UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

UM MODELO *FUZZY* PARA APOIO A DECISÃO EM INVESTIMENTOS NO MERCADO FINANCEIRO

JOSÉ VICTOR PEREIRA DE SOUZA

Orientador: Prof.ª Maisa Mendonça Silva, D.Sc.

CARUARU

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

UM MODELO *FUZZY* PARA APOIO A DECISÃO EM INVESTIMENTOS NO MERCADO FINANCEIRO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UFPE

PARA OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE

POR

JOSÉ VICTOR PEREIRA DE SOUZA

Orientador: Prof.ª Maisa Mendonça Silva, D.Sc.

CARUARU, NOVEMBRO/2014

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4-1223

S729m Souza, José Victor Pereira de.
Um modelo *fuzzy* para apoio a decisão em investimentos no mercado financeiro. / José Victor Pereira de Souza. – Caruaru, 2014.
104f. il.; 30 cm.

Orientadora: Maisa Mendonça Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2014.
Inclui referências bibliográficas

1. Mercado financeiro. 2. Investimento financeiro. 3. Portfólio. 4. Teoria da Decisão. 5. Lógica *Fuzzy*. I. Silva, Maisa Mendonça (Orientadora). II. Título.

658.5 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2014-149)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA

DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE

JOSÉ VICTOR PEREIRA DE SOUZA

"UM MODELO *FUZZY* PARA APOIO A DECISÃO EM INVESTIMENTOS NO MERCADO FINANCEIRO"

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: OTIMIZAÇÃO E GESTÃO DA PRODUÇÃO

A comissão examinadora composta pelos professores abaixo, sob a presidência do primeiro, considera o candidato JOSÉ VICTOR PEREIRA DE SOUZA **APROVADO**.

Caruaru, 26 de Novembro de 2014.

Prof.ª MAISA MENDONÇA SILVA, D.Sc. (UFPE)

Prof. MARCELO HAZIN ALENCAR, D.Sc. (UFPE)

Prof. EDGAR NOBUO MAMIYA, PhD (UnB)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho às pessoas que mais amo, respeito e admiro neste mundo: Severino Pereira (pai), Marieta de Souza (mãe) e João Vinícius (irmão).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a **Deus**, criador do universo, por Ter me iluminado durante mais esta etapa da minha vida, Permitindo-me viver com saúde, paz e alegria todos os dias e por Dar-me forças para continuar neste mundo terreno.

Agradeço à instituição **UFPE** por ter colaborado grandemente para a minha formação acadêmica e profissional, mais precisamente ao **Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Centro Acadêmico do Agreste (PPGEP-CAA)** e todo o **corpo docente** pelos ensinamentos transmitidos e orientações dadas.

Agradeço à direção do CAA, especificamente aos professores **Nélio Vieira de Melo** e **Osmar Veras Araújo**, pelo apoio que me deram, possibilitando-me fazer a seleção do mestrado, permanecer nele e terminar antes do prazo previsto. Além de concederem horário flexível de trabalho para que eu pudesse conciliar com os estudos.

Nesse pouco tempo de convivência com a professora **Maisa**, aprendi a admirá-la como professora, pesquisadora, orientadora e como pessoa. Agradeço-lhe pela sua disponibilidade de tempo e paciência, pela confiança em mim e no nosso trabalho, além do respeito e honestidade demostrados desde o início das orientações. Sou seu fã!

Gostaria de agradecer à professora **Alane Alves Silva**, a qual foi a orientadora do meu TCC na graduação, pelos ensinamentos acadêmicos e conselhos pessoais, que tanto me ajudaram no passado e agora. Agradeço-lhe também pela disponibilidade em ter revisado o meu projeto (artigo) para eu adentrar no PPGEP.

Agradeço também aos **colegas de trabalho** pela compreensão das minhas ausências em alguns momentos, principalmente a **Emília Juliana Cesar Herculino**, minha atual chefe, que permitia o meu horário ser ainda mais flexível e adequado as minhas necessidades.

Agradeço aos **colegas de mestrado**, em especial a aqueles com quem eu tive uma convivência maior: **Avanilton, Djuri, Géssica, Isabela, Luiza, Milka e Renata**, pelas distrações, brincadeiras e “viagens” acadêmicas, permitindo superar as dificuldades de forma mais simples e divertida.

À **secretaria do Programa**, na pessoa tanto de **Kátia** (ex-secretária) quanto de **George**, pela atenção e cuidado dispendidos.

Agradeço aos meus **pais** e ao meu **irmão** pela infindável preocupação, atenção e confiança para comigo e apoio em todos os momentos da minha vida. Peço-lhes desculpas, pelas minhas muitas ausências, nesses quase dois anos, e os agradeço, novamente, pela sua

compreensão e incentivo de todas as formas possíveis, que me permitiram superar as várias dificuldades surgidas durante mais essa caminhada.

Por fim, mas não menos importante, pelo contrário, agradeço a minha **noiva Vanessa** pela sua compreensão, carinho e atenção para comigo em mais este momento da minha vida e também lhe peço desculpas por não ter podido estar mais presente durante toda essa jornada que é o mestrado.

EPÍGRAFE

"O que sabemos é uma gota, o que não sabemos é um oceano."

Sir Isaac Newton

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo estabelecer à luz da Teoria da Decisão e da lógica *fuzzy* (muito utilizada onde a imprecisão de dados e informações se faz presente) modelos que auxiliem o investidor financeiro a escolher a ação que ofereça o menor risco para ele, tendo por base as suas preferências e julgamentos, além do conhecimento advindo de dados e/ou especialista(s). Para isso, se fez necessária uma pesquisa bibliográfica sobre investimentos financeiros e seleção de portfólio, bem como sobre Teoria da Decisão e lógica *fuzzy*, para descobrir como estavam as pesquisas atuais sobre esses temas. Além do mais, uma coleta de dados das variáveis envolvidas nos modelos foi realizada em sites respeitados e confiáveis na área financeira e econômica. Neste estudo, foi possível identificar que o ativo financeiro de risco ouro é o mais indicado para investimento, tanto sozinho quanto em conjunto com o dólar americano e/ou com as ações (IBOVESPA).

Palavras-chave: Mercado Financeiro. Investimento financeiro. Seleção de portfólio. Teoria da Decisão. Lógica *fuzzy*.

ABSTRACT

This study aims to establish models, by means of the Decision Theory and fuzzy logic (often used when data and information imprecision is present), to aid financial investors to choose the action that offers the lowest risk, regarding their preferences and judgments, beyond data and/or expert(s) knowledge. In this sense, a literature review on investments and portfolio selection - as well as on Decision Theory and fuzzy logic- was performed. Moreover, a collection of the variables data involved in the models was held in reliable financial and economic websites. In this study, we found that gold is the most suitable financial asset for investment, both alone or in conjunction with the US dollar and/or stock options (IBOVESPA).

Keywords: Financial Market. Financial investment. Portfolio selection. Decision Theory. Fuzzy logic.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BACEN	Banco Central Brasileiro
BM&FBOVESPA	Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros
CDB	Certificado de Depósito Bancário
COPOM	Comitê de Política Monetária
CPF	Cadastro de Pessoas Físicas
CVM	Comissão de Valores Mobiliários
FGC	Fundo Garantidor de Créditos
FII	Fundos de Investimento Imobiliário
IBOVESPA	Índice BOVESPA
IGP-M	Índice Geral de Preços (Mercado)
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
IR	Imposto de Renda
LFT	Letras Financeiras do Tesouro
LTN	Letras do Tesouro Nacional
NTN	Notas do Tesouro Nacional
PIB	Produto Interno Bruto
RDB	Recibo de Depósito Bancário
S.A.	Sociedade Anônima
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e de Custódia
TR	Taxa Referencial

LISTA DE SÍMBOLOS

θ	Estado da natureza
Θ	Conjunto dos estados da natureza
x	Observação
$\mathcal{X}$	Conjunto das observações
a	Ação
$\mathcal{A}$	Conjunto das ações
p	Consequência
$\mathcal{P}$	Conjunto das consequências
$f(p\|\theta, a)$	Função consequência para valores contínuos
$P(p\|\theta, a)$	Função consequência para valores discretos
$P(x\|\theta)$	Função de verossimilhança
$\pi(\theta)$	Conhecimento *a priori*
$u(p)$	Função utilidade
d	Regra de decisão
D	Conjunto das regras de decisão
$R_d(\theta)$	Função risco
$L(\theta, d(x))$	Função perda
$\pi(\theta\|x)$	Distribuição *a posteriori*
r_d	Risco de Bayes para a regra de decisão *d*
μ_A	Função de pertinência
$\wedge$	Conjunção lógica
$\vee$	Disjunção lógica
$\oplus$	Operador de soma *fuzzy*
$\ominus$	Operador de subtração *fuzzy*
$\otimes$	Operador de multiplicação *fuzzy*
$\bar{R}_i$	Retorno médio do ativo *i*
$\hat{\sigma}_i$	Desvio-padrão (risco) do ativo *i*
$\bar{R}_P$	Retorno médio da carteira de investimento *p*
σ_P	Desvio-padrão (risco) da carteira de investimento *p*
ρ	Correlação
$\tilde{E}$	Valor *fuzzy* esperado
$\tilde{U}_{in}$	Consequência *fuzzy* para a alternativa a_i e estado da natureza θ_n

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Pela própria natureza do ser humano, o qual necessita satisfazer as suas necessidades e desejos, todos os dias ele lida com o processo de decisão. Algumas decisões são rotineiras e simples, como por exemplo, escolher qual será a refeição do jantar ou que roupa vestir para ir à praia. Outras são altamente singulares e complexas, que envolvem situações de muita incerteza: lançar um produto novo no mercado, abrir o capital da empresa para investimento externo, construir uma barragem, ampliar o sistema viário de uma cidade, aplicar recursos financeiros, entre outras.

Quando a melhor decisão é tomada, fato comprovado pelos bons resultados, o decisor fica feliz por ter escolhido a ação que gerou as consequências esperadas e/ou benéficas. Mas nem sempre isso acontece, visto que existem vários fatores que afetam a tomada de decisão: tempo limitado, a importância da decisão, o ambiente, certeza/incerteza e risco, agentes decisores e conflitos de interesses (Lachtermacher, 2007). Além disso, a racionalidade limitada do ser humano também influencia na tomada de decisão. Mesmo assim, levando ou não em consideração todos esses fatores, o ser humano não deixa de decidir, pelo contrário, busca meios para otimizar os resultados, principalmente para aquelas decisões cujas consequências causam grandes repercussões. Recorre-se principalmente a modelos, os quais são tipificados em físicos, análogos e matemáticos ou simbólicos (Ibid.).

Os modelos são representações simplificadas da realidade que apresentam como vantagens: possibilidade de tornarem explícitos os objetivos do(s) decisor(es), forçar a identificação e o armazenamento das decisões, dos objetivos, dos relacionamentos e das variáveis que se relacionam com o problema e expor as limitações existentes (Ibid.). Além dessas, Ragsdale (2009) ainda acrescenta: a facilidade de manuseio de modelos com relação à realidade, o baixo custo de criação e manipulação e fornecimento de informações necessárias no tempo certo. Contudo, a utilização de modelos não exclui a possibilidade de algo dar errado, visto que na prática as variáveis que se relacionam com determinado problema são inúmeras e quase infinitas, além da pouca possibilidade de se manipular a realidade futura. Ainda assim, nos últimos anos, se tornou preferível o uso de modelos à utilização de outras ferramentas menos objetivistas (Lachtermacher, 2007).

A área Financeira também não é diferente da realidade humana. Nela há vários tipos de decisões que devem ser tomadas periodicamente, sendo muitas dessas decisões complexas e únicas, isto é, singulares. Para ajudar nessa tarefa, nada fácil, modelos também são utilizados.

Uma das subáreas de Finanças onde as decisões costumam ser cruciais para a obtenção, ou não, de retornos futuros é a de investimentos financeiros. Nela, há decisões que envolvem em quê e quanto investir, qual o tempo de permanência do investimento (prazo da aplicação) e qual o objetivo, isto é, o porquê de tal investimento. Essa temática tem sido muito estudada nas últimas décadas, principalmente após o clássico trabalho de Markowitz (1952): *Portfolio Selection.*

Uma decisão errada, tomada por quem pretende aplicar recursos em algum investimento financeiro, se levado ao extremo negativo, pode reduzir a quantidade investida a zero. Situações que envolvem decisões de alta complexidade e que geram consequências de muita repercussão devem ser analisadas com mais atenção por parte do decisor, nesse caso, pelo investidor, o qual pode utilizar-se de ferramentas que o auxiliem nessa tarefa. O uso de modelos se faz extremamente relevante nessas situações, principalmente os matemáticos.

Neste trabalho, apresenta-se uma ferramenta matemática, fundamentada pela Teoria da Decisão, a qual permite a criação e aplicação de modelos racionais de decisão, para auxiliar o investidor financeiro no que tange a investimentos em ativos financeiros de alto risco. Mais especificamente, para mostrar àquele qual a decisão que oferece o menor risco, levando em consideração o seu perfil de investidor, os fatores macroeconômicos e o retorno esperado do investimento, além de incluir a incerteza e a imprecisão dentro dos modelos propostos.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Estabelecer, à luz da Teoria da Decisão e lógica *fuzzy*, modelos lógico-matemáticos, por meio de uma sistemática decisória, que permita ao investidor financeiro escolher a ação que ofereça o menor risco para ele, levando em consideração suas preferências e julgamentos, além do conhecimento advindo de dados e/ou especialista(s).

1.2.2 Objetivos Específicos

Para a consecução do objetivo geral, alguns objetivos específicos foram estabelecidos:

1. Identificar as alternativas de ação relevantes e disponíveis para um investidor financeiro.

2. Propor e aplicar um modelo de decisão sob risco que englobe Teoria da Decisão, lógica *fuzzy* e investimentos em ativos financeiros.
3. Propor e aplicar dois modelos de decisão sobre investimentos financeiros em um ambiente de incerteza: um com a lógica tradicional de conjuntos (lógica *crisp)* e, o outro, com a lógica *fuzzy*.

1.3 JUSTIFICATIVA

Lidar com decisões é algo que o ser humano faz diariamente. No entanto, muitas delas são complexas e apresentam um alto grau de incerteza. Além disso, o processo decisório pode trazer receios para o decisor, principalmente quando as consequências envolvem grandes riscos e podem gerar repercussões por muito tempo. Um exemplo disso, são as decisões que se relacionam com capital financeiro, como, por exemplo, o investimento em ativos financeiros. Existe uma grande quantidade de ativos que são oferecidos no mercado financeiro, cada qual com seus respectivos riscos e retornos. Via de regra, quanto maior for a chance de altos ganhos, maior será também o risco do investimento, o qual pode resultar em retornos tão negativos a ponto de zerar o que foi investido.

No entanto, dependendo do perfil do investidor/decisor (avesso, propenso ou neutro ao risco), ele pode, ou não, preferir ter a possibilidade de alto retorno, mesmo que isso venha a implicar também na possibilidade de grandes perdas. Logo, o perfil do investidor também influencia na tomada de decisão financeira.

Além disso, fatores macroeconômicos devem ser levados em consideração no processo decisório que trata de investimentos em ativos financeiros, uma vez que aqueles influenciam fortemente a cotação desses. Ainda assim, principalmente em ativos que são de alto risco, como ouro, ações e dólar americano, por exemplo, a incerteza dos resultados futuros se faz altamente presente, tanto por falta de informações relevantes sobre os investimentos e cenários econômicos como pela existência de informações conflitantes, advindas de especialistas e/ou de dados passados.

Markowitz (1952) propôs um modelo para otimizar o retorno de ativos financeiros a determinado risco. A partir do seu trabalho, muitos outros foram publicados sobre essa temática, buscando retratar através de outros modelos, peculiaridades que não foram tratadas por esse autor, como, por exemplo, o risco sistemático (oriundo de fatores externos ao investimento, principalmente relacionados a eventos macroeconômicos) e o perfil (estrutura de preferência) do investidor, bem como a consideração da imprecisão que os dados/informações podem apresentar.

Diante disso, este trabalho se justifica por trazer uma abordagem diferenciada sobre o assunto investimentos em ativos financeiros, a qual acrescenta ao clássico modelo de Markowitz (1952) os elementos mencionados anteriormente, complementando-o. Além do mais, trata de um tema que é muito discutido e estudado na Academia e também em empresas especializadas, devido a sua relevância para os investidores e, de modo geral, pelo interesse despertado na sociedade, visto que impacta diretamente na situação financeira de indivíduos, empresas e países. Além disso, este trabalho mostra, indiretamente, que investir em ativos financeiros é mais fácil do que muitas pessoas pensam e que não é necessário dispor de tanto capital inicial.

1.4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Markowitz (1952, 1959) através do conhecido modelo média-variância apresentou uma forma eficiente de lidar com ativos financeiros, permitindo construir portfólios que apresentam mínimo risco dado determinado retorno ou máximo retorno a certo risco. Desde então, vários outros trabalhos foram publicados referentes à seleção de portfólios: Sharpe (1967, 1971), Stone (1973), Sengupta (1989), Best & Grauer (1991), Corazza & Favaretto (2007), Hischberger (2007), Ferreira (2009), Brandt (2010), Shen (2014) e Yi (2014). Todas essas referências tratam as variáveis envolvidas no problema de portfólio de forma tradicional, através da lógica clássica dos conjuntos.

Zadeh (1965), na década de 60, estrutura uma nova lógica de conjuntos, a lógica *fuzzy*, a qual é utilizada em um ambiente de imprecisão, incerteza, ambiguidade. A partir desse referencial, a lógica *fuzzy* vem sendo aplicada em vários contextos, inclusive na seleção de portfólio de investimentos. Ramaswamy (1998) apresentou um modelo de seleção de portfólio usando teoria da decisão *fuzzy*. Carlsson (2002) considerou o problema de seleção de portfólio a partir de distribuições de possibilidade e apresentou um algoritmo genético para encontrar a solução ótima. Zhang (2007, 2009, 2010) também trabalhando com distribuições de possibilidade propôs um modelo com médias e variâncias *fuzzy*. Já Fang (2006) introduziu um modelo de programação linear para a seleção de portfólio, incluindo os custos de transação, através da teoria dos conjuntos *fuzzy*. Li (2009) trouxe um modelo híbrido com algoritmo tratando os retornos envolvidos no problema de seleção de portfólio como *fuzzy*. Chen & Huang (2009) trazem um modelo para otimizar a seleção de portfólio tratando os retornos e os riscos como números triangulares *fuzzy*. Referências mais recentes sobre seleção de portfólio em um ambiente *fuzzy* podem ser encontradas, dentre outras, em: Li (2010), Chen (2011), Sadjadi (2011), Zhang (2012), Wu & Liu (2012), Liu (2013) e Li & Qin (2014).

A Teoria da Decisão aborda o problema de como decidir o que deve ser feito quando é incerto o que poderá acontecer. Ela fornece uma ferramenta matemática que permite juntar as muitas variáveis envolvidas no processo de decisão de forma racional e estruturada, levando-se em consideração o que se quer, o que se sabe e o que se pode fazer (Souza, 2007). Algumas referências sobre essa teoria são Savage (1972), Keeney & Raiffa (1976), Berger (1985) e Souza (2007). Sendo Souza (2007) uma abordagem recente e abrangente sobre o tema, optou-se por utilizar neste trabalho as mesmas notações usadas por esse autor.

Nessa teoria, o decisor escolhe uma ação, a natureza decide o seu estado, isto é, como ela se comportará e, essa junção, gera resultados favoráveis ou não àquele. Juntando-se a esses conjuntos (das ações, dos resultados e dos estados da natureza) ainda há as observações, as quais são informações que guardam relação com os estados da natureza. Para unir esses conjuntos existem os mecanismos probabilísticos: função de verossimilhança, função consequência e conhecimento *a priori*. Com base em todo esse arcabouço lógico-matemático, busca-se tomar a decisão que minimize o risco para o decisor.

1.5 METODOLOGIA

Expõe-se aqui a metodologia, isto é, os "caminhos" que foram seguidos, obedecendo às normas técnicas da pesquisa científica, para a elaboração e conclusão deste trabalho acadêmico.

Do ponto de vista da sua natureza, à luz de Prodanov & Freitas (2013), este trabalho pode ser definido como uma pesquisa aplicada, uma vez que objetiva gerar conhecimentos dirigidos à solução de problemas específicos para aplicação prática e concreta.

Para Vergara (2009), há dois critérios básicos para a classificação de uma pesquisa: quanto aos fins e quantos aos meios. O primeiro se refere ao que é proposto na pesquisa para atender o seu objetivo e o segundo critério se refere ao modo que será feita a investigação da pesquisa (procedimentos técnicos que foram adotados).

Quanto aos fins, este trabalho pode ser classificado como explicativo, visto que busca, através de modelos matemáticos, estabelecer um critério lógico-racional de decisão que minimize os riscos para o decisor no que se refere ao investimento de ativos financeiros, através da explicação dos "porquês das coisas e suas causas, por meio de registro, da análise, da classificação e da interpretação dos fenômenos observados." (Prodanov & Freitas, 2013, p. 53). Além disso, com a manipulação e controle de variáveis, busca-se também identificar os fatores que contribuem para a ocorrência dos fenômenos estudados de forma a estabelecer relação de causa e efeito, para, logo em seguida, aprofundar o estudo.

Quanto aos meios, trata-se de uma pesquisa bibliográfica, pois para a fundamentação teórica foi realizada uma investigação sobre lógica *fuzzy*, Teoria da Decisão e investimentos em ativos financeiros, por meio de muitas fontes publicadas, dentre elas: livros, jornais, revistas, monografias, dissertações, teses, artigos e publicações on-line, as quais são definidas como de imprensa escrita e de publicações (Marconi & Lakatos, 2010), com o intuito de se obter conhecimento e dados para compor o problema de decisão. A pesquisa bibliográfica oferece arcabouço tanto para a exploração de problemas já conhecidos quanto de novas áreas. Dessa forma, de acordo com Marconi & Lakatos (2010), "a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras" (Marconi & Lakatos, 2010, p. 166).

À luz de Rampazzo (2009), quanto à fonte de dados, uma pesquisa pode ser por documentação direta ou por documentação indireta, sendo a primeira caracterizada quando o pesquisador obtém os dados de forma direta, isto é, no próprio local onde os fenômenos acontecem e, a segunda, quando os dados obtidos vieram do levantamento que outros pesquisadores já fizeram. Como os dados e informações que deram sustentação a este trabalho foram conseguidos de fontes indiretas, através de uma pesquisa bibliográfica e coleta de dados na internet, pode-se concluir e também classificar esta dissertação como por documentação indireta.

Por fim, quanto à forma de abordagem do estudo, este trabalho também é quantitativo, pois tem um enfoque que pode ser mensurado numericamente. Em outras palavras, ele pode ser traduzido em números, opiniões e informações, as quais são classificadas e analisadas através de recursos e técnicas estatísticas (Matias-Pereira, 2010).

Em síntese, a metodologia aplicada nesta pesquisa terá por fundamento o modelo de Mitroff (1974), o qual é dividido em quatro fases:

- Contextualização e descrição do problema;
- Modelagem;
- Aplicação do modelo;
- Implementação dos resultados.

De acordo com Mitroff (1974), na primeira fase, o pesquisador faz um modelo conceitual do problema e do sistema que está estudando e decide quais as variáveis que precisam ser incluídas no modelo. Na próxima fase, o pesquisador realmente constrói um modelo quantitativo de modo a definir o relacionamento casual entre as variáveis. Para desenvolver essas duas fases, se fez imprescindível uma revisão bibliográfica sobre o assunto e a utilização de testes estatísticos, os quais foram tratados com a ajuda do *software STATISTICA*, versão 10.0.228.2, da *StatSoft*, *Inc*. (2011).

Depois disso, segundo Mitroff (1974), o modelo proposto é aplicado, chegando-se à solução, via regras matemáticas, do problema descrito. Para fins deste trabalho acadêmico, o modelo proposto na segunda fase, é aplicado no mercado financeiro brasileiro. A coleta de dados foi realizada na internet através de dois sites oficiais de instituições internacionalmente reconhecidas: Banco Central do Brasil – BACEN (www.bcb.gov.br) e da Bolsa de Valores Brasileira (www.bmfbovespa.com.br). As ferramentas operacionais utilizadas nesta fase foram, além do *software STATISTICA*, os *softwares*: *Microsoft Excel 2010*, versão 14.0.7128.5000 de 32 *bits*, da empresa *Microsoft Corporation* (2010) e *Matlab R2013a*, versão 8.1.0.604 de 64 *bits*, da *MathWorks, Inc.* (2013). Esse último foi o responsável pela parte gráfica dos números *fuzzy*.

Na quarta e, última fase, os resultados são implementados, podendo o ciclo ser iniciado para propiciar melhorias no modelo proposto inicialmente, conforme a Figura 1.1. A quarta fase, a de implementação dos resultados, não faz parte do escopo deste trabalho.

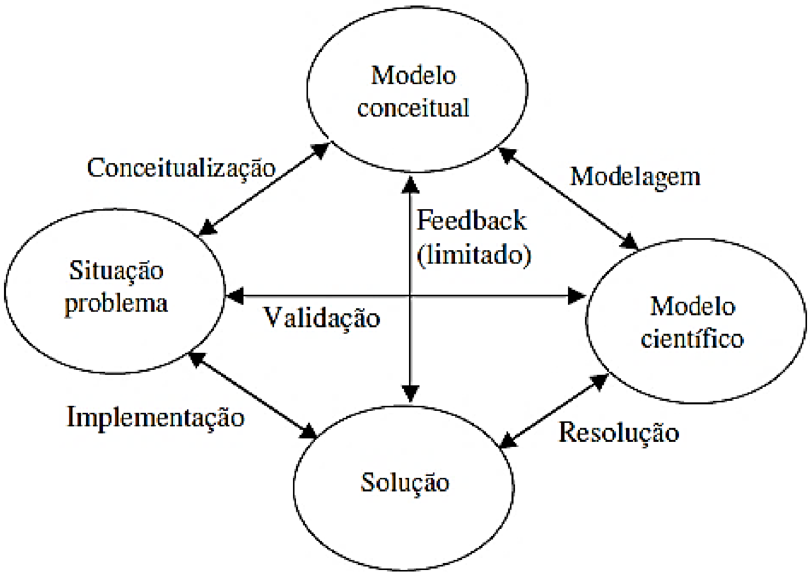

Figura 1.1 – Modelo de pesquisa segundo Mitroff (1974)
Fonte: Mauad (2008, p. 3).

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está segmentando em cinco capítulos, estruturados da seguinte forma:

O **primeiro capítulo – Introdução,** o qual está sendo apresentado no momento, traz uma breve contextualização sobre decisão, alguns exemplos de decisões simples e complexas, quais os fatores que a afetam, além da importância de se utilizar modelos para auxiliar na tomada de decisão. Além disso, comenta-se sobre a complexidade de decidir sobre investimentos financeiros, visto que as consequências são, geralmente, de grande repercussão. Após isso, os objetivos, a justificativa e a metodologia são introduzidos.

No **segundo capítulo – Fundamentação Teórica e Revisão Bibliográfica**, os temas basilares desta dissertação são mais bem aprofundados e discutidos sob o olhar recente da academia. A ferramenta matemática fundamentada pela Teoria da Decisão é apresentada juntamente com as condições (circunstâncias) de decisão e os seus critérios, as causas e os contextos de incerteza e a Teoria *Fuzzy*. Nessa parte é feito um contraponto entre a lógica tradicional dos conjuntos e lógica *fuzzy*. Além disso, os principais números *fuzzy* são definidos e algumas operações básicas são mostradas. Para finalizar o capítulo, alguns conceitos de Finanças, mais precisamente de mercado financeiro e seus ativos, são descritos e explicados, além de apresentados os seus riscos e o modelo de média-variância de Markowitz (1952).

O **capítulo 3 – Proposição e Aplicação de um Modelo de Decisão Financeira Sob Risco *Fuzzy***, traz uma associação dos temas tratados no capítulo 2 aplicados em um modelo proposto sob risco, onde o decisor é um investidor financeiro especulador. Ele tem as opções de investir todo o seu capital em um único ativo ou em um portfólio de ativos, os quais são o dólar americano, o ouro e as ações (IBOVESPA), que têm os seus retornos influenciados pela taxa Selic.

No **quarto capítulo – Tomada de Decisão Financeira em um Ambiente de Incerteza,** mais dois modelos de decisão são discutidos, um com a lógica tradicional dos conjuntos (lógica *crisp*) e o outro com uma abordagem *fuzzy*, ambos em um ambiente de incerteza e fazendo uso do arcabouço matemático completo da Teoria da Decisão. Nesse capítulo, a utilidade do decisor, isto é, o seu comportamento perante o risco é levado em consideração.

No **quinto capítulo** e último desta dissertação – **Conclusões e Trabalhos Futuros –** há o encerramento deste trabalho, trazendo as conclusões finais, alguns comentários e sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo expõe os temas principais tratados neste trabalho acadêmico. Inicialmente abordam-se os conceitos relacionados com a Teoria da Decisão: incerteza, relações de preferência, função utilidade, regra de decisão, risco, dentre outros. Em seguida, a Teoria *Fuzzy* é introduzida juntamente com as definições de conjuntos *fuzzy*, números *fuzzy*, operações matemáticas básicas, ranqueamento e obtenção de números *fuzzy*. Finalizando o capítulo, apresentam-se o mercado financeiro brasileiro, com os seus principais ativos, e o clássico modelo de Markowitz (1952).

2.1 TEORIA DA DECISÃO

O ser humano lida com a tomada de decisões muitas vezes durante a sua vida, buscando satisfazer as suas necessidades e desejos. As decisões podem ser simples ou complexas, dependendo da quantidade de variáveis envolvidas no processo e como elas se relacionam. Em função do nível de estruturação são classificadas como estruturadas (tarefas programadas, procedimentos bem definidos), semiestruturadas (quando não são totalmente definidas por procedimentos padrões) e não-estruturadas, isto é, quando as decisões são de natureza única, singular (Almeida, 2002).

Toda e qualquer decisão é tomada sob uma das seguintes condições (ou circunstâncias), as quais são apresentadas em Gomes (2009) e Mélo (2011):

- **Condições de certeza:** nesse caso, a decisão é tomada com pleno conhecimento de todos os estados da natureza e com total certeza do resultado final, isto é, atribui-se uma probabilidade de ocorrência de 100%. Ocorre quando a informação disponível é suficiente para predizer com certeza os resultados. Cada alternativa de curso de ação pode ser associada diretamente com os resultados que pode produzir.
- **Condições de risco:** quando existe o conhecimento das probabilidades que estão associadas a cada um dos estados da natureza e a quantidades desses é conhecida, diz-se que a decisão é tomada sob risco. Nesse caso, a probabilidade de ocorrência dos resultados possível irá variar entre 0 e 1.
- **Condições de incerteza ou de ignorância:** aqui não se conhece todos os estados da natureza e, aos que são conhecidos, atribui-se uma probabilidade incerta, ou não se tem a probabilidade associada aos eventos. É uma circunstância que força os atores envolvidos no processo decisório a utilizarem os seus juízos de valor, criatividade, requerendo alternativas inovadoras, percepções diversas e flexíveis.

- **Condições de competição ou conflito:** nesse caso, as estratégias e os estados da natureza são determinados pelos competidores, isto é, dois ou mais decisores que influenciam mutuamente o resultado.

Quando se trata de problema de decisão que envolve análise probabilística há que se determinar qual o tipo de incerteza que permeia o processo decisório: a incerteza aleatória e/ou a incerteza epistêmica.

A incerteza aleatória (conhecida também como Incerteza Objetiva, Tipo I, Tipo A, Estocástica) corresponde à variabilidade inerente aos ambientes probabilísticos, das características estocásticas. Já a incerteza epistêmica (denominada também por Incerteza Subjetiva, Tipo II, Tipo B, Dedutível) advém da ignorância científica, da incerteza na avaliação, da falta e/ou baixa qualidade de informação, da impossibilidade de confirmação ou observação ou de outra deficiência de conhecimento (Campos, 2007). Diante disso, pode se conceituar dois tipos de probabilidades: a probabilidade objetiva ou frequentista e a probabilidade subjetiva (Silva, 2013). A primeira está relacionada com a incerteza aleatória, com a probabilidade clássica ou da frequência relativa. A probabilidade subjetiva guarda forte relação com a incerteza epistêmica, representando o grau de crença lógico de um indivíduo ou sistema intencional, ou seja, o seu conhecimento sobre determinado assunto. Para extrair essa probabilidade do indivíduo ou sistema intencional faz-se necessário a elicitação ou edução daquele conhecimento.

A incerteza surge nos mais diversos contextos e por várias causas. Zimmermann (2000) cita algumas delas:

- Falta de informação: a qual está associada à ausência de informação, à aproximação de um fato (por arredondamento de valores ou por simplificação da realidade, por exemplo), ou à baixa qualidade da informação disponível. Essa causa é provavelmente a mais frequente quando se trata de incerteza.
- Abundância de informação (complexidade): nesse caso, a limitada habilidade humana de perceber e processar simultaneamente uma grande quantidade de informações faz com que essas sejam filtradas e muitas informações relevantes, às vezes, são negligenciadas e descartadas.
- Conflito de evidências: quando há conflito de informações advindo de um sistema.
- Ambiguidade: refere-se ao diferente entendimento que uma linguagem pode trazer dependendo do contexto em que foi utilizada, ocorrendo discrepâncias na compreensão de significados.

- Medição/Avaliação: relacionada com imprecisão de informação dependendo do instrumento utilizado para medir ou avaliar um fenômeno.
- Crença (opinião): surge incerteza quando se tenta transformar algo subjetivo para a objetividade. Por exemplo, elicitar a preferência de um decisor quanto à probabilidade de ocorrência das consequências em um problema estocástico de decisão ou "extrair" de especialistas o seu conhecimento.

A incerteza surge, resumidamente, de acordo com a qualidade e quantidade de informações disponíveis (Ibid).

A incerteza, então, está associada também ao tipo de informação disponível e ao tipo de escala de medida utilizada. Os tipos de informação disponível são, à luz de Zimmermann (2000), numérica, intervalar, linguística e simbólica. Quanto às escalas de medida, elas podem ser, em uma ordem crescente de quantidade de informação: nominal, ordinal, intervalar e de razão. A escala nominal, também conhecida como verbal ou semântica, permite classificar alternativas, ou seja, identificar categorias. É a mais simples e a mais fácil de ser reconhecida, apresentando a menor quantidade de informações em comparação com os outros tipos de escala. As operações matemáticas que são permitidas nesse tipo de escala são as de conjuntos (pertence, contido), de contagem (por exemplo, frequência) ou lógicas (E, OU, Não, etc.). Na escala ordinal, pressupõe-se a possibilidade de ordenação dos valores; não há a cardinalidade (representação de quantidade). Na escala intervalar, a cardinalidade dos números está no intervalo e o número zero (0) não tem o mesmo significado que na escala de razão, não representando a ausência de valor. Por fim, a escala mais forte de mensuração: a de razão. Ela é a que apresenta a maior quantidade de informações, o zero representa a origem da escala e a ausência de valor (quantidade). Nessa escala, todas as operações matemáticas são possíveis. A compreensão dessas escalas e o seu uso adequado são essenciais para o bom tratamento de informações (Doane & Seward, 2008; Almeida, 2013).

Zimmermann (2000) propõe um esquema para auxiliar no tratamento de incerteza e para definir qual teoria é a mais adequada para lidar com ela, o qual apresenta quatro dimensões: causas da incerteza, informação disponível (*input*), tipo de escala de medida e informação requerida (*output*), como pode ser visto na Tabela 2.1.

Dessa maneira, cada teoria que lida com a incerteza pode ser caracterizada por um vetor (perfil) composto por essas quatro dimensões, as quais não são, necessariamente, exaustivas e disjuntas. Sendo assim, cada teoria é adequada a um contexto específico. Por exemplo: suponha-se que o vetor seja {a; a; c; a}, isto é, que a causa da incerteza seja falta de informação, que a informação disponível (*input*) seja numérica, que a escala de medida seja intervalar e que a informação requerida (*output*) também seja numérica. Nesse caso, Zimmermann (2000) sugere a utilização da Teoria da Probabilidade Frequentista. Outras teorias, modelos ou paradigmas que tratam de incerteza são, entre muitos outros: Teoria da Possibilidade, Teoria de Evidência, Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*, Teoria da Decisão, etc.

Tabela 2.1 – Tratamento de incerteza

1. Causas da incerteza	**3. Tipo de escala de medida**
a) Falta de informação b) Abundância de informação c) Conflito de evidências (provas) d) Ambiguidade e) Medição/Avaliação f) Crença (opinião)	a) Nominal b) Ordinal c) Intervalar d) De razão
2. Informação disponível (*input*)	**4. Informação requerida (*output*)**
a) Numérica b) Intervalar c) Linguística d) Simbólica	a) Numérica b) Intervalar c) Linguística d) Simbólica

Fonte: Adaptado de Zimmermann (2000, p. 197).

2.1.1 A Teoria

O problema de como tomar decisões em situações de incerteza é algo que aparece em diversos contextos e com mais frequência do que se pensa. A Teoria da Decisão de Abraham Wald divulgada em 1950 em seu livro intitulado *Statistical Decisions Functions* é uma das mais estudadas e propagadas quando o assunto envolve decisão e incerteza (Souza, 2007). Os trabalhos de Silva (2002), Bezerra (2003) e Souza, Fernanda (2007) trazem estudos da aplicação daquela teoria, nas áreas de cardiologia, investimento financeiro e planejamento do sistema brasileiro de energia, respectivamente. Com esses trabalhos, pode-se perceber a diversidade de contextos nos quais a incerteza se faz presente e que a Teoria da Decisão pode ser aplicada nas mais diversas áreas. Souza (2007) traz algumas abordagens daquela teoria no cotidiano da Medicina, do Direito, da Engenharia da Manutenção e dos negócios.

Uma referência recente e abrangente sobre essa teoria é Souza (2007). Devido a isso, optou-se por usar a mesma notação desse autor neste trabalho. Nessa teoria, procura-se tomar decisões levando em consideração o que se quer, o que se sabe e o que se pode fazer. O que se quer está relacionado com a preferência do decisor, com o valor psicológico (utilidade) que ele atribui a cada uma das consequências de suas ações. Já o que se sabe refere-se a toda informação que se tem a respeito das variáveis envolvidas no processo decisório, bem como a relação entre elas. Por último, as alternativas disponíveis de ação por parte do decisor é o que se pode fazer. Para encontrar essas alternativas necessita-se de muita criatividade.

2.1.2 A Ferramenta

A Teoria da Decisão é composta basicamente pela agregação lógica de quatro conjuntos através de mecanismos probabilísticos. Os conjuntos são: dos estados da natureza, das observações, das ações e das consequências. A função de verossimilhança, a função consequência e o conhecimento *a priori* representam os mecanismos probabilísticos.

2.1.2.1 Conjuntos

Os conjuntos são os *inputs* da ferramenta fornecida pela Teoria da Decisão. Em outras palavras, são o alicerce da teoria (Berger, 1985).

O **conjunto dos estados da natureza** é composto por todas as possíveis representações das configurações de fatores externos ao decisor e que estão fora do seu controle. A natureza escolhe o seu estado independentemente da vontade daquele. Cada estado da natureza é indicado por θ e o seu conjunto por Θ. Logo se tem que $\Theta = \{\theta\}$.

O **conjunto das observações**, representado pela letra $\mathcal{X}$, compõe-se de possíveis valores assumidos por algumas variáveis que guardam certa relação com determinado estado da natureza. Em outras palavras, são informações diretas e/ou indiretas que auxiliam na ampliação do conhecimento de como a natureza se comportou no passado e o que está acontecendo no presente. Cada observação denota-se por x, como consequência tem que $\mathcal{X} = \{x\}$.

O **conjunto das ações ($\mathcal{A}$)** contém uma lista do que o indivíduo pode decidir fazer. Aqui o decisor tem o total controle sob as variáveis/ações (a), pois é ele quem vai escolher qual atitude tomar, ou seja, qual ação que vai realizar, assumindo os riscos inerentes a ela e se responsabilizando pelas futuras consequências. Logo, ele terá o poder de influenciar os resultados finais juntamente com os estados da natureza. Então $\mathcal{A} = \{a\}$.

O **conjunto das consequências (bens ou *payoffs*)** é composto pelos resultados gerados a partir da escolha de uma ação por parte do decisor conjuntamente com a escolha da natureza (estado da natureza). Algumas consequências são mais preferíveis que outras. No entanto, elas não dependem somente do decisor, mas também do estado que a natureza vai assumir. O conjunto de todas as consequências é denotado por $\mathcal{P} = \{p\}$, onde p representa a consequência.

Os elementos desses quatros conjuntos podem estar em qualquer escala de mensuração (Souza, 2007): categórica (nominal ou taxonômica), ordinal, intervalar e de razão.

Em termos gerais, em um problema de decisão, o decisor dever escolher uma alternativa (quando a problemática é de escolha) de um conjunto de possíveis alternativas de decisão. Essa escolha é feita diante de incerteza, visto que o resultado será afetado por fatores que não são controlados pelo decisor, que acontecem de forma aleatória. Esses fatores irão compor as situações possíveis, as quais são denominadas de estados da natureza (θ). Para cada combinação de uma alternativa com um estado da natureza tem-se uma consequência, também chamada de prêmio.

O prêmio é "uma medida quantitativa do valor para o tomador de decisão das consequências do resultado" (Hillier & Lieberman, 2010, p. 664). Para mostrar as consequências de cada combinação alternativa/estado da natureza, pode-se utilizar da matriz de decisão, também conhecida como tabela de prêmios.

Essa matriz permite uma melhor visualização do problema de decisão e contribui para encontrar a decisão ótima para o tomador de decisão, segundo algum critério.

Hillier & Lieberman (2010) trazem três possibilidades de critérios:

- **Regras Minimax ou critério do prêmio mínimo máximo:** provém da teoria dos jogos. Representa uma atitude conservadora por parte do decisor, pois este acredita que a natureza escolherá o pior estado para ele, escolhendo, então, a alternativa que apresenta o melhor resultado para aquele estado. Esse critério é mais usado quando não se tem informação *a priori* alguma sobre os estados da natureza.
- **Critério da Probabilidade Máxima:** nesse caso, o decisor escolhe a melhor alternativa para ele, para o estado da natureza que apresenta a maior probabilidade. Contudo, fazendo isso, o decisor ignora informações relevantes, pois considera apenas o estado da natureza mais provável.
- **Regra de Decisão de Bayes:** esse critério utiliza melhor as estimativas das probabilidades dos respectivos estados da natureza. Nesse caso, o decisor escolhe a alternativa que apresenta o maior valor esperado do prêmio.

Dependendo do conhecimento que se tem dos estados da natureza, o problema de decisão pode ocorrer sob risco ou sob incerteza. No primeiro caso, tem-se uma distribuição de probabilidade sobre o comportamento do estado da natureza, de maneira que é possível formular o problema com base em valores esperados para as consequências. No segundo caso, não estão disponíveis as probabilidades sobre os estados da natureza, apesar de eles serem conhecidos (Almeida, 2013).

2.1.2.2 Mecanismos probabilísticos

Para relacionar as diversas variáveis daqueles conjuntos existem os mecanismos probabilísticos, os quais permitem combiná-las e gerar resultados probabilísticos. Estes, por sua vez, fornecerão informações fundamentais para a teoria e, principalmente, para o decisor. Os mecanismos são os seguintes:

- **Função de Verossimilhança:** também conhecida como o "canal de comunicação" com a natureza, essa função é uma distribuição de probabilidade que associa as observações x com os estados da natureza θ. É denotada por $P(x|\theta)$.
- **Função Consequência:** representação das probabilidades de ocorrer determinada consequência p dado que o decisor escolheu a ação a e natureza optou pelo estado θ. É denotada por $P(p|\theta, a)$, quando a variável p é discreta ou por $f(p|\theta, a)$, quando ela assume valores contínuos, escalares ou vetoriais. O conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre cada bem ou consequência denota-se por $\mathcal{P}* = \{P\}$.
- **Conhecimento *a priori*, $\pi(\theta)$:** a expressão a *priori* pode ser compreendida aqui como "antes de se fazer qualquer experimento" ou "antes de se observar os valores de qualquer variável que possa dar informações sobre θ" (Souza, 2007, p. 91). O conhecimento *a priori* representa justamente isso: uma distribuição de probabilidade sobre a chance de ocorrer determinado estado da natureza sem que seja feito qualquer experimento. Essa distribuição pode ser calculada por séries históricas (dados passados) ou através da opinião de um especialista sobre o grau de crença que ele atribui ao estado da natureza. Essa última distribuição (advinda do conhecimento do especialista) é conseguida por meio de um protocolo de edução que se encontra muito bem detalhado em Lins (2000), Lins & Souza (2001), Moraes (2003), Silva (2007) e Souza (2007).

2.1.3 Teoria da Utilidade

2.1.3.1 Conceito

A Teoria da Utilidade formulada por von Neumann & Morgenstern (1944) a partir dos axiomas das preferências procura associar um valor à preferência do decisor pela probabilidade da ocorrência de determinado bem. Em outras palavras, busca medir, através de uma função, a função utilidade, o quanto cada consequência é desejável por aquele. Quanto maior for o valor associado à preferência do decisor, maior será a sua desejabilidade pela ocorrência do bem. Como destaca Sousa Júnior (2004), há que se ressaltar que as preferências serão com relação às distribuições de probabilidade de se conseguir o bem procurado e não diretamente sobre este. Para Souza (2007), o entendimento dessa relação foi um grande avanço para a função utilidade, visto que as teorias clássicas atribuíam à preferência do indivíduo somente a sua desejabilidade pelo bem e não pela probabilidade de ocorrência do mesmo. Esse avanço permitiu uma abordagem mais real dos problemas, tendo em vista que as consequências, quando há incerteza, não são totalmente garantidas de ocorrerem, mas tem-se como associar uma chance de ocorrência para cada consequência.

Cada decisor tem as suas preferências, baseadas nas suas crenças, ideias, desejos, necessidades, percepção, enfim, na sua personalidade e no meio em que ele está inserido. Por exemplo, um indivíduo A pode preferir suco de laranja ao de limão. Enquanto um indivíduo B pode preferir o segundo ao primeiro. Não se pode afirmar, matematicamente, quem está certo ou errado, pois há gostos pessoais em questão. Contudo, se, por exemplo, um desses indivíduos preferir suco de goiaba ao de manga, o de manga ao de acerola e o de acerola ao de goiaba haverá uma incongruência nessa última preferência, ou melhor, uma irracionalidade. O racional seria preferir o suco de goiaba ao de acerola, visto que pela lógica e pela hierarquia do exemplo aquele é preferível ao de manga e este é preferível ao de acerola, logo o suco de goiaba é preferível aos demais sucos. Para evitar aquele tipo de irracionalidade, são impostas algumas restrições, as quais são chamadas de *restrições de racionalidade.* Para Souza (2007), a racionalidade pode ser caracterizada por duas coisas:

1. os objetivos desejados devem ser consistentes, coerentes;
2. deve-se agir de forma a atingir os objetivos, respeitadas as restrições éticas e morais.

Logo em seguida, serão apresentadas algumas relações de preferência trazidas por Souza (2007) as quais servirão de base para os axiomas da preferência e, consequentemente, para a função utilidade, a qual busca relacionar o grau de desejabilidade do decisor pela probabilidade de determinado bem.

2.1.3.2 Relações de preferência

Sendo P e Q as distribuições sobre os bens e $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda P + (1 - \lambda)Q$ denota uma loteria (outra distribuição), onde:

- λ é a probabilidade de se ganhar a distribuição P e
- $(1 - \lambda)$ a de se ganhar a distribuição Q.

Com isso, têm-se as seguintes definições das relações de preferência $\succsim$ entre os elementos de $\mathcal{P}*$:

- **Definição 1:** Para todo P, $Q \in \mathcal{P}*$,

- $P \gtrsim Q$ (lê-se "*P* é pelo menos tão desejável quanto *Q*");
- $P \succ Q$ (lê-se "*P* é preferível à *Q*");
- $P \sim Q$ (lê-se "Está-se indiferente entre *P* e *Q*", ou "*P* é equivalente a *Q*", ou "*P* e *Q* são equivalentes"). Em outras palavras, para o decisor, tanto faz a distribuição *P* quanto a *Q*.

- **Definição 2:** $P \succ Q$ se $P \gtrsim Q$ e falso que $P \lesssim Q$.
- **Definição 3:** $P \sim Q$ se $P \gtrsim Q$ e $Q \gtrsim P$. Isto é, se *P* é pelo menos tão desejável quanto *Q* e a recíproca é verdadeira, então *P* e *Q* estão na mesma intensidade de preferência. É aparente da definição que $P \sim Q \Rightarrow Q \sim P$.

A partir desse conceito de preferência pode-se desenvolver os axiomas da preferência, os quais são apresentados a seguir. Mais detalhes sobre relações de preferência são encontrados em Keeney & Raiffa (1976), Berger (1985) e Almeida, 2013.

2.1.3.3 Axiomas da preferência

Os axiomas da preferência que também foram desenvolvidos por von Neumann & Morgenstern (1944) são apresentados em Souza (2007). Basicamente são quatro os axiomas: o da completeza, o da transitividade, o da dominância e o arquimediano. Sejam $P, Q, R, \ldots \in \mathcal{P}^*$ tem-se que:

Completeza (Ordem Total ou Linear): $P \gtrsim Q$ ou $Q \gtrsim P$; isto é equivalente a dizer que ou $P \succ Q$, ou $Q \sim P$, ou $Q \succ P$. Esse é um axioma técnico que estabelece uma ordem de preferência sobre as distribuições de probabilidades dos bens atribuindo uma ordem total ou linear de desejabilidade. Contudo, nem sempre é possível atribuir uma preferência entre probabilidades, visto que muitas delas não são nem comparáveis e, muito menos, indiferentes, preferíveis ou não desejáveis. O melhor, como sugere Souza (2007), é admitir uma ordem parcial de desejabilidade, visto que isso comtempla mais realisticamente as situações existentes. Todavia, há que se tentar ordenar todas as distribuições em graus de preferência para que a construção da função utilidade seja bem sucedida.

Transitividade:

1) $P \succ Q$ e $Q \gtrsim R \Rightarrow P \succ R$;

2) $P \sim Q$ e $Q \sim R \Rightarrow P \sim R$.

Esse axioma além de normativo é também de racionalidade, pois busca evitar incoerência nas preferências e eliminar as escolhas irracionais. Se for preferível a probabilidade *P* à *Q* e a probabilidade *Q* é pelo menos tão preferível quanto à *R*, então *P* tem que ser preferível à *R*, pois, caso contrário, haverá inconsistência na desejabilidade. Além disso, o mesmo axioma ainda afirma que se a probabilidade P é equivalente à Q e esta for equivalente à R, logo P é também equivalente à R, isto é, seria indiferente escolher P ou R. Caso isso não ocorra, também se está sendo irracional, incongruente ou inconsistente. Para uma melhor compreensão desse axioma, suponha que um sujeito qualquer prefira carro à moto e esta à bicicleta, por consequência, deverá preferir carro à bicicleta. O mesmo vale para as equivalências. Por transitividade, pode-se afirmar que se para aquele sujeito for indiferente à escolha de comprar um carro preto ou um vermelho e de comprar um vermelho ou azul, então será indiferente também entre a escolha de um preto ou azul.

Dominância:

1) Se $P \succ Q$, $1 \geq \lambda > 0$, então, para todo $R \in \mathcal{P}*$ tem-se
$\lambda P + (1 - \lambda)R \succ \lambda Q + (1 - \lambda)R$;

2) Se $P \sim Q$, $1 \geq \lambda \geq 0$, então, para todo $R \in \mathcal{P}*$ tem-se
$\lambda P + (1 - \lambda)R \sim \lambda Q + (1 - \lambda)R$;

O axioma da dominância é também considerado de racionalidade e apresenta um forte caráter técnico, pois garante a linearidade em probabilidade da função utilidade que vai apresentar a ordem de preferência. Segundo esse axioma, acrescentando-se a probabilidade de uma consequência ocorrer em ambos os lados da relação de preferência, essa relação não se altera. Contudo, o “efeito da complementaridade” pode anular a lógica desse axioma, contrapondo-se a ele e o violando. Para um maior entendimento desse efeito, imagine que um estudante prefira um kit caderno/lápis a uma mochila, visto que só com aquele ele já pode ir estudar em uma escola, por exemplo. Segundo o axioma da dominância, caso seja acrescentado, por exemplo, outro kit caderno/lápis nessa relação de preferência, ela continuará inalterada, isto é, o estudante preferirá dois kits caderno/lápis a uma mochila e um kit. No entanto, na prática, essa relação provavelmente não se manterá, pois para um estudante é muito mais necessário ter uma mochila para carregar o seu material (no caso, caderno e lápis) para ir estudar em uma escola do que ter dois lápis e dois cadernos, levando ambos na mão, tanto por questões de estética quanto cultural. Em outras palavras, com a adição de um novo kit, o estudante viu a possibilidade de complementar a sua coleção de necessidades como aluno, mudando, assim, a “lógica” da sua preferência anterior. Para Souza (2007), o mesmo pode ocorrer com um acréscimo probabilístico em ambos os lados de uma relação de preferência, seja ela de indiferença ou não, pois quando há o “efeito da complementaridade” aquela relação poderá ser invertida devido ao surgimento de um novo atributo ou mesmo pela potencialização de um já existente.

Arquimediano:

Se $P \succ Q \succ R$, então existem números λ e μ tais que $1 > \lambda > \mu > 0$ e tais que $\lambda P + (1 - \lambda)R \succ Q \succ \mu P + (1 - \mu)R$.

Esse axioma é eminentemente técnico, mas plausivelmente aceitável. É equivalente à propriedade Arquimediana dos números reais, a qual afirma que entre dois quaisquer números reais, existe sempre outro real. No caso das relações de preferência, se P é preferível a Q e Q é preferível a R, há probabilidades com as quais se podem combinar P e R, de forma que eles sejam mais (ou menos) preferíveis a Q.

Os quatro axiomas aparecem e devem ser satisfeitos quando se tem uma família ou coleção de preferências. A função a seguir busca relacionar essas preferências com as consequências e atribuir valor àquelas.

2.1.4 Função Utilidade

A função utilidade $u(p)$ é uma função que representa as preferências do decisor com relação às possíveis consequências ou bens. O seu valor é tanto maior quanto mais desejável for um bem. O mesmo vale para a indesejabilidade, isto é, quanto menos o bem for desejável menor será o seu valor.

Para a existência da função utilidade é necessário que sejam satisfeitas as seguintes observações, ainda à luz de Souza (2007):

1) Para toda distribuição $P \in \mathcal{P}^*$ corresponde um número real $u(p)$, ou seja, $u\colon \mathcal{P}^* \to \mathbb{R}$.
2) Estes números reais atribuídos preservam a ordem de preferência:

   $P \gtrsim Q \Leftrightarrow u(P) \geq u(Q)$.

Se P é pelo menos tão desejável quanto Q então a utilidade de P é maior ou igual que a utilidade de Q. A recíproca também é verdadeira: se a utilidade de P é maior ou igual que a utilidade de Q logo P é pelo menos tão preferível quanto Q.

3) A utilidade atribuída a uma combinação convexa de distribuições é apenas a combinação convexa das utilidades das distribuições, isto é, existe linearidade. Sendo assim:

$$u[\lambda P + (1 - \lambda)Q] = \lambda u(P) + (1 - \lambda)\ u(Q). \tag{1}$$

Bezerra (2003), Moraes (2003), Souza (2007) e Souza, Fernanda (2007) trazem o protocolo de edução da utilidade de forma bem detalhada.

2.1.5 Escolha de uma Regra de Decisão

As regras de decisão são procedimentos que relacionam possíveis ações que o decisor pode adotar com as observações acerca do estado da natureza. Em outras palavras, pode-se dizer, matematicamente, que as regras de decisão são funções onde o domínio é o conjunto de observações e o contradomínio é o conjunto das ações (Bezerra, 2003), ou seja, para cada observação tem-se a possibilidade de associar uma ação. Sendo assim, tem-se que:

$$d: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}. \quad x \mapsto d(x) = a \tag{2}$$

Essas regras podem ser probabilísticas ou determinísticas (não randomizadas). Quando determinísticas, o conjunto que agrupa todas as regras de decisões é denotado por: $D = \{d\}$, onde d representa a regra de decisão. O total das regras de decisão é obtido da elevação do número de ações pelo número de observações, quando ambas são finitas, tendo-se:

$$\| D \| = \| \mathcal{A} \|^{\|\mathcal{X}\|}. \tag{3}$$

Já as probabilísticas ou randomizadas, são escolhidas aleatoriamente de acordo com alguma distribuição δ, isto é, $\delta(d)$ que é igual à probabilidade de se escolher a regra de decisão d. Sendo que o conjunto de todas as distribuições δ em D é denotado por $D^* = \{\delta\}$. Nesse caso, escolhe-se primeiro, aleatoriamente, a regra de decisão que vai ser utilizada e depois se observa x para, então, adotar-se a ação a.

O que se buscará é a regra d que produza a melhor $P(p)$ possível, em termos das preferências do decisor, dado θ (Souza, 2007).

2.1.6 Função Consequência

A função consequência, como já foi dito anteriormente, trata de associar, probabilisticamente, uma consequência ou bem p à determinada ação a e ao estado da natureza θ. Em outras palavras, é através de probabilidades condicionais que a função consequência determina, compreendendo os resultados entre os números maiores ou iguais a 0 e menores ou iguais a 1, qual a chance de ocorrer uma determinada consequência ou bem p tendo o decisor tomado a ação qualquer a e a natureza ter escolhido o estado θ.

Como no processo de tomada de decisões o resultado que se obterá (qualquer que seja ele, consequência) não depende da escolha da regra de decisão, mas, sim, da ação adotada e do estado da natureza, então $P(p|\theta, d, a) = P(p|\theta, a)$, que é a própria função consequência. Não importa os motivos ou razões que levaram a adotar a ação a, pois, o relevante é a própria ação a.

No entanto, sabendo-se que o decisor escolhe uma ação a com base nas observações dos possíveis estados da natureza, através das regras de decisões, e que se busca a regra d que permita a melhor $P(p)$ possível, com base nas preferências do decisor, dado determinado estado da natureza, tem-se que a função consequência assume um novo aspecto, já incluindo as regras de decisão, a qual fica:

$$P(p|\theta, d) = \sum_{x} P(x|\theta)P\big(p\big|\theta, d(x)\big). \tag{4}$$

Isso vale para as regras de decisão não randomizadas (determinísticas), no caso discreto. Para as randomizadas, a função consequência assume o seguinte aspecto:

$$P(p|\theta, \delta) = \sum_{d} P(p|\theta, \delta, d)P(d|\theta, \delta). \tag{5}$$

2.1.7 A Utilidade da Função Consequência

Após ter definido a função consequência, surge uma pergunta relevante: como se calcular o grau de desejabilidade do decisor pela probabilidade de ocorrência de determinada consequência p? Nesse caso, entra em cenário a utilidade da função consequência, $u(P(p|\theta, d))$, a qual é calculada da seguinte maneira para os casos discretos das regras não randomizadas:

$$u(P(p|\theta, d)) = \sum_{p} v(p)P(p|\theta, d) = \sum_{p} v(p) \sum_{x} P\big(p\big|\theta, d(x)\big). \tag{6}$$

Para as regras randomizadas, tem-se:

$$u\big(P(p|\theta, \delta)\big) = \sum_{d} \delta(d)u\big(P(p|\theta, d)\big). \tag{7}$$

2.1.8 A Função Perda

Estatisticamente falando, a perda é algo sempre latente. Geralmente, busca-se diminuir essa perda. A função perda, $L(\theta,\, d(x))$, nada mais é que o negativo da utilidade. Sendo assim, obtém-se:

$$L\big(\theta, d(x)\big) = -u(P(p|\theta, d(x))). \tag{8}$$

2.1.9 A Função Risco

A palavra risco pode ter muitos significados, sendo o mais comum, a probabilidade de algo dar errado ou não sair conforme o planejado ou esperado. À luz de Souza (2007, p. 95), a função risco é definida “como a perda média para o estatístico quando o verdadeiro estado da natureza θ e o estatístico usa a função (decisão) d.” Ela é definida, matematicamente, para as regras não randomizadas, por:

$$R_d(\theta) = \sum_x L(\theta, d(x))P(x|\theta). \tag{9}$$

No caso das regras serem randomizadas, a fórmula é a seguinte:

$$R_\delta(\theta) = \sum_x L(\theta, \delta)P(x|\theta). \tag{10}$$

O entendimento da função risco é essencial para a escolha da melhor regra de decisão, pois é essa função que comparará todas as regras e mostrará qual será aquela que tem o menor risco, refletindo a seguinte afirmação: “Quanto maior a utilidade, melhor a consequência.” (Souza, 2007, p. 95).

2.1.10 Regra de Bayes

Para se obter as probabilidades de ocorrência de determinado estado da natureza recorre-se a duas fontes de informações: dados históricos, eventos frequentistas, e ao conhecimento de um especialista, o qual sem fazer experimentos, tem uma experiência acumulada sobre a “natureza”. Quando esse conhecimento é utilizado surge a distribuição *a priori*, representada por $\pi(\theta)$.

A ideia de Bayes consiste em combinar aquelas duas fontes de informação. Quando isso acontece, surge uma nova distribuição, a qual é chamada de distribuição *a posteriori*. Ela, então, é denotada por:

$$\pi(\theta|x) = \frac{P(x,\theta)}{P(x)}, \tag{11}$$

onde:

$$P(x,\theta) = P(x|\theta)\pi(\theta) \tag{12}$$

e

$$P(x) = \sum_\theta P(x|\theta)\,\pi(\theta). \tag{13}$$

Após essa introdução da junção de fontes de informação, através da regra de Bayes da probabilidade, para se conhecer (com menos chance de erros, visto que se combinam duas visões diferentes sobre a mesma “natureza”) os conjuntos de probabilidades sobre como a natureza poderá se comportar, pode-se calcular o risco da utilização da regra de decisão *d*, que nesse contexto é chamado de risco de Bayes, através da função abaixo:

$$r_d = \sum_\theta \pi(\theta)R_d(\theta). \tag{14}$$

Aqui também buscar-se-á aquela regra de decisão *d* que minimize o risco de Bayes.

No entanto, em alguns casos, a quantidade de ações e/ou de observações que aparecem nos problemas de decisão pode ser relativamente alta, o que geraria um enorme trabalho operacional para montar as regras de decisão e o seu conjunto *D*, como, principalmente, para se conhecer qual delas teria um menor risco de Bayes. Por exemplo, sendo $\|D\| = \|\mathcal{A}\|^{\|\mathcal{X}\|}$ e a quantidade de ações e de observações, respectivamente, 4 e 12, ter-se-ia 16.777.216 regras de decisão, o que, sem dúvida, traria muito esforço operacional, caso se utilizasse a função apresentada acima. Para amenizar todo esse esforço, Souza (2007) traz um método mais prático e muito menos trabalhoso para se resolver problemas desse tipo:

1. Enumeram-se todas as possíveis observações, $\|\mathcal{X}\|$, (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n);
2. Para cada uma dessas observações, acha-se qual é ação que apresenta o menor risco de Bayes por observação, o que é feito por meio da seguinte expressão:

$$\sum_{\theta} \pi(\theta|x)L(\theta,a). \tag{15}$$

Dessa forma, o esforço operacional se reduz à $\|\mathcal{A}\|$ X $\|\mathcal{X}\|$, isto é, à multiplicação da quantidade de ações por cada observação.

Maiores detalhes sobre a regra de Bayes podem ser encontrados em Berger (1985) e Souza (2007).

Quando não for possível obter o conhecimento de $\pi(\theta)$, impossibilitando o uso da regra de Bayes, visto que falta um dos elementos para obter a probabilidade *a posteriori*, pode-se usar outros dois métodos na Teoria da Decisão, os quais são: Regras Minimax e Regras de Neyman-Pearson, segundo Souza (2007). O primeiro é aplicado quando existem muitas categorias sobre o estado da natureza. Já o segundo método é utilizado apenas quando o problema de decisão envolve somente dois estados da natureza.

2.1.11 Decisões Sem Dados (Só Com $\pi(\theta)$)

Em muitos casos, não é possível se obter os dados da função de verossimilhança, $P(x|\theta)$, mas, apenas o $\pi(\theta)$. Quando isso ocorrer, o problema de decisão poderá ser resolvido buscando-se minimizar o risco de se adotar a ação a através da seguinte expressão:

$$R_a = -\sum_{\theta} \pi(\theta) \sum_{p} u(p)P(p|\theta,a). \tag{16}$$

Como já foram apresentados e descritos todos os elementos que compõem a ferramenta lógico-matemática que a Teoria da Decisão fornece, resta agora, para um melhor entendimento de como eles se relacionam, mostrar todos eles interligados, como é feito na Figura 2.1 logo a seguir:

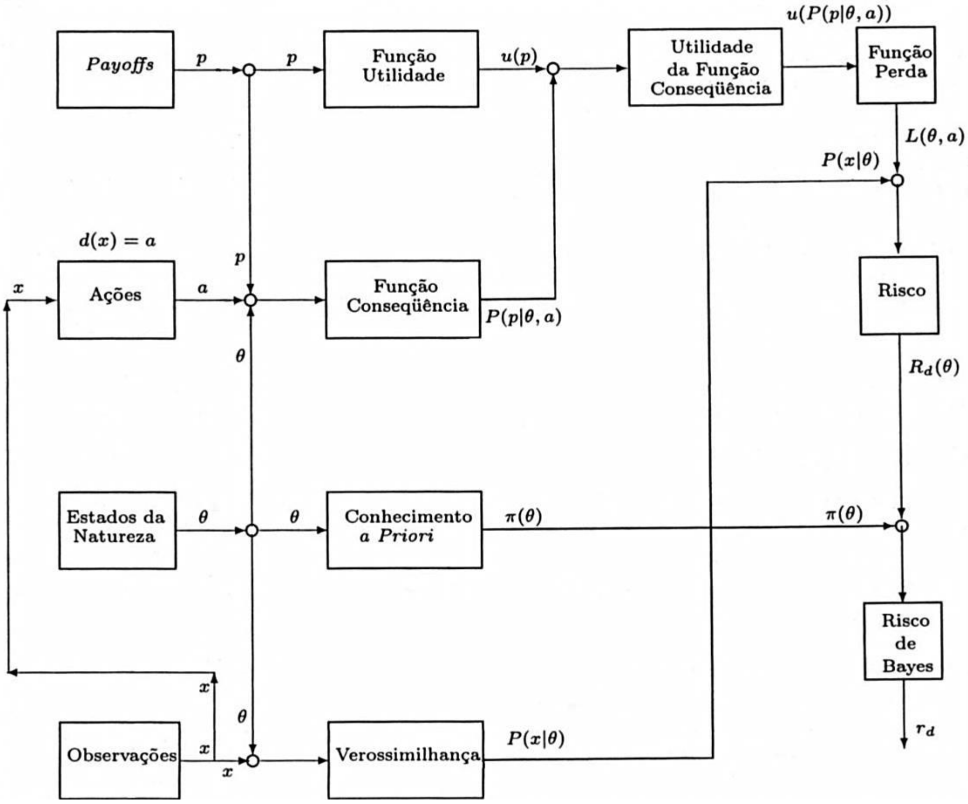

Figura 2.1 – Esquema do funcionamento da Teoria da Decisão
Fonte: Souza (2007, p. 104).

2.2 TEORIA *FUZZY*

A lógica tradicional de conjuntos matemáticos, a qual é chamada também de booleana, lógica binária, lógica clássica ou lógica nítida/rígida (*crisp logic*) traz em sua essência uma ideia dicotômica de pertinência de elementos em determinado conjunto, isto é, para qualquer elemento x de um universo S, ou ele pertence ao conjunto X ou ele não pertence, ou seja: $x \in X$ ou $x \notin X$.

Dessa maneira, percebe-se que a lógica tradicional inclui ou exclui totalmente um elemento em um conjunto, não permitindo, assim, outras possibilidades, pois ou ele está em um conjunto ou não está. Por exemplo: um animal pode ser ou não um mamífero, um aluno vai ser ou não aprovado, uma lâmpada está ou não acessa, etc. No entanto, há situações em que as informações disponíveis não são suficientes nem completas, tornando-se um tanto vagas e ambíguas. Isso acontece, principalmente, em expressões linguísticas utilizadas no dia-a-dia. São exemplos dessas expressões ou termo linguísticos: “o dia está quente”, “a luz está forte”, “você está gorda”, “ele está quase chegando”, “o dólar está baixo”, “a inflação está alta”, dentre outras dezenas que são ditas e ouvidas todos os dias. O que seria “o dia está quente”? Que temperatura representa essa expressão? 35º C? Mais, ou menos?

Nesses casos, a lógica tradicional não representa bem essas expressões. Sendo assim, outra lógica surge, mais precisamente em 1965, quando Zadeh (1965) publica o artigo *Fuzzy Sets*, para permitir "aproximar a precisão característica da matemática à inerente imprecisão do mundo real" (Braga, 1995). Traz como um diferencial a possibilidade de traduzir a linguagem natural (termos linguísticos) utilizada nas comunicações diárias em expressões matemáticas (Marcondes, 2004). Essa nova lógica, a lógica *fuzzy* ou Nebulosa, pode ser considerada uma extensão da lógica tradicional de conjuntos, uma vez que determinado elemento pode pertencer, em diversos graus, a um ou mais conjuntos ou pertencer totalmente (100%), ou não, a determinado conjunto. Dessa forma, ela permite representar melhor as subjetividades humanas, como afirma Lima (2003):

> Um aspecto interessante da teoria nebulosa é a possibilidade de se incluir em um modelo matemático conceitos intuitivos que na maioria das vezes são altamente imprecisos e consequentemente de difícil tratamento. A capacidade de capturar com clareza e concisão as várias nuanças dos conceitos psicológicos utilizados pelos seres humanos em seu raciocínio usual, sem necessidade de enquadrá-lo em estados nítidos torna a lógica nebulosa uma importante ferramenta na modelagem de sistemas imprecisos. (Lima, 2003, p. 83).

Partindo dessa lógica, um conjunto pode possuir elementos que não pertencem, na sua totalidade, a ele. Esse tipo de conjunto que aborda vários elementos que não apresentam limites bem definidos de pertinência é chamado de conjunto *fuzzy*.

2.2.1 Conjuntos *Fuzzy*

Para entender melhor o conjunto *fuzzy*, torna-se interessante trazer alguns conceitos do tradicional (*crisp*), o qual é baseado na lógica clássica de conjunto.

Um conjunto *crisp* (rígido, nítido) se define de tal maneira que divide o universo de possibilidades em somente dois grupos: os que pertencem ao conjunto e os que não pertencem, daí a denominação *crisp* (Guarín & Escobar, 2003).

Quando o conjunto é finito, *X*, por exemplo, utiliza-se a seguinte notação:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}. \tag{17}$$

Um conjunto *crisp* também pode ser representado por uma função que represente todos os seus membros:

$$X = \{x \mid f(x)\}. \tag{18}$$

Ele também pode ser definido por sua função característica através de:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1\ se\ x \in X \\ 0\ se\ x \notin X. \end{cases} \tag{19}$$

Nos conjuntos *fuzzy*, diferentemente dos conjuntos *crisp*, aparece uma função que indica o quanto determinado elemento pertence ao conjunto, a qual é denominada de função de pertinência (μ_A). Em outras palavras, essa função representa o grau de pertinência do elemento ao conjunto, o qual varia entre 0 (zero) e 1 (um), onde o primeiro valor indica ausência do elemento no conjunto e, o segundo, pertinência total.

Seja $X = \{x\}$ uma coleção de objetos (pontos, elementos), então um conjunto *fuzzy* A de X é definido como o conjunto de pares ordenados:

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, x \in X, \tag{20}$$

onde $\mu_A(x)$ é o grau de pertinência de x em A e μ_A é a função de pertinência. Essa função se baseia na premissa de que o pensamento humano não estabelece limites rígidos entre uma ou outra categoria (conjunto), mas, sim, que vai passando gradualmente o nível de aceitação de um conjunto para outro (Zadeh, 1973). Por exemplo: nenhum ser humano define, de forma abrupta, qual a temperatura que um objeto passa de “frio” para “quente”, pois, geralmente, estabelece níveis intermediários, tais como: “morno”, “tépido”, “tíbio”, “friozinho”, “quentinho”, etc. A Figura 2.2 representa, hipoteticamente, a função de pertinência do conjunto *fuzzy* “frio” para um indivíduo qualquer. Percebe-se que a temperatura 10 ºC possui o maior grau de pertinência e à medida que essa temperatura vai aumentando ou diminuindo a função de pertinência vai diminuindo até chegar a zero (0).

Existem algumas características especiais dos conjuntos *fuzzy* que merecem ser mencionadas:

- Existem conjuntos *fuzzy*, denominados de **conjuntos *fuzzy* normal**, que apresentam ao menos um valor $x \in X$ tal que $\mu_x = 1$, isto é, o maior valor que pode alcançar a função de pertinência é 1. Em caso contrário, o conjunto *fuzzy* será chamado **subnormal**.
- O maior valor da função de pertinência é conhecido como a **altura** do conjunto *fuzzy*.
- **Nível alfa (α):** O nível alfa de um conjunto *fuzzy* A inclui os elementos que tem valor para a função de pertinência (μ_A) igual ou superior à alfa (α). O nível α de um conjunto *fuzzy* é um conjunto *crisp*, o qual é representando da seguinte forma:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}. \tag{21}$$

- **Conjunto suporte:** é um conjunto *fuzzy* A de um conjunto convencional X, identificado como *supp*(A) ou *S*(A), cujos elementos todos têm um nível de pertinência maior que zero (0) em A, isto é:

$$supp(A) = \{\, x \in X \,|\mu_A(x) > 0\}. \tag{22}$$

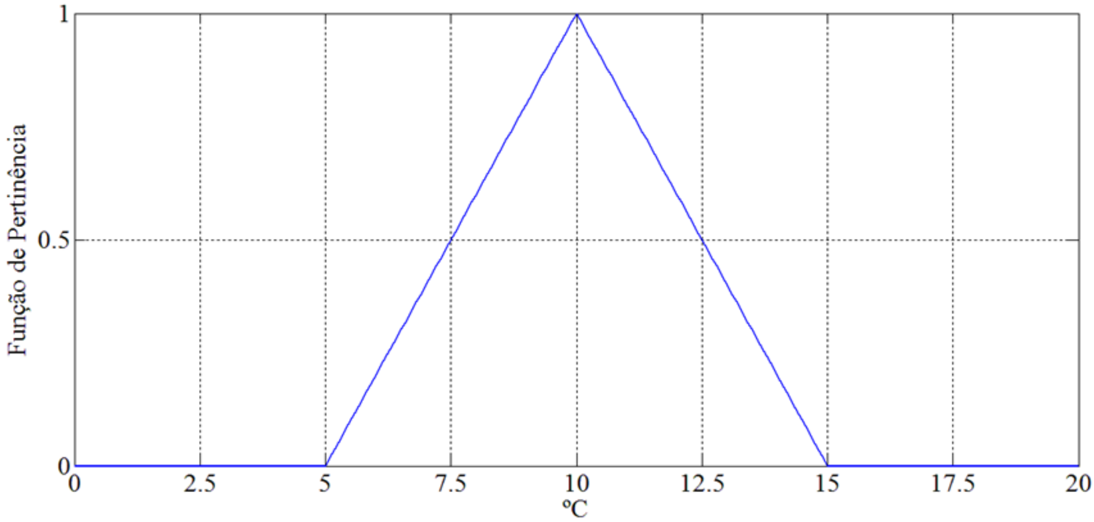

Figura 2.2 – Função de pertinência do conjunto fuzzy "frio"
Fonte: Guarín & Escobar (2003, p. 6).

2.2.2 Operações e Definições Básicas de Conjuntos *Fuzzy*

Serão apresentadas aqui as operações básicas com conjuntos *fuzzy*, que são extensões dos correspondentes para conjuntos *crisp*. Maiores detalhes podem ser encontrados em Zadeh (1965), Bellman & Zadeh (1970), Dubois & Prade (1980), Ibrahim (2004), Bojadziev & Bojadziev (2007) e Belohlavek & Klir (2011).

Considere dois conjuntos *fuzzy* A e B no universo U.

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, \text{ onde } \mu_A(x) \in [0,1], \tag{23}$$

$$B = \{(x, \mu_B(x))\}, \text{ onde } \mu_B(x) \in [0,1]. \tag{24}$$

Eles serão iguais, $A = B$, se e somente se $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ para todo x em U.

O complemento de um conjunto *fuzzy*, denotado por A' ou $\bar{A}$, é caracterizado pela função de pertinência:

$$\mu_{A'} = 1 - \mu_A. \tag{25}$$

O conjunto *fuzzy* A estará contido no conjunto *fuzzy* B, denotado por $A \subset B$, se para cada $x \in U, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$. Então A é chamado de subconjunto de B.

A união desses conjuntos será outro conjunto *fuzzy*, $C = A \cup B$, definido por:

$$\mu_C(x) = Max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), x \in U, \tag{26}$$

onde $\vee$ é utilizado para representar uma disjunção lógica.

A intersecção dos conjuntos *fuzzy* *A* e *B* também será outro conjunto *fuzzy*, $C = A \cap B$, definido como:

$$\mu_C(x) = Min[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), x \in U, \tag{27}$$

onde $\wedge$ é utilizado para representar uma conjunção lógica.

2.2.3 Números *Fuzzy*

Existem vários tipos de conjuntos *fuzzy*. Dentre esses tipos, os que possuem um significado especial são os números *fuzzy*, os quais estão definidos sobre o conjunto $\Re$ dos números reais (Klir & Yuan, 1995).

Para que um conjunto *fuzzy A* seja classificado como número *fuzzy* ele deve apresentar as seguintes características:

- ser normal;
- o nível alfa A_α deve ser um intervalo fechado para todo $\alpha \in (0,1]$, isto é, o conjunto *fuzzy* deve ser convexo (possuir como função de pertinência $\mu_A(x)$ valores estritamente crescentes ou decrescentes para valores crescentes de *x*);
- o *supp*(A) deve estar limitado.

São muitos os tipos de números *fuzzy* existentes, os quais são, geralmente, denominados em razão do formato de suas respectivas funções de pertinência e representam conceitos ou eventos diversos.

Segundo Pereira (2002) os números *fuzzy* mais comuns são o triangular, o trapezoidal e o pi (π). Sendo assim, esses serão descritos, mais adiante, juntamente com outros tipos de número *fuzzy*.

2.2.3.1 Número triangular *fuzzy*

Um número *fuzzy* $\tilde{A}$ será triangular se sua função de pertinência for da seguinte forma:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 \; se \; x < a_1, \\ \dfrac{x - a_1}{a_M - a_1} se \; a_1 \leq x \leq a_M, \\ \dfrac{x - a_2}{a_M - a_2} se \; a_M \leq x \leq a_2, \\ 0 \; se \; x > a_2, \end{cases} \tag{28}$$

onde o intervalo $[a_1, a_2]$ limita o número triangular *fuzzy*, o ponto $(a_M, 1)$ é o pico desse número e o segmento de reta formado pelos pontos $(a_M, 0)$ e $(a_M, 1)$ é a sua altura, como pode ser visto na Figura 2.3. Uma representação matemática simples do número triangular *fuzzy* mostrado nessa figura pode ser dada através da chamada *representação por ponto*:

$$\tilde{A} = (a_1, a_M, a_2). \tag{29}$$

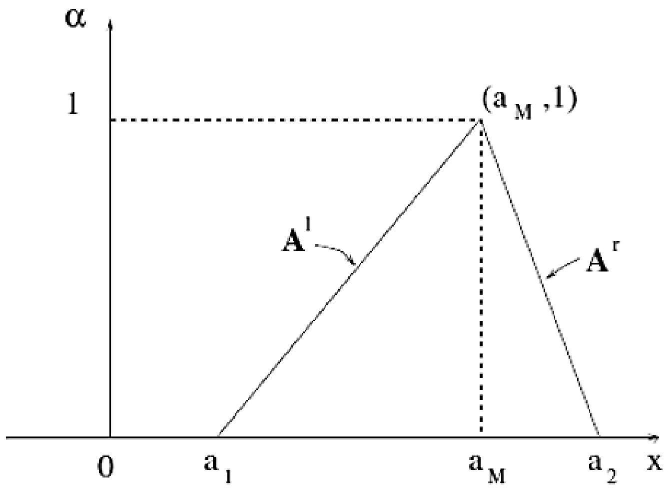

Figura 2.3 – Número triangular fuzzy
Fonte: Bojadziev & Bojadziev (2007, p. 22).

Percebe-se que esse número é definido por duas funções lineares, uma que descreve o lado esquerdo A^l do número triangular *fuzzy* (sendo monótona crescente) e a outra que descreve o lado direito A^r (sendo monótona decrescente).

2.2.3.2 Número trapezoidal *fuzzy*

Um número *fuzzy* $\tilde{B}$ será tido como trapezoidal caso a sua função de pertinência seja:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 \; se \; x < a_1, \\ \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} se \; a_1 \leq x \leq b_1, \\ 1 \quad se \; b_1 \leq x \leq b_2, \\ \dfrac{x - a_2}{b_2 - a_2} se \; b_2 \leq x \leq a_2, \\ 0 \; se \; x > a_2. \end{cases} \tag{30}$$

Um número trapezoidal *fuzzy* $\tilde{B}$ pode ser representado, de forma simplificada, da seguinte forma:

$$\tilde{B} = (a_1, b_1, b_2, a_2). \tag{31}$$

Se $b_1 = b_2 = a_M$ o número trapezoidal *fuzzy* se reduz a um número triangular *fuzzy*, ficando $\tilde{B} = (a_1, a_M, a_M, a_2) = (a_1, a_M, a_2)$. Os valores a_1 e a_2 são conhecidos, respectivamente, como o inferior (*inf*) e o superior (*sup*) dos números *fuzzy*.

A Figura 2.4 representa um típico número trapezoidal *fuzzy*. O lado direito desse número, A^r, é denotado por (b_1, b_1, b_2, a_2) e o lado esquerdo, A^l, por (a_1, b_1, b_2, b_2).

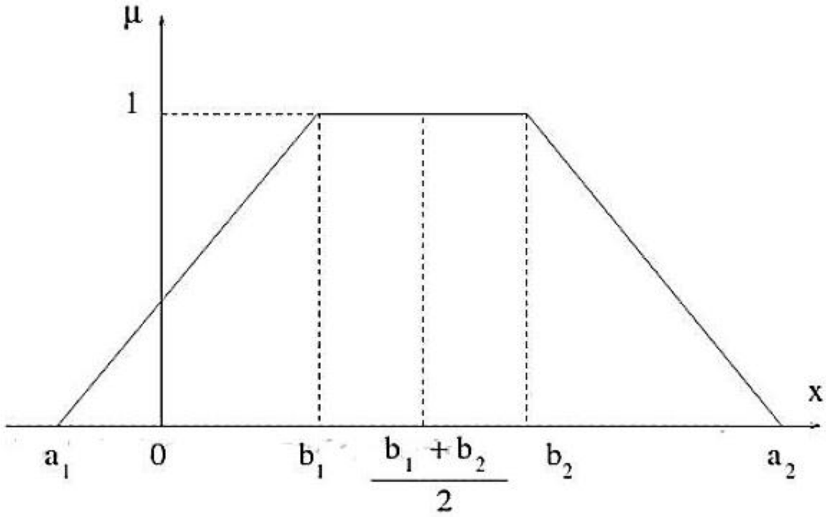

Figura 2.4 – Número trapezoidal fuzzy
Fonte: Bojadziev & Bojadziev (2007, p. 25).

Mais detalhes sobre o número *fuzzy* trapezoidal podem encontrados em Bansal (2011).

2.2.3.3 Número *fuzzy* pi $(\boldsymbol{\pi})$.

O número *fuzzy* pi (π) se parece um pouco com o triangular, diferenciando-se dele por proporcionar uma queda mais gradual da curva entre $\mu = 1$ e $\mu = 0{,}5$ e uma queda mais rápida da função de pertinência para μ entre 0,5 e 0 (Pereira, 2002).

A sua função de pertinência é definida como:

$$\mu_{\boldsymbol{\pi}}(x) = \begin{cases} 0 \quad se\ x \leq\ a_1^*, \\ 2\left(\dfrac{x - a_1^*}{a_M - a_1^*}\right)^2 se\ a_1^* \leq x \leq a_1, \\ 1 - 2\left(\dfrac{a_M - x}{a_M - a_1^*}\right)^2 se\ a_1 \leq x \leq a_M, \\ 1 - 2\left(\dfrac{x - a_M}{a_2^* - a_M}\right)^2 se\ a_M \leq x \leq a_2, \\ 2\left(\dfrac{a_2^* - x}{a_2^* - a_M}\right)^2 se\ a_2 \leq x \leq a_2^*, \\ 0\ se\ x \geq a_2^*, \end{cases} \tag{32}$$

onde:

$$a_1^* = \begin{cases} a_M - 2(a_M - a_1), se\ a_M \geq 2(a_M - a_1) \\ 0, \qquad se\ a_M \leq 2(a_M - a_1) \end{cases} \text{e} \tag{33}$$

$a_2^* = a_M + 2(a_2 - a_M).$ (34)

A Figura 2.5 mostra um exemplo de um número *fuzzy* pi (π):

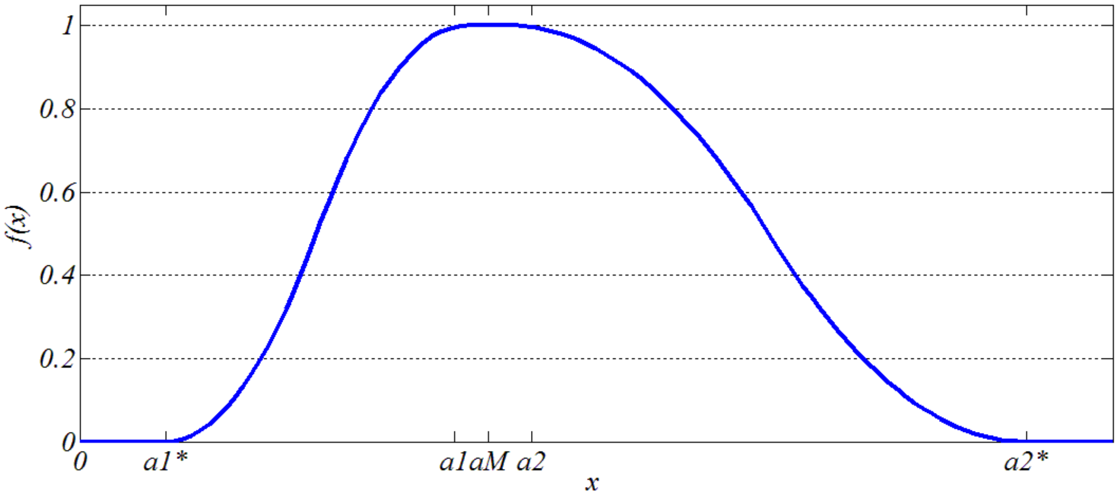

Figura 2.5 – Número fuzzy pi (π)
Fonte: Pereira (2002, p. 79).

2.2.3.4 Número *fuzzy* em formato de sino

Os números *fuzzy* em formato de sino apresentam a seguinte função de pertinência:

$\mu_A(x) = e^{-(x-a)^2/b}.$ (35)

A Figura 2.6 mostra graficamente esse número. Os números *fuzzy* podem assumir diversos formatos, uma vez que qualquer função que apresente, principalmente, os princípios da normalidade e o da convexidade pode caracterizar um número *fuzzy*.

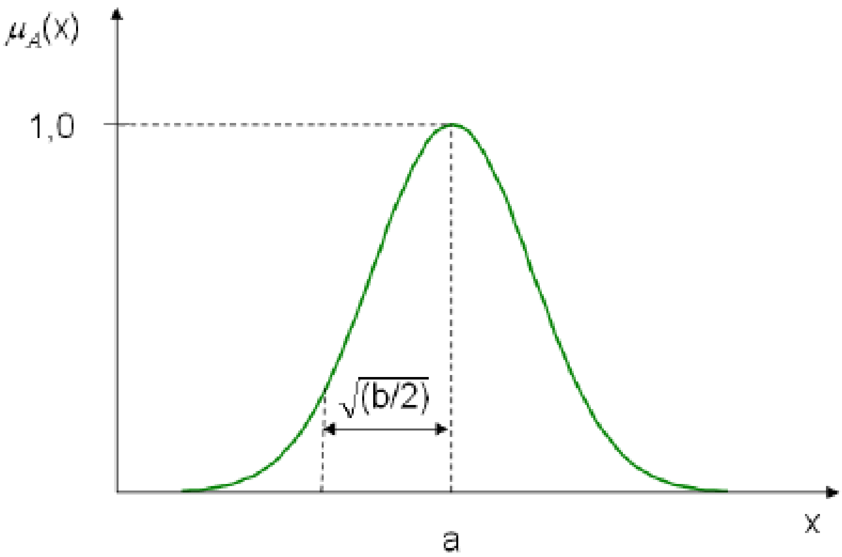

Figura 2.6 – Número fuzzy em formato de sino.
Fonte: Oliveira (2008, p. 71).

2.2.4 Operações Básicas Com Números *Fuzzy*

As operações matemáticas básicas para os números *fuzzy* são muito parecidas com as quais estamos acostumados, mudando, na grande maioria das vezes, apenas os símbolos, como mostrado adiante.

Sejam $\tilde{B}_1 = (a, b, c, d)$ e $\tilde{B}_2 = (e, f, g, h)$ dois números trapezoidais *fuzzy*, então:

i. Soma: $\tilde{B}_1 \oplus \tilde{B}_2 = (a, b, c, d) \oplus (e, f, g, h) = (a + e, b + f, c + g, d + h)$;
ii. Subtração: $\tilde{B}_1 \ominus \tilde{B}_2 = (a, b, c, d) \ominus (e, f, g, h) = (a - e, b - f, c - g, d - h)$;
iii. Multiplicação: $\tilde{B}_1 \otimes \tilde{B}_2 = (a, b, c, d) \otimes (e, f, g, h) \cong (ae, bf, cg, dh)$;
iv. Simetria: $-\tilde{B}_1 = -(a, b, c, d) = (-d, -c, -b, -a)$;
v. Inversão: $1/\tilde{B}_1 \cong (1/d,\ 1/c,\ 1/b, 1/a)$.

Outras definições matemáticas com números trapezoidais *fuzzy* são mostradas em Bansal (2011). Essas definições podem ser estendidas para os números triangulares *fuzzy*.

2.2.5 Obtendo Números *Fuzzy*

Para obter números *fuzzy*, dentre outras formas, pode-se utilizar de um especialista ou de uma distribuição de probabilidade (Pereira, 2002). Neste último caso, o qual pode ser encontrado em Pereira (2002), obtém-se, basicamente, a média (M), o desvio-padrão (σ) e a moda (m_0) da distribuição de probabilidade. O intervalo dessa distribuição será representado por $[i_1, i_4]$, onde o seu valor mínimo e o máximo são denotados por, respectivamente, i_1 e i_4.

Com esses dados, já é possível obter um número triangular *fuzzy* A, o qual fica definido como: $A = (i_1, m_0, i_4)$. O número trapezoidal *fuzzy* B, obtido da distribuição, fica definido como:

$$B = (i_1, m_0 - d_E, m_0 - d_D, i_4). \tag{36}$$

Sejam d_E e d_D a medida da dispersão da densidade de probabilidade à esquerda e à direita, respectivamente, da moda m_0, estes valores são obtidos da seguinte forma:

$$\text{Se } m_0 > M, \text{ então } d_E = \sigma + m_0 - M \text{ e } d_D = \sigma. \tag{37}$$

$$\text{Se } m_0 < M, \text{ então } d_E = \sigma \text{ e } d_D = \sigma - m_0 + M. \tag{38}$$

Maiores detalhes de como obter números *fuzzy* a partir da densidade de probabilidade e, vice-versa, podem ser encontrados, respectivamente, em Bárdossy & Durkstein (1995) e Dubois & Prade (1993).

2.2.6 Ranqueando Números *Fuzzy*

Métodos para comparar e ranquear números *fuzzy* foram estudados primeiramente por Jain (1976). Desde então, vários métodos foram propostos.

Ranquear números *fuzzy* é uma etapa muito importante quando a lógica *fuzzy* é utilizada na tomada de decisão, análise de dados, inteligência artificial, sistemas econômicos, pesquisa operacional, etc. (Shureshjani & Darehmiraki, 2013).

Para ranquear números *fuzzy*, há mais de trinta métodos (Abbasbandy, 2009). Os principais podem ser encontrados resumidamente em Brunelli & Mezei (2013). A seguir, serão descritos alguns desses métodos, os quais serão utilizados ao longo deste trabalho.

O método proposto por Adamo (1980) é o único que satisfaz todas as propriedades racionais de ordem propostas por Wang & Kerre (2001), segundo Brunelli & Mezei (2013). Esse método faz uma avaliação simples de números *fuzzy* baseado no ponto mais à direita para um determinado nível α (α-*cut*):

$$AD_{\alpha}(A) = a_{\alpha}^{+}. \tag{39}$$

O método Centro de Máxima (Klir & Yuan, 1995) calcula, como o nome sugere, o centro de máxima de um número *fuzzy* como um valor médio dos pontos extremos do seu intervalo modal:

$$CoM\ (A) = \frac{a_1^- + a_1^+}{2}. \tag{40}$$

Outro método muito simples de ranqueamento é o que calcula a média dos valores dos vértices que formam os números triangulares e trapezoidais *fuzzy*, como mostrado adiante, respectivamente:

$$Média\ (A) = \frac{a_1 + a_M + a_2}{3} \text{ e} \tag{41}$$

$$Média\ (B) = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + a_2}{4}. \tag{42}$$

Um método bem similar ao anterior é o de considerar a função de pertinência de um número *fuzzy* como uma distribuição beta. Dessa forma, para se ranquear tal número *fuzzy* calcula-se a sua média através da seguinte fórmula:

$$Beta\ (A) = \frac{a_1 + 4a_M + a_2}{6}. \tag{43}$$

Até agora, foram apresentados métodos que transformam números *fuzzy* em números reais *crisp*, com os quais é possível criar ordens (sejam crescentes ou decrescentes) entre os valores. Esse processo é chamado de desfuzzificação. Rommelfanger (2003) traz um método que faz comparações par a par entre os números *fuzzy*, permitindo também criar uma ordem entre eles. Resumindo: dado dois números *fuzzy* $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$, por exemplo:

se o $sup\tilde{A} \geq sup\tilde{B}$ e o $inf\tilde{A} \geq inf\tilde{B}$ então $\tilde{A} \geq \tilde{B}$.

Esse método é conhecido como *p*-preferência. A comparação par a par também pode ser feita a um dado nível α, isto é, para determinado α-*cut*.

Outros métodos mais recentes de ranqueamento podem ser encontrados em Abbasbandy (2009), Chen & Sanguansat (2011), Deng (2014), Shureshjani & Darehmiraki (2013), Yu (2013) e Zhang (2014).

2.3 FINANÇAS

A área Finanças é definida por Gitman (2010) como a arte e a ciência da gestão de dinheiro. Em outras palavras, é a ciência que estuda a movimentação financeira entre agentes econômicos. Ela preocupa-se com "os processos, as instituições, os mercados e os instrumentos associados à transferência de dinheiro entre indivíduos, empresas e órgãos governamentais." (Gitman, 2010, p. 4). Nos dias atuais, praticamente todos os indivíduos e as organizações obtêm receitas, levantam fundos, gastam recursos financeiros ou investem em ativos. Sendo o Capitalismo o sistema econômico operante atualmente em quase todos os países do mundo percebe-se a relevância do entendimento de alguns conceitos, definições e abordagens envolvendo a área Finanças, a qual se divide em três grandes subáreas: administração financeira, a de mercados monetário e de capitais e a de investimentos.

2.3.1 Mercados Eficientes de Capital

Entende-se por mercados eficientes de capital aqueles cujas informações disponíveis são refletidas diretamente nos preços correntes de mercado (Pinheiro, 2008). Dito de outra forma, os preços correntes de mercado representam o valor justo do preço presente dos títulos. Sendo assim, não há como obter lucros extraordinários com o uso de informações privilegiadas ou como omitir informações. Ross (2008) destaca que se o mercado for eficiente:

1. Os administradores não podem escolher o momento mais apropriado para lançar obrigações e ações.
2. A emissão de ações adicionais não deve reduzir o preço de mercado da ação.
3. Os preços de ações e obrigações não devem ser afetados pela escolha de método contábil por uma empresa.

Contudo, de acordo com a velocidade das informações e do mercado, a eficiência pode ser classificada em três níveis ou formas: fraca, semiforte e forte (Ross, 2008).

O mercado é eficiente na forma fraca, quando as informações se baseiam inteiramente em preços passados. Esse é o tipo menos exigente de eficiência que alguém esperaria encontrar em um mercado financeiro, pois a informação histórica a respeito dos preços é algo muito fácil de ser obtido. Dessa forma, qualquer um teria a possibilidade de conhecer as informações de determinado mercado.

Na eficiência semiforte, pressupõe-se que os preços refletem tanto as informações de preço passadas quanto outras informações publicamente disponíveis. Esse tipo, juntamente com a eficiência na forma fraca, é provavelmente o mais aceito quanto à eficiência de mercado. Este trabalho também compartilha com a aceitação dessas duas formas de eficiência de mercado, tanto por serem as mais aceitas pela literatura, quanto por incorporarem informações passadas e publicamente disponíveis e por não introduzir informações privilegiadas, visto que, essas últimas, geralmente não são fáceis de serem obtidas.

Na eficiência forte, toda informação é repassada para os preços, seja ela publicamente disponível ou não, isto é, o mercado possui e usa toda a informação conhecida por qualquer pessoa a respeito das ações, até mesmo a informação privilegiada.

O entendimento de eficiência de mercado se faz relevante, pois elimina, quase que totalmente, a possibilidade de criar oportunidades de financiamento lucrativas para as empresas enganando os investidores, isto é, vendendo ações ou títulos acima dos preços reais de mercado. Para Ross (2008), os investidores não são facilmente enganados, visto que procuram obter o maior número de informações possíveis acerca das empresas e, obviamente, dos seus meios de obtenção de recursos (ativos financeiros, por exemplo).

2.3.2 Mercado Financeiro

O mercado financeiro é tradicionalmente composto pela união do mercado monetário com o mercado de capitais (Gitman, 2010). Apresenta como segmentação, além desses mercados, o mercado de crédito e o cambial.

No mercado monetário ocorrem as operações de curto prazo e curtíssimos prazos. É através dele que o Banco Central Brasileiro (BACEN), como parte da política de combate à inflação, administra o nível de liquidez monetária da economia e as taxas de juros básicas.

Já no mercado de capitais, as operações são de médio e longo prazo, e até mesmo de prazo indeterminado, as quais envolvem ações e obrigações (Bodie, 2000).

No mercado de crédito são realizadas as operações de financiamento de curto e médio prazos direcionadas aos ativos permanentes e capital de giro de empresas.

Por fim, o mercado cambial inclui operações de conversão (troca) de moeda de um país pela de outro (Assaf Neto, 2008).

Todas essas segmentações integram o sistema financeiro, o qual, em consonância com Fortuna (2008), é "Um conjunto de instituições que se dedicam, de alguma forma, ao trabalho de propiciar condições satisfatórias para a manutenção de um fluxo de recursos entre poupadores e investidores" (Fortuna, 2008, p. 16).

Os excedentes monetários gerados no sistema econômico serão canalizados e administrados pelo sistema financeiro. Dessa forma, a pré-condição para que haja um mercado financeiro é a existência do sistema econômico, uma vez que é através desse que, com os fatores de produção, bancados pelo produtor, há a geração de riqueza e a formação de poupança, as quais, como excedentes irão para o mercado financeiro, que repassa esses recursos para que novos fatores de produção recebam investimentos (Anhaia, 2006).

Outros detalhes sobre sistema financeiro, juntamente com suas instituições e autoridades, podem ser obtidos em Assaf Neto (2008), Fernandes (2006), Fortuna (2008) e Mellagi Filho & Ishikawa (2008). A Figura 2.7 traz um exemplo de como as empresas geram riqueza e excedentes, os quais podem ser aplicados no mercado financeiro.

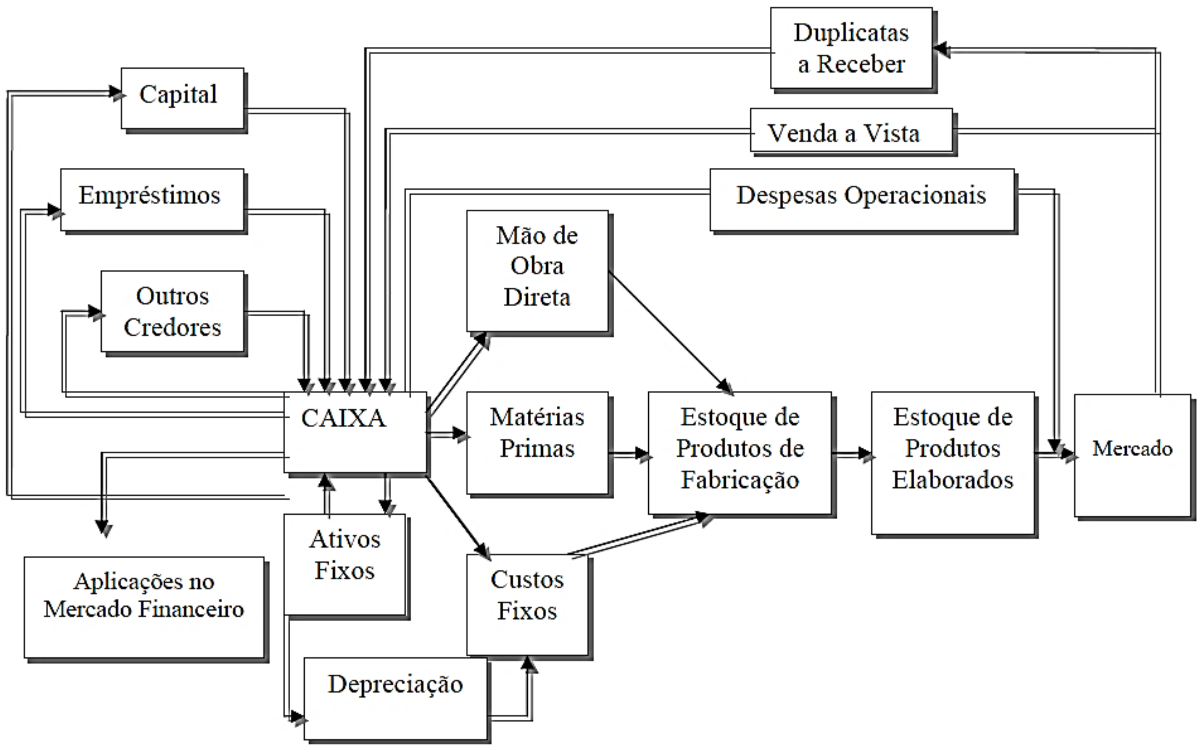

Figura 2.7 – Fluxo de recursos através da empresa
Fonte: Anhaia (2006, p. 24).

Como todo mercado, o financeiro é caracterizado por dois tipos de agentes econômicos: os que demandam algum produto (investidores) e os que o possuem (poupadores), abdicando dele por algum preço.

No mercado financeiro, acontecem as trocas de produtos, os quais são conhecidos como ativos financeiros.

2.3.3 Ativos Financeiros

O termo ativo, o qual vem da Contabilidade, se emprega tanto para empresas como para o mercado financeiro. Ativos são bens tanto concretos (máquinas, veículos, imóveis, etc.) quanto intangíveis, tais como direitos de valores que formam o patrimônio de uma empresa (contas a receber, por exemplo). Andrezo & Lima (1998) definem ativo financeiro da seguinte forma:

> Constitui um direito em relação a outra unidade econômica, que não proporciona serviços materiais a seu possuidor, mas é mantido como reserva de valor em função do retorno que dele se espera obter. É um título que representa dívida ou participação patrimonial, como ações, certificados de depósito, letras de câmbio (Andrezo & Lima, 1998, p. 6).

Um ativo financeiro compreende todo tipo de aplicação financeira. São exemplos de ativos financeiros:

- Títulos de renda fixa públicos e privados;
- Caderneta de poupança;
- Ações;
- Metais (sendo ouro o mais comum);
- Moedas estrangeiras;
- Fundos de investimentos.

Para Assaf Neto (2003), ativos financeiros são títulos representativos de parte patrimonial ou dívida e classifica-se quanto ao prazo, em curto, médio, longo prazo ou indeterminado, quanto à emissão, público ou particular, e quanto à renda, fixa ou variável.

Quanto a essa última classificação, Faria (2003) distingue esses ativos afirmando que:

> A grande diferença entre os títulos de renda variável e os de renda fixa é que os primeiros não têm preço certo ou garantido nem prazo de vencimento, podendo inclusive ‘virar pó’. Já os papéis de renda fixa têm obrigatoriamente uma data de resgate ou de vencimento predeterminada com um valor de resgate também determinado nessa data de vencimento (Faria, 2003, p. 193).

Alguns exemplos de ativos de renda fixa são o certificado de depósito bancário (CDB), o recibo de depósito bancário (RDB), as debêntures, a poupança e os títulos públicos.

As ações são um exemplo clássico de ativos de renda variável. Além delas, há o dólar americano, o ouro, a prata, os fundos de investimentos imobiliários, etc.

Os ativos financeiros também podem ser classificados como monetários e não-monetários. Os monetários são a moeda em poder do público, mais os depósitos à vista nas entidades bancárias. Já os não-monetários são as notas promissórias, as letras de câmbio, as duplicatas, os certificados de depósitos bancários, os recibos de depósitos bancários, as ações e os cheques, além de outros.

Pode-se perceber, com os exemplos acima, que existem uma grande variedade de ativos financeiros, os quais apresentam níveis diferentes de risco e retorno, disponíveis para o investidor. Os ativos financeiros são considerados investimentos, uma vez que, no entendimento de Xavier (2009), qualquer instrumento ou meio financeiro capaz de gerar retorno ao longo do tempo é um investimento, seja uma conta de poupança, fundo, aplicação em ações ou, até mesmo, um plano de aposentadoria.

2.3.3.1 Certificado de depósito bancário (CDB) e recibo de depósito bancário (RDB)

Os certificados de depósito bancário (CDB) e os recibos de depósito bancário (RDB) são títulos de renda fixa emitidos pelo governo (público) ou por empresa privada (particular) com direito ao recebimento de juros (Luquet, 2007). A renda desses investimentos pode ser classificada em renda fixa pré-fixada, quando a taxa de remuneração é definida no momento da aplicação, e pós-fixada, quando apenas a forma do cálculo da taxa de remuneração é determinada no momento da aplicação, mas a remuneração poderá ser maior ou menor dependendo ao desempenho do índice utilizado como referencia para a base de cálculo.

A diferença básica entre esses dois títulos é que o CDB pode ser transferido por endosso o que lhe permite ser negociado no mercado secundário (mercado financeiro no qual os títulos podem ser revendidos); o RDB é intransferível. Outra diferença é apresentada por Faria (2003) entre CDB e RDB: “A diferença entre eles é que o CDB pode ser negociado antes de seu vencimento, e o RDB, não. O titular tem de permanecer com o RDB até o resgate.” (Faria, 2003, p. 195).

2.3.3.2 Caderneta de poupança

A caderneta de poupança é um dos investimentos mais tradicionais do mercado financeiro. O investidor irá acumular juros e correção monetária (baseada na Taxa Referencial – TR) com liquidez a cada trinta dias se aplicar, um valor em dinheiro, em uma conta bancária do tipo poupança. Caracteriza-se por ser uma alternativa de investimento bastante conservadora e de baixa remuneração, apresentando como vantagens: a isenção de Imposto de Renda (IR) para o investidor e alta liquidez do investimento (Assaf Neto, 2008).

O Governo Federal, através do Fundo Garantidor de Crédito (FGC), garante o investimento em poupança até o valor de R$ 70.000,00 por Cadastro de Pessoas Físicas (CPF). Os recursos oriundos desse investimento são destinados ao financiamento da construção e da compra de imóveis, de acordo com a Medida Provisória 567 de 2012.

2.3.3.3 Debêntures

As debêntures são títulos emitidos por uma sociedade anônima (S.A.), previamente autorizadas pela Comissão de Valores Mobiliários (CVM), cujo objetivo é captar recursos de médio e de longo prazos que serão destinados ao financiamento de projetos de investimento ou alongamento do perfil do passivo de empresas. São caracterizadas como um título de valor mobiliário, com remuneração baseada em taxas de renda fixa (Pinheiro, 2008).

2.3.3.4 Ativos públicos de renda fixa

Assim como uma empresa, o governo federal paga uma remuneração para usar o dinheiro do investidor. Os ativos públicos de renda fixa são considerados um dos investimentos de menor risco do mercado financeiro, uma vez que a União é um ótimo credor.

Como o governo emite vários ativos financeiros, serão apresentados os principais deles, com base em Assaf Neto (2008):

- **Letras do Tesouro Nacional (LTN):** São títulos prefixados negociados, cujos valores são múltiplos de R$ 1.000,00, com deságio sobre o valor nominal. São utilizadas para cobrir déficit orçamentário do governo e provimento de créditos por meio da antecipação de receitas.
- **Letras Financeiras do Tesouro (LFT):** Servem para a assunção, pela União, das dívidas de responsabilidade dos Estados e do Distrito Federal. Seus rendimentos são definidos pela média da taxa Selic.
- **Notas do Tesouro Nacional (NTN):** Têm como objetivo básico alongar o prazo de financiamento da dívida do Tesouro. Oferecem rendimentos pós-fixados e atrelados a um indexador de preços da economia. Os juros são pagos periodicamente. Existem várias séries da NTN, as quais são mostradas no Quadro 2.1.

Os governos estaduais e municipais também podem emitir títulos públicos.

Quadro 2.1 – Séries de NTN com seus respectivos indexadores

Série da NTN	Indexador de preços da economia
NTN-B	IPCA
NTN-C	IGP-M
NTN-D	Taxa de câmbio (variação do dólar)
NTN-H	Taxa referencial (TR)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

2.3.3.5 Ações

As ações são emitidas pelas Sociedades Anônimas (S.A.) de acordo com aprovação prévia da Comissão de Valores Mobiliários, a qual é a responsável por disciplinar a emissão e a fiscalização de negociações de ações. As ações representam frações do capital social das empresas e são definidas caracteristicamente como ativos de risco (Assaf Neto, 2009). No Brasil, a negociação de compra e venda de ações é realizada na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros (BM&FBOVESPA). A BM&FBOVESPA é uma associação civil sem fins lucrativos, com autonomia administrativa, financeira e patrimonial (Nervis & Crepaldi, 2012).

As ações são classificadas, principalmente, em ordinárias e preferenciais. As primeiras conferem a seu titular o direito de voto nas decisões da empresa. As ações preferenciais não permitem o direito de voto, no entanto, garante a seu titular a prioridade no recebimento de dividendos e no reembolso do capital no caso de dissolução da empresa (Cavalcante, 2005).

Duas características interessantes das ações ordinárias para o investidor são os seus direitos residuais e as suas características de responsabilidade limitada. Em caso de liquidação dos ativos da empresa, os acionistas com ações ordinárias são os últimos a receberem os seus direitos, após o pagamento de funcionários, credores, governo, etc., ou seja, direitos residuais. Quanto à responsabilidade desses acionistas, ela é limitada, significando que o máximo que eles podem perder em caso de fracasso da empresa é o que investiram originalmente.

2.3.3.6 Dólar americano

O dólar americano é uma das moedas estrangeiras mais populares do mundo e é considerado como uma alternativa de preservação de valor em momentos de incerteza econômica do país. O investimento nessa moeda é considerado de renda variável. Quando os indicadores mostram que haverá escassez na entrada de dólares no país ou aumento da saída de dólares, a perspectiva é que a moeda se valorize. Se ocorrer o contrário, isto é, um aumento da oferta da moeda no país, a taxa de câmbio será pressionada para baixo, ocorrendo, então, uma desvalorização da moeda (Luquet, 2007).

O dólar só pode ser adquirido sob algumas restrições. O mercado paralelo pode ser uma alternativa para o investidor, mas, cabe salientar, que este mercado é ilegal. Para quem se interessar por esse ativo financeiro, outro meio é investir em fundos e contratos baseados na moeda americana, como os contratos derivativos negociados nos mercados futuros e de opções.

2.3.3.7 Ouro

Um dos metais mais desejados do mundo, o ouro, é uma forma de poupança e investimento. Atualmente, tanto a BM&FBOVESPA quanto o Banco do Brasil, além de algumas empresas, negociam esse metal precioso. A compra do metal acontece, geralmente, em lotes de 0,225g, 10g ou 250g de ouro com pureza de 0,999. O valor desse ativo é influenciado pelo cenário macroeconômico, cotação externa do metal e do dólar. Ele é comercializado em forma de títulos ou fisicamente (Assaf Neto, 2008).

O ouro é considerado um investimento de risco, assim como as ações, uma vez que suas cotações variam pela lei básica da oferta e da procura, bem como de fatores exógenos ao mercado financeiro (Fortuna, 2008).

2.3.3.8 Fundos de investimento

A Comissão de Valores Mobiliários na instrução 409, de 18 de agosto de 2004, em seu artigo 2º, define os fundos de investimentos como sendo "[...] uma comunhão de recursos, constituída sob a forma de condomínio, destinado à aplicação em títulos e valores mobiliários, bem como em quaisquer outros ativos disponíveis no mercado financeiro e de capitais".

Os fundos de investimento representam a reunião de recursos de poupança destinados à aplicação em carteira diversificada de títulos e/ou valores mobiliários (Fortuna, 2008).

Os fundos são constituídos pelas suas unidades gestoras obedecendo alguns requisitos legais impostos pelas autoridades financeiras, como por exemplo, o volume mínimo e máximo de ativos que comporão cada fundo, e outros requisitos de origem mais interna: políticas de risco, rentabilidade e liquidez. É através desses requisitos que o fundo de investimento é classificado como conservador, moderado ou agressivo.

Esse tipo de investimento pode ser composto por títulos de renda fixa e/ou variável. Rocha (2003) explica que:

> Os fundos de investimento de renda fixa concentram operações em títulos que pagam juros, sejam prefixados ou pós-fixados.
> Os fundos de investimento de renda fixa prefixados aplicam em papéis com taxas de juros previamente definidas e, assim, apresentam um valor de resgate previamente determinado na data de aplicação.

> Os fundos de investimento de renda pós-fixados acompanham as flutuações das taxas de juros. O rendimento apena é conhecido no momento do resgate, uma vez que é dado pela variação de um certo índice mais uma taxa de juros determinada inicialmente (Rocha, 2003, p. 77-78).

Os fundos de investimento de renda variável apresentam maior volatilidade, visto que há a possibilidade de valorização ou desvalorização com mais frequência e intensidade. Além do mais, possuem maior risco que os fundos de investimento de renda fixa típicos e, ao contrário desses, tendem a proporcionar maior retorno para o investidor no longo prazo (Rocha, 2003).

2.3.3.9 Fundos de investimentos imobiliários

Os fundos de investimento imobiliário (FII) são identificados como instrumentos de investimento coletivo, cujos recursos são captados no mercado e direcionados a aplicação em empreendimentos imobiliários, tais como imóveis comerciais, residenciais, rurais ou urbanos, construídos ou em construção, para posterior alienação, locação ou arrendamento (Assaf Neto, 2008).

O FII permite a participação de pequenos investidores, uma vez que há uma pulverização de captação de recursos. É considerado um investimento de renda variável.

Percebe-se que, a partir dessa breve descrição dos principais ativos financeiros, existem vários tipos deles e que cada um apresenta suas peculiaridades, as quais afetam diretamente o binômio retorno e risco dos investimentos. Lemgruber (2001) traz uma definição para esses termos:

> Retorno pode ser entendido como a apreciação de capital ao final do horizonte de investimento. Infelizmente, existem incertezas associadas ao retorno que efetivamente serão obtidas ao final do período de investimento. Qualquer medida numérica dessa incerteza pode ser chamada de risco. (Lemgruber, 2001, p. 103).

Groppelli & Nikbakht (2005) também definem risco e retorno, afirmando que "risco e retorno são a base sobre a qual se tomam decisões racionais e inteligentes sobre investimentos. De modo geral, risco é uma medida da volatilidade ou incerteza dos retornos, e retornos são receitas esperadas ou fluxos de caixa previsto de qualquer investimento" (Groppelli & Nikbakht, 2005, p. 73). Sendo volatilidade a dispersão, para cima ou para baixo, da rentabilidade diária em relação à média da rentabilidade em determinado período. (Fortuna, 2008). A volatilidade pode ser medida, segundo Chew (1999), em termos de desvio-padrão dos retornos dos ativos.

O risco e o retorno são inerentes às aplicações no mercado financeiro. O melhor retorno é a meta do investidor, ao menor risco possível. Não existe investimento sem riscos, daí a importância de conhecê-los para, ao menos, buscar minimizá-los.

2.3.4 Os Riscos nas Aplicações Financeiras

São muitos os riscos quando se trata de aplicações financeiras. Cada um com suas peculiaridades. A seguir serão descritos os principais riscos das aplicações financeiras.

2.3.4.1 Risco de mercado

O risco de mercado, também conhecido como Risco Sistemático ou não diversificável, é aquele que está fora do controle do investidor, uma vez que esse risco está associado ao mercado financeiro de forma global. Ele é influenciado, por exemplo, por variações na taxa de juros, preço das ações, liquidez ou taxa de câmbio, comportamento da inflação, balança comercial, etc. Dito de outra forma, o risco de mercado "[...] exprime quanto pode ser ganho ou perdido quando da aplicação em contratos e outros ativos diante de mudanças em seus preços de negociação." (Assaf Neto, 2008, p. 114).

Esse risco está presente em todas as aplicações financeiras, sejam de pessoa física ou pessoa jurídica, de curto ou longo prazo, de renda fixa ou variável, visto que elas estão inseridas em um ambiente macro, o qual não pode ser controlado pelo investidor.

2.3.4.2 Risco operacional

O risco operacional advém de possíveis perdas resultadas de sistemas e/ou controles inadequados, falhas de gerenciamento e erros humanos (Lemgruber, 2001; Assaf Neto, 2008). Lemgruber (2001) destaca que esse risco é composto por três categorias:

- Risco organizacional: relacionado com uma organização ineficiente e/ou ineficaz, a qual apresenta objetivos de longo prazo não bem estabelecidos, fluxo de informações deficientes, responsabilidades mal definidas, etc.
- Risco de operações: associado a falhas de sistemas, de processamento e de armazenamento de dados.
- Risco de pessoal: está relacionado a problemas com a mão-de-obra da organização, tais como: desmotivação, desqualificação, alto absenteísmo, alta rotatividade, etc.

Uma organização que apresenta um alto risco operacional expõe os seus investidores a possíveis perdas dos valores aplicados e dos rendimentos sobre os ativos adquiridos.

Esse risco está presente, principalmente, nas ações. Como diz Anhaia (2006), "O preço das ações mais do que o de outros ativos depende dos resultados futuros da empresa da qual integram o capital social." (Anhaia, 2006, p. 80).

2.3.4.3 Risco de crédito

O risco de crédito está diretamente associado à saúde financeira do emissor do título. Esse risco é também conhecido como risco de inadimplência, o qual está presente em toda operação praticada no mercado financeiro e envolve a possibilidade do não retorno dos capitais envolvidos em empréstimos, financiamentos e valores aplicados em títulos de renda fixa (Anhaia, 2006).

O risco de crédito pode ser minimizado caso haja garantias para cobertura dos valores nos títulos aplicados. Esse risco minimizado, menor será a taxa de retorno exigida pelos investidores.

Existem empresas especializadas nesse tipo de risco que avaliam o quanto ele está presente em outras organizações, atribuindo-lhe uma classificação (chamada de *rating*) de acordo com a possibilidade de essas arcarem ou não com os seus compromissos financeiros, isto é, que diz sobre a capacidade de determinada empresa saldar seus compromissos financeiros. As empresas especializadas mais famosas são a Standard & Poors's Bond Guide, Moody's Bond Guide e Fitch Ratings.

A classificação, na sua grande maioria, varia de AAA ou aaa, dependendo da empresa especializada, até D. Sendo a primeira a maior classificação possível e, D, a menor. No caso da classificação da Moody's, Aaa é a maior atribuição e, C, a menor. No entanto, o significado dessas atribuições é idêntico, como pode ser visto na Figura 2.8:

Moody's	Fitch Ratings	Standard & Poor's	Significado
Aaa	AAA	AAA	Mais alta qualidade
Aa	AA	AA	Alta qualidade
A	A	A	Qualidade média(alta
Baa	BBB	BBB	Qualidade média
Ba	BB	BB	Predominantemente especulativo
B	B	B	Especulativo, baixa classificação
Caa	CCC	CCC	Inadimplemento próximo
C	C	C	Mais baixa qualidade, sem interesse
	DDD	DDD	Inadimplente, em atraso, questionável.
	DD	DD	Inadimplente, em atraso, questionável.
	D	D	Inadimplente, em atraso, questionável.

Figura 2.8 – Classificação de ratings, segundo as maiores agências
Fonte: Entenda (2009).

Esse risco apresenta-se em maior destaque nos seguintes ativos financeiros: CDB, RDB, títulos públicos e fundos de investimento.

2.3.4.4 Risco legal

O risco legal está relacionado ao não atendimento à legislação e às normas que são impostas às entidades, geralmente pelas autoridades financeiras. Existe também "Quando um contrato não pode ser legalmente amparado." (Lemgruber, 2001, p. 106). O risco legal está presente, principalmente, nos fundos de investimento e nos fundos de investimentos imobiliários, quando os seus gestores não seguem a legislação e/ou normas, como, por exemplo, a instrução 305 de 1999 da Comissão de Valores Mobiliários – CVM, que dispõe sobre as demonstrações contábeis dos fundos de investimento em títulos e valores mobiliários.

2.3.4.5 Risco de liquidez

O risco de liquidez está interligado com a ausência ou baixa procura de investidores por determinado ativo financeiro. Além disso, pode estar associado também à incapacidade de uma entidade resgatar suas obrigações nos prazos pré-determinados (Anhaia, 2006). Assaf Neto (2008) ainda acrescenta que "O risco de liquidez está relacionado com a disponibilidade imediata de caixa diante de demandas por parte dos depositantes e aplicadores (titulares de passivos) de uma instituição financeira." (Assaf Neto, 2008, p. 117).

O CDB, o RDB e as debêntures, por possuírem, geralmente, uma data específica para resgate, podem apresentar esse tipo de risco. Os fundos de investimentos imobiliários, por não serem tão conhecidos no mercado nacional, podem também demonstrar baixa liquidez (Assaf Neto, 2008).

De maneira geral, o mercado financeiro é um mercado que apresenta uma boa liquidez. Contudo em situações anormais, ainda que bem raras, pode se mostrar ilíquido.

2.3.4.6 Risco de concentração de emissor ou setor

O risco de concentração de emissor ou setor está fortemente relacionado ao portfólio de ativos e aos fundos de investimento. Esse risco expõe o investidor a todos os riscos a que estão sujeitos os emissores ou setor de concentração da carteira. Para diminuir esse tipo de risco, a diversificação tanto de ativos como de emissores e/ou setores se faz muito relevante. Markowitz (1952) propôs, no clássico artigo *Portfolio Selection*, um modelo formal que levou em consideração o princípio da diversificação.

Nesse modelo, propõe-se a formação de uma carteira de ativos com a mais baixa correlação possível entre eles, de forma que as perdas proporcionadas por alguns ativos possam ser amenizadas ou, até mesmo, superadas pelos ganhos gerados com os demais ativos financeiros.

2.3.5 Seleção de Portfólio de Investimentos

Markowitz (1952) é considerado o pai da Moderna Teoria dos Portfólios e, o seu trabalho, o marco na seleção de carteira de investimentos.

Ele observou que o risco de um ativo individualmente não é tão relevante para uma análise de investimento, mas se adicionar vários ativos (compondo uma carteira de investimento) o risco e o retorno esperado, atuando de forma conjunta, podem se mostrar mais eficientes que um investimento isolado. Elton (2004) defende que "os investidores não devem aplicar, e na verdade não aplicam, em um único ativo; eles investem em grupo ou carteiras de ativos." (Elton, 2004, p. 59).

Como visto anteriormente, são muitos os tipos de investimentos financeiros, os quais oferecem diferentes riscos e retorno esperado para o investidor. Nos tempos atuais, a quantidade de ativos financeiros oferecidos tanto por empresas como pelo governo é imensa, como afirma Bodie (2000): "Hoje, os investidores têm acesso a um rol muito maior de ativos e podem prever estratégias complexas de carteira que incluam ações e obrigações estrangeiras, imóveis, metais preciosos e colecionáveis" (Bodie, 2000, p. 157).

Dada a grande quantidade de ativos financeiros existentes, construir uma carteira de investimento eficiente, aplicando os conceitos de risco e retorno, não é uma tarefa tão simples, uma vez que há a necessidade de alguns dados sobre os investimentos financeiros, tais como: retorno esperado, desvio-padrão e correlação. Geralmente esses dados são obtidos de uma base histórica e/ou de especialista.

O retorno, $\bar{R}_i$, é quantificado, geralmente, através da média simples da rentabilidade do ativo *i* (para determinado período), isto é, pela esperança dos retornos passados, através da fórmula a seguir:

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}. \tag{44}$$

O número de observações e o retorno no instante *t* são representados, respectivamente, por n e R_t.

O desvio-padrão é a estatística mais frequentemente usada em Finanças para quantificar e medir a volatilidade dos investimentos (Bodie, 2000), sendo usada, portanto, como uma medida de risco (Gitman, 2010). Quanto maior o valor dessa estatística mais arriscado será considerado o investimento e, provavelmente, maior será o retorno médio, pois, segundo, Xavier (2009) a relação de risco e retorno é diretamente proporcional. A seguir é mostrada a fórmula de risco de um ativo *i*:

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \bar{R}_i)^2}{n-1}}. \tag{45}$$

A correlação (ρ) é uma medida estatística entre séries de números que representam algum tipo de dados. Dito de outra forma, a correlação visa explicar o grau de relacionamento entre duas ou mais variáveis. Quando as séries movimentam-se na mesma direção, denomina-se correlação positiva. A correlação negativa ocorre quando as séries movimentam-se em direções opostas.

> A medida do grau de correlação entre duas séries, o qual varia entre -1 para correlação negativa perfeita e +1 para correlação positiva perfeita, é chamada de coeficiente de correlação. Considerando essa correlação como sensibilidade de variação do risco dos títulos, tem-se que quanto mais os títulos forem negativamente correlacionados melhor será o nível de redução do risco. (Gitman, 2010, p. 215).

A ideia de Markowitz é construir carteira com ativos de correlação negativa; dessa forma, à medida que um ativo gera perda para a carteira, outro gerará ganhos. No entanto, mesmo a correlação sendo positiva, desde que os ativos não sejam perfeitamente correlacionados, o desvio-padrão da carteira será menor do que a média ponderada dos desvios-padrão dos ativos individualmente, tendo, relevância o estudo da carteira de investimento (Bodie, 2000; Elton, 2004).

Maiores detalhes sobre essas estatísticas podem ser encontrados em Doane & Seward (2008).

Da posse do retorno e risco dos ativos individuais e da correlação entre eles, é possível obter os valores para a carteira (portfólio) de investimentos como um todo. O retorno de uma carteira, $\bar{R}_P$, é simplesmente a média ponderada dos retornos dos ativos individuais, sendo o peso aplicado a cada retorno correspondente à fração do valor da carteira aplicada naquele ativo *i* (X_i):

$$\bar{R}_P = \sum_{i=1}^{j}(X_i\bar{R}_i), \tag{46}$$

onde *j* é o número de ativos na carteira. O desvio-padrão da carteira é calculado da seguinte maneira:

$$\sigma_P = \left[\sum_{i=1}^{j} X_i^2 \hat{\sigma}_i^2 + \sum_{i=1}^{j} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j} X_i X_j \, \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \rho_{ij} \right]^{1/2}, \tag{47}$$

onde ρ_{ij}é o coeficiente de correlação entre o retorno dos ativos i e j.

Para obter o percentual que deverá ser aplicado em cada ativo (X_i), de forma bem simplificada, resolve-se um problema matemático de programação linear, no qual as variáveis de escolha são os percentuais dos ativos e o objetivo é minimizar o risco:

$$Min\ \sigma_P \tag{48}$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{j} X_i = 1, X_i \geq 0. \tag{49}$$

No próximo capítulo, o primeiro modelo de decisão, utilizando-se deste arcabouço teórico, é proposto e aplicado.

3 PROPOSIÇÃO E APLICAÇÃO DE UM MODELO DE DECISÃO FINANCEIRA SOB RISCO FUZZY

Neste capítulo, será proposto e aplicado um modelo utilizando a Teoria da Decisão, visto que ela fornece uma "estrutura e metodologia para a tomada de decisão racional quando os resultados são incertos" (Hillier & Lieberman, 2010, p. 662), juntamente com a escolha do melhor ativo ou portfólio financeiro em um ambiente de risco. Além disso, para abstrair melhor a realidade, a qual pode apresentar imprecisão quanto a parâmetros, variáveis e/ou resultados, far-se-á uso da lógica *fuzzy*.

Não se intenciona aqui, com esse modelo, exaurir todas as possibilidades possíveis de combinações dos elementos que se relacionam no problema de decisão em investimentos financeiros, visto que, como a própria definição de modelo diz: "um modelo é uma representação externa e explícita de parte da realidade [...]" (Pidd, 1998, p. 25), isto é, uma simplificação da realidade. O que se intenciona é mostrar "parte da realidade" que envolve a escolha de ativos ou portfólios financeiros sob um olhar quantitativo e lógico por meio de um modelo matemático possível de ser aplicado, como será demonstrado mais adiante.

3.1 MODELO

O modelo proposto assume que o decisor é um especulador financeiro (busca retorno no curto prazo) e que apresenta neutralidade quanto ao risco. Ele tem as opções de investir nos seguintes ativos financeiros: dólar americano, ouro e ações, além de portfólios compostos por esses ativos, os quais foram escolhidos por apresentarem riscos elevados e um alto grau de incerteza quanto aos seus retornos. Quanto às ações, não se trata aqui alguma específica, mas sim, a média da rentabilidade das principais ações negociadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros (BM&FBOVESPA), através do índice IBOVESPA, o qual indica o desempenho médio das cotações no mercado de ações brasileiro (Mellagi Filho & Ishikawa, 2008).

Os dados necessários para a aplicação do modelo foram coletados no início do mês de junho do ano corrente, nos sites do Banco Central do Brasil – BACEN (www.bcb.gov.br) e da Bolsa de Valores Brasileira (www.bmfbovespa.com.br). Foram coletados os seguintes dados: taxa Selic mensal (% a.m.), as cotações mensais do dólar americano (venda) e do ouro e o índice IBOVESPA mensal, além das variações mensais dessas cotações, do período de janeiro de 1995 a maio deste ano. Esse intervalo de tempo foi escolhido pelo fato de o Brasil apresentar uma única moeda, o real, e por trazer uma grande quantidade de dados (ao todo

233), o que permite melhores inferências dos resultados. Os meses iniciais do Plano Real (de julho a dezembro de 1994) foram excluídos da base de dados por demonstrarem alta variabilidade, devido à mudança e adaptação da moeda. Na Tabela 3.1 são introduzidas algumas estatísticas descritivas desses dados.

Tabela 3.1 – Estatística descritiva dos dados

Variáveis	Média	Mínimo	Máximo	Desvio-padrão	Variância
Taxa Selic mensal (% a. m.)	1,4103	0,4900	4,2600	0,7196	0,5178
Cotação mensal do dólar americano	1,9562	0,8408	3,8059	0,6379	0,4069
Variação mensal do dólar americano	0,4983	-10,6864	27,4190	4,2733	18,2613
Cotação mensal das ações (IBOVESPA)	36.644	6.472	88.287	21.566	$4{,}65.10^{8}$
Variação mensal das ações (IBOVESPA)	1,0691	-89,7561	28,0240	10,6627	113,6930
Cotação mensal do ouro	43,5167	10,1700	117,0000	30,2412	914,5302
Variação mensal do ouro	1,1608	-16,4000	70,0000	7,3678	54,2839

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Os coeficientes de correlação (ρ) entre as variações mensais dos ativos são mostrados na Tabela 3.2. Neste caso, foi utilizado o teste paramétrico de correlação de Pearson, devido à suposição de que os ativos financeiros tratados neste trabalho seguem uma distribuição normal, uma vez que para longos períodos de dados, a maioria dos ativos existentes no mercado financeiro possui retornos razoavelmente simétricos (Elton, 2004; Assaf Neto, 2008; Câmara, 2014).

Tabela 3.2 – Relação entre os ativos

Coeficiente de correlação (ρ)			
Ativos	Dólar americano	Ações (IBOVESPA)	Ouro
Dólar americano	1,0000	-0,1619	0,4170
Ações (IBOVESPA)	-	1,0000	-0,0151
Ouro	-	-	1,0000

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Dos três ativos em estudo, percebe-se que o ouro é o que apresenta o maior retorno médio mensal no período em questão, seguido pelas ações (IBOVESPA) e depois pelo dólar americano. Esse último é o que traz o menor risco, representado pelo desvio-padrão.

A seguir, eles serão apresentados juntamente como os elementos da Teoria da Decisão sob risco, para que, no fim, possa se conhecer, através de uma abordagem *fuzzy*, qual ação deve ser adotada, isto é, em que investir.

3.1.1 Estados da Natureza

O conjunto dos estados da natureza é composto por todas as possíveis representações das configurações de fatores externos ao decisor e que estão fora do seu controle. A natureza escolhe o seu estado independentemente da vontade daquele. A taxa Selic (taxa básica de juros utilizada como referência pela política monetária, a qual é equivalente à taxa referencial do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia, SELIC) mensalizada será utilizada para representar os estados da natureza, os quais serão três:

Θ = Taxa Selic (% a.m.) = $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2\}$, onde:

$$\begin{cases} \theta_0 \rightarrow 0{,}00 \ \leq \ taxa\,Selic \ < 0{,}98 \\ \theta_1 \rightarrow 0{,}98 \ \leq \ taxa\,Selic \ < 1{,}51 \\ \theta_2 \rightarrow 1{,}51 \ \leq \ taxa\,Selic \ < 7{,}00. \end{cases}$$

Os intervalos da taxa Selic foram escolhidos dessa forma para permitir uma probabilidade praticamente equitativa entre os estados da natureza, segundo o critério de Laplace (Hillier & Lieberman, 2010), como pode ser visto a seguir:

Tabela 3.3 – Conhecimento advindo dos dados

Conhecimento *a priori*	
$\pi(\theta_0)$	32,62%
$\pi(\theta_1)$	34,33%
$\pi(\theta_2)$	33,05%

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

A taxa Selic é um índice que está fora do controle do decisor, no caso, do investidor, pois é fixada pelo Banco Central, através de reuniões periódicas do Comitê de Política Monetária (COPOM), e que apresenta uma correlação significativa com os ativos tratados aqui, mais precisamente com o ouro (Tabela 3.4), o qual apresenta uma correlação negativa forte, isto é, $r_s = -0{,}8945$. Foi utilizado o teste de correlação de postos de Spearman, teste não paramétrico, pelo fato de a taxa Selic não ter se comportado similarmente a uma distribuição normal. Além disso, quando não se pode assumir normalidade dos dados, como nesse caso da taxa Selic, os testes não paramétricos são mais indicados por serem, geralmente, mais poderosos que os testes paramétricos (Doane & Seward, 2008).

Tabela 3.4 - Teste de Correlação de Postos de Spearman (α = 0,05)

Ativos Financeiros	N – Válido	r_s	t(N-2)	*p-valor*
Ouro	233	-0,8945	-30,4140	0,0000
Ações (IBOVESPA)	233	-0,6215	-12,0564	0,0000
Dólar americano	233	-0,2357	-3,6865	0,0003

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

O *p-valor* foi altamente significativo para cada ativo financeiro, rejeitando, então, a hipótese nula (de não correlação entre os ativos e a taxa Selic) para todos os ativos em questão, tanto para um nível de confiança de 95% (α = 0,05) quanto para 99% de confiança (α = 0,01), uma vez que os *p*-valores ficaram muito abaixo de 0,01.

A relação da taxa básica de juros brasileira com esses ativos também já foi comprovada na literatura. Santos & Prado (2006), revisando o trabalho de Grôppo (2005), comprovam que existe uma relação importante entre a taxa Selic e o preço das ações negociadas na bolsa de valores do Brasil (BM&FBOVESPA), afirmando que “as taxas de juros de longo prazo praticadas no mercado financeiro brasileiro possuem efeito significativo sobre os preços das ações do Ibovespa, sendo que um aumento das taxas de juros causa uma redução do Ibovespa” (Santos & Prado, 2006, p. 137).

Fabiano (2009) traz demonstrações estatísticas com vários períodos de tempo da existência, também significativa, da relação da Selic com aqueles ativos, principalmente com o IBOVESPA e com o dólar americano.

3.1.2 Conjunto de Ações

O conjunto de ações ($\mathcal{A}$) contém uma lista do que o indivíduo pode decidir fazer. Aqui o decisor tem o total controle sob as variáveis/ações (a), pois é ele quem vai escolher qual atitude tomar, ou seja, qual ação que vai realizar, assumindo os riscos inerentes a ela e se responsabilizando pelas futuras consequências.

As ações a serem tomadas pelo decisor neste trabalho giram em torno de em qual ativo financeiro ou em qual portfólio investir dentro do seguinte conjunto de ativos: ouro, ações (IBOVESPA) e dólar americano. Sendo assim e com o modelo média-variância proposto por Markowitz (1952, 1959) obtêm-se, por meio das Equações (48) e (49) as possíveis alternativas de investimento, com seus respectivos retornos e riscos (Tabela 3.5).

Observando a Tabela 3.5, percebe-se que as alternativas que estão em vermelho são dominadas, dado que existem outras alternativas que apresentam maiores retornos a um risco menor.

Tabela 3.5 – Possíveis alternativas de investimento

Ação	Ativos financeiros			Retorno	Risco
	Dólar americano	Ações (IBOVESPA)	Ouro		
a_0	100,00%	0,00%	0,00%	0,4983	4,2733
a_1	0,00%	100,00%	0,00%	1,0691	10,6627
a_2	0,00%	0,00%	100,00%	1,1608	7,3678
a_3	82,52%	17,48%	0,00%	0,5981	3,7122
a_4	0,00%	32,56%	67,44%	1,1309	6,0185
a_5	88,91%	0,00%	11,09%	0,5718	4,2062
a_6	76,12%	16,94%	6,94%	0,6410	3,6826

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Excluindo as alternativas dominadas, o problema de decisão será composto por a_2, a_4 e a_6:

$\mathcal{A}$ = Escolha de um ativo financeiro ou portfólio para se investir = $\{a_2, a_4, a_6\}$:

$$\begin{cases} a_2 \rightarrow Investir\ somente\ em\ ouro \\ a_4 \rightarrow Investir\ 32{,}56\%\ em\ ações\ (IBOVESPA)\ e\ 67{,}44\%\ em\ ouro \\ a_6 \rightarrow Investir\ 76{,}12\%\ em\ dólar\ americano, 16{,}94\%\ em\ ações \\ (IBOVESPA)\ e\ 6{,}94\%\ em\ ouro. \end{cases}$$

3.1.3 Matriz de Decisão

Para cada estado da natureza e ação haverá uma consequência, a qual será a variação do retorno do investimento (negativo, nulo ou positivo). Para representar essa variação, os números serão triangulares *fuzzy* e trapezoidais *fuzzy*, pois mostram a possibilidade para essas variações, com diversos graus de pertinência. Com base nos dados coletados e com a técnica mostrada no capítulo 2 (Seção 2.2.5) para obtenção de números *fuzzy*, obteve-se a matriz de decisão a seguir:

Tabela 3.6 – Matriz de decisão

a_i	Nº fuzzy	θ_0	θ_1	θ_2
a_2	Triang.	(-12,88; -4,76; 15,03)	(-13,31; 0,00; 22,50)	(-16,40; -3,51; 70,00)
	Trapez.	(-12,88; -10,09; 5,89; 15,03)	(-13,31; -6,86; 8,73; 22,50)	(-16,40; -12,89; 10,39; 70,00)
a_4	Triang.	(-8,10; 0,88; 13,04)	(-13,69; -1,34; 14,73)	(-30,39; 3,77; 53,86)
	Trapez.	(-8,10; -3,13; 4,70; 13,04)	(-13,69; -6,62; 6,57; 14,73)	(-30,39; -6,78; 11,95; 53,86)
a_6	Triang.	(-4,70; -0,73; 6,25)	(-6,12; -0,83; 11,22)	(-14,79; -1,40; 27,05)
	Trapez.	(-4,70; -2,78; 1,91; 6,25)	(-6,12; -3,87; 3,83; 11,22)	(-14,79; -6,57; 6,41; 27,05)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

A tabela 3.6 permite a visualização dos retornos *fuzzy* para cada alternativa dado determinado estado da natureza.

À luz de Rommelfanger (2003) é possível encontrar o valor esperado *fuzzy* ($\tilde{E}$) para cada alternativa com a fórmula a seguir:

$$\tilde{E}\,(a_i) = \tilde{U}_{i0} \otimes \pi(\theta_0) \oplus \dots \oplus \tilde{U}_{in} \otimes \pi(\theta_n), \tag{50}$$

onde $\tilde{U}_{in}$ é a consequência *fuzzy* caso o decisor escolha a alternativa a_i e, a natureza, o estado θ_n. Os operadores matemáticos $\otimes$ e $\oplus$ significam, nessa ordem, multiplicação e soma com números *fuzzy*. Com a fórmula anterior e com as tabelas 3.3 e 3.6, obtém-se a próxima tabela com o valor esperado *fuzzy* para as alternativas:

Tabela 3.7 – Valor esperado fuzzy das alternativas

a_i	**Número *fuzzy***	**Valor *fuzzy* esperado ($\tilde{E}$)**
a_2	Triangular	(-14,19; -2,71; 35,76)
	Trapezoidal	(-14,19; -9,90; 8,35; 35,76)
a_4	Triangular	(-17,39; 1,07; 27,11)
	Trapezoidal	(-17,39; -5,53; 7,74; 27,11)
a_6	Triangular	(-8,52; -0,99; 14,83)
	Trapezoidal	(-8,52; -4,40; 4,06; 14,83)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Para se chegar, então, à melhor ação para o decisor, supondo que o critério escolhido seja a Regra de Decisão de Bayes, basta ranquear as alternativas em ordem decrescente do valor *fuzzy* esperado ($\tilde{E}$).

Na Tabela 3.8 é apresentado o ranqueamento das alternativas, de acordo com o método de Adamo (Equação 39) e o do Centro de Máxima (Equação 40) e com o número *fuzzy* escolhido para representar a distribuição de possibilidade da rentabilidade das alternativas. Cabe salientar que o nível α escolhido foi de 0,5, assim como Brunelli & Mezei (2013) fizeram no seu trabalho.

Pelo método de Adamo, a melhor alternativa é a_2 (investir somente em ouro) tanto com números triangulares *fuzzy* quanto com trapezoidais *fuzzy*, pois traz um maior valor *fuzzy* esperado. Fazendo uma análise de sensibilidade, percebe-se que se o valor do α-*cut* utilizado for maior ou igual a 0,7, então a melhor alternativa deixa de ser a_2 e passa a ser a_4, isto é, investir 32,56% em ações (IBOVESPA) e 67,44% em ouro, para números triangulares *fuzzy* (Figura 3.1). Isso se justifica pelo fato de essas alternativas apresentarem valores próximos.

No caso dos números trapezoidais *fuzzy*, essa inversão de posição das alternativas não foi verificada quando alterou-se o nível α (α-*cut*) (Figura 3.2).

Pelo método de Centro de Máxima, tanto com números triangulares *fuzzy* como com os trapezoidais, a melhor alternativa é a_4.

Tabela 3.8 – Ranqueamento das alternativas

Método	Índice	Número *fuzzy*	Alternativas	Valor	Ordem
Adamo	$AD_{0,5}(A)$	Triangular	a_2	16,52	1ª
			a_4	14,09	2ª
			a_6	6,92	3ª
		Trapezoidal	a_2	22,06	1ª
			a_4	17,42	2ª
			a_6	9,44	3ª
Centro de Máxima	$CoM\ (A)$	Triangular	a_2	-2,71	3ª
			a_4	1,07	1ª
			a_6	-0,99	2ª
		Trapezoidal	a_2	-0,78	3ª
			a_4	1,10	1ª
			a_6	-0,17	2ª

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

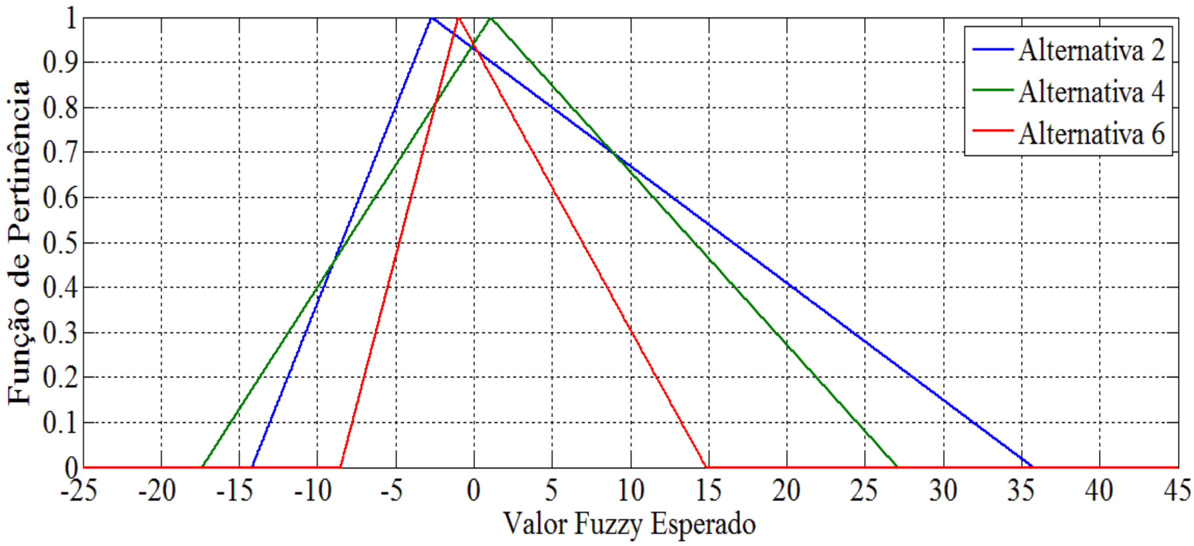

Figura 3.1 – Valor fuzzy esperado triangular
Fonte: Esta pesquisa, 2014.

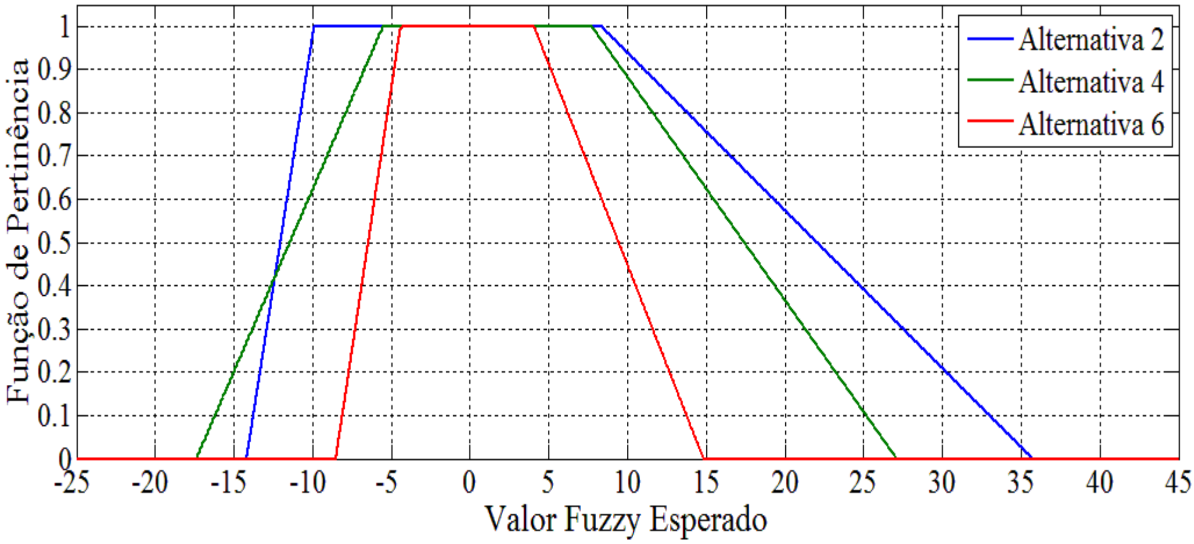

Figura 3.2 – Valor fuzzy esperado trapezoidal
Fonte: Esta pesquisa, 2014.

A Figura 3.3 traz o ranqueamento das alternativas com os métodos: Média (Equações 41 e 42), para os números triangulares e trapezoidais *fuzzy*, e Beta (Equação 43). O primeiro método traz a alternativa a_2 como a primeira opção de investimento, devido ao seu maior valor *fuzzy* esperado, seguida por a_4 e depois a_6, assim como o fez o método de Adamo (1980) com grau de pertinência de 0,5. Já o método Beta mostra a alternativa a_4 à frente das demais, mostrando uma maior similaridade com o método Centro de Máxima.

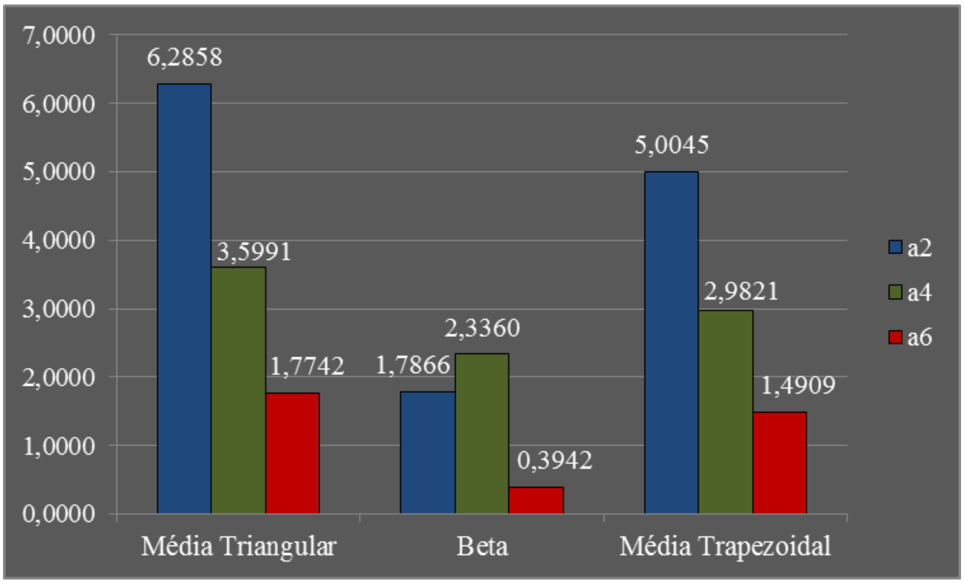

Figura 3.3 – Ranqueamento das alternativas por outros métodos
Fonte: Esta pesquisa, 2014.

No capítulo a seguir, dois outros modelos de decisão sobre investimentos financeiros são propostos e aplicados, agora sob incerteza.

4 TOMADA DE DECISÃO FINANCEIRA EM UM AMBIENTE DE INCERTEZA

Neste capítulo são propostos e aplicados mais dois modelos de decisão sobre investimentos financeiros: um utilizando a lógica tradicional dos conjuntos (lógica *crisp*) e, o outro, a lógica *fuzzy*. Ambos são tratados em um ambiente de incerteza, pois como afirma Assaf Neto (2008),

> Na prática, as decisões financeiras não são tomadas em ambiente de total certeza com relação a seus resultados. Em verdade, por estarem essas decisões fundamentalmente voltadas para o futuro, é imprescindível que se introduza a variável incerteza como um dos mais significativos aspectos do estudo das operações do mercado financeiro. (Assaf Neto, 2008, p. 207).

O primeiro modelo introduz a função utilidade como medida para a preferência do decisor quanto às consequências, além de trazer, de certa forma, o risco sistemático no problema de decisão, através do incremento de variáveis econômicas que afetam o retorno de ativos financeiros.

O segundo modelo, além de trazer a preferência do decisor (perfil do investidor) e o risco sistemático, aborda o problema de decisão levando em conta a possibilidade de imprecisão quanto à função utilidade, introduzindo uma abordagem *fuzzy* ao problema de decisão sob incerteza.

4.1 MODELO I

Os dados necessários para a aplicação de ambos os modelos propostos neste capítulo também foram extraídos dos sites do Banco Central do Brasil e da BM&FBOVESPA. O período de tempo escolhido possui 233 meses que vai de janeiro de 1995 até maio de 2014. Além das variáveis mostradas no capítulo anterior (taxa Selic mensal e cotações mensais do dólar americano (venda) e do ouro e o índice IBOVESPA mensal), se fez necessária a introdução de mais uma: o valor do Produto Interno Bruto (PIB) brasileiro, o qual representa a soma de toda a riqueza produzida em uma determinada região ou país e é um dos indicadores mais utilizados na macroeconomia com o objetivo de mensurar a atividade econômica (Froyen, 2005).

A seguir são mostrados os componentes da Teoria de Decisão juntamente com as variáveis que comporão o modelo proposto.

4.1.1 Elementos do Modelo

No segundo capítulo, foram apresentados quatro conjuntos básicos que compõem o problema de decisão em um ambiente de incerteza, sendo eles: o dos estados da natureza, o das ações, o das consequências (*payoffs*) e o das observações.

Na sistemática da Teoria da Decisão, é necessário indicar quem é o decisor, isto é, o responsável pela tomada de decisão. No caso de investimentos financeiros, os quais podem ser realizados por pessoas físicas ou jurídicas, individualmente ou em grupo, pode existir, então, um ou mais decisores. Para fins deste capítulo, supõe-se que o decisor é um investidor especulador que possui determinada quantidade de recursos financeiros para investir, na sua totalidade, em ativos financeiros.

4.1.1.1 Os estados da natureza

A natureza pode assumir muitos estados, os quais o decisor não pode controlá-los. Ela escolhe como será a sua configuração independente da vontade daquele. Tratando-se de investimentos financeiros, diversas variáveis não estão sob o controle do investidor. Uma delas é como estará a cotação futura do investimento escolhido, pois como afirma Bodie (2000) "Qualquer investimento envolve algum grau de incerteza sobre os retornos futuros [...], e, na maioria dos casos, esta incerteza é considerável." (Bodie, 2000, p. 161). Se a cotação no dia da venda do investimento adquirido pelo investidor estiver acima do valor que ele pagou por tal investimento, haverá algum ganho financeiro para aquele. Em caso contrário, isto é, se o valor de venda estiver abaixo do valor pago pelo investidor, ele estará tendo perda financeira.

O valor da cotação de um ativo financeiro independe da vontade do investidor, na grande maioria das vezes. Sendo assim, os estados da natureza do modelo em questão serão compostos pelas cotações dos ativos financeiros que o investidor/decisor está interessado em investir.

Sendo os ativos tratados neste trabalho: dólar americano, ações (IBOVESPA) e ouro, os estados da natureza serão vetores compostos de forma binária pelas cotações desses ativos. Quando a cotação apresentada de determinado ativo ficar igual ou abaixo de sua média histórica, no intervalo de tempo estudado neste trabalho, será atribuído o valor 0 (zero). Em caso contrário, será atribuído o valor 1 (um).

Tendo uma série histórica e devido à regressão à média, quando um dado dessa série apresentar valor abaixo da média, é provável que o próximo dado apresente valores acima dessa média. Seguindo esse raciocínio, para o investidor, então, será interessante que os estados da natureza sejam compostos por cotações que se apresentem abaixo da média. Como o dólar, seguido pelo índice Bovespa, é o ativo que mais influencia os demais estudados (conforme visto na Tabela 3.2), ele será considerado mais relevante e, a sua cotação, mais significante para a composição dos estados da natureza. Dessa forma, a sequência decrescente de importância do ativo dentro do estado da natureza será: dólar americano, ações (IBOVESPA) e ouro.

Como são três os ativos financeiros e, binárias, as suas possibilidades de configurações, segundo foi estabelecido anteriormente, ter-se-á, então, oito cenários: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 e 111. Esses cenários podem ser interpretados como sendo números na base 2, como mostrado a seguir:

$$000 = 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0 = 0;$$
$$001 = 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = 1;$$
$$010 = 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 = 2;$$
$$011 = 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 = 3;$$
$$100 = 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0 = 4;$$
$$101 = 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = 5;$$
$$110 = 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 = 6;$$
$$111 = 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 = 7.$$

Essa representação, além de incorporar o número de fatores presentes, permite também a incorporação de sua sinergia. Considerando essa representação numérica na base 2, obtém-se os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, os quais serão os índices dos tetas. Com a ideia de regressão à média em mente, prefere-se os estados da natureza que apresentem mais fatores abaixo da média. Sendo assim, os menores números da sequência mostrados anteriormente são preferíveis em relação aos maiores, criando a seguinte ordem decrescente de preferência: $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$e θ_7.

4.1.1.2 As observações

As observações consistem em informações que guardam certa relação com os estados da natureza, auxiliando, através delas, a tomada de decisão.

No segundo capítulo foram introduzidos alguns conceitos relacionados ao mercado financeiro, dentre eles, o de risco de mercado. Esse risco afeta diretamente o preço dos ativos financeiros e é influenciado por variáveis macroeconômicas, tais como PIB, taxa Selic, inflação, nível de emprego, etc. Os especialistas em Economia apontam que as duas primeiras variáveis são os principais fatores que influenciam a economia geral de um país (Froyen, 2005). Sabendo disso, para compor as observações, foram escolhidas essas variáveis. Além do mais, elas guardam uma estreita relação com os estados da natureza do modelo proposto neste capítulo, como pode ser visto na Tabela 4.1. Os valores que estão em vermelho indicam que há uma relação significante entre as variáveis a um nível de significância de 0,05.

Tabela 4.1 – Correlação de Pearson entre as variáveis (α=0,05)

Variáveis	Selic	IPCA	PIB	Emprego	Dólar	IBOVESPA	Ouro
Selic	1,0000	0,4675	-0,7287	-0,6751	-0,3826	-0,4093	-0,6946
IPCA	0,4675	1,0000	-0,2310	-0,1984	0,0212	-0,0418	-0,1645
PIB	-0,7287	-0,2310	1,0000	0,9871	0,2050	0,6579	0,9725
Emprego	-0,6751	-0,1984	0,9871	1,0000	0,1024	0,7283	0,9668

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Dessa maneira, cada observação do estado da natureza levará em consideração essas duas variáveis macroeconômicas. Caso o valor do PIB fique igual ou abaixo da média do período estudado, isto é, 192.261,97 milhões de reais, será atribuído o valor 0 (zero). Em caso contrário, será o valor 1 (um). O mesmo será feito para a taxa Selic, sendo que a média dessa variável é 1,41% (a.m.). Dessa forma, as observações serão expressas como valores binários (0, 1), onde o PIB é representado pelo primeiro valor, aqui indicado por ω_1 e a taxa Selic por ω_2. Logo $x_i = (w_1, w_2)$, como mostrado a seguir:

Tabela 4.2 – As observações

Observações	ω_1	ω_2
x_0	0	0
x_1	0	1
x_2	1	0
x_3	1	1

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

4.1.1.3 As ações

É através das ações que o decisor influencia diretamente as consequências. Aqui ele assume os riscos inerentes à ação escolhida. Quando se trata de investimentos em ativos financeiros as principais ações que podem ser adotadas estão relacionadas com o "onde investir?".

O conjunto de ações deste capítulo será o mesmo do capítulo anterior, no qual foram explicados como se chegou às seguintes ações:

$\mathcal{A}$ = Escolha de um ativo financeiro ou portfólio para se investir = $\{a_2, a_4, a_6\}$:

$$\begin{cases} a_2 \rightarrow Investir\ somente\ em\ ouro \\ a_4 \rightarrow Investir\ 32{,}56\%\ em\ ações\ (IBOVESPA)\ e\ 67{,}44\%\ em\ ouro \\ a_6 \rightarrow Investir\ 76{,}12\%\ em\ dólar\ americano, 16{,}94\%\ em\ ações \\ (IBOVESPA)\ e\ 6{,}94\%\ em\ ouro. \end{cases}$$

4.1.1.4 As consequências

As consequências serão os resultados da ação α escolhida pelo decisor e do estado θ que a natureza se configurar. Sendo as ações do modelo proposto investir em um ativo específico ou em um portfólio de ativos financeiros e os estados da natureza serem compostos pelas cotações desses ativos, a consequência principal dessa junção é o retorno do investimento.

Para fins deste capítulo, as consequências refletirão, em porcentagem, o retorno mensal do investimento, seja ele um ativo único ou um portfólio. Esse retorno pode ser positivo, negativo ou nulo. O retorno será considerado nulo se variar dentro do intervalo de 0 a 0,5%, custo médio mensal de transações de investimentos financeiros, segundo o *Guia de Investimentos da BM&FBOVESPA* (2013). Então o conjunto das consequências será:

$\mathcal{P}$ = Variação ou não no retorno do investimento = $\{p_0, p_1, p_2\}$, onde:

$$\begin{cases} p_0 \rightarrow variação\ negativa\ do\ retorno \\ p_1 \rightarrow 0\% \leq retorno \leq 0{,}5\% \\ p_2 \rightarrow variação\ acima\ de\ 0{,}5\%. \end{cases}$$

O custo médio mensal de transações de investimentos financeiros é composto, geralmente, pela taxa de corretagem e/ou taxa de custódia. Ele pode variar de acordo com o tipo de investimento, com a quantidade investida e/ou com a existência de corretora durante as transações. Dessa forma, esse custo pode ser alterado dentro do modelo caso ele mude ao longo do tempo e/ou sejam acrescidos outros ativos financeiros.

4.1.2 Relacionando os Conjuntos

Após a apresentação dos conjuntos que comporão o modelo proposto, torna-se necessário mostrar como eles serão relacionados a fim de se chegar à melhor regra de decisão ou ação a ser adotada, a qual procurará minimizar o risco da decisão por parte do decisor, que no caso, é um investidor especulador. Para isso, torna-se necessária a utilização dos mecanismos probabilísticos: conhecimento *a priori*, função consequência e função de verossimilhança, além de outras funções: função utilidade, utilidade da função consequência, função perda e risco de Bayes.

4.1.2.1 Conhecimento *a priori*

O conhecimento *a priori* representa uma distribuição de probabilidade sobre a chance de ocorrer determinado estado da natureza sem que seja feito qualquer experimento, isto é, antes de observar qualquer variável que possa dar informação sobre θ (Souza, 2007). Essa distribuição pode ser calculada por séries históricas (dados passados) e/ou através da opinião de um especialista sobre o grau de crença que ele atribui ao estado da natureza.

Para o modelo aqui proposto, o conhecimento *a priori* do estado da natureza será adquirido através da frequência relativa de cada θ, como mostrado na Tabela 4.3. Para o estado da natureza θ_1 a probabilidade é nula de ocorrência, de acordo com a série histórica estudada.

Tabela 4.3 – Conhecimento através de dados

Conhecimento *a priori*	
$\pi(\theta_0)$	20,60%
$\pi(\theta_1)$	0,00%
$\pi(\theta_2)$	10,73%
$\pi(\theta_3)$	20,17%
$\pi(\theta_4)$	27,04%
$\pi(\theta_5)$	1,29%
$\pi(\theta_6)$	2,58%
$\pi(\theta_7)$	17,60%

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

4.1.2.2 Função consequência

Para relacionar as consequências com os estados da natureza e com as ações, isto é, para se conhecer qual a probabilidade de ocorrer determinada consequência p dado que o decisor escolheu a ação a e a natureza optou pelo estado θ, tem-se a função consequência: $P(p|\theta, a)$.

As informações necessárias para utilizar essa função foram obtidas através de uma base de dados históricos, como já mencionado anteriormente.

Como são três as ações (a_2, a_4, a_6), a natureza pode assumir oito estados e são três as possíveis consequências, há então 72 possíveis combinações entres esses três elementos, as quais são mostradas na Tabela 4.4. Nessa tabela encontram-se também as probabilidades de ocorrência de cada combinação.

Tabela 4.4 – Função consequência $P(p|\theta, a)$

$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{a})$	$\boldsymbol{p_0}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$
(θ_0, a_2)	50,00%	6,25%	43,75%
(θ_0, a_4)	41,67%	2,08%	56,25%
(θ_0, a_6)	33,33%	8,33%	58,33%
(θ_1, a_2)	0,00%	0,00%	0,00%
(θ_1, a_4)	0,00%	0,00%	0,00%
(θ_1, a_6)	0,00%	0,00%	0,00%
(θ_2, a_2)	52,00%	8,00%	40,00%
(θ_2, a_4)	32,00%	16,00%	52,00%
(θ_2, a_6)	24,00%	8,00%	68,00%
(θ_3, a_2)	34,04%	6,38%	59,57%
(θ_3, a_4)	36,17%	2,13%	61,70%
(θ_3, a_6)	57,45%	6,38%	36,17%
(θ_4, a_2)	41,27%	7,94%	50,79%
(θ_4, a_4)	38,10%	0,00%	61,90%
(θ_4, a_6)	42,86%	9,52%	47,62%
(θ_5, a_2)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_5, a_4)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_5, a_6)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_6, a_2)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_6, a_4)	33,33%	0,00%	66,67%
(θ_6, a_6)	33,33%	16,67%	50,00%
(θ_7, a_2)	46,34%	2,44%	51,22%
(θ_7, a_4)	43,90%	7,32%	48,78%
(θ_7, a_6)	46,34%	14,63%	39,02%

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Devido ao estado de natureza θ_1 apresentar probabilidade nula de ocorrência, as probabilidades das consequências que envolveram esse estado também se mostraram nulas.

4.1.2.3 Função de verossimilhança

Sendo a função de verossimilhança uma distribuição de probabilidade que associa as observações x com os estados da natureza θ, denotada por $P(x|\theta)$, nos casos discretos (que é o caso do modelo proposto), esses dados podem ser obtidos também através de um banco de dados, conforme a Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Função de verossimilhança

$\boldsymbol{P(x\|\theta)}$								
	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
x_0	18,75%	0,00%	0,00%	0,00%	50,79%	0,00%	16,67%	2,44%
x_1	81,25%	0,00%	92,00%	0,00%	42,86%	0,00%	33,33%	0,00%
x_2	0,00%	0,00%	8,00%	100,00%	4,76%	100,00%	50,00%	97,56%
x_3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,59%	0,00%	0,00%	0,00%

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

4.1.2.4 Função utilidade

A função utilidade $u(p)$ é uma função que representa as preferências do decisor, sob incerteza, com relação às possíveis consequências ou bens. Quanto mais desejável for um bem, maior será o valor dessa função.

Para o modelo proposto, será atribuído o valor máximo de preferência para a consequência de retorno positivo para o investidor, valor mínimo para a consequência de variação negativa do retorno e um valor intermediário para a consequência de não alteração no retorno, visto que é mais preferível para o decisor ter um retorno positivo ou mantê-lo estável a tê-lo diminuído, o que pode ser visto na Tabela 4.6. Será suposto que a utilidade da consequência p_1 será 0,1 para o decisor A (propenso ao risco) e 0,8 para o decisor B (avesso ao risco). No entanto, vale ressaltar que cada decisor atribui uma utilidade diferente para as consequências.

Tabela 4.6 – Função utilidade

Consequências	**Utilidade do decisor A**	**Utilidade do decisor B**
$\boldsymbol{p_0}$	0	0
$\boldsymbol{p_1}$	0,1	0,8
$\boldsymbol{p_2}$	1	1

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

4.1.2.5 Utilidade da função consequência

A partir da função consequência (Tabela 4.4) e da função utilidade, torna-se necessário calcular a utilidade da função consequência, o que é feito com a fórmula abaixo:

$$u\big(P(p|\theta,a)\big) = \sum_{p} u(p)P(p|\theta,a). \tag{51}$$

Os valores $u(p)$ são obtidos na Tabela 4.6.

Sendo assim, tem-se que:

- $u(P(p|\theta_0, a_2) = u(p_0)P(p_0|\theta_0, a_2) + u(p_1)P(p_1|\theta_0, a_2) + u(p_2)P(p_2|\theta_0, a_2)$;
- $u(P(p|\theta_0, a_4) = u(p_0)P(p_0|\theta_0, a_4) + u(p_1)P(p_1|\theta_0, a_4) + u(p_2)P(p_2|\theta_0, a_4)$;
- $u(P(p|\theta_0, a_6) = u(p_0)P(p_0|\theta_0, a_6) + u(p_1)P(p_1|\theta_0, a_6) + u(p_2)P(p_2|\theta_0, a_6)$;
- $u(P(p|\theta_1, a_2) = u(p_0)P(p_0|\theta_1, a_2) + u(p_1)P(p_1|\theta_1, a_2) + u(p_2)P(p_2|\theta_1, a_2)$;
- $u(P(p|\theta_1, a_4) = u(p_0)P(p_0|\theta_1, a_4) + u(p_1)P(p_1|\theta_1, a_4) + u(p_2)P(p_2|\theta_1, a_4)$;
- $u(P(p|\theta_1, a_6) = u(p_0)P(p_0|\theta_1, a_6) + u(p_1)P(p_1|\theta_1, a_6) + u(p_2)P(p_2|\theta_1, a_6)$;
- $\vdots$
- $u(P(p|\theta_7, a_6) = u(p_0)P(p_0|\theta_7, a_6) + u(p_1)P(p_1|\theta_7, a_6) + u(p_2)P(p_2|\theta_7, a_6)$.

Substituindo nessas expressões, os valores das tabelas mencionadas anteriormente, obtém-se a Tabela 4.7, mostrada a seguir:

Tabela 4.7 – Utilidade da função consequência

$\boldsymbol{u(P(p\|\theta,a))}$	**Decisor A**	**Decisor B**
$u(P(p\|\theta_0,a_2))$	0,4438	0,4875
$u(P(p\|\theta_0,a_4))$	0,5646	0,5792
$u(P(p\|\theta_0,a_6))$	0,5917	0,6500
$u(P(p\|\theta_1,a_2))$	0,0000	0,0000
$u(P(p\|\theta_1,a_4))$	0,0000	0,0000
$u(P(p\|\theta_1,a_6))$	0,0000	0,0000
$u(P(p\|\theta_2,a_2))$	0,4080	0,4640
$u(P(p\|\theta_2,a_4))$	0,5360	0,6480
$u(P(p\|\theta_2,a_6))$	0,6880	0,7440
$u(P(p\|\theta_3,a_2))$	0,6021	0,6468
$u(P(p\|\theta_3,a_4))$	0,6191	0,6340
$u(P(p\|\theta_3,a_6))$	0,3681	0,4128
$u(P(p\|\theta_4,a_2))$	0,5159	0,5714
$u(P(p\|\theta_4,a_4))$	0,6190	0,6190
$u(P(p\|\theta_4,a_6))$	0,4857	0,5524
$u(P(p\|\theta_5,a_2))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_5,a_4))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_5,a_6))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_6,a_2))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_6,a_4))$	0,6667	0,6667
$u(P(p\|\theta_6,a_6))$	0,5167	0,6333
$u(P(p\|\theta_7,a_2))$	0,5146	0,5317
$u(P(p\|\theta_7,a_4))$	0,4951	0,5463
$u(P(p\|\theta_7,a_6))$	0,4049	0,5073

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

4.1.2.6 Função perda

Sendo a função perda, $L(\theta,\ a)$, o negativo da utilidade da função consequência e utilizando-se da tabela anterior, obtêm-se as tabelas 4.8 e 4.9:

Tabela 4.8 – Função perda para o decisor A

	$\boldsymbol{L(\theta, a)}$							
	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
a_2	-0,4438	0,0000	-0,4080	-0,6021	-0,5159	-0,6667	-0,6667	-0,5146
a_4	-0,5917	0,0000	-0,5360	-0,6191	-0,6190	-0,6667	-0,6667	-0,4951
a_6	-0,5646	0,0000	-0,6880	-0,3681	-0,4857	-0,6667	-0,5167	-0,4049

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Tabela 4.9 – Função perda para o decisor B

	$\boldsymbol{L(\theta, a)}$							
	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
a_2	-0,4875	0,0000	-0,4640	-0,6468	-0,5714	-0,6667	-0,6667	-0,5317
a_4	-0,5792	0,0000	-0,6480	-0,6340	-0,6190	-0,6667	-0,6667	-0,5463
a_6	-0,6500	0,0000	-0,7440	-0,4128	-0,5524	-0,6667	-0,6333	-0,5073

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

4.1.2.7 Risco de Bayes

O modelo proposto possui três ações a serem tomadas pelo decisor e quatro observações sobre os estados da natureza, o que levará a $3^4 = 81$ regras de decisão. Listar todas estas regras não é uma tarefa muito difícil, se comparada com outros problemas que tenham mais ações e/ou observações, contudo, para facilitar ainda mais o manuseio do modelo em questão, ir-se-á enumerar todas as possíveis observações, $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$. Em seguida, para cada observação determina-se a melhor ação a tomar. Isso será feito calculando-se para cada ação o valor da expressão:

$$\sum_{\theta} \pi(\theta|x) L(\theta, a), \tag{52}$$

onde, $\pi(\theta|x)$ é a probabilidade *a posteriori* de θ, isto é, a probabilidade de θ dado que se observou o valor de x. Ela é obtida do resultado da combinação da função de verossimilhança (Tabela 4.5) com a distribuição *a priori* (Tabela 4.3), através da Equação (11). A seguir é mostrada a Tabela 4.10 com os valores da distribuição *a posteriori*:

Tabela 4.10 – Distribuição a posteriori

	$\pi(\theta\|x)$							
	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
x_0	20,93%	0,00%	0,00%	0,00%	74,42%	0,00%	2,33%	2,33%
x_1	42,86%	0,00%	25,27%	0,00%	29,67%	0,00%	2,20%	0,00%
x_2	0,00%	0,00%	2,04%	47,96%	3,06%	3,06%	3,06%	40,82%
x_3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

De posse dessa distribuição e da função perda será encontrada a melhor ação a a ser tomada para cada observação x, a qual minimiza o risco de Bayes, como mostrado logo a seguir, nas tabelas 4.11 e 4.12:

Tabela 4.11 – Risco de Bayes por observação para o decisor A

	$\sum_{\theta} \pi(\theta\|x)L(\theta,a)$					
	a_2	a_4	a_6	a_2	a_4	a_6
x_0	-0,5043	-0,6059	-0,5067	0	1	0
x_1	-0,4610	-0,5758	-0,5829	0	0	1
x_2	-0,5638	-0,5697	-0,4069	0	1	0
x_3	-0,5159	-0,6190	-0,4857	0	1	0

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Tabela 4.12 – Risco de Bayes por observação para o decisor B

	$\sum_{\theta} \pi(\theta\|x)L(\theta,a)$					
	a_2	a_4	a_6	a_2	a_4	a_6
x_0	-0,5552	-0,6101	-0,5736	0	1	0
x_1	-0,5104	-0,6103	-0,6444	0	0	1
x_2	-0,5950	-0,6001	-0,4769	0	1	0
x_3	-0,5714	-0,6190	-0,5524	0	1	0

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Para cada observação é calculado o risco por ação, pondo 1 (um) na ação que apresenta o menor risco, a qual, consequentemente, é a ação que deverá ser adotada, e 0 (zero) nas demais ações. Com isso, pode-se perceber que somente para a observação x_1 a melhor ação é a_6, isto é, investir no portfólio composto pelos ativos dólar americano, ações (IBOVESPA) e ouro. Já para as demais observações, a melhor ação é a_4, ou seja, investir no portfólio de ações (IBOVESPA) e ouro.

4.1.2.8 Decisões sem dados (só com $\boldsymbol{\pi(\theta)}$)

Quando não é possível obter a função de verossimilhança, o canal de comunicação das observações com os estados da natureza, pode-se adotar uma ação apenas com o conhecimento *a priori* e a função perda. Esse não é o caso aqui, visto que foi possível, através de dados históricos, obter a função de verossimilhança. Mesmo assim, será mostrado logo a seguir, qual seria a melhor ação, caso os decisores A e B não tivessem aqueles dados:

Tabela 4.13 – Decisões sem dados

	Decisor A	Decisor B
R_{a_2}	-0,5124	-0,5545
R_{a_4}	-0,5790	-0,6060
R_{a_6}	-0,4944	-0,5605

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

É percebido que a ação que apresenta um menor risco, tanto para o decisor A quanto para o decisor B, é a ação a_4, assim como mostrado anteriormente, para a maioria das observações, quando é possível se chegar ao risco de Bayes.

4.2 MODELO II

O segundo modelo apresentado neste capítulo, além de utilizar todo o arcabouço matemático fornecido pela Teoria da Decisão, introduz a lógica *fuzzy* em uma parte onde a imprecisão da informação é comum: na utilidade atribuída pelo decisor às consequências, a qual é obtida através de um protocolo de edução, como mencionado no capítulo 2.

Os dados e os conjuntos serão, praticamente, os mesmos do modelo anterior. Os números *fuzzy* escolhidos para representar a utilidade do decisor para cada consequência foram os triangulares e os trapezoidais, os quais são de fácil manuseio e permitem uma representação satisfatória da preferência do decisor quanto às consequências. Os elementos necessários para compor o modelo são mostrados nos tópicos a seguir.

4.2.1 Função Utilidade *Fuzzy*

Para este modelo, a função utilidade será *fuzzy*, visto que os números *fuzzy* permitem abstrair melhor as imprecisões do mundo real, as quais estão ainda mais presentes nas elicitações de preferências. A Tabela 4.14 traz uma simulação dessa função para um decisor qualquer. Cabe salientar que essa função varia de acordo com o perfil do decisor.

Tabela 4.14 – Função utilidade fuzzy

Consequências	Utilidade Triangular *Fuzzy*	Utilidade Trapezoidal *Fuzzy*
p_0	(0; 0; 0)	(0; 0; 0; 0)
p_1	(0,7; 0,8; 0,9)	(0,6; 0,7; 0,8; 0,9)
p_2	(1; 1; 1)	(1; 1; 1; 1)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

4.2.2 Utilidade *Fuzzy* da Função Consequência

Sendo a utilidade da função consequência a junção da função consequência com a função utilidade e essa representada por números *fuzzy*, tem-se que aquela função também será *fuzzy*, como pode ser visto na Tabela 4.15:

Tabela 4.15 – Utilidade fuzzy da função consequência

	Triangular	Trapezoidal
$u(P(p\|\theta_0, a_2)$	(0,4813; 0,4875; 0,4938)	(0,4750; 0,4813; 0,4875; 0,4938)
$u(P(p\|\theta_0, a_4)$	(0,5771; 0,5792; 0,5813)	(0,5750; 0,5771; 0,5792; 0,5813)
$u(P(p\|\theta_0, a_6)$	(0,6417; 0,6500; 0,6583)	(0,6333; 0,6417; 0,6500; 0,6583)
$u(P(p\|\theta_1, a_2)$	(0,0000; 0,0000; 0,0000)	(0,0000; 0,0000; 0,0000; 0,0000)
$u(P(p\|\theta_1, a_4)$	(0,0000; 0,0000; 0,0000)	(0,0000; 0,0000; 0,0000; 0,0000)
$u(P(p\|\theta_1, a_6)$	(0,0000; 0,0000; 0,0000)	(0,0000; 0,0000; 0,0000; 0,0000)
$u(P(p\|\theta_2, a_2)$	(0,4560; 0,4640; 0,4720)	(0,4480; 0,4560; 0,4640; 0,4720)
$u(P(p\|\theta_2, a_4)$	(0,6320; 0,6480; 0,6640)	(0,6160; 0,6320; 0,6480; 0,6640)
$u(P(p\|\theta_2, a_6)$	(0,7360; 0,7440; 0,7520)	(0,7280; 0,7360; 0,7440; 0,7520)
$u(P(p\|\theta_3, a_2)$	(0,6404; 0,6468; 0,6532)	(0,6340; 0,6404; 0,6468; 0,6532)
$u(P(p\|\theta_3, a_4)$	(0,6319; 0,6340; 0,6362)	(0,6298; 0,6319; 0,6340; 0,6362)
$u(P(p\|\theta_3, a_6)$	(0,4064; 0,4128; 0,4191)	(0,4000; 0,4064; 0,4128; 0,4191)
$u(P(p\|\theta_4, a_2)$	(0,5635; 0,5714; 0,5794)	(0,5556; 0,5635; 0,5714; 0,5794)
$u(P(p\|\theta_4, a_4)$	(0,6190; 0,6190; 0,6190)	(0,6190; 0,6190; 0,6190; 0,6190)
$u(P(p\|\theta_4, a_6)$	(0,5429; 0,5524; 0,5619)	(0,5333; 0,5429; 0,5524; 0,5619)
$u(P(p\|\theta_5, a_2)$	(0,6667; 0,6667; 0,6667)	(0,6667; 0,6667; 0,6667; 0,6667)
$u(P(p\|\theta_5, a_4)$	(0,6667; 0,6667; 0,6667)	(0,6667; 0,6667; 0,6667; 0,6667)
$u(P(p\|\theta_5, a_6)$	(0,6667; 0,6667; 0,6667)	(0,6667; 0,6667; 0,6667; 0,6667)
$u(P(p\|\theta_6, a_2)$	(0,6667; 0,6667; 0,6667)	(0,6667; 0,6667; 0,6667; 0,6667)
$u(P(p\|\theta_6, a_4)$	(0,6667; 0,6667; 0,6667)	(0,6667; 0,6667; 0,6667; 0,6667)
$u(P(p\|\theta_6, a_6)$	(0,6167; 0,6333; 0,6500)	(0,6000; 0,6167; 0,6333; 0,6500)
$u(P(p\|\theta_7, a_2)$	(0,5293; 0,5317; 0,5341)	(0,5268; 0,5293; 0,5317; 0,5341)
$u(P(p\|\theta_7, a_4)$	(0,5390; 0,5463; 0,5537)	(0,5317; 0,5390; 0,5463; 0,5537)
$u(P(p\|\theta_7, a_6)$	(0,4927; 0,5073; 0,5220)	(0,4780; 0,4927; 0,5073; 0,5220)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

4.2.3 Função Perda *Fuzzy*

A função perda é o negativo da utilidade da função consequência. Através da tabela 4.15, obtém-se, então, as tabelas 4.16 e 4.17 com a função perda *fuzzy*. Cabe lembrar que o negativo de um número triangular *fuzzy* $\tilde{A}$ e de um número trapezoidal *fuzzy* $\tilde{B}$, na representação por ponto fica, respectivamente:

$$-\tilde{A} = -(a, b, c) = (-c, -b, -a); \tag{53}$$

$$-\tilde{B} = -(a, b, c, d) = (-d, -c, -b, -a). \tag{54}$$

Tabela 4.16 – Função perda triangular fuzzy

$L(\theta, a)$ Triangular			
	a_2	a_4	a_6
θ_0	(-0,4938; -0,4875; -0,4813)	(-0,5813; -0,5792; -0,5771)	(-0,6583; -0,6500; -0,6417)
θ_1	(0,0000; 0,0000; 0,0000)	(0,0000; 0,0000; 0,0000)	(0,0000; 0,0000; 0,0000)
θ_2	(-0,4720; -0,4640; -0,4560)	(-0,6640; -0,6480; -0,6320)	(-0,7520; -0,7440; -0,7360)
θ_3	(-0,6532; -0,6468; -0,6404)	(-0,6362; -0,6340; -0,6319)	(-0,4191; -0,4128; -0,4064)
θ_4	(-0,5794; -0,5714; -0,5635)	(-0,6190; -0,6190; -0,6190)	(-0,5619; -0,5524; -0,5429)
θ_5	(-0,6667; -0,6667; -0,6667)	(-0,6667; -0,6667; -0,6667)	(-0,6667; -0,6667; -0,6667)
θ_6	(-0,6667; -0,6667; -0,6667)	(-0,6667; -0,6667; -0,6667)	(-0,6500; -0,6333; -0,6167)
θ_7	(-0,5341; -0,5317; -0,5293)	(-0,5537; -0,5463; -0,5390)	(-0,5220; -0,5073; -0,4927)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Tabela 4.17 – Função perda trapezoidal fuzzy

$L(\theta, a)$ Trapezoidal			
	a_2	a_4	a_6
θ_0	(-0,4938; -0,4875; -0,4813; -0,4750)	(-0,5813; -0,5792; -0,5771; -0,5750)	(-0,6583; -0,6500; -0,6417; -0,6333)
θ_1	(0,0000; 0,0000; 0,0000; 0,0000)	(0,0000; 0,0000; 0,0000; 0,0000)	(0,0000; 0,0000; 0,0000; 0,0000)
θ_2	(-0,4720; -0,4640; -0,4560; -0,4480)	(-0,6640; -0,6480; -0,6320; -0,6160)	(-0,7520; -0,7440; -0,7360; -0,7280)
θ_3	(-0,6532; -0,6468; -0,6404; -0,6340)	(-0,6362; -0,6340; -0,6319; -0,6298)	(-0,4191; -0,4128; -0,4064; -0,4000)
θ_4	(-0,5794; -0,5714; -0,5635; -0,5556)	(-0,6190; -0,6190; -0,6190; -0,6190)	(-0,5619; -0,5524; -0,5429; -0,5333)
θ_5	(-0,6667; -0,6667; -0,6667; -0,6667)	(-0,6667; -0,6667; -0,6667; -0,6667)	(-0,6667; -0,6667; -0,6667; -0,6667)
θ_6	(-0,6667; -0,6667; -0,6667; -0,6667)	(-0,6667; -0,6667; -0,6667; -0,6667)	(-0,6500; -0,6333; -0,6167; -0,6000)
θ_7	(-0,5341; -0,5317; -0,5293; -0,5268)	(-0,5537; -0,5463; -0,5390; -0,5317)	(-0,5220; -0,5073; -0,4927; -0,4780)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

4.2.4 Risco de Bayes *Fuzzy*

De posse da função perda *fuzzy* e da distribuição *a posteriori* o risco de Bayes é obtido, o qual também será *fuzzy*, visto que a multiplicação de um número *crisp* por um *fuzzy* gera outro *fuzzy*, como já mencionado no capítulo 2. Observado isso, as tabelas 4.18 e 4.19 são produzidas.

Como no capítulo anterior, será necessário ranquear os números fuzzy, sejam os triangulares ou os trapezoidais, de acordo com algum método para conhecer qual a melhor ação para cada observação. Dependendo do método escolhido, o resultado final do ranqueamento poderá ser alterado.

Tabela 4.18 – Risco de Bayes triangular fuzzy

	$\sum_{\theta} \pi(\theta\|x)L(\theta,a)$		
	a_2	a_4	a_6
x_0	(-0,5624; -0,5552; -0,5479)	(-0,6107; -0,6101; -0,6095)	(-0,5832; -0,5736; -0,5641)
x_1	(-0,5175; -0,5104; -0,5033)	(-0,6153; -0,6103; -0,6054)	(-0,6532; -0,6444; -0,6356)
x_2	(-0,5995; -0,5950; -0,5905)	(-0,6044; -0,6001; -0,5957)	(-0,4869; -0,4769; -0,4669)
x_3	(-0,5794; -0,5714; -0,5635)	(-0,6190; -0,6190; -0,6190)	(-0,5619; -0,5524; -0,5429)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Tabela 4.19 – Risco de Bayes trapezoidal fuzzy

	$\sum_{\theta} \pi(\theta\|x)L(\theta,a)$		
	a_2	a_4	a_6
x_0	(-0,5624; -0,5552; -0,5479; -0,5406)	(-0,6107; -0,6101; -0,6095; -0,6089)	(-0,5832; -0,5736; -0,5641; -0,5545)
x_1	(-0,5175; -0,5104; -0,5033; -0,4963)	(-0,6153; -0,6103; -0,6054; -0,6004)	(-0,6532; -0,6444; -0,6356; -0,6269)
x_2	(-0,5995; -0,5950; -0,5905; -0,5861)	(-0,6044; -0,6001; -0,5957; -0,5914)	(-0,4869; -0,4769; -0,4669; -0,4569)
x_3	(-0,5794; -0,5714; -0,5635; -0,5556)	(-0,6190; -0,6190; -0,6190; -0,6190)	(-0,5619; -0,5524; -0,5429; -0,5333)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Para a definição da melhor alternativa para cada observação, no caso dos números triangulares *fuzzy*, os métodos utilizados foram: Centro de Máxima ($CoM\ (A)$), Média (A), Beta (A) e o de Adamo – $AD_{\alpha}(A)$ (1980). O α-*cut* para o método de Adamo (1980) foi também de 0,5. Os três primeiros métodos apresentaram os mesmos valores *crisp* de cada alternativa por observação, fato justificado pela similaridade entre esses métodos e pelos números triangulares *fuzzy* gerados apresentarem uma forma triangular isósceles. Dessa forma, serão mostrados apenas os resultados dos métodos de Centro de Máxima e o de Adamo, os quais se encontram nas figuras 4.1 e 4.2, respectivamente, para os números triangulares e figuras 4.3 e 4.4, para os números trapezoidais. Com relação ao método de Adamo (1980), tanto para os números triangulares quanto para os trapezoidais, foi feita uma análise de sensibilidade alterando o α-*cut* para verificar se acontecia uma mudança na ordem das alternativas, o que não foi constatado.

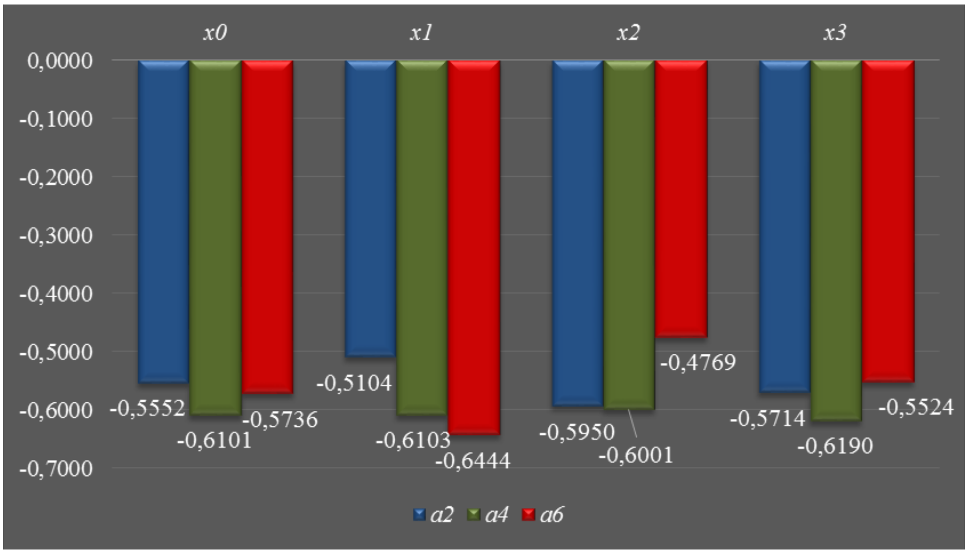

Figura 4.1 – Ranqueamento das alternativas triangulares fuzzy pelo método Centro de Máxima
Fonte: Esta pesquisa, 2014.

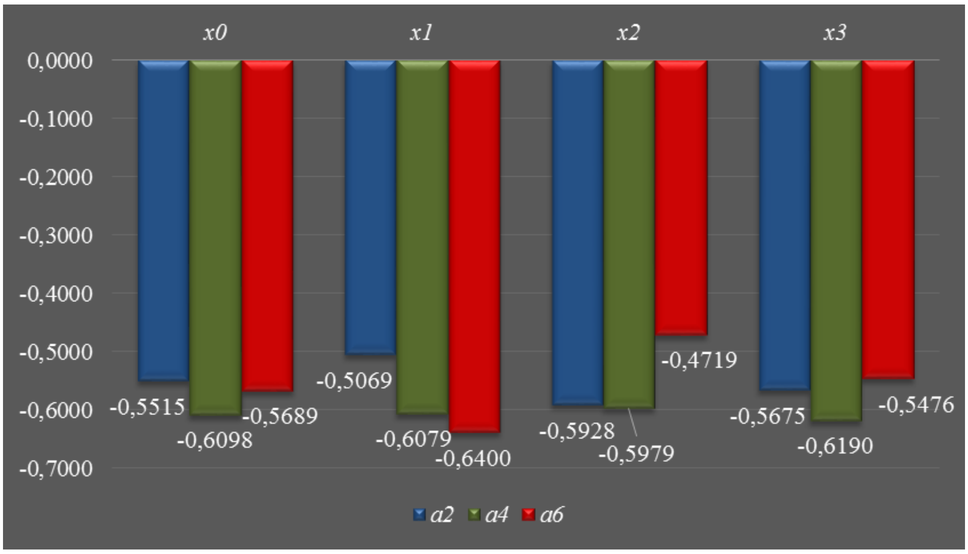

Figura 4.2 – Ranqueamento das alternativas triangulares fuzzy pelo método de Adamo (1980)
Fonte: Esta pesquisa, 2014.

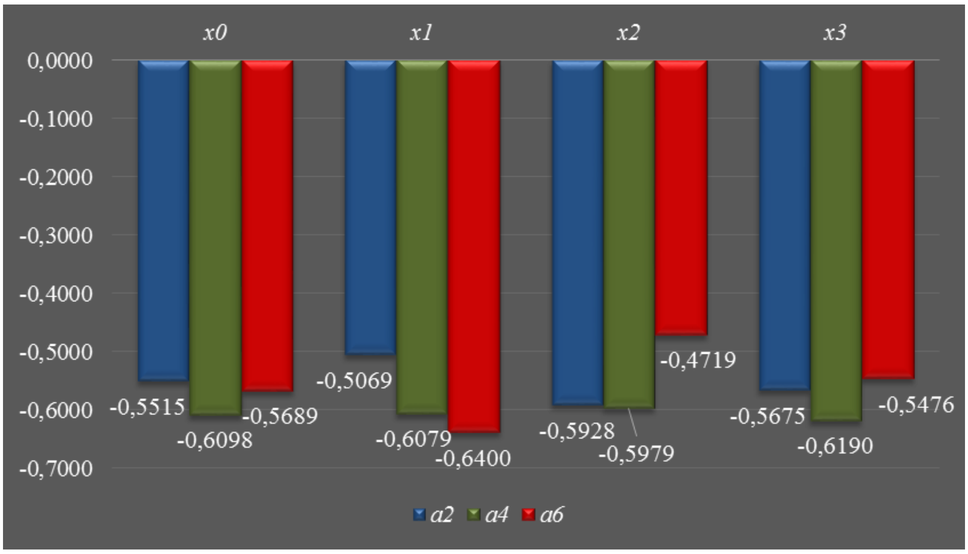

Figura 4.3 – Ranqueamento das alternativas trapezoidais fuzzy pelo método Centro de Máxima
Fonte: Esta pesquisa, 2014.

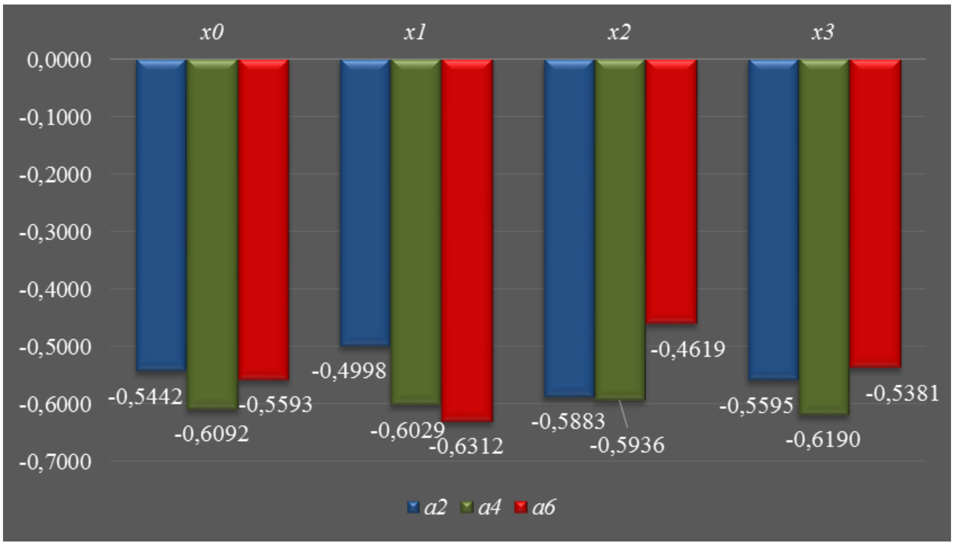

Figura 4.4 – Ranqueamento das alternativas trapezoidais fuzzy pelo método de Adamo (1980)
Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Através das figuras, pode-se perceber que os dois métodos sugerem o mesmo raqueamento das alternativas para cada observação. Inclusive, os valores das figuras 4.2 e 4.3 são idênticos. Caso sejam observadas x_0, x_2, e x_3 a alternativa que apresenta o menor risco é a_4. Se for observado que o PIB ficou abaixo ou igual a média do período estudado e a a taxa Selic apresentou-se acima da sua média histórica (x_1) a melhor alternativa passa a ser a_6.

4.2.5 Decisões Sem Dados (Só Com $\pi(\theta)$) em um Ambiente *Fuzzy*

Supondo nesse modelo II, como fizera no modelo anterior, que não seria possível obter a função de verossimilhança, qual seria a melhor ação a ser tomada pelo decisor, utilizando-se somente do conhecimento *a priori* e da função perda? Com as próximas tabelas (4.20 e 4.21), as quais mostram os riscos *fuzzy* para cada alternativa, é possível responder a essa pergunta.

Com o método de ranqueamento descrito no capítulo 2, de Rommelfanger (2003), é possível afirmar qual a melhor alternativa, tanto com números triangulares *fuzzy* quanto com os trapezoidais. Por se tratar de risco, para o decisor, a alternativa mais preferível é aquela que apresenta o menor valor para tal risco. Sendo assim, dado duas alternativas $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$, $\tilde{A}$ será preferível ou igualmente preferível a $\tilde{B}$, se o $sup\tilde{A} \leq sup\tilde{B}$ e o $inf\tilde{A} \leq inf\tilde{B}$.

Tabela 4.20 – Risco triangular fuzzy

Decisões sem dados (só com $\pi(\theta)$)	
$\tilde{R}_{a_2}$	(-0,5605; -0,5545; -0,5485)
$\tilde{R}_{a_4}$	(-0,6099; -0,6060; -0,6021)
$\tilde{R}_{a_6}$	(-0,5700; -0,5605; -0,5511)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Tabela 4.21 – Risco trapezoidal fuzzy

Decisões sem dados (só com $\pi(\theta)$)	
$\tilde{R}_{a_2}$	(-0,5605; -0,5545; -0,5485; -0,5425)
$\tilde{R}_{a_4}$	(-0,6099; -0,6060; -0,6021; -0,5983)
$\tilde{R}_{a_6}$	(-0,5700; -0,5605; -0,5511; -0,5416)

Fonte: Esta pesquisa, 2014.

Para os números triangulares *fuzzy* (Figura 4.5), percebe-se que a alternativa a_4 é preferível às demais e que a_6 é preferível à a_2, visto que o $sup\tilde{R}_{a_4} < sup\tilde{R}_{a_2} < sup\tilde{R}_{a_6}$e o $inf\tilde{R}_{a_4} < inf\tilde{R}_{a_6} < inf\tilde{R}_{a_2}$. Para os números *fuzzy* trapezoidais (Figura 4.6) a alternativa a_4 também é a mais preferível. Contudo, as alternativas a_2 e a_6 são incomparáveis com esse método (*p*-preferência) para um grau de pertinência nulo, uma vez que o $inf\tilde{R}_{a_2} > inf\tilde{R}_{a_6}$ e o $sup\tilde{R}_{a_2} < sup\tilde{R}_{a_6}$. Isso pode ser justificado por apresentarem valores muito próximos. No entanto, realizando, ainda por esse método, uma comparação par a par, só que com outro nível de α, isto é, do grau de pertinência, essas duas alternativas deixam de ser incomparáveis e torna-se possível estabelecer uma ordem entre elas para os números trapezoidais *fuzzy*. O nível de α onde isso ocorre é a partir de 0,25, tornando a_6 preferível à a_2.

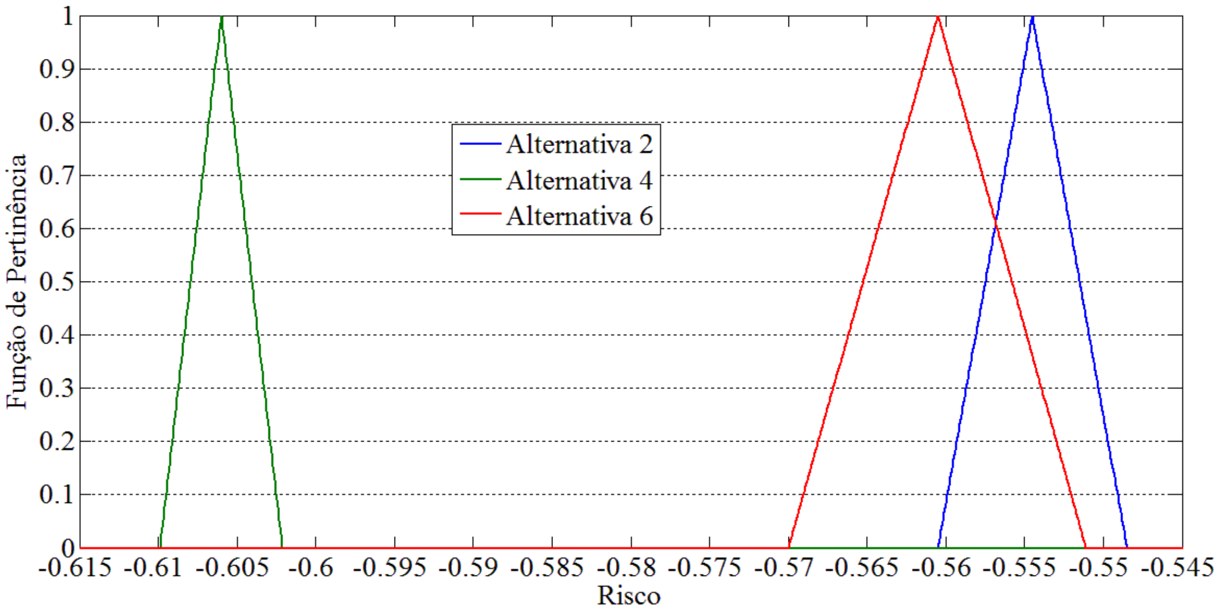

Figura 4.5 – Risco triangular fuzzy de cada alternativa
Fonte: Esta pesquisa, 2014.

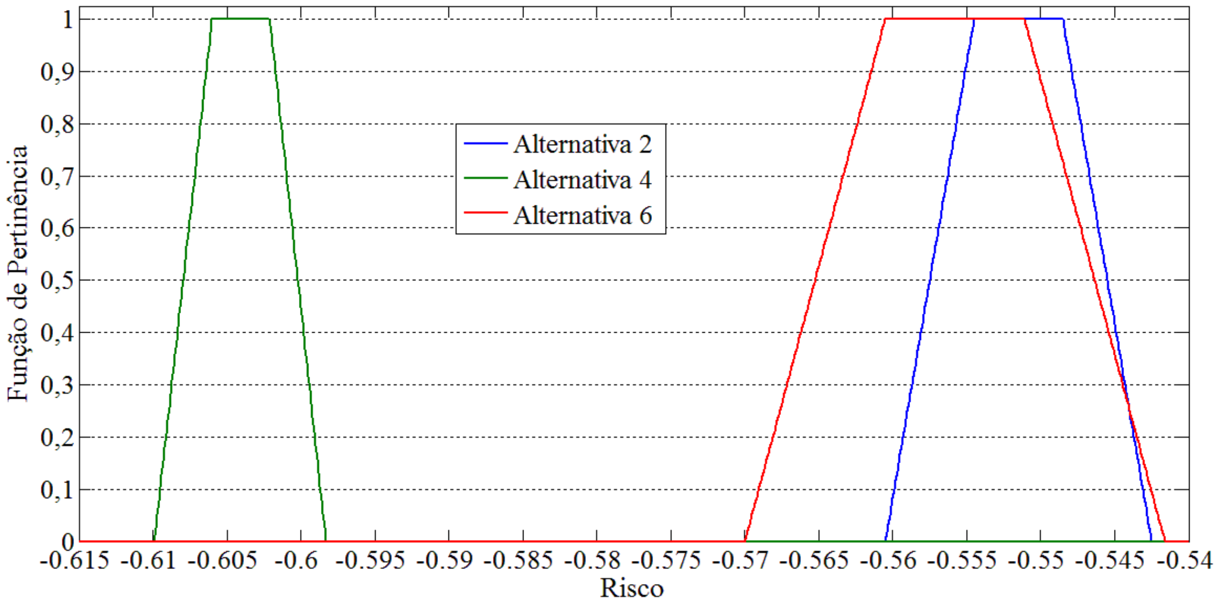

Figura 4.6 – Risco trapezoidal fuzzy de cada alternativa
Fonte: Esta pesquisa, 2014.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, são introduzidas as conclusões e as propostas para trabalhos futuros com base no estudo de investimentos financeiros, à luz da Teoria da Decisão e Teoria *Fuzzy*, que ocorreu ao longo da elaboração deste trabalho acadêmico.

5.1 CONCLUSÕES

Lidar com decisões faz parte do cotidiano humano. O decisor é o indivíduo que possui o poder de tomar a decisão, mas também é o responsável pelas consequências geradas a partir dessa ação. Sendo assim, muitos decisores ficam apreensivos na hora de decidir. Para auxiliar no processo de tomada de decisão e diminuir a chance de algo ser malsucedido, modelos podem ser utilizados.

Este trabalho objetivou estabelecer modelos de decisão em investimentos financeiros por meio de uma sistemática fornecida pela Teoria da Decisão, tanto para condições sob risco quanto sob incerteza, empregando a lógica tradicional de conjuntos e a lógica *fuzzy*. Isso foi feito levando em consideração que problemas de decisão envolvendo ativos financeiros possuem diversas variáveis que influenciam no processo decisório, as quais não foram tratadas por vários autores que estudaram essa temática, mas que estão incluídas nos modelos propostos: o risco sistemático dos ativos financeiros, o perfil do investidor e a imprecisão de informações, sejam essas advindas de dados quanto de especialistas.

Os modelos propostos absorveram o clássico modelo de Markowitz (1952), o qual através de programação matemática permite a obtenção de um portfólio de ativos financeiros. Feito isso, muitas alternativas foram geradas a partir dos ativos em estudo. Todavia, algumas dessas alternativas eram dominadas, por apresentarem um retorno abaixo de alguma(s) outra(s) com um risco maior. Logo as alternativas restantes eram as melhores do conjunto e são escolhidas a depender de como o ambiente externo poderá se comportar e de acordo com a preferência do decisor/investidor. Cabe salientar que todas essas alternativas traziam o ouro na sua composição, variando apenas na sua proporção dentro do portfólio, indicando que esse ativo de risco é um investimento interessante para o investidor.

As variáveis macroeconômicas influenciam fortemente a cotação futura dos ativos. Para este trabalho, levaram-se em consideração àquelas que os estudiosos avaliam como mais importantes, as quais foram comprovadas como tais através de análise estatística dos dados coletados.

Os modelos aqui propostos podem ser adaptados para outros ativos de risco, como fundos de investimentos, ações específicas, outras moedas estrangeiras e outros metais (prata, por exemplo). Outros métodos de ranqueamento de números *fuzzy* também podem ser utilizados, alguns mais recentes e mais complexos. Todavia, cabe lembrar que, como comentado por Wang & Kerre (2001), é impossível afirmar qual o melhor método para ranquear números *fuzzy*, pois vai depender da preferência do pesquisador, do perfil do decisor e do contexto do problema (Brunelli & Mezei, 2013). Quanto aos números *fuzzy* tratados nesta pesquisa (triangulares e trapezoidais), assim foi feito pelo fato de eles serem mais simples que os demais e por permitir uma modelagem satisfatória dos dados probabilísticos e das informações em geral.

De maneira alguma, se propôs aqui a substituição do conhecimento já adquirido sobre investimentos em ativos financeiros. Pelo contrário, o que se quis foi apresentar mais uma ferramenta conjuntamente com a lógica *fuzzy* e, aplicá-la em um caso real, para auxiliar no processo de decisão, visto que ele pode acarretar consequências de grandes repercussões e gerar receios para o decisor. Além disso, este trabalhou trouxe uma abordagem diferenciada sobre investimentos financeiros ao unir duas teorias tão relevantes a um modelo clássico de seleção de portfólio, incluindo a incerteza e a imprecisão em modelos matemáticos de decisão.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho, em hipótese alguma, esgota o assunto apresentado, dado a sua complexidade e às mudanças que sofre ao longo do tempo. Estudos futuros podem trazer outras interpretações, abordagens, modelos e aplicações sobre investimentos em ativos financeiros. Além do mais, esses estudos podem, ainda, aprimorar o que foi exposto até agora. Sendo assim, recomenda-se para trabalhos futuros:

- A implementação dos modelos propostos, elicitando a função utilidade do decisor ou decisores (decisão em grupo) e obtendo o conhecimento *a priori* de especialista(s).
- A utilização de programação dinâmica *fuzzy*, uma vez que essa técnica matemática é útil para criar uma sequência de decisões que estão relacionadas, o que acontece nas decisões de investimentos de médio e longo prazo, onde o decisor toma algumas decisões de compra e/ou venda de ativos ao longo do tempo.
- A introdução do coeficiente de assimetria no modelo média-variância para lidar melhor com ativos financeiros que não assumem uma distribuição simétrica.

REFERÊNCIAS

ABBASBANDY, S. Ranking of fuzzy numbers, some recent and new formulas. In: INTERNATIONAL FUZZY SYSTEMS ASSOCIATION WORLD CONGRESS (IFSA-2009) / EUROPEAN SOCIETY FOR FUZZY LOGIC AND TECHNOLOGY CONFERENCE (EUSFLAT-2009), 2009, Lisbon, Portugal. *Proceedings.* p. 642–646.

ADAMO, J.M. Fuzzy decision trees. *Fuzzy Sets and Systems,* 4 (3): 207-219, 1980.

ALMEIDA, A.T.; COSTA, A.P.C.S.; MIRANDA, C.M.G. Informação e gestão. In: *Gestão da informação na competitividade das organizações*. 2.ed. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2002. Cap. 1.

ALMEIDA, A.T. *Processo de decisão nas organizações:* construindo modelos de decisão multicritério. São Paulo, Atlas, 2013.

ANDREZO, A.F. & LIMA, I.S. *Mercado financeiro*: aspectos históricos e conceituais. São Paulo, Pioneira, 1998.

ANHAIA, A.V.G. de. Os riscos sobre investimentos do mercado financeiro brasileiro. Porto Alegre, 2006. 118p. Dissertação (Mestrado em Economia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul).

ASSAF NETO, A. *Finanças corporativas e valor*. São Paulo, Atlas, 2003.

________. *Mercado financeiro*. 8.ed. São Paulo, Atlas, 2008.

________. *Matemática financeira e suas aplicações*. São Paulo, Atlas, 2009.

BANSAL, A. Trapezoidal fuzzy numbers (a,b,c,d): arithmetic behavior. *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, 2 (1): p. 39-44, 2011.

BÁRDOSSY, A. & DUCKSTEIN, L. *Fuzzy rule-based modeling with applications to geophysical, biological and engineering systems*. Florida, EUA, CRC Press, 1995.

BELLMAN, R.E. & ZADEH, L.A. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17 (4): 141-164, Dec. 1970.

BELOHLAVEK, R. & KLIR, G.J. *Concepts and fuzzy logic*. Cambridge, MIT Press, 2011.

BERGER, J.O. *Statistical decision theory and bayesian analysis.* 2.ed. New York, Springer-Velag New York, Inc, 1985. (Springer Series is Statistics).

BEST, M.J. & GRAUER, R.R. Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems. *Management Science*, 37 (8): 981-989, Aug. 1991.

BEZERRA, D. de C. Carteira de investimento usando Teoria da Decisão. Recife, 2003. 126 p. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE).

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A.J. *Fundamentos de investimentos*. 3.ed. Porto Alegre, Bookman, 2000.

BOJADZIEV, G. & BOJADZIEV, M. *Fuzzy logic for Business, Finance and management.* 2.ed. Singapure, World Scientific Publishing, 2007. Vol. 23.

BRAGA, M.J.F.; BARRETO, J.M.; MACHADO, M.A.S. *Conceitos da matemática nebulosa na análise de risco*. Rio de Janeiro, Artes & Rabiskus, 1995.

BRANDT, M.W. Portfolio choice problems. In: *Handbook of Financial Econometrics*: *Tools and Techniques.* Amsterdam, North-Holland, San Diego, 2010. Vol. 1. Cap. 5. 269-336.

BRASIL. Medida Provisória nº 567, de 3 de maio de 2012. Altera o art. 12 da Lei no 8.177, de 1o de março de 1991, que estabelece regras para a desindexação da economia, e dá outras providências. *Diário Oficial {da} República Federativa do Brasil*, Brasília – DF, 04 mai. 2012. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2012/Mpv/567.htm>. Acesso em: 14 abr. 2014.

BRIGHAM, E.F.; GAPENSKI, L.C.; EHRHARDT, M.C. *Administração financeira*: teoria e prática. São Paulo, Atlas, 2001.

BRUNELLI, M. & MEZEI, J. How different are ranking methods for fuzzy numbers? A numerical study. *International Journal of Approximate Reasoning*, 54 (5): 627-639, Jul. 2013, ISSN 0888-613X.

CÂMARA, J.B. de A.; ARAÚJO, B.L.T. de; RODRIGUEZ, T.D.M; COSTA, G.B. da. Diversificação entre classes de investimentos como estratégia para minimizar riscos e aumentar a rentabilidade em aplicações financeiras. In: 5º CONGRESSO UFSC DE CONTROLADORIA E FINANÇAS & INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM CONTABILIDADE, 2014, Florianópolis-SC, *Anais.* p. 1-16.

CAMPOS, F.; NEVES, A.; SOUZA, F.M.C de. Decision maker under subjective uncertainty. In: FIRST IEEE SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE IN MULTICRITERIA DECISION MAKING (MCDM 2007), 2007, Honolulu. *Proceedings.* p. 85-90.

CARLSSON, C.; FULLÉR, R.; MAJLENDER, P. A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. *Fuzzy Sets and Systems*, 131 (1): 13-21, 2002.

CAVALCANTE, F.; MISUMI, J.Y.; RUDGE, L.F. *Mercado de capitais*: Comissão Nacional de Bolsas. Rio de Janeiro, Elsevier, 2005.

CHEN, G.; LUO, Z., LIAO, X., YU, X., YANG, L. Mean–variance–skewness fuzzy portfolio selection model based on intuitionistic fuzzy optimization. *Procedia Engineering*, 15 (1): 2062-2066, 2011.

CHEN, L.H.; HUANG, L. Portfolio optimization of equity mutual funds with fuzzy return rates and risks. *Expert Systems with Applications*, 36 (2): Part 2, 3720-3727, Mar. 2009.

CHEN, S.M.; SANGUANSAT, K. Analyzing fuzzy risk based on a new fuzzy ranking method between generalized fuzzy numbers. *Expert Systems with Applications*, 38 (3): 2163-2171, 2011.

CHEW, L. *Gerenciado os riscos de derivativos:* o uso e o abuso da alavancagem. Rio de Janeiro, Qualitymark, 1999.

COMISSÃO DE VALORES MOBILIÁRIOS – CVM. Instrução Normativa nº 305, de 05 de maio de 1999. Dispõe sobre as demonstrações contábeis dos fundos de investimento em títulos e valores mobiliários. *Diário Oficial {da} República Federativa do Brasil*, Brasília – DF, 10 mai. 2004. Disponível em: <http://www.integraltrust.com/images/stories/ legislacao/normativos/securitizacao/instrucoes_CVM/InstrucaoCVM409.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2014.

________. Instrução Normativa nº 409, de 18 de agosto de 2004. Dispõe sobre a constituição, a administração, o funcionamento e a divulgação de informações dos fundos de investimento. *Diário Oficial {da} República Federativa do Brasil*, Brasília – DF, 24 ago. 2004. Disponível em: <http://www.integraltrust.com/images/stories/legislacao/ normativos/securitizacao/instrucoes_CVM/InstrucaoCVM409.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2014.

CORAZZA, M. & FAVARETTO, D. On the existence of solutions to the quadratic mixed integer mean– variance portfolio selection problem. *European Journal of Operational Research*, 176 (3): 1947-1960, Feb. 2007.

CORPORATION, M. *Software Microsoft Excel 2010*. Versão 14.0, 2010. Disponível em: <http://www.microsoftstore.com. br/shop/pt-BR/Microsoft/Office-Excel-2010-(em-Portugues)>. Acesso em: 01 jun. 2014.

DENG, H. Comparing and ranking fuzzy numbers using ideal solutions. *Applied Mathematical Modelling*, 38 (5-6), 1638-1646, mar. 2014.

DOANE, D.P. & SEWARD, L.E. *Estatística aplicada à Administração e à Economia*. São Paulo, McGraw-Hill, 2008.

DUBOIS, D. & PRADE, H.M. Fuzzy sets and probability: misunderstandings, bridges and gaps. In: PROCEEDINGS OF THE 2 ED. IEEE INT. CONF. ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE' 93), 1993, San Francisco, CA. *Proceedings*. p. 1059-1068.

________. *Fuzzy sets and systems:* theory and applications. New York, Academic Press, 1980.

ELTON, E.J.; GRUBER, M.J.; BROWN, S.J.; GOETZMANN, W.N. *Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos*. São Paulo, Atlas, 2004.

ENTENDA o que é "rating" ou nota de risco. *Folha de São Paulo*: um jornal a serviço do Brasil, Folha On-line, 22 set. 2009. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/ mercado /767599-entenda-o-que-e-rating-ou-nota-de-risco.shtml>. Acesso em: 01 mar. 2014.

FABIANO, D.; FERNANDES, V.D.; RIBEIRO, K.C. de S. As inter-relações de ativos financeiros: um estudo sob a ótica dos diferentes intervalos de tempo das séries históricas. *Revista Organizações em Contexto - Online*, 5 (10): 81-101, jul./dez. 2009.

FANG, Y.; LAI, K.K.; WANG, S.Y. Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory. *European Journal of Operational Research,* 175 (2), 879-893, 2006.

FARIA, G.F. *Mercado financeiro.* São Paulo, Pearson Education do Brasil, 2003.

FERNANDES, A.A.G. *O sistema financeiro nacional comentado*: instituições supervisoras e operadoras do SFN & políticas econômicas, operações financeiras e administração de risco. São Paulo, Saraiva, 2006.

FERREIRA, R.J.P.; ALMEIDA FILHO, A.T. de; SOUZA, F.M.C. de. A decision model for portfolio selection. *Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, 29 (2): 403-417, maio/ago. 2009.

FORTUNA, E. *Mercado financeiro*: produtos e serviços. 17.ed. Rio de Janeiro, Qualitymark, 2008.

FROYEN, R.T. *Macroeconomia.* São Paulo, Saraiva, 2005.

GAN, Q. Location-scale portfolio selection with factor-recentered skew normal asset returns. *Journal of Economic Dynamics and Control,* 48 (1):176-187, Nov. 2014.

GITMAN, L.J. *Princípios de Administração Financeira*. 12.ed. São Paulo, Pearson Addison Wesley, 2010.

GOMES, L.F.A.M.; GOMES, C.F.S.; ALMEIDA, A.T. *Tomada de decisão gerencial:* enfoque multicritério. 3.ed. São Paulo, Atlas, 2009.

GROPPELLI, A.A. & NIKBAKHT, E. *Administração financeira*. 2.ed. São Paulo, Saraiva, 2005.

GRÔPPO, G. Co-Integração e causalidade entre as variáveis de política monetária e o Ibovespa. *Revista de Economia e Administração*, 4 (2): 229-246, abr./jun. 2005.

GUARÍN, E.B. & ESCOBAR, J.E. Un enfoque fuzzy para la prospectiva delphi. *Revista Científica Ingeniería y Desarrollo*, 14: 1-23, ago. 2003.

GUIA de investimentos. São Paulo: BM&FBOVESPA, 2013. Disponível em: <http://educacional.bmf.com.br/>. Acesso em: 13 jan. 2014.

HILLIER, F.S. & LIEBERMAN, G.J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. 8.ed. Porto Alegre, Mcgraw-Hill, 2010.

HISCHBERGER, M.; QI, Y.; STEUER, R.E. Randomly generating portfolio-selection covariance matrices with specified distributional characteristics. *European Journal of Operational Research,* 177 (3): 1610-1625, Jan. 2007.

IBRAHIM, A.M. *Fuzzy logic for embedded systems applications*. Burlington, Newnes, 2004, ISBN 9780750676052

JAIN, R. Decision-making in the presence of fuzzy variables. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, 6 (10): 698-703, 1976.

KEENEY, R.L. & RAIFFA, H. *Decisions with multiple objectives*: preferences and value tradeoffs. New York, Jonh Wiley e Sons, Inc., 1976.

KLIR, G.J. & YUAN, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic*: theory and applications. New Jersey, Prentice-Hall, 1995.

LACHTERMACHER, G. *Pesquisa Operacional na tomada de decisões*: modelagem em Excel. 3.ed. Rio de Janeiro, Elsevier, 2007, 5ª Reimpressão.

LEMGRUBER, E.F. *Gestão de risco e derivativo*: aplicações no Brasil. São Paulo, Atlas, 2001.

LI, X.; QIN, Z. Interval portfolio selection models within the framework of uncertainty theory. *Economic Modelling*, 41 (1): 338-344, Aug. 2014.

LI, X.; QIN, Z.; KAR, S. Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns. *European Journal of Operational Research,* 202 (1): 239-247, 2010.

LI, X.; ZHANG, Y.; WONG, H.S.; QIN, Z. A hybrid intelligent algorithm for portfolio selection problem with fuzzy returns. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 233 (2): 264-278, Nov. 2009.

LIMA, C.J.T. de. Processo de tomada de decisão em projetos de exploração e produção de petróleo no brasil: uma abordagem utilizando conjuntos nebulosos. Rio de Janeiro, 2003.

151p. Dissertação (Mestrado em Planejamento Energético da Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ).

LINS, G.C.N. Contribuições a um protocolo de edução do conhecimento *a priori*. Recife, 2000. 67f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE).

LINS, G.C.N.; SOUZA, F.M.C. de. A protocol for the elicitation of prior distributions. In: PROCEEDINGS OF THE SECOND INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON IMPRECISE PROBABILITIES AND THEIR APPLICATIONS, ISIPTA'01, 2001, Maastricht, The Netherlands. p. 265–273.

LIU, Y.J.; ZHANG, W.G.; ZHANG, P. A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis. *Economic Modelling*, 33 (1): 113-119, Jul. 2013.

LUQUET, M. *Guia valor econômico de finanças pessoais*. 2ed. São Paulo, Globo, 2007.

MARCONDES, M.; SILVA, V.L. da; ZANETTINI, G.; SANTO JR., R.A. do E.S. Uma abordagem fuzzy para o processo de seleção de aeronaves no Brasil. In: XI SIMPÓSIO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO (XI - SIMPEP), 2004, Bauru-SP. *Anais.* p. 1-12.

MARCONI, M. de A. & LAKATOS, E.M. *Fundamentos de Metodologia Científica*. 7.ed. São Paulo, Atlas, 2010.

MARKOWITZ, H. Porfolio selection. *The Journal of Finance*, 7 (1): 77–91, Mar. 1952.

________. *Portfolio selection*: efficient diversification of investments. New York, Wiley, 1959.

MATHWORKS, Inc. *Matlab R2013a.* Version 8.1, 2013. Disponível em: <www.mathworks.com/trademarks>. Acesso em: 09 set. 2014.

MATIAS-PEREIRA, J. *Manual de metodologia da pesquisa científica*. 2.ed. São Paulo, Atlas, 2010.

MAUAD, L.G.A.; FARIAS, A.D. de; MARTIN, D.M.L.; PAMPLONA, E.O. Preço em risco (PeR): uma alternativa para promover o crescimento com lucratividade. In: XV CONGRESSO BRASILEIRO DE CUSTOS, 2008, Curitiba. *Anais.* p. 1-16.

MELLAGI FILHO, A & ISHIKAWA, S. *Mercado financeiro e de capitais*. 2.ed. São Paulo, Atlas, 2008. 4. Reimp.

MÉLO, M.A. do N.; VIEIRA, M. das G.; PORTO, T.S. de O. *Processo decisório:* considerações sobre a tomada de decisões. Curitiba, Juruá, 2011.

MITROFF, I.; BETZ, F.; PONDY, L.R.; SAGASTI, F. On managing science in the systems age: two schemas for the study of science as a whole systems phenomenon. *Interfaces*, 4 (3): 46-58, 1974.

MORAES, A.B. de. Estudo sobre a edução da utilidade e do conhecimento *a priori*. Recife, 2003. 71f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE).

NERVIS, J.J.; CREPALDI, A.F. Estudo e análise estatística no mercado de ações brasileiro. *Revista de Economia e Administração*, 11 (3): 304-320, jul./set. 2012.

OLIVEIRA, M.H. da F. A avaliação econômico-financeira de investimentos sob condição de incerteza: uma comparação entre o método de Monte Carlo e o VPL *Fuzzy*. São Carlos, 2008. 231p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção da Universidade de São Paulo).

PEREIRA, S.C.A. Tratamento de incertezas em modelagem de bacias. Rio de Janeiro, 2002. 327p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ).

PIDD, M. *Modelagem empresarial:* ferramentas para tomada de decisão. Porto Alegre, Artes Médicas, 1998.

PINHEIRO, J.L. *Mercado de capitais*: fundamentos e técnicas. 4.ed. São Paulo, Atlas, 2008.

PRODANOV, C.C. & FREITAS, E.C. *Metodologia do Trabalho Científico:* métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2.ed. Novo Hamburgo, Feevale, 2013.

RAGSDALE, C.T. *Modelagem e análise de decisão.* São Paulo, Cengage Learning, 2009.

RAMASWAMY, S. Portfolio selection using fuzzy decision theory. *Working Paper of Bank for International Settlements*, 59, Nov. 1998.

RAMPAZZO, L. *Metodologia Científica*: para alunos dos cursos de graduação e pós-graduação. 4.ed. São Paulo, Loyola, 2009.

ROCHA, T.N. da. *Fundos de investimento e o papel do administrador:* a indústria dos fundos no mercado brasileiro e a liberdade para agir, os poderes e obrigações dos seus administradores. São Paulo, Textonovo, 2003.

ROMMELFANGER, H.J. Fuzzy Decision Theory: intelligent ways for solving real-world decision problems and for saving information costs. In: *Planning based on decision theory*. Wien-New York: Springer, 2003. Vol. 472. 135-154.

ROSS, S.A.; WESTERFIELD, R.W.; JAFFE, J.F. *Administração Financeira:* Corporate Finance. 2.ed. 7. reimp. São Paulo, Atlas, 2008.

SADJADI, S.J.; SEYEDHOSSEINI, S.M.; HASSANLOU, Kh. Fuzzy multi-period portfolio selection with different rates for borrowing and lending. *Applied Soft Computing*, 11 (4): 3821-3826, Jun. 2011.

SANTOS, F.S. dos; PRADO, R.R.A. Causalidade Selic-Ibovespa revisada. *Revista de Economia e Administração*, 5 (1): 116-138, jan./mar. 2006.

SAVAGE, L.J. *Foundations of Statistics*. 2.ed. New York, Dover, 1972.

SENGUPTA, J.K. Portfolio decisions as games. *International Journal of Systems Science*, 20 (8): 1323-1334, Jan. 1989.

SHARPE, W.F. A linear programming algorithm for a mutual fund portfolio selection. *Management Science*, 13 (1): 499-510, 1967.

________. A linear programming approximation for the general portfolio analysis problem. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6 (5): 1263-1275, Dec. 1971.

SHEN, Y.; ZHANG, X.; SIU, T.K. Mean–variance portfolio selection under a constant elasticity of variance model. *Operations Research Letters*, 42 (5): 337-342, Jul. 2014.

SHURESHJANI, R.A. & DAREHMIRAKI, M. A new parametric method for ranking fuzzy numbers. *Indagationes Mathematicae*, 24 (3): 518-529, Jun. 2013, ISSN 0019-3577.

SILVA, A.A. Estudo do modelo de famílias de distribuições de probabilidade baseado em programação matemática. Recife, 2007. 123f. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE).

________. A Teoria da Decisão em cardiologia. Recife, 2002. 156f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE).

SILVA, L.G.O.; ALMEIDA FILHO, A.T. Modelo para agregação de um grupo de especialistas baseado na Teoria de Dempster-Shafer. In: XLV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 2013, Natal. *Anais.* p. 1260-1269.

SOUSA JÚNIOR, J. de J.L. Qualidade: um enfoque por Teoria da Decisão. Recife, 2004. 101 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE).

SOUZA, Fernando M.C de. *Decisões racionais em situações de incerteza*. 2.ed. Recife, Editora Universitária da Universidade Federal de Pernambuco, 2007.

SOUZA, Fernanda M.C. de. Procedimentos para a aplicação da Teoria da Decisão. Recife, 2007. 141f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE).

STATSOFT, Inc. *Statistica (data analysis software system).* Versão 10.0, 2011. Disponível em: <www.statsoft.com>. Acesso em: 10 jul. 2014.

STONE, B.K. A linear programming formulation of the general portfolio selection problem. *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 8 (4): 621-63l, Sep. 1973.

VERGARA, S.C. *Projetos e relatórios de pesquisa em Administração*. 10.ed. São Paulo, Atlas, 2009.

von NEUMANN, J. & MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton, NJ, Princeton University Press, 1944.

WANG, Z.; KERRE, E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). *Fuzzy Sets and Systems,* 118 (3): 375-385, Mar. 2001.

WU, X.; LIU, Y. Optimizing fuzzy portfolio selection problems by parametric quadratic programming. *Fuzzy Optim. Decis. Making,* 11 (4): 411–449, Dec. 2012.

XAVIER, A. *Estratégias estatísticas em investimentos*: heurísticas seguras para investimentos e regras de gerenciamento de risco. São Paulo, Novatec Editora, 2009.

YI, L.; WU, X.; LI, X.; CUI, X. A mean-field formulation for optimal multi-period mean–variance portfolio selection with an uncertain exit time. *Operations Research Letters,* 42 (8): 489-494, Dec. 2014.

YU, V.F.; CHI, H.T.X.; SHEN, C. Ranking fuzzy numbers based on epsilon-deviation degree. *Applied Soft Computing*, 13 (8): 3621-3627, Aug. 2013, ISSN 1568-4946.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. *Information and Control,* 8 (3): 338-353, 1965.

________. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on SMC*, 3 (1): 28-44, 1973.

ZHANG, F.; IGNATIUS, J.; ZHAO, C.P.Y.L. A new method for ranking fuzzy numbers and its application to group decision making *Applied Mathematical Modelling,* 38 (4): 1563-1582, Feb. 2014, ISSN 0307-904X.

ZHANG, W.G.; LIU, Y.J.; XU, W.J. A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs. *European Journal of Operational Research,* 222 (2): 341-349, Oct. 2012.

ZHANG, W.G.; WANG, Y.L.; CHEN, Z.P.; NIE, Z.K. Possibilistic mean–variance models and efficient frontiers for portfolio selection problem. *Information Sciences,* 177 (13): 2787-2801, Jul. 2007.

ZHANG, W.G.; XIAO, W.L.; XU, W.L. A possibilistic portfolio adjusting model with new added assets. *Economic Modelling*, 27 (1): 208-213, Jan. 2010.

ZHANG, W.G.; ZHANG, X.L.; XIAO, W.L. Portfolio selection under possibilistic mean-variance utility and a SMO algorithm. *European Journal of Operational Research*, 197 (1): 693-700, Sep. 2009.

ZIMMERMANN, H. -J. An application-oriented view of modeling uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 122 (2): 190-198, Abr. 2000.