonstração da existência de solução do problema (3.1).

Teorema 2.7 (Teorema de Arzelá-Ascoli) *Se (X, ρ) é um espaço métrico compacto, um subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(X, \mathbb{R})$ é relativamente compacto se e, somente se, é uniformemente limitado e equicontínuo.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [7, 28].

Exemplo 2.8 Considere a sequência de funções $\{f_n(x)\}$, com $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}.$$

Note que $|f_n(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall f_n$, ou seja, esta sequência é uniformemente limitada. Porém, esta sequência não é equicontínua, pois $f_n(x)$ não converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$. Basta ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = 0, \quad (0 \leq x \leq 1),$$

mas

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

tal que nenhuma subsequência pode convergir em $[0, 1]$.

Definição 2.9 Sejam X um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma aplicação qualquer. Dizemos que um elemento $x \in X$ é ponto fixo de F quando $F(x) = x$.

Observação 2.10 Toda aplicação linear tem o ponto fixo trivial, zero.

Teorema 2.11 (Princípio da contração de Banach) Seja (X, ρ) um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ uma contração em X , ou seja, existe λ , com $0 \leq \lambda < 1$, tal que

$$\rho(Tx, Ty) \leq \lambda \rho(x, y).$$

Então, T tem um único ponto fixo $x^* \in X$.

Além disso, se T^k ($k \in \mathbb{N}$) é a sequência de operadores definida por:

$$T^1 = T \text{ e } T^k = TT^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N} - \{1\}),$$

então, para qualquer $x_0 \in X$, a sequência $\{T^k x_0\}_{k=1}^{\infty}$ converge para o ponto fixo x^* .

Demonstração: Ver as notas de aula de Alexandre Nolasco [7].

Observação 2.12 Vale frisar que toda contração é uniformemente contínua.

Exemplo 2.13 Considere a aplicação $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$T(x) = Ax, \text{ onde } 0 \leq A < 1.$$

Note que

$$|T(x) - T(y)| = |Ax - Ay| = A|x - y|.$$

Logo, a aplicação $T(x)$ é uma contração em $\mathbb{R}$.

Definição 2.14 (Condição de Lipschitz) Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto, satisfaz a condição de Lipschitz com respeito à segunda variável se existe $A > 0$ tal que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega.$$

Observação 2.15 Contração é um caso particular de funções que satisfazem a condição de Lipschitz.

Precisa-se também da definição de operador completamente contínuo para entender o teorema a seguir.

Definição 2.16 Sejam X um espaço normado e N , $(N : X \rightarrow X)$ um operador linear. Diz-se que o operador N é completamente contínuo quando leva conjunto limitado em conjunto relativamente compacto.

O teorema do ponto fixo de Schauder é a ferramenta fundamental para o terceiro capítulo, pois, por meio dele se demonstra o resultado principal desse capítulo.

Teorema 2.17 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder) Sejam X um espaço de Banach, $M \subset X$ não vazio, fechado, limitado e convexo e $P : M \rightarrow M$ compacto (completamente contínuo) e contínuo. Então P tem um ponto fixo.

Demonstração: A demonstração pode ser vista em [14].

2.2 Problema de Cauchy

Nesta seção, trabalha-se com o problema de Cauchy abaixo, o qual utilizamos como referência [13]:

$$\begin{cases} (D_{a^+}^\alpha y)(x) = f(x, y(x)), & (R(\alpha) > 0, x > a), \\ (D^{a-k} y)(a^+) = b_k, & b_k \in \mathbb{C} \ (k = 1, \dots, n), \end{cases} \quad (2.1)$$

no qual $n = [R(\alpha)] + 1$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $\alpha = n$ para $\alpha \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$(D_{a^+}^{\alpha-k}y)(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} (I_{a^+}^{n-\alpha}y)(x), \quad (\alpha \neq n)$$

e

$$(D_{a^+}^0y)(a^+) = y(a), \quad (\alpha = n).$$

Observação 2.18 Na notação acima, $[R(\alpha)]$ representa a parte inteira da parte real de α .

O objetivo desta seção, é reduzir o problema (2.1) à seguinte equação integral:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x - t)^{1-\alpha}}, \quad (x > a). \quad (2.2)$$

Denotaremos por $L(a, b)$, o espaço das funções f complexas mensuráveis sobre $[a, b]$ para as quais $\|f\|_1 < \infty$, onde

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Além disso, o espaço utilizado neste capítulo será $L^\alpha(a, b)$ definido abaixo.

Definição 2.19 O espaço $L^\alpha(a, b)$, para $\alpha \in \mathbb{C}$ ($R(\alpha) > 0$), é definido por:

$$L^\alpha(a, b) := \{y \in L(a, b) : D_{a^+}^\alpha y \in L(a, b)\}.$$

Considere $[a, b]$ um intervalo finito. Dessa maneira, define-se, em seguida, funções absolutamente contínuas.

Definição 2.20 Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é absolutamente contínua se para todo $\epsilon > 0$, existir algum $\delta > 0$, tal que, se $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, n}$ é uma família de intervalos disjuntos contidos em $[a, b]$ com $\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta$, então

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon.$$

Observação 2.21 Notação: $AC[a, b]$.

Exemplo 2.22 Toda função $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ lipschitziana é absolutamente contínua. De fato, como f é lipschitziana,

$$|f(x) - f(y)| < c|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{c}$, então

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < c \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < c \frac{\epsilon}{c} = \epsilon,$$

quaisquer que sejam n e os escalares $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$.

Dentre as propriedades mais importantes das funções absolutamente contínuas têm-se as seguintes:

1. Toda função absolutamente contínua é contínua. Porém, a recíproca não é verdadeira.

Tome por exemplo uma função f definida em $[0, 1]$ por:

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \in (0, 1]; \\ f(x) = 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pela maneira como está definida, a função f é contínua em $[0, 1]$. Porém, dado $0 \leq \delta \leq \frac{1}{3}$, defina $x_i = \frac{2}{1+2i}$ e $y_i = \frac{1}{i}$, $i \geq 1$. Note que

$$y_i < x_i < y_1.$$

Então,

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{2}{1+2i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i(1+2i)} \right) \leq \delta,$$

mas

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{k} \sin(i\pi) - \frac{2}{1+2i} \sin\left(\frac{1+2i}{2}\pi\right) \right| = \sum_{i=1}^n \frac{2}{1+2i}$$

tende para infinito, se $n \rightarrow \infty$.

Portanto, f não é absolutamente contínua.

2. Toda função absolutamente contínua é derivável em quase toda parte.

Definição 2.23 Denotamos por $AC^n[a, b]$, para $n \in \mathbb{N}$, o espaço:

$$AC^n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ e } (D^{n-1}f)(x) \in AC[a, b]\}.$$

Para maiores informações sobre esses espaços, ver [14, 21].

Os próximos Lemas mostram algumas propriedades do operador integral fracionário.

Lema 2.24 *Seja $R(\alpha) > 0$, $n = [R(\alpha)] + 1$ e seja $f_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)$ a integral fracionária de ordem $n - \alpha$. Se $f(x) \in L_1(a, b)$ e $f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$, então a igualdade*

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j},$$

é válida, por quase toda parte em $[a, b]$.

Lema 2.25 *O operador integral fracionário I_{a+}^α com $\alpha \in \mathbb{C}$ ($R(\alpha) > 0$), é limitado em $L(a, b)$:*

$$\|I_{a+}^\alpha g\|_1 \leq \frac{(b-a)^{R(\alpha)}}{R(\alpha)|\Gamma(\alpha)|} \|g\|_1.$$

Em particular, para $\alpha > 0$,

$$\|I_{a+}^\alpha g\|_1 \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|g\|_1.$$

Para a prova dos Lemas (2.24) e (2.25) ver [13].

O teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo, pois ele mostra uma caracterização da solução do problema (2.1).

Teorema 2.26 *Seja $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Sejam G um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ e $f : (a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x, y) \in L(a, b)$ para qualquer $y \in G$.*

Se $y(x) \in L(a, b)$, então $y(x)$ satisfaz a relação (2.1), por quase toda parte, se e somente se $y(x)$ satisfaz, por quase toda parte, a equação integral (2.2).

Demonstração: Seja $y(x) \in L(a, b)$ satisfazendo, por quase toda parte, (2.1). Desde que $f(x, y) \in L(a, b)$, segue de (2.1) que $(D_{a+}^\alpha y)(x) \in L(a, b)$. Por definição, tem-se

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x), \quad n = [\alpha] + 1, \quad (I_{a+}^0 y)(x) = y(x)$$

e assim, $(I_{a^+}^{n-\alpha}y)(x) \in AC^n[a, b]$. Portanto, pelo Lema (2.24) com $y(x)$ no lugar de $f(x)$, obtém-se

$$(I_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}, \quad y_{n-\alpha}(x) = (I_{a^+}^{n-\alpha}y)(x).$$

Tem-se também, por definição da derivada fracionária, que

$$y_{n-\alpha}^{(n-j)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} (I_{a^+}^{(n-j)-(\alpha-j)}y)(x) = (D_{a^+}^{\alpha-j}y)(x).$$

Logo, pode-se reescrevê-la da forma:

$$\begin{aligned} (I_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\alpha y)(x) &= y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{(D_{a^+}^{\alpha-j}y)(a^+)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} \\ &= y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}. \end{aligned}$$

Pelo Lema (2.25), a integral $(I_{a^+}^\alpha f(t, y(t)))(x) \in L(a, b)$ existe por quase toda parte em $[a, b]$. Aplicando o operador $I_{a^+}^\alpha$ em ambos os lados de (2.1) e usando a expressão acima, obtém-se a equação (2.2) e assim, a necessidade está provada.

Agora, seja $y(x) \in L(a, b)$ satisfazendo por quase toda parte (2.2). Aplicando o operador $D_{a^+}^\alpha$ a ambos os lados de (2.2), obtém-se

$$(D_{a^+}^\alpha y)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (D_{a^+}^\alpha (t - a)^{\alpha-j})(x) + (D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(t, y(t)))(x).$$

Logo, chega-se em parte da equação (2.1), já que $D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$ e $D_{a^+}^\alpha (t - a)^{\alpha-j} = 0$. Portanto, falta mostrar que $(D_{a^+}^{\alpha-k}y)(a^+) = b_k$. Para isto, aplica-se o operador $D_{a^+}^{\alpha-k}$ ($k = 1, \dots, n$) a ambos os lados de (2.2). Se $1 \leq k \leq n - 1$, então

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^{\alpha-k}y)(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (D_{a^+}^{\alpha-k} (t - a)^{\alpha-j})(x) + (D_{a^+}^{\alpha-k} I_{a^+}^\alpha f(t, y(t)))(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(k - j + 1)} (x - a)^{k-j} + I_{a^+}^k f(t, y(t))(x). \end{aligned}$$

Observação 2.27 *Usa-se, acima, os seguintes argumentos:*

$$(D_{a^+}^\alpha(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (R(\alpha) \geq 0)$$

e

$$D_{a^+}^{\alpha-k} I_{a^+}^\alpha f(t) = I_{a^+}^{k-\alpha} I_{a^+}^\alpha f(t) = I_{a^+}^k f(t).$$

Logo,

$$(D_{a^+}^{\alpha-k} y)(x) = \sum_{j=1}^k \frac{b_j}{(k-j)!} (x-a)^{k-j} + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.3)$$

Se $k = n$, então de acordo com

$$(D_{a^+}^{\alpha-n} y)(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (I_{a^+}^{n-\alpha} y)(x), \quad (D_{a^+}^0 y)(a^+) = y(a)$$

e

$$(I_{a^+}^\alpha(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha+1} \quad (R(\alpha) > 0),$$

similarmente à (2.3), obtém-se

$$(D_{a^+}^{\alpha-n} y)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(n-j)!} (x-a)^{n-j} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.4)$$

Fazendo em (2.3) e (2.4), um limite quando $x \rightarrow a^+$, tem-se que as relações que faltavam estão satisfeitas por quase toda parte. ■

O próximo resultado mostra a unicidade da solução do problema (2.1) desde que a função f satisfaça a condição de Lipschitz.

Teorema 2.28 *Seja $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Sejam G um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ e $f : (a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x, y) \in L(a, b)$ para qualquer $y \in G$ e a condição de Lipschitz (2.14) é satisfeita. Então, existe uma única solução $y(x)$ para o problema de Cauchy no espaço $L^\alpha(a, b)$.*

Demonstração: Primeiro, prova-se a existência de uma única solução $y(x) \in L(a, b)$. Pelo Teorema (2.26), é suficiente provar a existência de uma única solução $y(x) \in L(a, b)$ para a equação (2.2). A equação (2.2) faz sentido em qualquer intervalo $[a, x_1] \subset [a, b]$ ($a < x_1 < b$). Escolha x_1 tal que a desigualdade

$$\frac{A(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1,$$

seja válida. Assim, prova-se a existência de uma única solução $y(x) \in L(a, x_1)$ para a equação (2.2) sobre o intervalo $[a, x_1]$. Para isto, use o Princípio da Contração de Banach (2.11) para o espaço $L(a, x_1)$, que é claramente um espaço métrico completo com a distância

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_1 := \int_a^{x_1} |y_1(x) - y_2(x)| dx.$$

Reescreva a equação integral (2.2) na forma $y(x) = (Ty)(x)$, em que

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (2.5)$$

com

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}.$$

Para aplicar o Teorema (2.11), deve-se provar o seguinte:

(1) Se $y(x) \in L(a, x_1)$, então $(Ty)(x) \in L(a, x_1)$;

(2) Para quaisquer $y_1, y_2 \in L(a, x_1)$,

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_1 \leq W \|y_1 - y_2\|_1, \quad W = \frac{A(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

De (2.2), $y_0(x) \in L(a, x_1)$. Desde que $f(x, y) \in L(a, b)$, pelo Lema (2.25) (com $b = x_1$ e $g(t) = f(t, y(t))$), a integral fracionária em (2.5) também pertence a $L(a, x_1)$, e assim $(Ty)(x) \in L(a, x_1)$. Agora,

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\|_{L(a, x_1)} &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y_1(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y_2(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\|_{L(a, x_1)} \\ &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\|_{L(a, x_1)} \leq \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\|_{L(a, x_1)} \\ &= \|I_{a+}^\alpha (|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|)\|_{L(a, x_1)} \leq \|I_{a+}^\alpha (A|y_1(t) - y_2(t)|)\|_{L(a, x_1)} \\ &= A \|I_{a+}^\alpha (|y_1(t) - y_2(t)|)\|_{L(a, x_1)} \leq \frac{A(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|y_1(x) - y_2(x)\|_{L(a, x_1)} \end{aligned}$$

E assim, existe uma única solução $y^*(x) \in L(a, x_1)$ para a equação (2.2) sobre o intervalo $[a, x_1]$.

Pelo Princípio da contração de Banach (2.11), a solução y^* é obtida como um limite de uma sequência convergente $(T^m y_0^*)(x)$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m y_0^* - y^*\|_{L(a, x_1)} = 0,$$

onde $y_0^*(x)$ é qualquer função em $L(a, b)$.

Se no mínimo um $b_k \neq 0$ na condição inicial, pode-se tomar $y_0^*(x) = y_0(x)$. A sequência $(T^m y_0^*)(x)$ é definida pela fórmula de recursão

$$(T^m y_0^*)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, (T^{m-1} y_0^*)(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Denotando-se $y_m(x) = (T^m y_0^*)(x)$, então:

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y_{m-1}(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m - y^*\|_{L(a, x_1)} = 0.$$

Isto significa que aplicando-se o método de aproximações sucessivas para encontrar uma única solução $y^*(x)$ para a equação (2.5) sobre $[a, x_1]$.

Considere agora o intervalo $[x_1, x_2]$, $x_2 = x_1 + h_1$, $h_1 > 0$ tal que $x_2 < b$. Reescreva a equação (2.5) na forma:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Desde que a função $y(t)$ é unicamente definida sobre o intervalo $[a, x_1]$, a última integral pode ser considerada como a função conhecida, e reescrevemos a equação anterior como

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

em que $y_{01}(x)$ definida por:

$$y_{01}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

é a função conhecida. Usando o mesmo argumento acima, existe uma única solução $y^*(x) \in L(x_1, x_2)$ para a equação (2.2) sobre o intervalo $[x_1, x_2]$. Tomando o próximo intervalo $[x_2, x_3]$,

em que $x_3 = x_2 + h_2$, $h_2 > 0$ tal que $x_3 < b$, e repetindo este processo, conclui-se que existe uma única solução $y^*(x) \in L(a, b)$ para a equação (2.5) sobre o intervalo $[a, b]$.

Assim, existe uma única solução $y(x) = y^*(x) \in L(a, b)$ para a equação (2.5) e, portanto para o problema de Cauchy.

Para completar a prova, mostra-se que tal única solução $y(x) \in L(a, b)$ pertence ao espaço $L^\alpha(a, b)$. Basta provar que

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) \in L(a, b).$$

Pela prova acima, a solução $y(x) \in L(a, b)$ é o limite da sequência $y_m(x) \in L(a, b)$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m - y\|_1 = 0,$$

com a escolha de certos y_m sobre cada intervalo $[a, x_1], \dots, [x_{L-1}, b]$. Logo,

$$\|D_{a+}^\alpha y_m - D_{a+}^\alpha y\|_1 = \|f(x, y_m) - f(x, y)\|_1 \leq A\|y_m - y\|_1.$$

Logo,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|D_{a+}^\alpha y_m - D_{a+}^\alpha y\|_1 = 0,$$

e portanto, $(D_{a+}^\alpha y)(x) \in L(a, b)$. ■

Capítulo 3

Existência de solução

3.1 Introdução ao problema

Neste capítulo, em que utilizamos como referência o artigo [3], tem-se como objetivo encontrar uma solução para o problema de fronteira em três pontos da seguinte forma:

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t, v(t), D^q v(t)), & t \in (0, 1), \\ D^\beta v(t) = g(t, u(t), D^p u(t)), & t \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\eta), & v(0) = 0, \quad v(1) = \gamma v(\eta), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e

$$1 < \alpha, \beta < 2; \quad p, q, \gamma > 0; \quad 0 < \eta < 1; \quad \alpha - q \geq 1; \quad \beta - p \geq 1; \quad \gamma \eta^{\alpha-1} < 1; \quad \gamma \eta^{\beta-1} < 1.$$

Para isto, precisa-se de alguns pré-requisitos que serão abordados na próxima seção.

3.2 Resultados existentes

Esta seção apresenta resultados importantes, que ajudarão na demonstração da existência de solução para o problema (3.1). Veja, primeiro, dois Lemas que nos mostram a forma da solução geral do problema fracionário.

Lema 3.1 *Seja $\alpha > 0$. Se assumirmos $u \in C((0, 1), \mathbb{R}) \cap L(0, 1)$, então a equação diferencial fracionária $D^\alpha u(t) = 0$ tem como únicas soluções*

$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n}$, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n-1 \leq \alpha < n$.

Demonstração: A prova pode ser encontrada em [5].

Como $D^\alpha I^\alpha u = u$ para todo $u \in C((0, 1), \mathbb{R}) \cap L(0, 1)$, do Lema (3.1), deduz-se a seguinte lei de composição.

Lema 3.2 *Assuma que $u \in C((0, 1), \mathbb{R}) \cap L(0, 1)$ com $D^\alpha u \in C((0, 1), \mathbb{R}) \cap L(0, 1)$. Então $I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n}$, para alguns $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

Denote por J o intervalo $[0, 1]$. O próximo Lema nos diz como é a solução do problema de fronteira fracionário.

Lema 3.3 *Seja $\zeta \in C(J, \mathbb{R})$ uma dada função e $1 < \alpha < 2$. Então a única solução de*

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = \zeta(t), & t \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma \cdot u(\eta), \end{cases} \quad (3.2)$$

é dada por

$$u(t) = \int_0^1 K_1(t, s) \cdot \zeta(s) ds,$$

onde $K_1(t, s)$ é a função de Green dada por:

$$K_1(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot (1 - \gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \begin{cases} K_{11}(t, s), & 0 \leq t \leq \eta, \\ K_{12}(t, s), & \eta < t \leq 1, \end{cases}$$

com

$$K_{11}(t, s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} \cdot (1 - \gamma \cdot \eta^{\alpha-1}) - t^{\alpha-1} \cdot [(1-s)^{\alpha-1} - \gamma \cdot (\eta-s)^{\alpha-1}], & 0 \leq s \leq t, \\ -t^{\alpha-1} [(1-s)^{\alpha-1} - \gamma \cdot (\eta-s)^{\alpha-1}], & t < s \leq \eta, \\ -(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}, & \eta < s \leq 1, \end{cases}$$

e

$$K_{12}(t, s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} \cdot (1 - \gamma \cdot \eta^{\alpha-1}) - t^{\alpha-1} \cdot [(1-s)^{\alpha-1} - \gamma \cdot (\eta-s)^{\alpha-1}], & 0 \leq s \leq \eta, \\ (t-s)^{\alpha-1} \cdot (1 - \gamma \cdot \eta^{\alpha-1}) - (t(1-s))^{\alpha-1}, & \eta < s \leq t, \\ -(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}, & t < s \leq 1. \end{cases}$$

Demonstração: Pelo Lema (3.2), para d_1 e $d_2 \in \mathbb{R}$, a solução geral, $u(t) \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, de (3.2) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u(t) &= I^\alpha \zeta(t) + d_1 \cdot t^{\alpha-1} + d_2 \cdot t^{\alpha-2} \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds + d_1 \cdot t^{\alpha-1} + d_2 \cdot t^{\alpha-2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Usando as condições de fronteira, por $u(0) = 0$, temos $d_2 = 0$, pois $t^{\alpha-2} \neq 0$, já que $-1 < \alpha - 2 < 0$. E, de $u(1) = \gamma \cdot u(\eta)$, tem-se

$$\begin{aligned}\gamma \cdot u(\eta) &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds + d_1 \\ \gamma \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds + \gamma \cdot d_1 \cdot \eta^{\alpha-1} &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds + d_1 \\ d_1(\gamma \cdot \eta^{\alpha-1} - 1) &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds - \gamma \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \\ d_1 &= -\frac{1}{(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \cdot \left[\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds - \gamma \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \right].\end{aligned}$$

Assim, (3.3) se torna:

$$\begin{aligned}u(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds - \frac{t^{\alpha-1}}{(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \cdot \left[\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \gamma \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \right] \\ &= \int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} - \frac{(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}}{1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}} \right] \cdot \frac{\zeta(s)}{\Gamma(\alpha)} ds - \frac{1}{(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \int_t^1 \frac{(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \\ &\quad + \frac{\gamma}{(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \int_0^\eta \frac{(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds.\end{aligned}$$

Vamos separar os casos possíveis para t . Suponha que $t \leq \eta$, então

$$\begin{aligned}u(t) &= \int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} - \frac{(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}}{1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}} \right] \cdot \frac{\zeta(s)}{\Gamma(\alpha)} ds - \frac{1}{(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \int_t^\eta \frac{(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \int_\eta^1 \frac{(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds + \frac{\gamma}{1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}} \int_0^t \frac{(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \\ &\quad + \frac{\gamma}{1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}} \int_t^\eta \frac{(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma \eta^{\alpha-1})} \left[\int_0^t [(t-s)^{\alpha-1}(1-\gamma \eta^{\alpha-1}) - (t \cdot (1-s))^{\alpha-1} + \gamma(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1}] \cdot \zeta(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_t^\eta [-(t \cdot (1-s))^{\alpha-1} + \gamma(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1}] \zeta(s) ds + \int_\eta^1 -(t \cdot (1-s))^{\alpha-1} \zeta(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma \eta^{\alpha-1})} \int_0^1 K_{11}(t, s) \zeta(s) ds.\end{aligned}$$

Considere agora $t > \eta$.

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^\eta \left[(t-s)^{\alpha-1} - \frac{(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}}{1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}} \right] \cdot \frac{\zeta(s)}{\Gamma(\alpha)} ds + \int_\eta^t \left[(t-s)^{\alpha-1} - \frac{(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}}{1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}} \right] \cdot \frac{\zeta(s)}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&\quad - \frac{1}{(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \int_t^1 \frac{(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds + \frac{\gamma}{1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}} \int_0^\eta \frac{(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \\
&\quad + \frac{\gamma}{1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}} \int_\eta^t \frac{(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds + \frac{\gamma}{1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}} \int_t^1 \frac{(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \zeta(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma \eta^{\alpha-1})} \left[\int_0^\eta \left[(t-s)^{\alpha-1}(1-\gamma \eta^{\alpha-1}) - (t \cdot (1-s))^{\alpha-1} + \gamma(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1} \right] \cdot \zeta(s) ds \right. \\
&\quad + \int_\eta^t \left[(t-s)^{\alpha-1}(1-\gamma \eta^{\alpha-1}) - (t \cdot (1-s))^{\alpha-1} + \gamma(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1} \right] \zeta(s) ds \\
&\quad \left. + \int_t^1 -(t \cdot (1-s))^{\alpha-1} \zeta(s) ds \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma \eta^{\alpha-1})} \int_0^1 K_{12}(t, s) \zeta(s) ds. \blacksquare
\end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se a solução geral de

$$\begin{cases} D^\beta v(t) = \varsigma(t), \\ v(0) = 0, \quad v(1) = \gamma v(\eta), \end{cases}$$

isto é,

$$v(t) = \int_0^1 K_2(t, s) \varsigma(s) ds,$$

em que $K_2(t, s)$ pode ser obtido de $K_1(t, s)$ trocando α por β . Tome (K_1, K_2) como a função de Green para o problema de valor de fronteira (3.1).

O Lema a seguir fala sobre a equivalência das soluções do problema (3.1) e de um sistema acoplado que veremos no enunciado do próximo resultado.

Lema 3.4 *Assuma que $f, g : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Então $(u, v) \in X \times Y$ é uma solução de (3.1) se, e somente se, $(u, v) \in X \times Y$ é uma solução do seguinte sistema acoplado:*

$$\begin{cases} u(t) = \int_0^1 K_1(t, s) f(s, v(s), D^p v(s)) ds, \\ v(t) = \int_0^1 K_2(t, s) g(s, u(s), D^q u(s)) ds. \end{cases} \quad (3.4)$$

Demonstração: A necessidade é imediata segue do Lema (3.3). Para provar a suficiência, considere $(u, v) \in X \times Y$ uma solução de (3.4), isto é:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 K_1(t, s) f(s, v(s), D^p v(s)) ds, \\ v(t) &= \int_0^1 K_2(t, s) g(s, u(s), D^q u(s)) ds. \end{aligned}$$

Assim, mostra-se que (u, v) , como acima, satisfaz o problema (3.1). Note que, pela demonstração do Lema (3.3),

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 K_1(t, s) f(s, v(s), D^p v(s)) ds \\ &= I^\alpha f(t, v(t), D^p v(t)) - \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \gamma \eta^{\alpha-1}} \{I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta))\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^1 K_2(t, s) g(s, u(s), D^q u(s)) ds \\ &= I^\beta f(t, v(t), D^p v(t)) - \frac{t^{\beta-1}}{1 - \gamma \eta^{\beta-1}} \{I^\beta f(1, v(1), D^p v(1)) - \gamma I^\beta f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta))\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} D^\alpha u(t) &= D^\alpha I^\alpha f(t, v(t), D^p v(t)) - \frac{D^\alpha t^{\alpha-1}}{1 - \gamma \eta^{\alpha-1}} \{I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta))\} \\ &= f(t, v(t), D^p v(t)), \end{aligned}$$

pois $D^\alpha t^{\alpha-1} = 0$.

Analogamente, vê-se que

$$D^\beta v(t) = g(t, u(t), D^q u(t)).$$

Além disso,

$$u(0) = I^\alpha f(0, v(0), D^p v(0)) = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
u(1) &= I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) - \frac{1}{1 - \gamma \eta^{\alpha-1}} \{I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta))\} \\
&= \gamma \left\{ \frac{-\eta^{\alpha-1}}{1 - \gamma \eta^{\alpha-1}} I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) + \frac{1}{1 - \gamma \eta^{\alpha-1}} I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)) \right\} \\
&= \gamma \left\{ -\frac{\eta^{\alpha-1}}{1 - \gamma \eta^{\alpha-1}} I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) + \left[\frac{1 - \gamma \eta^{\alpha-1} + \gamma \eta^{\alpha-1}}{1 - \gamma \eta^{\alpha-1}} \right] I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)) \right\} \\
&= \gamma \left\{ I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)) - \frac{\eta^{\alpha-1}}{1 - \gamma \eta^{\alpha-1}} [I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta))] \right\} \\
&= \gamma u(\eta).
\end{aligned}$$

De modo similar, mostra-se que

$$v(0) = 0 \text{ e } v(1) = \gamma v(\eta). \blacksquare$$

A partir deste momento, tem-se todas as ferramentas necessárias para demonstrar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.5 *Assuma que as hipóteses (A) e (B) são satisfeitas:*

(A) *Existe função não negativa $a(t) \in L(0, 1)$ tal que*

$$|f(t, x, y)| \leq a(t) + \epsilon_1 |x|^{\rho_1} + \epsilon_2 |y|^{\rho_2}; \quad \epsilon_1, \epsilon_2 > 0; \quad 0 < \rho_1, \rho_2 < 1;$$

(B) *Existe função não negativa $b(t) \in L(0, 1)$ tal que*

$$|g(t, x, y)| \leq b(t) + \delta_1 |x|^{\sigma_1} + \delta_2 |y|^{\sigma_2}; \quad \delta_1, \delta_2 \geq 0; \quad 0 < \sigma_1, \sigma_2 < 1.$$

Então, existe uma solução para o problema de fronteira em três pontos (3.1).

Demonstração: Considere $C(J, \mathbb{R})$ o espaço de todas as funções contínuas sobre o intervalo $J = [0, 1]$, $X = \{u(t) \mid u \in C(J, \mathbb{R}) \text{ e } D^q u \in C(J, \mathbb{R})\}$ é um espaço de Banach [25] equipado com a norma

$$\|u\|_X = \max_{t \in J} |u(t)| + \max_{t \in J} |D^q u(t)|,$$

em que $1 < \alpha < 2$, $0 < q \leq \alpha - 1$ e $Y = \{v(t) \mid v \in C(J, \mathbb{R}) \text{ e } D^p v \in C(J, \mathbb{R})\}$ é um espaço de Banach [25] equipado com a norma

$$\|v\|_Y = \max_{t \in J} |v(t)| + \max_{t \in J} |D^p v(t)|,$$

em que $1 < \beta < 2$, $0 < q \leq \beta - 1$. Assim, $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ é um espaço de Banach [25] com a norma definida por $\|(u, v)\|_{X \times Y} = \max\{\|u\|_X, \|v\|_Y\}$ para $(u, v) \in X \times Y$.

Por conveniência, vamos usar as seguintes notações:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)(2 + \gamma) + \Gamma(\alpha - q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})}, \\ \Lambda_2 &= \frac{\Gamma(\beta)(2 + \gamma) + \Gamma(\beta - p)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta - p)(1 - \gamma\eta^{\beta-1})}, \\ \mu &= \frac{\Gamma(\alpha)(2 + \gamma) + \Gamma(\alpha - q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 a(s)ds, \\ \nu &= \frac{\Gamma(\beta)(2 + \gamma) + \Gamma(\beta - p)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta - p)(1 - \gamma\eta^{\beta-1})} \int_0^1 b(s)ds.\end{aligned}$$

Defina agora um operador $F : X \times Y \rightarrow X \times Y$ como

$$F(u, v)(t) = (F_1v(t), F_2u(t)),$$

onde

$$F_1v(t) = \int_0^1 K_1(t, s)f(s, v(s), D^Pv(s))ds$$

e

$$F_2u(t) = \int_0^1 K_2(t, s)g(s, u(s), D^qu(s))ds.$$

Pela continuidade de K_1, K_2, f e g , segue que F é contínuo. Além disso, pelo Lema (3.4), o ponto fixo do operador F coincide com a solução do problema (3.1).

Agora seja W uma bola no espaço de Banach $X \times Y$ definida como

$$W = \{(u(t), v(t)) / (u(t), v(t)) \in X \times Y, \|(u(t), v(t))\|_{X \times Y} \leq R, t \in J\},$$

onde $R \geq \max\{(3\Lambda_1\epsilon_1)^{\frac{1}{1-\rho_1}}, (3\Lambda_1\epsilon_2)^{\frac{1}{1-\rho_2}}, (3\Lambda_2\delta_1)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}, (3\Lambda_2\delta_2)^{\frac{1}{1-\sigma_2}}, 3\mu, 3\nu\}$.

A primeira etapa é mostrar que a função de Green $K_1(t, s)$ é não-positiva. Para isto, tem-se que analisar cada função por meio das quais a função de Green, $K_1(t, s)$, está definida. Note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} &> 0, \text{ pois} \\ \Gamma(\alpha) &> 0, \text{ para } 1 < \alpha < 2\end{aligned}$$

e

$$0 < 1 - \gamma\eta^{\alpha-1} < 1, \text{ já que}$$

$$0 < \gamma\eta^{\alpha-1} < 1.$$

Portanto, basta fazer as seguintes verificações:

1. Para $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} \text{a) } & (t-s)^{\alpha-1}(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}) - t^{\alpha-1}[(1-s)^{\alpha-1} - \gamma \cdot (\eta-s)^{\alpha-1}] < 0, \text{ pois} \\ & (t-s)^{\alpha-1}(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}) - t^{\alpha-1}[(1-s)^{\alpha-1} - \gamma(\eta-s)^{\alpha-1}] \\ & = t^{\alpha-1}(1-\frac{s}{t})^{\alpha-1}(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}) - t^{\alpha-1}\left[(1-s)^{\alpha-1} - \gamma\eta^{\alpha-1}(1-\frac{s}{\eta})^{\alpha-1}\right] \\ & < t^{\alpha-1}[(1-s)^{\alpha-1}(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1}) - (1-s)^{\alpha-1} + \gamma\eta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}] \\ & = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & -t^{\alpha-1}[(1-s)^{\alpha-1} - \gamma(\eta-s)^{\alpha-1}] < 0, \text{ pois} \\ & -t^{\alpha-1}[(1-s)^{\alpha-1} - \gamma(\eta-s)^{\alpha-1}] \\ & = -t^{\alpha-1}\left[(1-s)^{\alpha-1} - \gamma\eta^{\alpha-1}(1-\frac{s}{\eta})^{\alpha-1}\right] \\ & < -t^{\alpha-1}[(1-s)^{\alpha-1} - \gamma\eta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}] \\ & = -t^{\alpha-1}[(1-s)^{\alpha-1}(1-\gamma\eta^{\alpha-1})] < 0, \text{ para } 0 \leq s \leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & -(t \cdot (1-s))^{\alpha-1} < 0, \text{ pois} \\ & t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} > 0. \end{aligned}$$

2. Para $t = 0$, tem-se que ou $K_1(t, s) = 0$ ou $K_1(t, s) < 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K_1(t, s)| ds &= - \int_0^1 K_1(t, s) ds \\ &= - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \zeta(s) ds + \frac{1}{(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \left\{ \int_0^1 \frac{(t \cdot (1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \zeta(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \gamma \int_0^\eta \frac{(t \cdot (\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \zeta(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Agora, deve-se provar que F está bem definido, ou seja, $F(W) \subset W$. Assim, dado $(u(t), v(t)) \in W$, ou seja, $\|(u(t), v(t))\|_{X \times Y} \leq R$, mostra-se que

$$\|F(u(t), v(t))\|_{X \times Y} \leq R.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|F_1 v(t)| &= \left| \int_0^1 K_1(t, s) \cdot f(s, v(s), D^p v(s)) ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |K_1(t, s) \cdot f(s, v(s), D^p v(s))| ds \\
&= \int_0^1 |K_1(t, s)| |f(s, v(s), D^p v(s))| ds \\
&\leq \int_0^1 |K_1(t, s)| (a(s) + \epsilon_1 |v(s)|^{\rho_1} + \epsilon_2 |D^p v(s)|^{\rho_2}) ds \\
&\leq \int_0^1 |K_1(t, s)| a(s) ds + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \int_0^1 |K_1(t, s)| ds \\
&= - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) ds + \frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \left\{ \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) ds \right. \\
&\quad \left. - \gamma \int_0^\eta \frac{(t(\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) ds \right\} + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left[- \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \left\{ \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - \gamma \int_0^\eta \frac{(t(\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right\} \right] \\
&\leq - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) ds + \frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \left\{ \int_0^1 \frac{a(s)}{\Gamma(\alpha)} ds - \gamma \int_0^\eta \frac{(t(\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) ds \right\} \\
&\quad + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left[- \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds + \frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \left\{ \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma \int_0^\eta \frac{(t(\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right\} \right] \\
&\leq \frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \left\{ \int_0^1 \frac{a(s)}{\Gamma(\alpha)} ds - \gamma \int_0^\eta \frac{(t(\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) ds \right\} \\
&\quad + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left[\frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} ds - \gamma \int_0^\eta \frac{(t(\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right\} \right] \\
&\leq \frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 \frac{a(s)}{\Gamma(\alpha)} ds + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left[\frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} ds \right] \\
&= \frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 \frac{a(s)}{\Gamma(\alpha)} ds + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 a(s) ds + \frac{(\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2})}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma \cdot \eta^{\alpha-1})}.
\end{aligned}$$

Note que, em consequência do Lema (3.3) e pela linearidade da derivada fracionária:

$$\begin{aligned}
F_1 v(t) &= \int_0^1 K_1(t, s) \cdot f(s, v(s), D^p v(s)) ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^p v(s)) ds - \int_0^1 \frac{(t(1-s))^{\alpha-1} f(s, v(s), D^p v(s))}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} ds \\
&\quad + \gamma \int_0^\eta \frac{(t(\eta-s))^{\alpha-1} f(s, v(s), D^p v(s))}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} ds \\
&= I^\alpha f(t, v(t), D^p v(t)) - \frac{t^{\alpha-1}}{1-\gamma\eta^{\alpha-1}} \{I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta))\}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
|D^q F_1 v(t)| &= \left| D^q I^\alpha f(t, v(t), D^p v(t)) - \frac{D^q t^{\alpha-1}}{1-\gamma\eta^{\alpha-1}} \left\{ I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)) \right\} \right| \\
&= \left| I^{\alpha-q} f(t, v(t), D^p v(t)) - \frac{\Gamma(\alpha) t^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \left\{ I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)) \right\} \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha-q)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} f(s, v(s), D^p v(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma(\alpha) t^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q) \cdot (1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^p v(s)) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^p v(s)) ds \right\} \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-q)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-q-1} f(s, v(s), D^p v(s))| ds \\
&\quad + \frac{\Gamma(\alpha) |t^{\alpha-q-1}|}{\Gamma(\alpha-q) \cdot (1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^p v(s)) \right| ds \right. \\
&\quad \left. + \gamma \int_0^\eta \left| \frac{(\eta-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, v(s), D^p v(s)) \right| ds \right\} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-q)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} a(s) ds + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1-\gamma\eta^{\alpha-1}} \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s) ds + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} a(s) ds + \gamma (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} ds \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \left[(1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} a(s) ds \right. \\
&\quad + (1 - \gamma\eta^{\alpha-1})(\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s) ds \\
&\quad + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds + \gamma \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} a(s) ds \\
&\quad \left. + \gamma(\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} ds \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \left[(1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} a(s) ds + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s) ds \right. \\
&\quad + \gamma \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} a(s) ds + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left\{ (1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds + \gamma \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} ds \right\} \Big] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \left[(1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) \int_0^t a(s) ds + \int_0^1 a(s) ds + \gamma \int_0^\eta a(s) ds \right. \\
&\quad \left. + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left\{ (1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) \int_0^t ds + \int_0^1 ds + \gamma \int_0^\eta ds \right\} \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \left[(1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) \int_0^1 a(s) ds + \int_0^1 a(s) ds + \gamma \int_0^\eta a(s) ds \right. \\
&\quad \left. + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left\{ (1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) \int_0^t ds + \int_0^1 ds + \gamma \int_0^\eta ds \right\} \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \left[(2 - \gamma\eta^{\alpha-1} + \gamma) \int_0^1 a(s) ds \right. \\
&\quad \left. + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left\{ (1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) \int_0^1 ds + \int_0^1 ds + \gamma \int_0^1 ds \right\} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \left[(2 - \gamma\eta^{\alpha-1} + \gamma) \int_0^1 a(s) ds + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \{ (2 - \gamma\eta^{\alpha-1} + \gamma) \} \right].
\end{aligned}$$

Além disso, por definição,

$$R \geq (3\Lambda_1\epsilon_1)^{\frac{1}{1-\rho_1}}.$$

E também, como $0 < 1 - \rho_1 < 1$,

$$R^{1-\rho_1} \geq 3\Lambda_1\epsilon_1.$$

A partir disto,

$$R \geq 3\Lambda_1\epsilon_1 R^{\rho_1}.$$

Logo, como R é o raio da bola $W(R > 0)$,

$$\Lambda_1 \epsilon_1 |R|^{\rho_1} = \Lambda_1 \epsilon_1 R^{\rho_1} \leq \frac{R}{3}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|F_1 v(t)\|_X &= \max_{t \in J} |F_1 v(t)| + \max_{t \in J} |D^q F_1 v(t)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \int_0^1 a(s) ds + \frac{(\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2})}{\Gamma(\alpha)(1 - \gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \left[(2 - \gamma\eta^{\alpha-1} + \gamma) \int_0^1 a(s) ds \right. \\ &\quad \left. + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \{ (2 - \gamma\eta^{\alpha-1} + \gamma) \} \right] \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} + \frac{2 - \gamma\eta^{\alpha-1} + \gamma}{\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \right) \int_0^1 a(s) ds \\ &\quad + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)(1 - \gamma \cdot \eta^{\alpha-1})} + \frac{(2 - \gamma\eta^{\alpha-1} + \gamma)}{\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \right) \\ &= \left(\frac{\Gamma(\alpha - q) + \Gamma(\alpha)(2 - \gamma\eta^{\alpha-1} + \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \right) \int_0^1 a(s) ds \\ &\quad + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \left(\frac{\Gamma(\alpha - q) + \Gamma(\alpha)(2 - \gamma\eta^{\alpha-1} + \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha - q)(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})} \right) \\ &= \mu + (\epsilon_1 |R|^{\rho_1} + \epsilon_2 |R|^{\rho_2}) \Lambda_1 \leq \frac{R}{3} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = R. \end{aligned}$$

Analogamente, pode-se mostrar que

$$\|F_2 u(t)\|_Y \leq \nu + (\delta_1 |R|^{\sigma_1} + \delta_2 |R|^{\sigma_2}) \Lambda_2 \leq R.$$

Assim,

$$\|F(u, v)\|_{X \times Y} \leq R.$$

Desde que $F_1 v(t)$, $F_2 u(t)$, $D^q F_1 v(t)$, $D^p F_2 u(t)$ são contínuas sobre J , então $F(W) \subset W$. Com isso, foi mostrado também que F é uniformemente limitado. Agora, deve-se mostrar que F é um operador completamente contínuo. Para isto, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, falta mostrar que a família $F(W)$ é equicontínua, ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall F(u, v) \in F(W), |t - \tau| < \delta, \rightarrow \|F(u, v)(t) - F(u, v)(\tau)\|_{X \times Y} < \epsilon.$$

Sejam $(u, v) \in W$, $t, \tau \in J$ ($t < \tau$). Fixe

$$M = \max_{t \in J} |f(t, v(t), D^p v(t))|, \quad N = \max_{t \in J} |g(t, u(t), D^q u(t))|.$$

Então

$$\begin{aligned}
|F_1 v(t) - F_1 v(\tau)| &= \left| \int_0^1 (K_1(t, s) - K_1(\tau, s)) f(s, v(s), D^p v(s)) ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |(K_1(t, s) - K_1(\tau, s)) f(s, v(s), D^p v(s))| ds \\
&\leq M \int_0^1 |(K_1(t, s) - K_1(\tau, s))| ds \\
&= M \left[\int_0^t |(K_1(t, s) - K_1(\tau, s))| ds + \int_t^\tau |(K_1(t, s) - K_1(\tau, s))| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_\tau^\eta |(K_1(t, s) - K_1(\tau, s))| ds + \int_\eta^1 |(K_1(t, s) - K_1(\tau, s))| ds \right] \\
&= \frac{M}{(1 - \gamma \eta^{\alpha-1}) \Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t |((t-s)^{\alpha-1} - (\tau-s)^{\alpha-1})(1 - \gamma \eta^{\alpha-1}) + \right. \\
&\quad \left. + (\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1} + \gamma((t(\eta-s))^{\alpha-1} - (\tau(\eta-s))^{\alpha-1})| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^\tau |-(\tau-s)^{\alpha-1}(1 - \gamma \eta^{\alpha-1}) + (\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1} \right. \\
&\quad \left. + \gamma((t(\eta-s))^{\alpha-1} - (\tau(\eta-s))^{\alpha-1})| ds + \int_\tau^\eta |(\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1} \right. \\
&\quad \left. + \gamma((t(\eta-s))^{\alpha-1} - (\tau(\eta-s))^{\alpha-1})| ds + \int_\eta^1 |(\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1}| ds \right] \\
&\leq \frac{M}{(1 - \gamma \eta^{\alpha-1}) \Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t |((t-s)^{\alpha-1} - (\tau-s)^{\alpha-1})(1 - \gamma \eta^{\alpha-1})| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t |(\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1}| ds + \gamma \int_0^t |((t(\eta-s))^{\alpha-1} - (\tau(\eta-s))^{\alpha-1})| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^\tau |-(\tau-s)^{\alpha-1}(1 - \gamma \eta^{\alpha-1})| ds + \int_t^\tau |(\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1}| ds \right. \\
&\quad \left. + \gamma \int_t^\tau |((t(\eta-s))^{\alpha-1} - (\tau(\eta-s))^{\alpha-1})| ds + \int_\tau^\eta |(\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1}| ds \right. \\
&\quad \left. + \gamma \int_\tau^\eta |((t(\eta-s))^{\alpha-1} - (\tau(\eta-s))^{\alpha-1})| ds + \int_\eta^1 |(\tau(1-s))^{\alpha-1} - (t(1-s))^{\alpha-1}| ds \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t ((\tau - s)^{\alpha-1} - (t - s)^{\alpha-1})(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})ds \right. \\
&\quad + \int_0^t (\tau(1 - s))^{\alpha-1} - (t(1 - s))^{\alpha-1}ds + \gamma \int_0^t ((\tau(\eta - s))^{\alpha-1} - (t(\eta - s))^{\alpha-1})ds \\
&\quad + \int_t^\tau (\tau - s)^{\alpha-1}(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})ds + \int_t^\tau (\tau(1 - s))^{\alpha-1} - (t(1 - s))^{\alpha-1}ds \\
&\quad + \gamma \int_t^\tau ((\tau(\eta - s))^{\alpha-1} - (t(\eta - s))^{\alpha-1})ds + \int_\tau^\eta (\tau(1 - s))^{\alpha-1} - (t(1 - s))^{\alpha-1}ds \\
&\quad \left. + \gamma \int_\tau^\eta ((\tau(\eta - s))^{\alpha-1} - (t(\eta - s))^{\alpha-1})ds + \int_\eta^1 (\tau(1 - s))^{\alpha-1} - (t(1 - s))^{\alpha-1}ds \right] \\
&= \frac{M}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t \{((\tau - s)^{\alpha-1} - (t - s)^{\alpha-1})(1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) + (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})((1 - s)^{\alpha-1} \right. \\
&\quad \left. + \gamma(\eta - s)^{\alpha-1})\}ds + \int_t^\tau \{(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})((1 - s)^{\alpha-1} + \gamma(\eta - s)^{\alpha-1}) + (\tau - s)^{\alpha-1}(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\}ds \right. \\
&\quad \left. + \int_\tau^\eta (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})((1 - s)^{\alpha-1} + \gamma(\eta - s)^{\alpha-1})ds + \int_\eta^1 (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})(1 - s)^{\alpha-1}ds \right] \\
&= \frac{M}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1}(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})ds - \int_0^t (t - s)^{\alpha-1}(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\eta (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})((1 - s)^{\alpha-1} + \gamma(\eta - s)^{\alpha-1}) + \int_\eta^1 (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})((1 - s)^{\alpha-1}ds \right] \\
&= \frac{M}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} \left[\left(-\frac{(\tau - s)^\alpha}{\alpha} \right)_0^\tau (1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) + \left(\frac{(t - s)^\alpha}{\alpha} \right)_0^t (1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) \right. \\
&\quad \left. + (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) \left(-\frac{(1 - s)^\alpha}{\alpha} - \frac{\gamma(\eta - s)^\alpha}{\alpha} \right)_0^\eta - (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) \left(\frac{(1 - s)^\alpha}{\alpha} \right)_\eta^1 \right] \\
&= \frac{M}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\tau^\alpha}{\alpha}(1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) - \frac{t^\alpha}{\alpha}(1 - \gamma\eta^{\alpha-1}) + (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) \left(-\frac{(1 - \eta)^\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\gamma\eta^\alpha}{\alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) \frac{(1 - \eta)^\alpha}{\alpha} \right] \\
&= \frac{M}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha + 1)} [(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})(\tau^\alpha - t^\alpha) + (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})(1 + \gamma\eta^\alpha)]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& |D^q F_1 v(t) - D^q F_1 v(\tau)| = \\
& = \left| D^q I^\alpha f(t, v(t), D^p v(t)) - \frac{D^q t^{\alpha-1}}{(1 - \gamma \eta^{\alpha-1})} \{ I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)) \} \right. \\
& \quad \left. - D^q I^\alpha f(\tau, v(\tau), D^p v(\tau)) + \frac{D^q \tau^{\alpha-1}}{(1 - \gamma \eta^{\alpha-1})} \{ I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)) \} \right| \\
& = \left| I^{\alpha-q} f(t, v(t), D^p v(t)) - \frac{\Gamma(\alpha) t^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)(1 - \gamma \eta^{\alpha-1})} \{ I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) \right. \\
& \quad \left. - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)) \} - I^{\alpha-q} f(\tau, v(\tau), D^p v(\tau)) + \frac{\Gamma(\alpha) \tau^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)(1 - \gamma \eta^{\alpha-1})} \right. \\
& \quad \left. \{ I^\alpha f(1, v(1), D^p v(1)) - \gamma I^\alpha f(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)) \} \right| \\
& = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha-q)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} f(s, v(s), D^p v(s)) ds - \frac{t^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)(1 - \gamma \eta^{\alpha-1})} \right. \\
& \quad \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), D^p v(s)) ds - \gamma \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), D^p v(s)) ds \right\} \\
& \quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha-q)} \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-q-1} f(s, v(s), D^p v(s)) ds + \frac{\tau^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)(1 - \gamma \eta^{\alpha-1})} \\
& \quad \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), D^p v(s)) ds - \gamma \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} f(s, v(s), D^p v(s)) ds \right\} \Big| \\
& \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha-q)} \left[\left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} ds - \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-q-1} ds \right| \right] \\
& \quad + \frac{M}{(1 - \gamma \eta^{\alpha-1}) \Gamma(\alpha-q)} \left| (\tau^{\alpha-q-1} - t^{\alpha-q-1}) \left\{ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds - \gamma \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} ds \right\} \right| \\
& = \frac{M}{\Gamma(\alpha-q)} \left[\left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} ds - \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-q-1} ds \right| \right] \\
& \quad + \frac{M}{(1 - \gamma \eta^{\alpha-1}) \Gamma(\alpha-q)} \left| (\tau^{\alpha-q-1} - t^{\alpha-q-1}) \left\{ \left(-\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\alpha} \right)_0^1 - \gamma \left(-\frac{(\eta-s)^{\alpha-1}}{\alpha} \right)_0^\eta \right\} \right| \\
& = \frac{M}{\Gamma(\alpha-q)} \left[\left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} ds - \int_0^\tau (\tau-s)^{\alpha-q-1} ds \right| \right] \\
& \quad + \frac{M}{(1 - \gamma \eta^{\alpha-1}) \Gamma(\alpha-q)} \left| (\tau^{\alpha-q-1} - t^{\alpha-q-1}) \left\{ \frac{1}{\alpha} - \gamma \frac{\eta^\alpha}{\alpha} \right\} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha - q)} \left| \int_0^t (t - s)^{\alpha - q - 1} ds - \int_0^\tau (t - s)^{\alpha - q - 1} ds \right| \\
&+ \frac{M}{\Gamma(\alpha - q)} \left| \int_0^\tau (t - s)^{\alpha - q - 1} ds - \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha - q - 1} ds \right| \\
&+ \frac{M(1 - \gamma\eta^\alpha)}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha - q)\alpha} (\tau^{\alpha - q - 1} - t^{\alpha - q - 1}) \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha - q)} \left[\int_t^\tau (t - s)^{\alpha - q - 1} ds + \int_0^\tau ((\tau - s)^{\alpha - q - 1} - (t - s)^{\alpha - 1}) ds \right] \\
&+ \frac{M(1 - \gamma\eta^\alpha)}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha - q)\alpha} (\tau^{\alpha - q - 1} - t^{\alpha - q - 1}) \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha - q)} \left[\left(-\frac{(\tau - s)^{\alpha - q}}{\alpha - q} + \frac{(t - s)^{\alpha - q}}{\alpha - q} \right)_0^\tau - \left(\frac{(t - s)^{\alpha - q}}{\alpha - q} \right)_t^\tau \right] \\
&+ \frac{M(1 - \gamma\eta^\alpha)}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha - q)\alpha} (\tau^{\alpha - q - 1} - t^{\alpha - q - 1}) \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha - q)} \left[\frac{\tau^{\alpha - q}}{\alpha - q} + \frac{(t - \tau)^{\alpha - q}}{\alpha - q} - \frac{t^{\alpha - q}}{\alpha - q} - \frac{(t - \tau)^{\alpha - q}}{\alpha - q} \right] \\
&+ \frac{M(1 - \gamma\eta^\alpha)}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha - q)\alpha} (\tau^{\alpha - q - 1} - t^{\alpha - q - 1}) \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha - q + 1)} (\tau^{\alpha - q} - t^{\alpha - q}) + \frac{M(1 - \gamma\eta^\alpha)}{(1 - \gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha - q)\alpha} (\tau^{\alpha - q - 1} - t^{\alpha - q - 1}).
\end{aligned}$$

Similarmente, pode-se provar que

$$\begin{aligned}
|F_2 u(t) - F_2 u(\tau)| &\leq \frac{N}{(1 - \gamma\eta^{\beta-1})\Gamma(\beta + 1)} [(1 - \gamma\eta^\beta)(\tau^{\beta-1} - t^{\beta-1}) + (1 - \gamma\eta^{\beta-1})(\tau^\beta - t^\beta)], \\
|D^p F_2 u(t) - D^p F_2 u(\tau)| &\leq \frac{N}{\Gamma(\beta - p + 1)} (\tau^{\beta-p} - t^{\beta-p}) + \frac{N(1 - \gamma\eta^\beta)}{(1 - \gamma\eta^{\beta-1})\Gamma(\beta - p)\beta} (\tau^{\beta-p-1} - t^{\beta-p-1}).
\end{aligned}$$

Desde que as funções t^α , $t^{\alpha-1}$, t^β , $t^{\beta-1}$, $t^{\alpha-q}$, $t^{\alpha-q-1}$, $t^{\beta-p}$, $t^{\beta-p-1}$ são uniformemente contínuas sobre J, então segue das estimativas acima que $F(W)$ é um conjunto equicontínuo. Além disso, foi mostrado que $F(W) \subset W$ é uniformemente limitado. Assim, pelo teorema de Arzelá-Ascoli (2.7), segue que F é um operador completamente contínuo. Portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Schauder (2.17), existe uma solução de (3.1). ■

3.2.1 Aplicação do problema

Nesta subseção é apresentada uma aplicação do problema (3.1).

Exemplo 3.6 *Considere o problema de valor de fronteira em três pontos*

$$\begin{cases} D^{\frac{9}{7}}u(t) = a_1 + \left(t - \frac{1}{3}\right)^4 \left[(v(t))^{\rho_1} + (D^{\frac{2}{5}}v(t))^{\rho_2}\right], & t \in (0, 1), \\ D^{\frac{7}{5}}v(t) = b_1 + \left(t - \frac{1}{3}\right)^4 \left[(u(t))^{\sigma_1} + (D^{\frac{1}{7}}u(t))^{\sigma_2}\right], & t \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \frac{4}{5} u\left(\frac{3}{4}\right), \quad v(0) = 0, \quad v(1) = \frac{4}{5} v\left(\frac{3}{4}\right), \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $0 < \rho_i, \sigma_i < 1 (i = 1, 2)$ e a_1, b_1 são constantes diferentes de 0.

Note que, comparando este exemplo com o problema estudado:

$$1 < \alpha = \frac{9}{7} \approx 1,29 < 2;$$

$$1 < \beta = \frac{7}{5} \approx 1,4 < 2;$$

$$0 < \eta = \frac{3}{4} < 1;$$

$$p = \frac{2}{5} = 0,4 > 0;$$

$$q = \frac{1}{7} \approx 0,14 > 0;$$

$$\gamma = \frac{4}{5} = 0,8 > 0;$$

$$f(t, v(t), D^{\frac{2}{5}}v(t)) = a_1 + \left(t - \frac{1}{3}\right)^4 \left[(v(t))^{\rho_1} + (D^{\frac{2}{5}}v(t))^{\rho_2}\right];$$

$$g(t, u(t), D^{\frac{1}{7}}u(t)) = b_1 + \left(t - \frac{1}{3}\right)^4 \left[(u(t))^{\sigma_1} + (D^{\frac{1}{7}}u(t))^{\sigma_2}\right].$$

A partir disto, tem-se que

$$\alpha - q = \frac{8}{7} \approx 1,14 > 1;$$

$$\beta - p = 1;$$

$$\gamma \eta^{\alpha-1} = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{7}} < 1;$$

$$\gamma \eta^{\beta-1} = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}} < 1;$$

$$|f(t, v(t), D^{\frac{2}{5}}v(t))| \leq |a_1(t)| + \left(t - \frac{1}{3}\right)^4 |(v(t))^{\rho_1}| + \left(t - \frac{1}{3}\right)^4 |(D^{\frac{2}{5}}v(t))^{\rho_2}|;$$

$$|g(t, u(t), D^{\frac{1}{7}}u(t))| \leq |b_1(t)| + \left(t - \frac{1}{3}\right)^4 |(u(t))^{\sigma_1}| + \left(t - \frac{1}{3}\right)^4 |(D^{\frac{1}{7}}u(t))^{\sigma_2}|.$$

Assim, basta tomar $a(t) = |a_1(t)|$, $b(t) = |b_1(t)|$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \delta_1 = \delta_2 = \max \left(t - \frac{1}{3} \right)^4 > 0$ e $0 < \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2 < 1$, por hipótese. Portanto, segue do Teorema (3.5) que existe uma solução do sistema (3.5).

Referências Bibliográficas

- [1] B. Ahmad and Juan J. Nieto, *Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integrodifferential equations with integral boundary conditions*, Bound. Value Probl. (2009), Art. ID 708576, 11.
- [2] Bashir Ahmad and J. J. Nieto, *Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations*, Abstr. Appl. Anal. (2009), Art. ID 494720, 9.
- [3] Bashir Ahmad and Juan J. Nieto, *Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions*, Comput. Math. Appl. **58** (2009), no. 9, 1838–1843.
- [4] R. L. Bagley and P. J. Torvik, *On the fractional calculus model of viscoelastic behavior*, Journal of Rheology **30** (1986), no. 1, 133–155.
- [5] Zhanbing Bai and Haishen Lü, *Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*, J. Math. Anal. Appl. **311** (2005), no. 2, 495–505.
- [6] G. W. Scott Blair, *The role of psychophysics in rheology*, Journal of Colloid Science **2** (1947), no. 1, 21 – 32.
- [7] A. N. Carvalho, *Sma-5826 - análise i*, ICMC, USP, 2007, Notas de aula. [Classroom notes].
- [8] Yong-Kui Chang and Juan J. Nieto, *Some new existence results for fractional differential inclusions with boundary conditions*, Math. Comput. Modelling **49** (2009), no. 3-4, 605–609.

- [9] Lokenath Debnath and Dambaru Bhatta, *Integral transforms and their applications*, second ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.
- [10] Weihua Deng, *Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation*, J. Comput. Phys. **227** (2007), no. 2, 1510–1522.
- [11] A. N. Gerasimov, *A generalization of linear laws of deformation and its application to problems of internal friction*, Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh. **12** (1948), 251–260.
- [12] Rabha W. Ibrahim and Maslina Darus, *Subordination and superordination for univalent solutions for fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), no. 2, 871–879.
- [13] Anatoly A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
- [14] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis. Vol. 1. Metric and normed spaces*, Graylock Press, Rochester, N. Y., 1957, Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron.
- [15] Kiran M. Kolwankar and Anil D. Gangal, *Local fractional fokker-planck equation*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 214–217.
- [16] Samir Ladaci, Jean Jacques Loiseau, and Abdelfatah Charef, *Fractional order adaptive high-gain controllers for a class of linear systems*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **13** (2008), no. 4, 707–714.
- [17] N. N. Malinin, *Applied theory of plasticity and creep[in russian]*, Mashinostroenie, Moscow, 1975.
- [18] Igor Podlubny, *Fractional differential equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1999.
- [19] S. Z. Rida, H. M. El-Sherbiny, and A. A. M. Arafa, *On the solution of the fractional nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Lett. A **372** (2008), no. 5, 553–558.

- [20] Lynn Rogers, *Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations*, Journal of Rheology **27** (1983), no. 4, 351–372.
- [21] Stefan G. Samko, Anatoly A. Kilbas, and Oleg I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.
- [22] H Schiessel, R Metzler, A Blumen, and T F Nonnenmacher, *Generalized viscoelastic models : their fractional equations with solutions*, Polymer **28** (1995), 6567–6584.
- [23] G. L. Slonimsky, *On the law of deformation of highly elastic polymeric bodies*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **140** (1961), no. 2, 343–346(in Russian).
- [24] Z. Sobotka, *Rheology of materials and constructions*, Academia, Prague.
- [25] Xinwei Su, *Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations*, Appl. Math. Lett. **22** (2009), no. 1, 64–69.
- [26] Xinwei Su and Shuqin Zhang, *Solutions to boundary-value problems for nonlinear differential equations of fractional order*, Electron. J. Differential Equations (2009), No. 26, 15.
- [27] Aijun Yang and Weigao Ge, *Positive solutions for boundary value problems of N -dimension nonlinear fractional differential system*, Bound. Value Probl. (2008), Art. ID 437453, 15.
- [28] Kōsaku Yosida, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the sixth (1980) edition.