



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

## **TESE DE DOUTORADO**

**TAMANHO FINITO EM CRITICALIDADE LIFSHITZ M-AXIAL**

por

**José Borba da Silva Júnior**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Marcelo de Moura Leite (Orientador - DF-UFPE)  
Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes (DF-UFPE)  
Prof. Sérgio Galvão Coutinho (DF-UFPE)  
Prof. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IF-USP))  
Prof. Victor de Oliveira Rivelles (IF-USP)

Recife - PE, Brasil  
Outubro - 2012

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Silva Júnior, José Borba da.  
Tamanho finito em criticalidade Lifshitz / José Borba da Silva Júnior. – Recife: O Autor, 2012.  
ix, 166 f.: fig. tab.

Orientador: Marcelo de Moura Leite.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2012.  
Inclui bibliografia e apêndice.

1. Fenômenos críticos. 2. Teoria de campos escalares. 3. Pontos de Lifshitz. I. Leite, Marcelo de Moura (orientador). II. Título.

530.474 (22. ed.) FQ 2012-044



**Universidade Federal de Pernambuco**  
**Departamento de Física - CCEN**  
**Programa de Pós-Graduação em Física**  
**Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil**  
**Fone ( ++ 55 81) 2126-7640/2126-8449 - Fax ( ++ 55 81) 3271-0359**  
<http://www.ufpe.br/ppgfisica/> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## **Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado**

---

**José Borba da Silva Júnior**

### **TAMANHO FINITO EM CRITICALIDADE LIFSHITZ M-AXIAL**

A Banca Examinadora composta pelos Professores Marcelo de Moura Leite (Presidente e Orientador), Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes, Sérgio Galvão Coutinho, todos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Fernando Tadeu Caldeira Brandt e Victor de Oliveira Rivelles, ambos do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, consideram o candidato:

Aprovado

Reprovado

Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em quinze de outubro de dois mil e doze.

---

Prof. Marcelo de Moura Leite  
Presidente e Orientador

---

Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras  
Gomes

---

Prof. Sérgio Galvão Coutinho

---

Prof. Fernando Tadeu Caldeira Brandt

---

Prof. Victor de Oliveira Rivelles

# Agradecimentos

Aproveito este espaço para reconhecer a importância do autoconhecimento no desenvolvimento pessoal e de como a mente subconsciente é fundamental nesse processo. Claro, nenhuma evolução pessoal é possível sem estarmos rodeados pelas pessoas certas nos momentos certos. Entre essas pessoas, menciono primeiramente aquelas que conviveram comigo durante toda a minha vida. São elas: o meu pai (José Borba), a minha mãe (Tenilda) e a minha irmã (Tássia). Eles constituem um exemplo de família perfeita sem a qual eu não seria feliz.

Outra pessoa importante nesse processo é o meu orientador, o Prof. Marcelo Leite. Agradeço a ele pelos seis anos de dedicação, ensinamentos, paciência e principalmente por todo o incentivo que tenho recebido durante a realização do meu trabalho.

Agradeço também aos meus colegas Cláudio, Messias, Marcone, Fábio e Ulisses. Todas as conversas que tivemos juntos foram bastante proveitosas. Além disso, sou grato aos professores deste Departamento de Física, cuja competência e dedicação foram fundamentais à minha formação.

Também reconheço a importância da ajuda financeira fornecida pelo CNPq e pela FACEPE para a realização deste trabalho.

# Resumo

Através da utilização de uma *teoria de campo escalar* representada no espaço dos momentos, vamos estudar os efeitos do tamanho finito no comportamento crítico de sistemas competitivos  $m$ -axiais com  $d$  dimensões em uma geometria cujas superfícies delimitadoras são placas planas e paralelas. Tais placas são de extensão infinita e são separadas por uma distância  $L$ . O parâmetro de ordem estará sujeito a condições de contorno periódicas ou antiperiódicas ao longo das duas superfícies. Ambas as formulações com campos massivos e não-massivos serão aplicadas a fim de obter os expoentes críticos respectivamente nos limites de escalamento ultravioleta e infravermelho, que são necessários à descrição das regiões de escala presentes em sistemas com tamanho finito. Começaremos analisando sistemas sem competição ( $m = 0$ ). Vamos introduzir uma nova descrição para os regimes de “crossover” dimensional usuais relacionados com as regiões de escala. Desde que evitemos esse “crossover”, caracterizado apenas por valores pequenos de  $L$ , calcularemos os expoentes  $\nu$  e  $\eta$  perturbativamente até as respectivas ordens de dois e três *loops* e veremos que eles são idênticos aos de um sistema infinito ( $L \rightarrow \infty$ ). Em seguida, vamos estender o nosso método de análise do tamanho finito para sistemas competitivos  $m$ -axiais no ponto crítico de Lifshitz. Em uma abordagem inicial, consideraremos finita uma das direções ao longo do subespaço sem competição e observaremos um comportamento semelhante com relação ao “crossover” dimensional de sistemas não-competitivos. Para  $L$  suficientemente grande, calcularemos os expoentes críticos  $\nu_{L2}$ ,  $\eta_{L2}$ ,  $\nu_{L4}$  e  $\eta_{L4}$  até ordens de pelo menos dois *loops* com auxílio de uma aproximação especial para a regularização das integrais de Feynman. Tais expoentes serão idênticos aos do sistema infinito. O próximo passo consiste em tornar finita a direção ao longo do eixo de competição em um sistema uniaxial ( $m = 1$ ). Utilizaremos nessa configuração uma nova representação para as integrais de Feynman e, evitando a região de “crossover”, calcularemos de forma exata até ordens de dois *loops* os expoentes  $\nu_{L2}$  e  $\eta_{L2}$ . Os nossos resultados serão comparados com os expoentes obtidos por métodos aproximados e por simulações de Monte Carlo presentes na literatura.

**Palavras-chave:** Fenômenos críticos, teoria de campo, tamanho finito, pontos de Lifshitz.

# Abstract

By utilizing a scalar field theory settled in momentum space, we will study the finite-size effects in the critical behavior of  $m$ -axial competing systems with  $d$  dimensions in a layered geometry whose limiting surfaces are parallel plates. The latter are of infinite extent along  $d - 1$  dimensions and are separated by a distance  $L$ . The order parameter will be subjected to periodic as well as antiperiodic boundary conditions on both surfaces. Both massive and massless field-theoretic formulations will be applied in order to obtain the critical exponents respectively in the ultraviolet and infrared scaling limits, which are necessary to describing the scaling regions for finite-size systems. We will start by analysing systems without competition ( $m = 0$ ). We will introduce a new description for the usual dimensional crossover regimes that are related to the scaling regions. Since we avoid such a crossover, characterized only by small values of  $L$ , we will calculate the exponents  $\nu$  and  $\eta$  perturbatively up to the respective 2 and 3 loops orders and we will see that they are identical to those of the infinite systems ( $L \rightarrow \infty$ ). Next, we will extend our finite-size method of analysis to  $m$ -axial competing systems at the Lifshitz critical point. In an initial approach, we consider as finite one of the directions along the non competitive subspace and we observe a similar behavior in comparison with the dimensional crossover for non competitive systems. For  $L$  great enough, we will calculate the critical exponents  $\nu_{L2}$ ,  $\eta_{L2}$ ,  $\nu_{L4}$  and  $\eta_{L4}$  up to at least 2 loops order with the aid of a special approximation for regularizing the Feynman integrals. These exponents are identical to those obtained from infinite systems. The next step consist in making finite the direction along the competing axis in a uniaxial system ( $m = 1$ ). We will utilize in this configuration a new representation for Feynman integrals and, avoiding the crossover region, we compute in a exact way up to 2 loop order the exponents  $\nu_{L2}$  e  $\eta_{L2}$ . Our results will be compared to the exponents obtained from some approximation methods and from Monte Carlo simulations that can be found in the literature.

**Keywords:** Critical phenomena, field theory, finite-size, Lifshitz points.

# Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Teoria de Campos em Fenômenos Críticos</b>	<b>11</b>
2.1 Introdução . . . . .	11
2.2 Descrição em termos de campos contínuos . . . . .	12
2.3 Função de partição e funções de correlação . . . . .	13
2.4 Teoria da perturbação e expansão diagramática . . . . .	15
2.5 Funções de vértice . . . . .	21
2.6 Expansão no número de loops . . . . .	25
2.7 Divergências dos diagramas 1PI . . . . .	27
2.7.1 Regularização no corte dos momentos . . . . .	27
2.7.2 Regularização dimensional . . . . .	29
2.8 Renormalização das funções de vértice . . . . .	31
2.8.1 Teoria massiva . . . . .	31
2.8.2 Teoria não-massiva . . . . .	34
2.9 Grupo de renormalização . . . . .	36
2.9.1 Equações do grupo de renormalização . . . . .	36
2.9.2 Equações de Callan-Symanzik . . . . .	38
<b>3 Expoentes críticos para sistemas com geometria de placas planas e paralelas</b>	<b>39</b>
3.1 Introdução . . . . .	39
3.2 O método de Nemirovsky e Freed na teoria massiva usando condições de contorno periódicas e antiperiódicas . . . . .	41
3.3 Renormalização e equações de Callan-Symanzik . . . . .	45
3.4 Regularização dimensional das integrais de Feynman . . . . .	48
3.5 Cálculo dos expoentes críticos na teoria massiva . . . . .	54
3.6 O método NF na teoria não-massiva . . . . .	57

---

3.7	Expoentes críticos na teoria não-massiva . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Tamanho finito em sistemas competitivos do tipo Lifshitz</b>	<b>64</b>
4.1	Introdução . . . . .	64
4.2	Formulação da teoria no ponto de Lifshitz . . . . .	66
4.3	Integrais de Feynman . . . . .	71
4.4	Cálculo dos expoentes críticos . . . . .	76
4.5	Teoria massiva . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Tamanho finito ao longo do subespaço competitivo</b>	<b>85</b>
5.1	Introdução . . . . .	85
5.2	Condições de contorno e regras de Feynman aplicadas ao eixo de competição . . . . .	86
5.3	Regularização em 1 loop . . . . .	89
5.4	Integração dos quase-momentos ao longo do eixo de competição . . . . .	91
5.5	Análises assintóticas do termo de correção . . . . .	98
5.6	Crossover dimensional na teoria não-massiva . . . . .	105
5.7	Regularização em 2 loops . . . . .	110
5.8	Cálculo dos expoentes críticos . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>119</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>124</b>
	<b>Apêndice B</b>	<b>132</b>
	<b>Apêndice C</b>	<b>140</b>
	<b>Apêndice D</b>	<b>146</b>
	<b>Apêndice E</b>	<b>151</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>159</b>

# Lista de Figuras

1.1	Modelo ANNNI em uma rede cúbica tridimensional. . . . .	8
1.2	Diagrama de fase para o modelo ANNNI . . . . .	9
2.1	Diagramas de Feynman de ordem $\lambda$ . . . . .	18
2.2	Diagramas de ordem $\lambda^2$ para a função de correlação (2.35). . . . .	19
2.3	Contribuições de ordem $\lambda$ para a função (2.36). . . . .	19
2.4	Contribuições de ordem $\lambda^2$ para a função (2.36). . . . .	20
2.5	Contribuições de ordem $\lambda$ para a função (2.40). . . . .	21
2.6	Diagramas envolvidos na expansão da função de vértice $\Gamma^{(6)}$ . . . . .	25
2.7	Contribuições de ordem 2 loops para $\Gamma^{(4)}$ . . . . .	25
5.1	Plano complexo com um dos possíveis caminhos de integração na definição das funções $G$ de Meijer. . . . .	93
5.2	Domínio de convergência das séries em (5.43) determinado pela região abaixo da curva vermelha. A região cinza contém os valores reais de $x$ e $y$ quando os argumentos das funções em (5.43) são tais que $a \geq 0$ , $b \geq 0$ , com $\varphi_1$ e $\varphi_2$ sem restrições no eixo real. . . . .	97
5.3	Curvas referentes às funções de correção do tamanho finito para as teorias com e sem competição. O gráfico inserido corresponde ao mesmo conjunto de curvas com o eixo das ordenadas reescalado. . . . .	101
5.4	Plano complexo com a disposição dos polos no integrando do termo de correção dado em (5.65). . . . .	102
5.5	Gráfico da função de correção do tamanho finito na teoria não-massiva. O gráfico menor inserido corresponde às mesmas curvas com os eixos reescalados para melhor visualização do limite $\sigma'^{-1} \rightarrow \infty$ . . . . .	109
E.1	Plano complexo com um os polos do integrando da representação (E.2). Por simplicidade, consideramos $\text{Im } a = 0$ . . . . .	152

# Lista de Tabelas

- 5.1 Coeficientes de segunda ordem das expansões em  $\epsilon_L$  para os expoentes críticos . 116
- 5.2 Expoentes críticos obtidos teoricamente e através de simulações de Monte Carlo 117

# Capítulo 1

## Introdução

Um dos aspectos mais notáveis no estudo das propriedades termodinâmicas de sistemas da matéria condensada são as transições de fase. Desde os eventos mais cotidianos, como a fusão e a ebulição da água, até aqueles só observáveis em escala microscópica, como a reorientação molecular em cristais líquidos, notamos algumas características em comum. Entre elas, podemos citar a mudança abrupta de uma fase para a outra acompanhada por uma absorção ou liberação de calor. Em uma transição gás-líquido de um fluido comum, por exemplo, cada fase é caracterizada por entropias e densidades distintas, evidenciando uma descontinuidade já nas derivadas de primeira ordem do potencial termodinâmico. Por essa razão, esse fenômeno é conhecido como uma transição de fase de primeira ordem. Entretanto, essa distinção torna-se cada vez menor até desaparecer completamente quando nos aproximamos do ponto crítico. Neste caso, a descontinuidade do potencial termodinâmico só aparece em derivadas de ordem superior a um e a passagem pelo ponto crítico resulta em uma transição comumente referenciada como transição de segunda ordem. No decorrer deste trabalho, a nossa atenção estará voltada para esse segundo tipo de transição.

A primeira evidência experimental de fenômeno crítico data de 1869 [1] com a descoberta do ponto crítico do dióxido de carbono. Desde então, diversos outros tipos de substâncias foram estudadas com um comportamento semelhante. Mencionando alguns exemplos, temos as misturas binárias de líquidos e as ligas binárias de metais nas quais acima da temperatura crítica os dois componentes formam uma fase homogênea, misturando-se em quaisquer proporções; materiais ferromagnéticos e ferroelétricos cujos pontos críticos são marcados pelo aparecimento, respectivamente, de uma magnetização e polarização espontâneas;  $\text{He}^4$  líquido que passa a ser composto tanto por um superfluido quanto por fluido normal abaixo do ponto lambda e supercondutores metálicos, cuja resistência elétrica é nula abaixo da temperatura crítica. Uma revisão detalhada sobre as descrições fenomenológicas para esses materiais pode ser encontrada nas referências [2, 3]. Em particular, esta última trata dos aspectos experimentais.

A hipótese da universalidade garante que diversos sistemas físicos diferentes exibem as mesmas propriedades críticas. Consequentemente, se usarmos um determinado sistema como protótipo das transições de fase de segunda ordem, estaremos construindo uma linguagem apro-

prizada para descrever todos os demais sistemas pertencentes à mesma classe de universalidade. Por simplicidade, vamos escolher os sistemas magnéticos para expor essa linguagem. Portanto, consideremos  $F(T, h)$  como a energia livre de Helmholtz dada em função da temperatura  $T$  e do campo magnético externo  $h$ . Em transições de fase de segunda ordem, as derivadas de primeira ordem de  $F$ , tais como a entropia  $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$  e a magnetização  $M = -\frac{\partial F}{\partial h}$ , variam continuamente na passagem de  $T$  pela temperatura crítica  $T_c$ . Por outro lado, quantidades calculadas em termos de derivadas segundas da energia livre tais como a capacidade térmica  $C = T^2 \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$  e a susceptibilidade  $\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2}$  ( $V$  é o volume do sistema) apresentam singularidades nas vizinhanças de  $T_c$ . Essas singularidades aparecem como leis de potências da temperatura  $T$  em torno de  $T_c$ . Uma grandeza útil nessa descrição é a temperatura reduzida  $t$ , definida como:

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (1.1)$$

Desse modo, a aproximação da temperatura crítica ocorrerá com valores de  $t$  independentes do material a ser estudado (ou  $T_c$ ). Para  $t$  suficientemente pequeno, as seguintes leis de potência são válidas:

$$C \propto |t|^{-\alpha}, \quad (1.2a)$$

$$\chi \propto |t|^{-\gamma}, \quad (1.2b)$$

onde  $\alpha$  e  $\gamma$  são conhecidos como expoentes críticos. Quando  $\alpha = 0$ , o calor específico terá uma divergência logarítmica. Observe que já estamos admitindo que os expoentes acima e abaixo de  $T_c$  são os mesmos, embora as constantes de proporcionalidade (amplitudes) sejam diferentes. Tal afirmação é confirmada teórica e experimentalmente. Acima da temperatura crítica e com o campo magnético externo nulo, a magnetização será igual a zero. Já para  $t < 0$ , uma magnetização espontânea surgirá no sistema, sendo caracterizada pelo expoente  $\beta$ :

$$M \propto \begin{cases} 0, & t > 0, \\ |t|^\beta, & t < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

O aparecimento da magnetização assinala uma característica muito especial do fenômeno crítico: a quebra espontânea de simetria do sistema. De fato, as duas fases em ambos os lados de  $T_c$  possuem simetrias espaciais distintas. Acima de  $T_c$ , na fase desordenada paramagnética, o sistema é invariante por rotação e abaixo de  $T_c$ , na fase ordenada ferromagnética, a direção preferencial definida pela magnetização quebra a invariância rotacional do sistema. Abaixo de  $T_c$ , podemos falar de invariância rotacional apenas no subespaço perpendicular à direção da magnetização. Devido a essa diminuição na simetria, um novo parâmetro é necessário para descrever a nova fase. Essa nova quantidade é denominada parâmetro de ordem que em sistemas magnéticos corresponde à magnetização.

As singularidades da susceptibilidade e do calor específico em ferromagnetos refletem diretamente as correlações de longo alcance das interações entre os spins. Seja  $\delta s(x_i) = s(x_i) - \langle s \rangle$

a flutuação do momento de spin  $s(x_i)$  no sítio  $x_i$  em torno do valor médio  $\langle s \rangle$ . Definimos a função de correlação como:

$$G(|x_i - x_j|) = \langle \delta s(x_i) \delta s(x_j) \rangle. \quad (1.4)$$

Note que aqui estamos considerando um sistema homogêneo e isotrópico através da invariância por translação e rotação da função definida acima. A extensão das correlações é medida através do comprimento de correlação  $\xi$  associado ao comportamento assintótico de (1.4). Definindo  $r = |x_i - x_j|$  em um espaço com  $d$  dimensões, podemos escrever o limite:

$$G(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\propto} r^{-(d-2+\eta)} \exp(-r/\xi) \quad (1.5)$$

O limite  $r \rightarrow \infty$  significa aqui  $r \gg a$ , onde  $a$  corresponde ao espaçamento entre os spins em uma rede cristalina regular, sendo denominado de parâmetro de rede. As correlações de longo alcance são então evidenciadas pela divergência do comprimento de correlação com a aproximação do ponto crítico. Essa divergência é caracterizada pelo expoente  $\nu$  através de:

$$\xi \propto |t|^{-\nu}. \quad (1.6)$$

Na temperatura crítica ( $t = 0$ ),  $\xi = \infty$  e o limite assintótico de (1.4) passa a ser dado pela lei de potência escrita em termos do expoente  $\eta$ . Ainda na temperatura crítica e com o campo magnético externo  $h$  e a magnetização assumindo valores pequenos, a equação de estado do sistema é caracterizada pelo expoente  $\delta$ :

$$M \propto h^{\frac{1}{\delta}}, \quad \text{para } t = 0. \quad (1.7)$$

Em 1965, Widom [4] propôs que a energia livre deveria ser uma função homogênea nas vizinhanças do ponto crítico e dessa forma os expoentes críticos podem ser expressos em termos do grau de homogeneidade dessa função. Definindo a densidade de energia livre por  $f = F/V$  e considerando  $\xi$  como o único comprimento relevante na criticalidade, podemos escrever [5]:

$$f(t, h) = \xi^{-d} f_{\pm}(h \xi^{d_h}), \quad (1.8)$$

onde  $d_h = \frac{1}{2}(d+2-\eta)$  e  $f_{\pm}$  é uma função de escala adimensional. Os índices  $+$  e  $-$  referem-se a  $t > 0$  e  $t < 0$ , respectivamente. Usando a lei de potência (1.6) e a expressão acima, calculamos o calor específico a partir de

$$C = -T^2 \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \propto |t|^{\nu d - 2}. \quad (1.9)$$

Com o auxílio de (1.2), deduzimos a lei de escala de Josephson:

$$\alpha = 2 - \nu d. \quad (1.10)$$

Realizando um procedimento semelhante, podemos derivar as demais leis de escala:

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (\text{Fisher}), \quad (1.11a)$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (\text{Rushbrooke}), \quad (1.11b)$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1) \quad (\text{Widom}). \quad (1.11c)$$

Os seis expoentes críticos definidos aqui estão relacionados pelas quatro equações acima. Logo, basta que calculemos apenas dois deles para que todos os outros sejam determinados.

A solução exata descrevendo o comportamento crítico de sistemas magnéticos só existe em alguns casos particulares. Como exemplo, temos a solução em duas dimensões fornecida por Onsager [6] para o modelo de Ising. No entanto, uma solução exata para dimensões superiores a dois ainda não é conhecida e a melhor descrição disponível é dada pela teoria de Wilson [7–11]. Baseado no procedimento de dizimação apresentado originalmente por Kadanoff [12], Wilson introduz as equações do grupo de renormalização decorrentes de transformações de escala infinitesimais e assim as leis de escala podem ser deduzidas, resultando também no cálculo aproximado para os expoentes críticos.

No capítulo 2, apresentaremos uma reformulação e simplificação da teoria de Wilson realizada por Brézin, Le Guillou e Zinn-Justin [13–15]. Abordaremos portanto uma teoria de campo escalar  $\Phi$  com uma auto-interação do tipo  $\Phi^4$  como uma ferramenta essencial à descrição fenomenológica do comportamento crítico do sistema. As funções de correlação do sistema são expandidas em termos de diagramas de Feynman que, por sua vez, são expressos através de integrais de Feynman divergentes. A remoção dessas divergências (renormalização), seguida pela análise das equações do grupo de renormalização, permite a determinação dos expoentes críticos que são calculados perturbativamente em termos de expansões em potências do parâmetro dimensional  $\epsilon = 4 - d$ , onde  $d$  é o número de dimensões do sistema.

Ao introduzirmos um tamanho finito no sistema, vemos que talvez a forma mais natural de realizarmos isso consiste em considerarmos uma geometria de superfícies planas e paralelas em um espaço com  $d$  dimensões. Teremos portanto o sistema delimitado por duas (hiper)superfícies  $(d - 1)$ -dimensionais separadas por uma distância  $L$  finita. Trata-se basicamente de uma idealização para filmes finos. Tomando  $A$  como sendo a área dessas superfícies, enfatizamos que o volume  $V = AL$  do sistema permanece infinito, exceto por alguns casos especiais a serem também abordados durante o nosso estudo quando  $L \rightarrow 0$ . Dessa forma, todas as singularidades decorrentes das correlações de longo alcance ainda estarão presentes na criticalidade e poderemos usar a mesma linguagem dada em termos de expoentes críticos. Apesar de  $V$  permanecer infinito, vamos nos referir a esse tipo de configuração como um sistema de tamanho finito. No limite  $L \rightarrow \infty$ , reobtemos a geometria e todas as propriedades críticas do sistema de tamanho infinito.

Podemos identificar em diversos contextos físicos situações relacionadas a sistemas com geometria de superfícies planas e paralelas. Dentre as realizações experimentais, temos as medidas das curvas de coexistência de filmes finos formados pela mistura de lutidina com água [16, 17] e as medidas do calor específico e densidade de superfluido do  ${}^4\text{He}$  líquido confinado [18–20]. Já do ponto de vista teórico, teorias de campo foram utilizadas para investigar os efeitos do tamanho finito não apenas em  ${}^4\text{He}$  [21], como também em filmes finos formados por fenômenos de molhamento [22–24]. Para filmes finos formados pelo molhamento de um

determinado substrato por  ${}^4\text{He}$  e pela mistura  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ , o efeito Casimir evidenciado pela existência de forças tanto atrativas quanto repulsivas entre as interfaces líquido-substrato e líquido vapor também foi estudado [25]. Outros exemplos de origem teórica incluem os estudos envolvendo teorias quânticas de campo em espaços-tempos localmente planos e globalmente não-minkowskiano devido ao limite imposto por superfícies planas e paralelas [26–32]. O cálculo tanto da energia de vácuo quanto das auto-energias de tais teorias nesses tipos de espaços conduz a novas realizações do efeito Casimir [26–30] e de mecanismos de geração topológica de massa [30, 31]. Também não podemos deixar de mencionar a conexão existente entre o nosso estudo e a teoria quântica a temperatura finita [30, 33]. Nesse caso, o comprimento  $L$  é mapeado no parâmetro  $\beta$  (onde  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ), com o campo satisfazendo condições de contorno periódicas ou antiperiódicas nesse parâmetro dependendo de estarmos tratando de bósons ou férmions, respectivamente.

Um estudo envolvendo teoria de campo escalar em sistemas com geometria de placas planas e paralelas no contexto de fenômenos críticos foi apresentado por Nemirovsky e Freed (NF) [34, 35]. Nesse estudo, os autores utilizam o formalismo do grupo de renormalização e obtêm os mesmos expoentes críticos do sistema infinito até ordem  $\epsilon^1$ , invalidando dessa forma a conjectura de Brézin [36] sobre a impossibilidade da realização da expansão em  $\epsilon$  no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Partindo de uma formulação da teoria na qual o comprimento de correlação  $\xi$  é finito, NF realizam todas as análises levando em consideração a hipótese de escalamento proposta por Fisher e Barber [37]. Tal hipótese afirma que os efeitos do tamanho finito só aparecem quando  $\xi \sim L$ . Portanto, NF usam a variável de escala  $L/\xi$  para argumentarem sobre a validade da expansão em  $\epsilon$  na região determinada por  $L/\xi > 1$ . Por outro lado, se  $L/\xi < 1$ , NF concluem que esse cálculo perturbativo não é mais válido e os expoentes críticos passam a ser os correspondentes de um espaço com  $d - 1$  dimensões, caracterizando um “crossover dimensional”.

No capítulo 3, vamos ampliar o método de NF para incluir o cálculo dos expoentes críticos para ordens mais elevadas em  $\epsilon$ . Primeiro, utilizando o formalismo de campos massivos, mostraremos que os expoentes críticos do sistema de tamanho finito com o tipo de geometria de nosso interesse são idênticos àqueles do sistema infinito análogo. Essa afirmação feita anteriormente por NF no caso de expoentes calculados em primeira ordem em  $\epsilon$  é confirmada pelos nossos cálculos. Durante esse procedimento, ficará evidente que as integrais de Feynman correspondem àquelas associadas ao sistema infinito, cujas singularidades manifestam-se em termos de polos em  $\epsilon$  seguido por termos regulares em  $\epsilon$  que dependem explicitamente de  $L$ , sendo portanto denominado de correção do tamanho finito. As nossas análises estarão restritas apenas às condições de contorno periódicas e antiperiódicas, impostas no campo  $\Phi$  ao longo das superfícies delimitadoras. Tais restrições espaciais não quebram a invariância translacional do sistema, simplificando consideravelmente o nosso estudo.

Além disso, introduziremos a discussão de tamanho finito usando campos de massa nula. Nesse caso, o comprimento de correlação do sistema é infinito. Mostraremos então que um novo regime de “crossover dimensional”, diferente daquele sugerido por NF, surgirá. Em particular, veremos que a variável de escala  $L/\xi$  é inadequada para demarcar os limites de validade da expansão  $\epsilon$ . Entretanto, as condições para validade da expansão em  $\epsilon$  e, por conseguinte, do

cálculo dos expoentes estão em perfeita concordância com a correspondente análise na teoria massiva. Os resultados desse nosso estudo podem ser encontrados nas referências [38, 39].

A descrição realizada até o presente momento para os sistemas magnéticos considera apenas interações ferromagnéticas, nas quais os spins tendem a se alinharem paralelamente. Se além disso, introduzirmos interações antiferromagnéticas, que induzem a um alinhamento antiparalelo, intercaladas com interações ferromagnéticas, é possível realizar um exemplo simples de sistema competitivo. Como resultado, além das fases paramagnética e ferromagnética, podemos identificar uma fase com uma modulação periódica na magnetização. A confluência dessas três fases determina um ponto (multicrítico) no diagrama de fase conhecido como *ponto de Lifshitz*. Dois exemplos típicos de compostos magnéticos exibindo esse tipo de comportamento são dados pelo  $MnP$  [40–44] e pelo  $Mn_{0,9}Co_{0,1}P$  [45, 46]. Interações competitivas não são uma exclusividade de sistemas magnéticos. Elas ocorrem em geral toda vez que um sistema crítico exibe interações de curto alcance com sinais alternados. As direções espaciais ao longo das quais as interações alternadas ocorrem são chamadas de eixos de competição. Podemos identificar na literatura diversos outros exemplos incluindo semicondutores ferroelétricos [47–49], sais de transferência de carga [50, 51] e alguns tipos especiais de cristais líquidos [52–57] e polímeros [58–61].

O principal representante de um semicondutor ferroelétrico exibindo competição é dado por  $Sn_2P_2(S_{1-x}Se_x)_6$ , cujas propriedades refrativas, acusto-ópticas e eletro-ópticas têm despertado bastante interesse. Nesse composto, a concentração  $x$  de selênio desempenha um papel fundamental na determinação do tipo de transição de fase observada. Para  $x \lesssim 0,28$ , haverá uma transição de segunda ordem entre a fase paraelétrica e a ferroelétrica. Já para  $x \gtrsim 0,28$ , essa transição ocorrerá entre a fase paraelétrica e a fase com uma modulação periódica no vetor de polarização. Se o comprimento de onda dessa modulação não é um múltiplo do parâmetro de rede, temos o que é comumente conhecido como fase incomensurável. Diminuindo ainda mais a temperatura, chegaremos a uma transição de primeira ordem dessa fase incomensurável para a ferroelétrica. O ponto de Lifshitz está então situado em  $x \approx 0,28$  a uma temperatura de aproximadamente  $281 K$  [49].

Sais de transferência de carga são constituídos por um certo número  $n$  de moléculas doadoras  $D$  que forneceram (cada uma conjuntamente) um elétron para uma molécula receptora  $A$ , resultando no composto  $A_nD$ . As moléculas doadoras são então empilhadas de modo que os orbitais moleculares se sobreponham e gerem um mecanismo de condução elétrica [62]. No entanto, a condutividade elétrica é perdida quando esse tipo de composto sofre uma transição metal-isolante. Tomando como exemplo o sal representado por TTF-TCNQ [50], ao diminuirmos a temperatura  $T$  até  $54 K$  e mantendo a amostra sob pressão atmosférica, chegamos à transição de segunda ordem entre a fase metálica (condutora) e a fase isolante na qual a distribuição de cargas  $\rho$  segue a periodicidade da cadeia molecular (fase comensurável). Prosseguindo com a diminuição de  $T$  até  $49 K$  à mesma pressão, teremos uma transição (também de segunda ordem) para uma fase incomensurável caracterizada pela modulação de  $\rho$  cujo vetor de onda cresce continuamente ao decrescermos  $T$  a partir da temperatura crítica. Na referência [50], é cogitada a possibilidade de um ponto de Lifshitz a uma pressão mais elevada e com uma tem-

peratura no intervalo de  $49 K$  a  $54 K$ . Observamos que essa descrição é bastante simplificada, pois o TTF-TCNQ pode conter vários pontos de Lifshitz [51].

Em cristais líquidos, os efeitos da competição aparecem em três fases esméticas ( $Sm$ ), denominadas  $Sm-A$ ,  $Sm-C$  e  $Sm-C^*$ . Em uma fase esmética, as moléculas desse tipo de composto, geralmente alongadas e na forma de bastonetes, estão arranjadas em planos (planos esméticos) e alinhadas em uma direção bem definida, podendo se deslocar livremente nessas camadas conforme acontece em um líquido. Na fase  $Sm-A$ , as moléculas alinham-se paralelamente ao vetor normal  $\hat{n}$  do plano esmético enquanto que na fase  $Sm-C$ , esse alinhamento ocorre de forma oblíqua, resultando em um ângulo  $\varphi$  em relação ao vetor  $\hat{n}$ . Quando o ângulo  $\varphi$  possui uma variação periódica ao longo da direção paralela a  $\hat{n}$ , temos a fase  $Sm-C^*$ . Se começarmos com um cristal líquido na fase  $Sm-A$  e com um campo magnético externo  $h$  suficientemente fraco e paralelo aos planos esméticos, a diminuição da temperatura  $T$  resulta em uma transição de segunda ordem para a fase  $Sm-C^*$ . Aumentando  $h$  até um valor crítico  $h_c$ , a modulação periódica de  $\varphi$  desaparece e entramos na região da fase  $Sm-C$ . Caso tivéssemos começado com  $h$  acima do valor crítico e na fase  $Sm-A$ , a diminuição de  $T$  acarretaria em uma transição para a fase  $Sm-C$ . A confluência dessas três fases no diagrama  $T$  versus  $h$  determina o ponto de Lifshitz.

Pontos de Lifshitz também aparecem em misturas de copolímeros e homopolímeros. Diferentemente de um homopolímero, um copolímero é composto de dois (ou mais) tipos de monômeros. Um exemplo desse tipo de sistema é dado pela mistura de polietilenopropileno com polietileno [59]. Como resultado das interações repulsivas e atrativas entre os monômeros, podemos identificar novamente três fases confluindo para um ponto de Lifshitz no diagrama de fase temperatura  $T$  versus a concentração  $\phi$  do homopolímero. Para  $T$  acima da temperatura crítica e  $\phi$  pequeno, teremos a fase homogênea (desordenada). Com a diminuição de  $T$  e mantendo  $\phi$  fixo, uma transição de segunda ordem ocorre na direção de uma fase lamelar na qual uma periodicidade estrutural pode ser observada. Aumentando a concentração  $\phi$ , o comprimento de onda dessa fase cresce continuamente até o sistema exibir uma separação em duas fases. Uma transição para esse estado também ocorreria se tivéssemos partido com  $\phi$  suficientemente grande e diminuindo apenas  $T$  a partir da fase desordenada.

Por razões de simplicidade, usaremos novamente a linguagem de sistemas magnéticos para ilustrar uma realização microscópica de interações competitivas. Consideremos portanto o modelo ANNNI (axial next-nearest-neighbour Ising) introduzido por Elliot [63]. Trata-se de uma extensão do modelo de Ising no qual interações antiferromagnéticas competem com interações ferromagnéticas. A figura 1.1 mostra o modelo ANNNI aplicado a uma rede cristalina cúbica em um espaço com três dimensões. Em cada camada ao longo do plano  $xy$ , existem apenas interações ferromagnéticas com acoplamento  $J_0 > 0$  entre os spins mais próximos, como o usual no modelo de Ising. A competição aparece apenas ao longo da direção  $z$  onde dois tipos de acoplamento  $J_1$  e  $J_2$  estão presentes. O primeiro deles refere-se à interação ferromagnética na qual os spins interagem com os primeiros vizinhos e são forçados a um alinhamento paralelo. O segundo tipo de acoplamento representa a interação antiferromagnética entre um spin e o seu correspondente segundo vizinho, forçando-os a uma configuração antiparalela. Portanto,

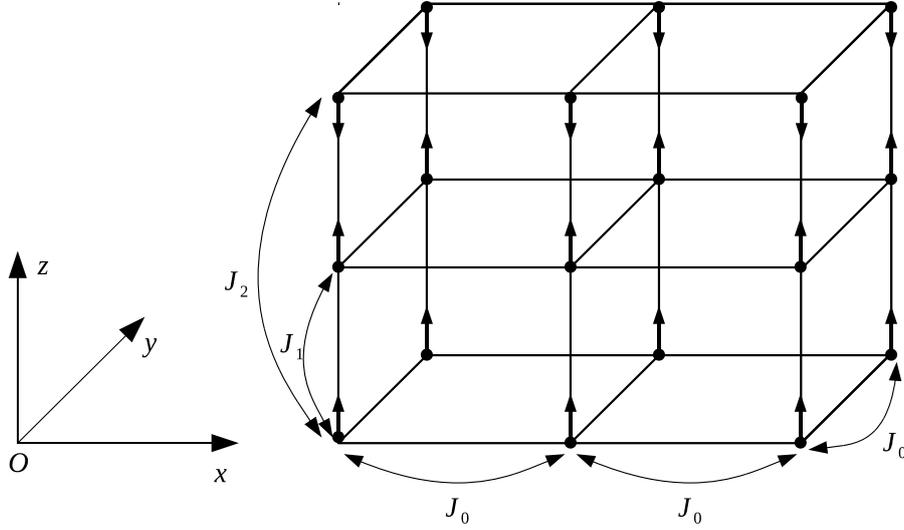


Figura 1.1: Modelo ANNNI em uma rede cúbica tridimensional.

escrevemos  $J_1 > 0$  e  $J_2 < 0$ . Considerando  $S_{\rho,z}$  como a variável de spin em um sítio  $\rho = (x, y)$  de uma camada na posição  $z$ , podemos então escrever a hamiltoniana do sistema da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = -J_0 \sum_{x,y,z} [S_{(x,y),z} S_{(x+1,y),z} + S_{(x,y),z} S_{(x,y+1),z}] - \sum_{\rho,z} (J_1 S_{\rho,z} S_{\rho,z+1} + J_2 S_{\rho,z} S_{\rho,z+2}).$$

Vamos nos referir ao eixo  $z$  como *subespaço competitivo*. Por outro lado, o plano  $xy$  ao longo do qual não há competição, será denominado *subespaço não-competitivo*.

A variável  $p = -\frac{J_2}{J_1}$  desempenha um papel crucial na descrição das transições de fase de um sistema exibindo competição. A figura 1.2 mostra o diagrama de fase esquemático do modelo ANNNI obtido através de simulação de Monte Carlo [64]. O ponto de Lifshitz (PL) é representado pelo par de coordenadas  $(p_L, T_L)$ . Para  $p < p_L$ , a interação ferromagnética é dominante e continuaremos tendo uma transição de segunda ordem entre a fase desordenada paramagnética e a fase ordenada ferromagnética ao longo da linha  $T_c(p)$  referente à temperatura crítica. Já para  $p > p_L$ , a transição de segunda ordem é entre a fase desordenada e a modulada. Na fase modulada, a magnetização apresenta uma variação senoidal ao longo do subespaço competitivo, cujo vetor de onda tende continuamente a zero com a aproximação do ponto de Lifshitz. Diminuindo a temperatura e mantendo  $p > 0.5$ , o sistema entra na região antifásica. Nessa região, o antiferromagnetismo passa a ser predominante e os spins apresentarão uma ordenação do tipo  $\cdots \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow \cdots$ . As linhas tracejadas representam transições de primeira ordem. O leitor interessado em mais detalhes sobre as regiões de modulação e de antifase pode consultar a ref. [65] para uma revisão sobre o assunto.

Podemos generalizar o modelo ANNNI para incluir interações competitivas em mais de uma

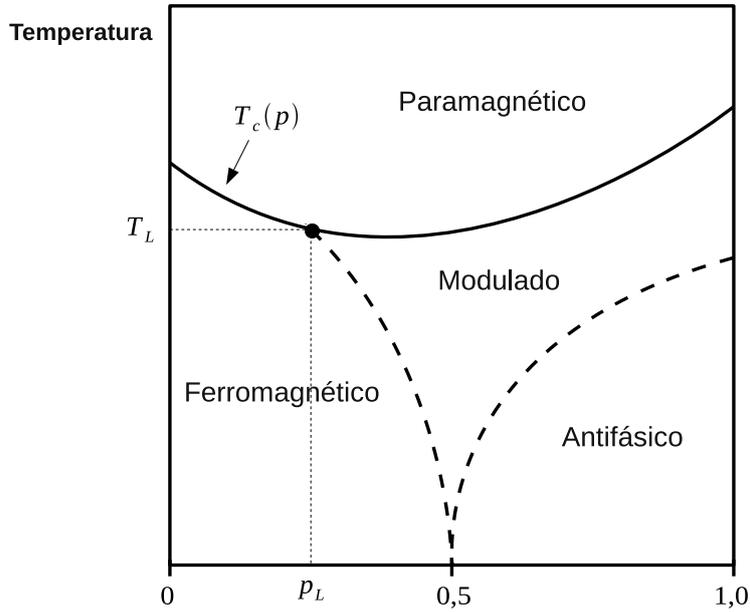


Figura 1.2: Diagrama de fase para um sistema com competição descrito pelo modelo ANNNI (ref. [64]).

direção. Portanto, seja  $d$  o número de dimensões espaciais, escolhamos  $m \leq d$  como sendo o número de dimensões do subespaço competitivo, resultando no subespaço não-competitivo com  $d - m$  dimensões e compondo o que é conhecido como sistema  $m$ -axial. A figura 1.1, por exemplo, exibe um modelo uniaxial ( $m = 1$ ). Se  $d = m$ , teremos o subespaço não-competitivo ausente e o sistema será isotrópico. Neste trabalho, estamos interessados apenas nos sistemas anisotrópicos ( $m < d$ ).

A existência de um subespaço contendo interações competitivas altera significativamente o comportamento crítico do sistema no ponto de Lifshitz. Neste caso, as flutuações do parâmetro de ordem nas vizinhanças desse ponto crítico terão uma natureza distinta no subespaço competitivo quando comparadas ao subespaço sem competição. A primeira análise desse tipo de problema utilizando uma descrição matemática em termos de campos escalares foi apresentada por Hornreich, Luban e Shtrikman [66] em 1975. Nessa nova descrição, o parâmetro dimensional em potências do qual os expoentes críticos são expandidos será modificado para  $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$ , incluindo assim o número  $m$  de dimensões do subespaço competitivo. Em virtude da anisotropia do sistema, a função de correlação, análoga àquela definida em (1.4), terá um escalamento diferente para cada subespaço sob consideração. Portanto, teremos dois tipos de comprimentos de correlação que chamaremos de  $\xi_{L4}$  e  $\xi_{L2}$  para os subespaços com e sem competição, respectivamente. Além disso, novos expoentes críticos devem ser inseridos para descrever as singularidades da função e dos comprimentos de correlação na criticalidade. Temos então os expoentes  $\eta_{L4}$  e  $\nu_{L4}$  para o subespaço competitivo enquanto  $\eta_{L2}$  e  $\nu_{L2}$  para o

subespaço não competitivo, em analogia às definições para  $\eta$  e  $\nu$  realizadas em sistemas sem competição.

No capítulo 4, vamos introduzir um método de tratamento dos efeitos de tamanho finito análogo ao método de NF para sistemas exibindo pontos de Lifshitz anisotrópicos  $m$ -axiais. Começamos com a formulação de campos sem massa. Em seguida, introduzimos a descrição em termos de campos massivos. Usando condições de contorno periódicas e antiperiódicas, calculamos os expoentes críticos quando a direção de tamanho finito é perpendicular aos  $m$  eixos de competição. Mostraremos que as condições para a validade da expansão  $\epsilon_L$  são similares às aquelas encontradas para os sistemas finitos sem competição. Provamos a equivalência entre os nossos resultados para os expoentes críticos e aqueles obtidos para sistemas de tamanho infinito, uma vez que usamos o mesmo método de aproximação para calcular as integrais de Feynman de ordens mais altas.

No capítulo 5, vamos analisar o caso uniaxial quando a direção de tamanho finito coincide com a direção de competição. Utilizando uma transformação fornecida pela fórmula da soma de Poisson, podemos expressar as integrais de Feynman em termos de uma série cuja primeira contribuição é atribuída ao sistema infinito. As correções de tamanho finito são identificadas com os demais termos da série, que correspondem a representações integrais de Mellin-Barnes com caminhos de integração no plano complexo convenientes ao problema. Mostramos que esses termos de correção tendem a zero no limite  $L \rightarrow \infty$ . Identificamos a região de crossover dimensional, que é similar àquela estudada no capítulo 4. Como bônus, calculamos de forma exata até ordem  $\epsilon_L^2$  e pela primeira vez os expoentes críticos perpendiculares ao eixo de competição. Comparamos esses resultados com aqueles obtidos da aproximação descrita no capítulo 4 através da análise quantitativa dos desvios relativos entre os coeficientes de  $\epsilon_L^2$ . Realizamos também uma comparação com outros resultados na literatura, como a expansão  $\epsilon_L$  numérica no espaço das coordenadas e simulações de Monte Carlo.

# Capítulo 2

## Teoria de Campos em Fenômenos Críticos

### 2.1 Introdução

Introduzida inicialmente para descrever eletrodinâmica quântica, a teoria de campos apresenta-se como uma ferramenta poderosa na descrição do caráter universal das transições de fase de segunda ordem. Com a introdução das ideias de grupo de renormalização de Wilson [7], as leis de escala para as funções de correlação puderam ser obtidas analiticamente e um grande progresso foi feito na direção do cálculo dos expoentes críticos e no estabelecimento de novas classes de universalidade.

No presente capítulo, abordaremos os elementos essenciais da teoria de campos envolvidos na descrição de fenômenos críticos. Consideraremos um modelo de campo escalar com simetria  $O(N)$  e interação do tipo  $\Phi^4$ , de onde podemos estabelecer uma conexão com sistemas ferromagnéticos de volume infinito. Apenas a fase desordenada (simétrica) será discutida. As funções de vértice  $1PI$  serão calculadas até ordem dois loops na expansão em diagramas de Feynman e as divergências no ultravioleta removidas através de condições de renormalização tanto na teoria massiva quanto na não-massiva. A subsequente aplicação do formalismo de grupo de renormalização permite o cálculo perturbativo dos expoentes críticos  $\eta$  e  $\nu$  em termos de expansões em potências de  $\epsilon = 4 - d$  (expansão em  $\epsilon$ ), onde  $d$  é a dimensão espacial. Os coeficientes dessa expansão estão intimamente relacionados com o tipo de simetria da interação do campo, apresentando uma dependência em  $N$ . Uma classe de universalidade é então estabelecida: os expoentes críticos dependem apenas dos valores no par  $(N, d)$ . A equivalência entre as teorias massiva e não-massiva é evidenciada através da obtenção dos mesmos resultados para  $\eta$  e  $\nu$  a partir das análises de escala nas regiões ultravioleta e infravermelha, respectivamente.

Não teremos o compromisso com uma descrição detalhada e rigorosa do assunto. O leitor interessado em maiores detalhes pode consultar as refs. [13–15] (nos quais nos baseamos fortemente) para uma análise bem mais abrangente. Nosso principal objetivo aqui é lançar

as bases para a descrição do comportamento crítico de sistemas com tamanho finito. Nos próximos capítulos, discutiremos as várias situações envolvendo tamanho finito em geometrias de superfícies planas e paralelas.

## 2.2 Descrição em termos de campos contínuos

Consideremos um sistema composto por spins dispostos em uma rede regular com espaçamento  $a$ . O fato do comprimento de correlação  $\xi$  ser muito maior que  $a$  nas vizinhanças do ponto crítico e de estarmos explorando distâncias grandes comparadas com  $a$  nas funções de correlação permite que esse sistema discreto possa ser modelado em termos de campos escalares contínuos. Portanto, definimos  $\Phi_i(x)$  como um campo escalar com  $N$  componentes ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) e com coordenadas  $x$  em um espaço  $d$ -dimensional. Na fase desordenada, o sistema é invariante por rotação e a densidade lagrangiana correspondente deve ter simetria  $O(N)$ , podendo ser escrita na seguinte forma:

$$\mathcal{L}[\Phi(x)] = A_0(\nabla\Phi)^2 + A_1\Phi^2(x) + A_2\Phi^4(x), \quad (2.1)$$

onde

$$(\nabla\Phi)^2 = \sum_{i=1}^N \nabla\Phi_i(x) \cdot \nabla\Phi_i(x), \quad (2.2a)$$

$$\Phi^2(x) = \sum_{i=1}^N [\Phi_i(x)]^2, \quad (2.2b)$$

$$\Phi^4(x) = [\Phi^2(x)]^2 = F_{i,j,k,l} \Phi_i(x) \Phi_j(x) \Phi_k(x) \Phi_l(x), \quad (2.2c)$$

de onde determinamos o tensor:

$$F_{i,j,k,l} = \frac{1}{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (2.3)$$

Os índices repetidos em (2.2c) são somados de 1 a  $N$ . De agora em diante, usaremos sempre essa convenção da soma para índices repetidos.

A densidade lagrangiana (2.1) (também chamada de hamiltoniana nos primórdios da formulação de teoria de campos para o problema de transições de fase e fenômenos críticos) é conhecida como a lagrangiana de Landau-Ginzburg-Wilson. Os termos quadráticos e quárticos referem-se à formulação da teoria de campo médio de Landau, na qual o campo não varia com a posição. A introdução do termo de gradiente passa a levar em conta as flutuações do campo ao longo de todo o sistema sob consideração. Tal como acontece na teoria de Landau, o campo  $\Phi(x)$  constitui o parâmetro de ordem.

Apenas os três termos em (2.1) são relevantes na descrição do comportamento crítico do sistema. Quaisquer outros monômios com derivadas de ordens mais elevadas e potências maiores não contribuirão para as singularidades nos observáveis físicos, resultando em um mesmo

comportamento crítico. Entretanto, existe uma situação apresentada por sistemas com interações competitivas no ponto de Lifshitz na qual termos com derivadas de segunda ordem são necessários. Discutiremos esse ponto no capítulo 4.

Os coeficientes  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  ainda aparecem aqui de forma indeterminada. Tomando  $A_0$  como uma quantidade adimensional, vemos que  $A_1$  deve ter dimensão de inverso de comprimento ao quadrado ou de momento ao quadrado. Em unidades naturais,  $A_1$  passa então a ter dimensão de massa ao quadrado. Se fixarmos  $A_0 = \frac{1}{2}$  e  $A_1 = \frac{\mu^2}{2}$ , temos  $\mu$  funcionando como um parâmetro de massa em uma teoria quântica de campo escalar no espaço euclidiano [67]. No entanto, o nosso caso corresponde a uma descrição termodinâmica de equilíbrio e portanto o campo  $\Phi(x)$  não tem dependência temporal. O próximo coeficiente  $A_2$  multiplica o termo quártico  $\Phi^4$  e podemos pensar nele como uma constante de acoplamento de um campo autointeragente. Aqui, escrevemos  $A_2 = \frac{\lambda}{4!}$  onde o fator  $\frac{1}{4!}$  entra como um artifício numérico no cancelamento dos fatores simetria dos diagramas de Feynman durante a expansão diagramática (ver seção 2.4). Portanto, (2.1) escrita em termos da massa  $\mu$  e da constante de acoplamento  $\lambda$  torna-se:

$$\mathcal{L}[\Phi(x)] = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\Phi^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\Phi^4(x) \quad (2.4)$$

A conexão da densidade lagrangiana acima com um sistema físico exibindo comportamento crítico é estabelecida fazendo  $\mu^2$  proporcional à temperatura reduzida  $t$ . A constante de proporcionalidade dependerá naturalmente de propriedades intrínsecas do sistema. Para o modelo de Ising [15], por exemplo, podemos escrever  $\mu^2 = \frac{t}{a^2}$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede. A constante de acoplamento também dependerá do sistema sob consideração. No entanto, desde que modelos construídos com (2.1) tendo  $A_1 \sim t$  resultam sempre nos mesmos expoentes críticos, as dependências de  $\mu^2$  e  $\lambda$  com um sistema em particular não serão importantes no nosso estudo.

## 2.3 Função de partição e funções de correlação

Em teoria de campos, o funcional gerador das funções de Green pode ser escrito em termos da amplitude de transição de fase entre os estados no tempo  $t \rightarrow -\infty$  (estados *in*) e os estados em  $t \rightarrow \infty$  (estados *out*). A formulação de integral funcional permite que façamos uma série de manipulações matemáticas resultando em um funcional gerador relacionado diretamente com a densidade lagrangiana clássica. Em mecânica estatística, podemos associar o funcional gerador com a função de partição do sistema. Realizando essa analogia de forma literal, escrevemos a função de partição como:

$$Z[h] = \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\Phi \exp \left( - \int d^d x \{ \mathcal{L}[\Phi(x)] - \mathbf{h}(x)\Phi(x) \} \right), \quad (2.5)$$

onde introduzimos um campo magnético externo  $h(x)$  interagindo com  $\Phi$  através do termo  $-\mathbf{h}(x)\Phi(x) = -h_i(x)\Phi_i(x)$ . Podemos representar a medida  $\mathcal{D}\Phi$  da integração funcional como:

$$\mathcal{D}\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n d\Phi(x_i). \quad (2.6)$$

O sistema foi então dividido em  $n \rightarrow \infty$  cubos de volume  $a^d$  (sendo  $a$  o parâmetro de rede) com cada coordenada  $x_i$  pertencente a um desses cubos.  $d\Phi(x_i)$ , por sua vez, é a medida de integração da variável de campo  $\Phi(x_i)$  em cada cubo. Desde que não estamos explorando propriedades intrínsecas do sistema (fazendo a escala de comprimento muito maior que  $a$ ), a representação acima possui um apelo heurístico muito forte. Podemos ver isso como uma aproximação hidrodinâmica, na qual a granulação do sistema não é levada em consideração. A constante  $\mathcal{N}$  em (2.5) é escolhida através da condição de normalização:

$$Z[h = 0] = 1. \quad (2.7)$$

Definimos as funções de correlação (ou funções de Green) de  $E$  pontos através da média:

$$\begin{aligned} G_{i_1, \dots, i_E}^{(E)}(x_1, \dots, x_E) &= \langle \Phi_{i_1}(x_1) \cdots \Phi_{i_E}(x_E) \rangle |_{h=0} \\ &= \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\Phi \Phi_{i_1}(x_1) \cdots \Phi_{i_E}(x_E) \exp\left(-\int dx \mathcal{L}[\Phi(x)]\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

A magnetização é obtida fazendo  $E = 1$ , ou seja,  $M_i(x) = \langle \Phi_i(x) \rangle |_{h=0} = G_i^{(1)}(x)$ . A fase ordenada aparece quando  $G_i^{(1)}(x) \neq 0$ , com o surgimento de uma magnetização espontânea (quebra espontânea de simetria). O nosso estudo refere-se apenas à fase simétrica:  $G_i^{(1)}(x) = 0$ . Para  $E = 2$ , temos a função de correlação de 2 pontos, de onde podemos calcular o comprimento de correlação através da definição:

$$\xi^2 = \frac{\int d^d(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^2 G_{i,i}^{(2)}(x_1, x_2)}{\int d^d(x_1 - x_2) G_{i,i}^{(2)}(x_1, x_2)}. \quad (2.9)$$

Podemos escrever (2.8) em termos de derivadas funcionais de  $Z[h]$ . Antes disso, consideremos uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Uma derivada funcional de  $f(x)$  com relação a  $f(y)$  tem a seguinte propriedade:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x - y). \quad (2.10)$$

Note como esse resultado é análogo a  $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$  no espaço das coordenadas. Portanto, a derivada de um funcional dado por

$$F[f] = \int d^d y g(y) f(y) \quad (2.11)$$

com relação a  $f(x)$ , resulta em

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} = g(x), \quad (2.12)$$

onde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável em todo o espaço. Agora, usando o conceito de derivada funcional e a partir de (2.5) e (2.8), podemos reescrever as funções de Green como:

$$G_{i_1, \dots, i_E}^{(E)}(x_1, \dots, x_E) = \frac{\delta^E Z[h]}{\delta h_{i_1}(x_1) \dots \delta h_{i_E}(x_E)} \Big|_{h=0}. \quad (2.13)$$

As funções de Green até então consideradas são úteis no cálculo de quantidades como a magnetização, susceptibilidade e comprimento de correlação. Por outro lado, se quisermos calcular o calor específico ou a correlação da densidade de energia com a magnetização, devemos considerar médias com o campo composto  $\Phi^2(x)$ :

$$\begin{aligned} G_{i_1, \dots, i_E, j_1, \dots, j_L}^{(E,L)}(x_1, \dots, x_E, y_1, \dots, y_L) &= 2^{-L} \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_E}(x_E) \Phi_{j_1}^2(y_1) \dots \Phi_{j_L}^2(y_L) \rangle \\ &= 2^{-L} G_{i_1, \dots, i_E, j_1, j_1, \dots, j_L, j_L}^{(E+2L)}(x_1, \dots, x_E, y_1, y_1, \dots, y_L, y_L). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Se introduzirmos o termo

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N t_j(y) \Phi_j^2(y) \quad (2.15)$$

na densidade lagrangiana (2.4), podemos expressar (2.14) da seguinte forma:

$$G_{i_1, \dots, i_E, j_1, \dots, j_L}^{(E,L)}(x_1, \dots, x_E, y_1, \dots, y_L) = \frac{\delta^{E+L} Z[h, t]}{\delta h_{i_1}(x_1) \dots \delta h_{i_E}(x_E) \delta t_{j_1}(y_1) \dots \delta t_{j_L}(y_L)} \Big|_{\substack{h=0 \\ t=0}}. \quad (2.16)$$

Note como (2.15) introduz uma mudança na temperatura reduzida  $\mu^2$  em (2.4). Se em (2.13) tínhamos apenas derivadas da função de partição com relação a  $h$ , agora em (2.16), temos também derivadas com relação à temperatura.

## 2.4 Teoria da perturbação e expansão diagramática

A integral funcional em (2.5) torna-se bastante difícil de ser calculada devido ao termo de interação  $\Phi^4$  presente em (2.4). Esse problema é contornado ao reescrevermos (2.5) em um formato no qual possamos realizar uma expansão na constante de acoplamento  $\lambda$ . Trata-se basicamente de uma expansão em torno da teoria livre (sem interação). Para tal fim, dividiremos a lagrangiana (2.4) na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.17)$$

onde

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\nabla^2 \Phi)^2 + \frac{\mu^2}{2} \Phi^2, \quad (2.18)$$

corresponde à parte livre da teoria e

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \Phi^4 = \frac{\lambda}{4!} F_{i,j,k,l} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l, \quad (2.19)$$

à parte interagente. A função de green (propagador) do sistema livre é obtida portanto através da equação

$$(\nabla_x^2 - \mu^2)G_0(x, y) = -\delta(x - y), \quad (2.20)$$

de onde já podemos escrever  $G_0(x, y) = G_0(x - y) = G_0(y - x)$ . Desse modo, a função de partição (2.5) pode ser reescrita como:

$$Z[h] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left[ - \int d^d x \mathcal{L}_{int} \left( \frac{\delta}{\delta h(x)} \right) \right] Z_0[h], \quad (2.21)$$

onde  $Z_0[h]$  corresponde à função de partição sem a interação, sendo dada em termos do propagador  $G_0(x - y)$  da seguinte forma:

$$Z_0[h] = \exp \left( \frac{1}{2} \int d^d x d^d y G_0(x - y) h_i(x) h_i(y) \right). \quad (2.22)$$

Calcular as derivadas do funcional  $Z_0[h]$  com relação a  $h$  é agora uma tarefa simples. Como exemplo, consideremos a sequência de derivações:

$$G_{0\,i_1, i_2}^{(2)}(x, y) = \left. \frac{\delta^2 Z_0[h]}{\delta h_{i_1}(x) \delta h_{i_2}(y)} \right|_{h=0} = \delta_{i_1 i_2} G_0(x - y). \quad (2.23)$$

Na ausência de interação ( $\lambda = 0$ ), vemos que a função de correlação de 2 pontos é exatamente igual ao propagador da teoria livre.

Devido à invariância translacional do sistema, torna-se mais conveniente considerar a teoria no espaço dos momentos. A lei de conservação dos momentos proveniente dessa invariância tornará a nossa análise mais simples e direta durante a expansão em  $\lambda$ . Portanto, em termos dos correspondentes componentes de Fourier, reescrevemos (2.21) e (2.22) como:

$$Z[h] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left[ - \frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \int d^d k_1 \dots d^d k_4 \delta(k_1 + \dots + k_4) \frac{\delta^4}{\delta h_{i_1}(-k_1) \dots h_{i_4}(-k_4)} \right] Z_0[h], \quad (2.24)$$

$$Z_0[h] = \exp \left( \frac{1}{2} \int d^d k G_0(k) h_i(k) h_i(-k) \right), \quad (2.25)$$

onde definimos

$$G_0(k) = \frac{1}{k^2 + \mu^2}, \quad (2.26)$$

como a solução de (2.20) no espaço dos momentos. Além disso, o componente de Fourier das funções de correlação em (2.16) é dado por:

$$G_{i_1, \dots, i_E; j_1, \dots, j_L}^{(E, L)}(k_1, \dots, k_E, p_1, \dots, p_L) = \frac{\delta^{E+L} Z[h]}{\delta h_{i_1}(-k_1) \dots \delta h_{i_E}(-k_E) \delta t_{j_1}(-p_1) \dots \delta t_{j_L}(-p_L)} \Bigg|_{\substack{h=0 \\ t=0}}. \quad (2.27)$$

Considerando a definição (2.9) também no espaço dos momentos com a função de correlação em ordem zero dada em (2.23), chegamos à expressão:

$$\xi^2 = \left[ -\frac{1}{G_0(k)} \frac{\partial}{\partial k^2} G_0(k) \right]_{k=0}. \quad (2.28)$$

Substituindo  $G_0(k)$  apresentado em (2.26), calculamos:

$$\xi = \sqrt{2} \mu^{-1} \propto t^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Comparando a expressão acima com (1.6), determinamos o expoente  $\nu = \frac{1}{2}$  em ordem zero na teoria da perturbação. Observe que nessa ordem  $\nu$  é igual ao resultado fornecido pela teoria de campo médio.

O resultado (2.23) corresponde ao termo de ordem zero em  $\lambda$  na expansão da função de Green de 2 pontos. Os demais termos são obtidos através da série de Taylor da função exponencial presente em (2.24). Vemos portanto que o  $n$ -ésimo termo dessa expansão (a menos da constante  $\mathcal{N}^{-1}$ ) consistirá em:

$$\frac{\delta^2}{\delta h_{i_1}(-k_1) \delta h_{i_2}(-k_2)} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{\lambda}{4!} \right)^n \times \\ \times \left[ F_{i_1, \dots, i_4} \int d^d q_1 \dots d^d q_4 \delta(q_1 + \dots + q_4) \frac{\delta^4}{\delta h_{i_1}(-q_1) \dots h_{i_4}(-q_4)} \right]^n Z_0[h] \Bigg|_{h=0} \quad (2.30)$$

Um certo par de derivadas acima aplicadas em  $Z_0[h]$  resultará em um propagador do tipo  $\delta(k+k') \delta_{ij} G_0(k)$ . Cada propagador pode conter momentos externos (referentes a  $k_1$  e  $k_2$ ) e/ou momentos internos (referentes aos  $q$ 's da integração). A aplicação da sequência das derivadas faz com que os propagadores sejam combinados de todas as formas possíveis em seus momentos externos e internos, conforme estabelece o teorema de Wick. O resultado é uma imensa sorte de termos surgindo em cada ordem da expansão das funções de correlação. Os diagramas de Feynman aparecem nesse contexto como uma forma conveniente de representarmos cada um desses termos. A construção de tais diagramas exige regras bem específicas e aqui apresentamos aquelas pertinentes ao nosso caso:

- cada propagador é representado pela linha:  $\text{—}$ . Propagadores com pelo menos um momento externo corresponderão a uma linha externa enquanto que propagadores com apenas momentos internos comporão uma linha interna.

- cada interação é representada pelo vértice: . O número de linhas tracejadas indica quantos propagadores devem ser conectados a esse vértice. Para uma interação do tipo  $\Phi^4$ , temos 4 propagadores.
- cada diagrama possui um fator de simetria referente ao número de possibilidades de combinações de linhas externas e internas com os vértices resultando em diagramas com a mesma estrutura topológica.

Como exemplo, consideremos as duas contribuições resultantes de (2.30) para a função de Green de 2 pontos em ordem  $\lambda$  ( $n = 1$ ) mostradas na figura (2.1).



Figura 2.1: Diagramas de Feynman de ordem  $\lambda$ .

Baseado nas regras acima, escrevemos as seguintes representações:

$$1 \text{---} 2 = \delta(k_1 + k_2) \delta_{i_1 i_2} G_0(k_1), \quad (2.31)$$

$$1 \text{---} \text{---} 2 = 12 \frac{\lambda}{4!} F_{i_1, i_2, l, l} \int d^d q_1 \dots d^d q_4 \delta(q_1 + \dots + q_4) \delta(k_1 + q_1) G_0(k_1) \delta(k_2 + q_2) G_0(k_2) \times \\ \times \delta(q_3 + q_4) G_0(q_3) = \frac{N+2}{6} \lambda \delta_{i_1 i_2} \delta(k_1 + k_2) [G_0(k_1)]^2 \int d^d q G_0(q). \quad (2.32)$$

Os índices 1 e 2 presentes nos diagramas acima referem-se aos pares  $(k_1, i_1)$  e  $(k_2, i_2)$ , respectivamente. O fator 12 corresponde ao número de possibilidades de construirmos o segundo diagrama. Ou seja, temos  $\binom{4}{2} = 6$  maneiras para construir  (ligando uma linha interna a duas entradas do vértice ) multiplicada por 2 formas de atar linhas externas a ele. Além disso, temos um  $\delta(k_1 + k_2)$  presente em todos os diagramas. Isso é uma consequência direta da invariância translacional do sistema, traduzida no espaço dos momentos como uma lei de conservação dos momentos. Semelhantemente, para o diagrama 2.1(b), escrevemos:

$$1 \text{---} \text{---} 2 = 12 \frac{\lambda}{4!} F_{k, k, l, l} \delta_{i_1 i_2} \delta(k_1 + k_2) G_0(k_1) \int d^d q_1 \dots d^d q_4 \delta(q_1 + \dots + q_4) \delta(q_1 + q_2) G_0(q_1) \times \\ \times \delta(q_3 + q_4) G_0(q_3) = \frac{N(N+2)}{6} \lambda \delta_{i_1 i_2} \delta(k_1 + k_2) G_0(k_1) \int d^d q_1 d^d q_2 G_0(q_1) G_0(q_2) \quad (2.33)$$

Notamos que o diagrama acima é dado pelo simples produto de um propagador com o diagrama , denominado diagrama de vácuo por não possuir linhas externas.

Diagramas de vácuo são eliminados naturalmente pela condição de normalização (2.7). Tal condição aplicada em (2.21) implica que devemos ter até ordem  $\lambda$ :

$$\mathcal{N} = 1 - \text{diagrama de dois círculos} + O(\lambda^2). \tag{2.34}$$

Portanto, a função de Green de 2 pontos na sua forma diagramática é dada por:

$$G_{i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2) = \text{diagrama de linha} + \text{diagrama de círculo} + O(\lambda^2), \tag{2.35}$$

sem a contribuição do diagrama 2.1(b). É possível mostrar que todos os diagramas de vácuo serão eliminados ordem a ordem na expansão em  $\lambda$ . Na figura 2.2, mostramos as contribuições de ordem  $\lambda^2$  para (2.35) sem quaisquer diagramas de vácuo.

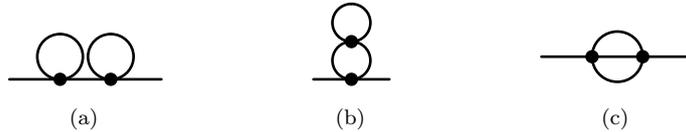


Figura 2.2: Diagramas de ordem  $\lambda^2$  para a função de correlação (2.35).

As funções de correlação de três pontos serão nulas pois, de acordo com (2.13), haverá um número ímpar de derivadas aplicada em  $Z_0[h]$  para  $h = 0$ . Naturalmente, todas as funções com número ímpar de pontos também se anularão. A próxima função não nula será portanto a de quatro pontos. Em ordem zero, teremos produtos de propagadores na forma

$$\delta(k_1 + k_2)G_0(k_1)\delta(k_3 + k_4)G_0(k_3)$$

mais outros 2 termos do mesmo tipo obtidos pela permutação dos índices. Ou seja, diagramaticamente, temos:

$$G_{i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + O(\lambda) \tag{2.36}$$

As figuras 2.3 e 2.4, trazem as contribuições de ordens  $\lambda$  e  $\lambda^2$ , respectivamente.



Figura 2.3: Contribuições de ordem  $\lambda$  para a função (2.36).

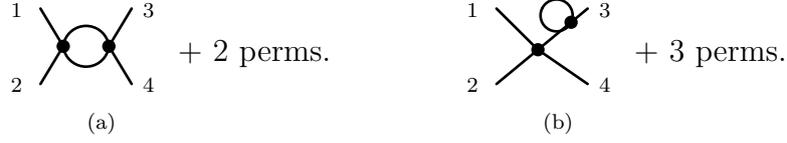


Figura 2.4: Contribuições de ordem  $\lambda^2$  para a função (2.36).

Como exemplo, consideremos as representações dos seguintes diagramas:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = -\lambda F_{i_1, \dots, i_4} \delta(k_1 + \dots + k_4) G_0(k_1) \cdots G_0(k_4), \quad (2.37a)$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \lambda^2 \delta(k_1 + \dots + k_4) \frac{1}{18} [(N+4)\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + 2\delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 2\delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}] \times \\ G_0(k_1) \cdots G_0(k_4) \int d^d q G_0(q + k_1 + k_2) G_0(q). \quad (2.37b)$$

Notamos novamente a presença de  $\delta(k_1 + \dots + k_4)$  evidenciando a conservação dos momentos para as funções de 4 pontos.

Na seção anterior, definimos também as funções de correlação de campo composto. Aqui iremos considerar

$$G_{i_1, i_2, j}^{(2,1)}(x_1, x_2, y) = \frac{1}{2} G_{i_1, i_2, j, j}^{(4)}(x_1, x_2, y, y), \quad (2.38)$$

importante também no estudo da renormalização (ver seção 2.8). No espaço dos momentos, podemos mostrar que:

$$G_{i_1, i_2, j}^{(2,1)}(k_1, k_2, p) = \frac{1}{2} \int d^d q G_{i_1, i_2, j, j}^{(4)}(k_1, k_2, q, p - q). \quad (2.39)$$

Portanto, diagramaticamente, temos:

$$G_{i_1, i_2, j}^{(2,1)}(k_1, k_2, p) = \begin{array}{c} 1' \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1' \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \text{---} 2 + O(\lambda), \quad (2.40)$$

no qual introduzimos as representações:

$$\begin{array}{c} 1' \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ 2 \end{array} = \delta(k_1 + k_2 + p) \delta_{i_1 j} \delta_{i_2, j} G_0(k_1) G_0(k_2) \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} 1' \\ \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \\ 1 \end{array} = \frac{1}{2} \delta(p) \int d^d q G_0(q). \quad (2.41)$$

O índice  $1'$  rotula o par  $(p, j)$  e a convenção da soma dos índices repetidos **não** está sendo usada nos resultados acima. Em ordem  $\lambda$ , temos os diagramas mostrados na figura 2.5.

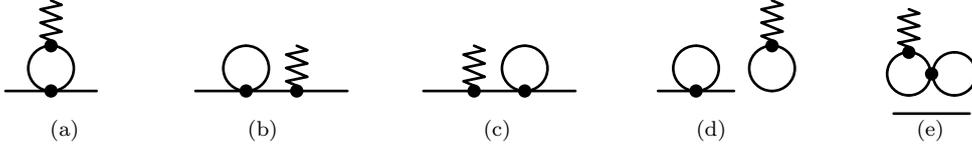


Figura 2.5: Contribuições de ordem  $\lambda$  para a função (2.40).

Vários diagramas apresentados nesta seção possuem divergências para um determinado número  $d$  de dimensões espaciais. Tais diagramas possuem pelo menos uma das seguintes integrais:

$$D_1(\mu) = \int d^d q G_0(q) = \int \frac{d^d q}{q^2 + \mu^2}, \quad (2.42a)$$

$$I_2(k; \mu) = \int d^d G_0(q+k) G_0(q) = \int \frac{d^d q}{[(k+q)^2 + \mu^2](q^2 + \mu^2)}. \quad (2.42b)$$

No decorrer deste capítulo, analisaremos essas divergências e ilustraremos como elas podem ser removidas através do procedimento de renormalização. Antes disso, continuaremos apresentando algumas definições importantes para tal fim.

## 2.5 Funções de vértice

As expansões diagramáticas realizadas na seção anterior podem ser simplificadas com a definição de novos tipos de funções de correlação. Consideremos inicialmente o funcional correspondente à energia livre de Helmholtz dado por:

$$F[h] = \ln Z[h]. \quad (2.43)$$

Definimos então as funções de correlação conetadas através de:

$$G_{c i_1, \dots, i_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E) = \left. \frac{\delta^E F[h]}{\delta h_{i_1}(-k_1) \dots \delta h_{i_E}(-k_E)} \right|_{h=0} \quad (2.44)$$

Na fase desordenada  $\langle \Phi(x) \rangle = 0$ , podemos ver que

$$G_{c i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2) = G_{i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2), \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} G_{c i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) &= G_{i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) - G_{i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2) G_{i_3, i_4}^{(2)}(k_3, k_4) \\ &\quad - G_{i_1, i_3}^{(2)}(k_1, k_3) G_{i_2, i_4}^{(2)}(k_2, k_4) - G_{i_1, i_4}^{(2)}(k_1, k_4) G_{i_2, i_3}^{(2)}(k_2, k_3). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Portanto, (2.45) terá a mesma expansão diagramática da função de Green de 2 pontos. Por outro lado, as subtrações em (2.46) resultarão na remoção dos diagramas desconectados. Um

exemplo de diagrama desconectado é dado na figura 2.3(b), calculado simplesmente pelo produto de dois outros diagramas. Todos os termos de ordem  $\lambda^0$  em (2.36) também são exemplos de diagramas desconectados. Portanto, (2.46) terá a seguinte expansão:

$$G_{c i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 4 \end{array} + 3 \text{ perms.} \\ + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 4 \end{array} + 2 \text{ perms.} + O(\lambda^3). \quad (2.47)$$

O conservação dos momentos externos em todos os diagramas conectados resulta em um fator  $\delta$  como aqueles presentes em (2.32) e (2.37b). Logo, podemos fatorar as funções de Green conectadas como:

$$G_{c i_1, \dots, i_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E) = \delta(k_1 + \dots + k_E) \overline{G}_{c i_1, \dots, i_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E), \quad (2.48)$$

A partir de agora, vamos nos referir a  $\overline{G}_c^{(E)}$  como as funções de Green conectadas. Já na função de 2 pontos, podemos fatorar  $\delta_{i_1 i_2} \delta(k_1 + k_2)$ , resultando em um  $\overline{G}^{(2)}$  ainda mais simples.

Podemos definir outras funções de correlação de modo que as expansões diagramáticas ainda sejam mais simplificadas. O funcional gerador de tais funções corresponde à energia livre de Gibbs  $\Gamma[\overline{\Phi}]$  obtida a partir de  $F[h]$  através de uma transformada de Legendre:

$$\Gamma[\overline{\Phi}] = \int d^d k \overline{\Phi}_i(k) h_i(-k) - F[h], \quad (2.49)$$

onde  $\overline{\Phi}(x) = \langle \Phi(x) \rangle$  corresponde à magnetização. Semelhantemente a (2.44), definimos as funções

$$\Gamma_{i_1, \dots, i_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E) = \left. \frac{\delta^E \Gamma[\overline{\Phi}]}{\delta \overline{\Phi}_{i_1}(k_1) \dots \delta \overline{\Phi}_{i_E}(k_E)} \right|_{\overline{\Phi}=0}, \quad (2.50)$$

denominadas *funções de vértice*. A conservação dos momentos também está presente nesse caso, ou seja, devemos ter:

$$\Gamma_{i_1, \dots, i_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E) = \delta(k_1 + \dots + k_E) \overline{\Gamma}_{i_1, \dots, i_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E). \quad (2.51)$$

Se tomarmos  $E = 2$ , é possível mostrar a partir de (2.49) que a função de Green  $G_c^{(2)}$  está relacionada com  $\Gamma^{(2)}$  através de:

$$G_{c i_1, i_2}^{(2)}(p_1, p_2) = \int d^d k_1 d^d k_2 G_{c i_1, j_1}(p_1, k_1) G_{c i_2, j_2}(p_2, k_2) \Gamma_{j_1, j_2}^{(2)}(k_1, k_2). \quad (2.52)$$

Como resultado, teremos a fatoração

$$\Gamma_{i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2) = \delta(k_1 + k_2) \delta_{i_1 i_2} \overline{\Gamma}^{(2)}(k_1), \quad (2.53)$$

com a função de vértice  $\bar{\Gamma}^{(2)}$  sendo expandida diagramaticamente como:

$$\bar{\Gamma}^{(2)}(k) = [G_0(k)]^{-1} - \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} - \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} - \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} + O(\lambda^3). \quad (2.54)$$

As linhas tracejadas nos diagramas acima indicam a ausência de linhas externas. Ou seja, cada propagador  $G_0(k)$  em função de um momento externo ( $k_1$  ou  $k_2$ ) foi removido dos diagramas acima, resultando nas seguintes representações:

$$\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} = -\lambda \frac{N+2}{6} D_1(\mu), \quad (2.55a)$$

$$\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} = \lambda^2 \frac{(N+2)^2}{36} I_2(k=0; \mu) D_1(\mu), \quad (2.55b)$$

$$\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} = \lambda^2 \frac{N+2}{18} D_3(k; \mu). \quad (2.55c)$$

As integrais  $D_1$  e  $I_2$  já foram definidas em (2.42a) e (2.42b). Além disso, temos:

$$D_3(k; \mu, \Lambda) = \int \frac{d^d q_1 d^d q_2}{[(k+q_1+q_2)^2 + \mu^2](q_1^2 + \mu^2)(q_2^2 + \mu^2)}. \quad (2.56)$$

Outra característica fundamental da expansão (2.54) é a sua simplicidade devido à presença de diagramas irreduzíveis a uma partícula ou *1PI* (do inglês, “one-particle irreducible”). Diagramas *1PI* são irreduzíveis pois não podem ser divididos em outros dois diagramas pelo simples corte de uma linha interna. A contribuição dada na figura 2.2(a) foi portanto removida da expansão por ser redutível ao diagrama dado na figura 2.1(a).

As mesmas regras usadas na construção de (2.54) permanecem válidas para a função de vértice de 4 pontos. Apenas os diagramas em 2.3(a) e 2.4(a) são *1PI* até ordem  $\lambda^2$  e portanto teremos a expansão:

$$\bar{\Gamma}_{i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) = - \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} - \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} + 2 \text{ perms.} + O(\lambda^3). \quad (2.57)$$

Novamente, todas as linhas externas foram removidas e o  $\delta(k_1 + \dots + k_4)$  foi fatorado, resultando nas representações:

$$\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} = -\lambda F_{i_1, \dots, i_4}, \quad (2.58a)$$

$$\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} = -\frac{\lambda^2}{18} [(N+4)\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + 2\delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 2\delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}] I_2(k_1 + k_2; \mu). \quad (2.58b)$$

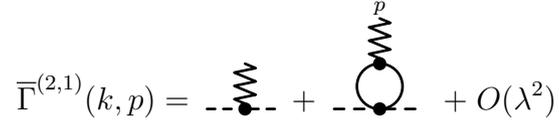
Podemos também definir as funções de vértice para campos compostos nos mesmos moldes de (2.16):

$$\Gamma_{i_1, \dots, i_E, j_1, \dots, j_L}^{(E, L)}(k_1, \dots, k_E, p_1, \dots, p_L) = \frac{\delta^{E+L} \Gamma[\bar{\Phi}, t]}{\delta \bar{\Phi}_{i_1}(k_1) \dots \delta \bar{\Phi}_{i_E}(k_E) \delta t_{j_1}(-p_1) \dots \delta t_{j_L}(-p_L)} \Big|_{\substack{\bar{\Phi}=0 \\ t=0}} \quad (2.59)$$

Tal como (2.40), a função  $\Gamma^{(2,1)}$  também é essencial ao nosso estudo e aqui ela pode ser fatorada da seguinte forma:

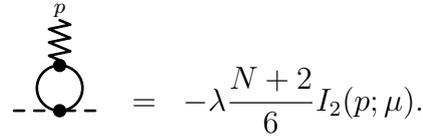
$$\Gamma_{i_1, i_2, j}^{(2,1)}(k_1, k_2, p) = \delta(k_1 + k_2 + p) \delta_{i_1 j} \delta_{i_2 j} \bar{\Gamma}^{(2,1)}(k_1, p). \quad (2.60)$$

Identificando a figura 2.5(a) como o único diagrama  $1PI$  em ordem  $\lambda$  de  $\Gamma^{(2,1)}$ , chegamos à expansão diagramática:

$$\bar{\Gamma}^{(2,1)}(k, p) = \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} + O(\lambda^2), \quad (2.61)$$


com as representações dadas a seguir:

$$\text{---} \bullet \text{---} = 1, \quad (2.62a)$$

$$\text{---} \bullet \text{---} = -\lambda \frac{N+2}{6} I_2(p; \mu). \quad (2.62b)$$


As funções  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$  contêm as divergências fundamentais da teoria  $\Phi^4$  quando a dimensão espacial é  $d = 4$ . Isso significa que as divergências em outras funções de correlação são resultantes da inserção de quaisquer diagramas presentes em (2.54), (2.57) ou (2.61). Tais singularidades são removidas através de constantes multiplicativas (constantes de renormalização) e da redefinição da massa e da constante de acoplamento. As únicas exceções a essa regra são dadas pelas funções  $\Gamma$ ,  $\Gamma^{(0,1)}$  e  $\Gamma^{(0,2)}$ , cujas expansões já são infinitas em primeira ordem e só podem ser removidas aditivamente. Por simplicidade, vamos restringir a nossa discussão apenas às funções de vértice que podem ser renormalizadas multiplicativamente. Para exemplificar como a renormalização de  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$  está relacionada com a remoção das divergências nas demais funções de vértice, consideremos os três diagramas pertencentes à função de vértice de 6 pontos mostrados na figura 2.6.

O diagrama 2.6(a) corresponde ao primeiro termo da expansão de  $\Gamma^{(6)}$ , sendo finito em  $d = 4$ . Prosseguindo para ordens mais elevadas na expansão, chegamos aos diagramas 2.6(b) e 2.6(c). Todos eles são divergentes como resultado da inserção dos subdiagramas dados em (2.55a) e (2.58b), respectivamente. De uma forma geral, todos os infinitos presentes nessa expansão são devidos às inserções de diagramas  $1PI$  das funções de vértice de 2 e 4 pontos. Portanto,

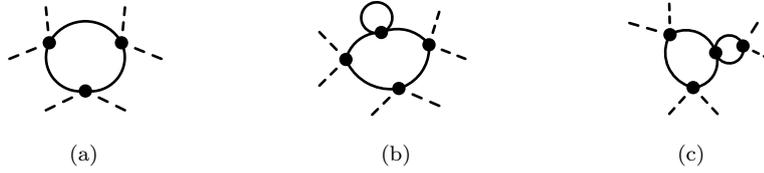


Figura 2.6: Diagramas envolvidos na expansão da função de vértice  $\Gamma^{(6)}$ .

se removermos as divergências dessas funções, estaremos eliminando também os infinitos de todas as outras funções de vértice com um número maior de pontos. Podemos generalizar esse argumento para incluir também as funções de vértice de campo composto, nas quais a inserção dos diagramas de  $\Gamma^{(2,1)}$  constitui também uma das fontes de divergência. Por esse motivo, as funções dadas em (2.54), (2.57) e (2.61), serão os principais objetos de estudo no procedimento da renormalização.

## 2.6 Expansão no número de loops

Quando a densidade lagrangiana (2.4) é multiplicada por uma constante arbitrária  $l^{-1}$ , a interação e o propagador serão mudados de acordo com  $\mathcal{L}_{int} \rightarrow l^{-1} \mathcal{L}_{int}$  e  $G_0 \rightarrow lG_0$ , respectivamente. Portanto, um diagrama de ordem  $n$  na constante de acoplamento e com  $I$  linhas internas será multiplicado por  $l^{I-n}$ . Cada linha interna, por sua vez, possui a variável de momento sendo integrada, resultando em  $I$  integrais de momento. No entanto, os  $n$  Deltas de Dirac presentes no diagrama impõem em cada vértice uma restrição na forma de uma lei de conservação de momentos, reduzindo a quantidade de integrais em um número  $n - 1$ , pois sempre restará um  $\delta$  resultante da conservação dos momentos externos. Como resultado, teremos um número de integrais igual a

$$L = I - (n - 1), \quad (2.63)$$

correspondente ao número de loops em um diagrama, conforme podemos ver em (2.32) e (2.33). O diagrama será multiplicado portanto pelo fator  $l^{L-1}$  e concluímos que uma expansão em loops também é uma expansão em potências de  $l$ .

Ambas as expansões em loops e em  $\lambda$  são equivalentes se a interação for monomial como em (2.19). Por exemplo, na função de vértice (2.54), temos o número de loops correspondendo à ordem em  $\lambda$ . Algo semelhante também acontece com (2.57), onde temos  $L = n - 1$  para todas as ordens. A figura 2.7 mostra isso ocorrendo em ordem de 2 loops.

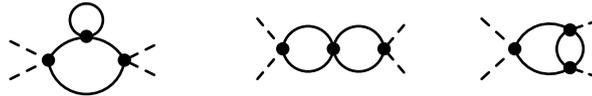


Figura 2.7: Contribuições de ordem 2 loops para  $\Gamma^{(4)}$ .



com as representações:

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = \lambda^2 \left( \frac{N+2}{6} \right)^2 [I_2(p; m_1)]^2 \quad (2.70a)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = \lambda^2 \left( \frac{N+2}{6} \right) I_4(k, p; m_1). \quad (2.70b)$$

O resultado da redefinição da massa foi a remoção de todos os diagramas com inserção do subdiagrama dado em (2.55a). Podemos agora fazer  $m_1$  finito e proporcional à temperatura reduzida enquanto que  $\mu$  em (2.64) passa a ser infinito. Todas as divergências referentes à integral (2.42a) foram então removidas e as expansões diagramáticas ficaram mais simples. Esse procedimento já é um primeiro passo para a renormalização da teoria. Outras divergências ainda persistem e antes de continuarmos no sentido de uma renormalização completa, vamos estudar com mais detalhes a natureza das divergências de uma teoria com interação  $\Phi^4$ .

## 2.7 Divergências dos diagramas 1PI

Já mencionamos que todas as divergências da teoria  $\Phi^4$  estão relacionadas com as integrais presentes nos diagramas das funções de vértice (2.54), (2.57) e (2.61). Agora, quando calculamos essas integrais, encontramos respostas divergentes dependendo do número  $d$  de dimensões espaciais. Para manipular tais infinitos de forma analítica, é convencional utilizar o conceito de regularização. Um método de regularização consiste na definição de um ou mais parâmetros tal que a integral divergente possa ser expressa em termos desses parâmetros. Uma maneira eficiente de manipular essas divergências é manter os parâmetros com valores arbitrários e estabelecer um método de subtração das partes potencialmente divergentes nos resultados das integrais. Depois desse procedimento, os limites apropriados são tomados, resultando em expressões finitas para as integrais. A combinação descrita corresponde à regularização acompanhada de uma renormalização (subtração das partes infinitas). Antes de discutirmos renormalização, vamos comentar dois métodos de regularização amplamente usados em teoria de campos: o método do corte (*cutoff*) nos momentos e o esquema de regularização dimensional. Ambos lidam com divergências no ultravioleta nas integrais de Feynman.

### 2.7.1 Regularização no corte dos momentos

A introdução de um corte  $\Lambda$  no limite superior nas integrais de Feynman entra naturalmente na teoria devido ao limite inferior na escala de comprimento: o parâmetro de rede  $a$ . Um limite inferior no espaço das coordenadas implica em um limite superior no espaço dos momentos e

ambos estão relacionados por  $\Lambda \sim \frac{1}{a}$ . Aqui, devemos ter o limite ultravioleta  $\frac{\Lambda}{\mu} \rightarrow \infty$  para que a teoria seja invariante por escala no ponto crítico.

A análise das divergências das integrais (2.42a) e (2.42b) pode ser realizada simplesmente através de análise dimensional. Como exemplo, consideremos a primeira delas. O numerador e o denominador da integral tem dimensão  $d$  e 2 em unidades de momento, respectivamente. Portanto, podemos escrever:

$$D_1(\mu, \Lambda) \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{\sim} \Lambda^{d-2}. \quad (2.71)$$

Ou seja, a integral será divergente para  $d \geq 2$ . Integrais com dimensão zero terão divergência logarítmica. De forma semelhante, vemos que

$$I_2(k; \mu, \Lambda) \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{\sim} \Lambda^{d-4}, \quad (2.72)$$

sendo divergente para  $d \geq 4$ .

Todas as divergências obtidas por essa contagem dimensional correspondem a *divergências primitivas*. Elas não são um resultado da inserção de um subdiagrama com integral divergente, como acontece com o diagrama na figura 2.2(b). A dependência em  $\Lambda^{d-2}$  desse diagrama é devido à inserção do diagrama dado na figura 2.1(a). Diagramas primitivamente divergentes formam portanto a base de todas as divergências ultravioletas da teoria devido ao fato de estarem associados aos infinitos dos demais diagramas.

De um modo geral, podemos identificar o grau de divergência de um diagrama primitivamente divergente como segue. A densidade lagrangiana (2.4) tem dimensão de inverso de volume e representaremos isso como  $[\mathcal{L}] = \Lambda^d$ , onde  $\Lambda$  é a nossa escala de momento. Portanto, o campo  $\Phi$  terá dimensão  $[\Phi(x)] = \Lambda^{\frac{d}{2}-1}$  e para a constante de acoplamento, escrevemos:

$$[\lambda] = \Lambda^{4-d}. \quad (2.73)$$

Já no espaço dos momentos, temos  $[\Phi(k)] = \Lambda^{-d+\frac{d}{2}-1}$  e podemos, a partir de (2.48), determinar a dimensão das funções de correlação:

$$[\overline{G}^{(E)}(k)] = \Lambda^{d-E(\frac{d}{2}+1)}. \quad (2.74)$$

As funções de vértice são obtidas a partir das funções de correlação considerando apenas os diagramas *1PI* e removendo as linhas externas, cada uma com dimensão  $-2$ . Portanto, podemos escrever:

$$[\overline{\Gamma}^{(E)}(k)] = \Lambda^{2E+d-E(\frac{d}{2}+1)} = \Lambda^{d+E-\frac{1}{2}Ed} \quad (2.75)$$

Logo, cada integral de um diagrama de ordem  $n$  em  $\lambda$  pertencente a  $\Gamma^{(E)}(k)$  terá dimensão dada por:

$$\delta = -n\epsilon + d + E - \frac{E}{2}d, \quad (2.76)$$

onde definimos

$$\epsilon = 4 - d \quad (2.77)$$

como a dimensão de  $\lambda$ . Se  $d > 4$ ,  $\delta$  crescerá com  $n$  e o grau de divergência do diagrama também crescerá com a ordem da expansão em  $\lambda$ . Conseqüentemente, haverá um número infinito de divergências primitivas e a teoria não poderá ser renormalizada pela redefinição de uma quantidade finita de parâmetros. Por outro lado, se  $d \leq 4$ , haverá apenas um número finito de divergências primitivas. Definimos então  $d_c = 4$  como sendo a dimensão crítica do sistema até a qual uma teoria com interação  $\Phi^4$  pode ser renormalizada. Na dimensão crítica, teremos apenas divergências quadráticas e logarítmicas como aquelas presentes em (2.71) e (2.72), respectivamente.

### 2.7.2 Regularização dimensional

Se ao invés de trabalharmos com um corte finito no momentos, tomarmos o limite  $\frac{\Lambda}{\mu} \rightarrow \infty$  e continuarmos analiticamente a dimensão espacial  $d$ , teremos as integrais de Feynman regularizadas em termos do parâmetro dimensional  $\epsilon$ . As divergências ultravioletas serão agora mapeadas em polos em  $\epsilon$ , cujos infinitos são obtidos com a proximidade da dimensão crítica ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). Depois de removidos todos esses polos através da renormalização das funções de correlação, quantidades universais como os expoentes críticos, além dos ingredientes necessários a sua obtenção, serão calculados em termos de expansões em potências de  $\epsilon$ . A regularização dimensional apresenta de uma forma unificada as divergências e o parâmetro de expansão da teoria. Todo o procedimento de renormalização e cálculo dos expoentes críticos torna-se mais simples e usaremos esse método de regularização no cálculo das integrais de Feynman.

Como exemplo de regularização dimensional, calcularemos a integral (2.42b):

$$I_2(k; \mu) = \mu^{-\epsilon} \int \frac{d^d q}{[(q+k)^2 + 1](q^2 + 1)} \quad (2.78)$$

Aqui, os momentos foram reescalados como  $k \rightarrow \frac{k}{\mu}$  e  $q \rightarrow \frac{q}{\mu}$ . Todas as demais integrais de diagramas com ordem além de 1 loop são obtidas em termos de  $I_2(k; \mu)$ , logo podemos considerá-la como um ponto de partida. O primeiro passo consiste em expressar os denominadores referentes a cada propagador em termos de um único denominador. Fazemos isso através do método de *parametrização de Feynman*, que emprega a seguinte representação integral [68]:

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{[xa_1 + (1-x)a_2]^{\alpha_1+\alpha_2}}, \quad (\text{Re } \alpha_1 > 0 \text{ e } \text{Re } \alpha_2 > 0) \quad (2.79)$$

O símbolo  $\Gamma$  na representação anterior corresponde à função Gamma de Euler. A partir de (2.79) reescrevemos (2.78) como:

$$I_2(k; \mu) = \mu^{-\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(q^2 + 2xk \cdot q + xk^2 + 1)^2} \quad (2.80)$$

A integral em  $q$  acima é conhecida e, de uma forma geral, temos:

$$\int \frac{d^d q}{(q^2 + 2p \cdot q + m^2)^\alpha} = \frac{S_d}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} (m^2 - p^2)^{\frac{d}{2} - \alpha} \quad (2.81)$$

onde  $S_d = 2 \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$  corresponde à área de uma esfera de raio unitário no espaço  $d$ -dimensional.

Logo, se identificarmos  $p = xk$ ,  $m^2 = xk^2 + 1$  e  $\epsilon = 4 - d$ , obtemos:

$$I_2(k; \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)k^2 + 1]^{-\frac{\epsilon}{2}} \quad (2.82)$$

O polo em  $\epsilon$  está presente na função  $\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ . Podemos ver isso através da identidade  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Além disso, estamos interessados na expansão em potências de  $\epsilon$ . Para tal finalidade, contaremos com as expansões:

$$z^\epsilon = e^{\epsilon \ln z} = 1 + \epsilon \ln z + O(\epsilon^2), \quad (2.83a)$$

$$\frac{\Gamma(1 + \alpha_1 \epsilon) \dots \Gamma(1 + \alpha_m \epsilon)}{\Gamma(1 + \beta_1 \epsilon) \dots \Gamma(1 + \beta_n \epsilon)} = 1 + O(\epsilon^2), \quad (2.83b)$$

quando os coeficientes  $\alpha$ 's e  $\beta$ 's satisfazem:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j = 0. \quad (2.84)$$

Portanto, a expansão em  $\epsilon$  da integral (2.82) é dada por:

$$I_2(k; \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dx \ln[x(1-x)k^2 + 1] \right\} + O(\epsilon). \quad (2.85)$$

Note como o polo simples em  $\epsilon$  está relacionado com a divergência logarítmica ultravioleta presente em (2.72).

Na seção (2.9), estudaremos também os expoentes críticos como um resultado da invariância de escala de um sistema no ponto crítico. Neste caso, temos a massa  $\mu \propto \sqrt{t} = 0$  e estamos portanto diante de uma teoria não-massiva. Naturalmente, a escala de massa  $\mu$  é perdida e devemos inserir uma nova escala de momento que aqui será representada por  $\kappa$ . Os momentos da integral (2.42b) passam a ser escalados como  $k \rightarrow \frac{k}{\kappa}$  e  $q \rightarrow \frac{q}{\kappa}$ , de modo que podemos escrever:

$$I_2(k; \kappa) = \kappa^{-\epsilon} \int \frac{d^d q}{(q+k)^2 q^2}. \quad (2.86)$$

Para  $d \leq 4$ , além da divergência no limite ultravioleta da integral acima, também teremos uma no limite infravermelho com  $k \rightarrow 0$ . Essa última divergência é um reflexo do comportamento das funções de correlação no ponto crítico. De fato, as correlações de longo alcance são traduzidas no espaço dos momentos como grandes contribuições dos componentes de Fourier das funções de correlação no limite  $k \rightarrow 0$ .

A regularização dimensional de (2.86) é realizada seguindo os mesmos passos aplicados na teoria massiva. Chegamos então ao seguinte resultado:

$$I_2(k; \kappa) = \kappa^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dx \ln[x(1-x)k^2] \right\} + O(\epsilon). \quad (2.87)$$

As demais integrais de Feynman dadas em (2.56) e (2.68) referentes a ordens mais elevadas em loops são regularizadas em [15] e não repetiremos esses cálculos aqui. Consideramos os exemplos acima apenas como ilustrações do esquema de regularização dimensional. Deixaremos para o próximo capítulo, uma análise mais detalhada dessas integrais, quando então estudarmos os efeitos da restrição espacial no sistema.

## 2.8 Renormalização das funções de vértice

Todas as divergências presentes nas expansões diagramáticas podem ser eliminadas através de uma redefinição adequada dos parâmetros da lagrangiana do modelo estudado. Esse é exatamente o objetivo da renormalização. Podemos realizá-la de duas formas distintas: considerando o sistema no ponto crítico (teoria não-massiva) ou fora dele (teoria massiva). Começemos pela teoria massiva.

### 2.8.1 Teoria massiva

Na densidade lagrangiana (2.4), os parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$  podem ser arbitrários, inclusive infinitos. Um procedimento de renormalização satisfatório deve portanto transformar esses parâmetros em grandezas finitas. Chamaremos essas grandezas de massa renormalizada  $m$  e de constante de acoplamento renormalizada  $g$ , respectivamente. Quando os observáveis físicos (expressos em termos de algumas funções de vértice) são escritos em função de  $m$  e  $g$ , fica mais simples lidar com as divergências daí decorrentes. Finalmente, tais divergências podem ser eliminadas através de um conjunto de operações, resultando em uma teoria livre dessas patologias.

Vamos ilustrar como uma teoria renormalizada livre de divergência pode ser construída a partir de uma teoria não-renormalizada. Primeiro, chamamos atenção para o regulador das integrais de Feynman. Ao longo deste trabalho, iremos usar explicitamente apenas a regularização dimensional. Entretanto, a fim de discutir as divergências de forma abstrata, utilizaremos eventualmente o corte  $\Lambda$  nos argumentos das funções de vértice analisadas.

Consideremos portanto  $\mu$  e  $\lambda$  expressos funcionalmente em termos da massa  $m$  e da constante de acoplamento  $g$  renormalizadas e do corte  $\Lambda$  na seguinte forma:

$$\mu = \mu(m, g, \Lambda) \quad \text{e} \quad \lambda = \lambda(m, g, \Lambda). \quad (2.88)$$

As novas grandezas  $m$  e  $g$  são agora finitas, enquanto que  $\mu$  e  $\lambda$  passam a ter a dependência com  $\Lambda$ , divergindo no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Essas redefinições ainda não são suficientes para a remoção de todos os infinitos da teoria. Elas tratam apenas das divergências quadráticas e logarítmicas devido à  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(4)}$ , respectivamente. Precisamos também eliminar outras divergências logarítmicas restantes. Fazemos isso através da multiplicação das funções de vértice



onde definimos:

$$D_5(k; m_1) = \int d^d q_1 d^d q_2 d^d q_3 \frac{1}{[(q_1 + q_3 + k)^2 + m_1^2][(q_2 + q_3 + k)^2 + m_1^2]} \times \frac{1}{(q_1^2 + m_1^2)(q_2^2 + m_1^2)(q_3^2 + m_1^2)}. \quad (2.93)$$

A partir da condição (2.91b), vemos que é necessário calcular:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k; m_1, u_0) \right|_{k=0} = 1 - B_2 u_0^2 + B_3 u_0^3. \quad (2.94)$$

No resultado anterior,  $u_0$  corresponde à constante de acoplamento adimensionalizada através de  $\lambda = m_1^\epsilon u_0$ . Os coeficientes  $B_2$  e  $B_3$  são dados por:

$$B_2 = m_1^{2\epsilon} \frac{N+2}{18} \left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_3(k; m_1) \right|_{k=0}, \quad (2.95a)$$

$$B_3 = m_1^{3\epsilon} \frac{(N+2)(N+8)}{108} \left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_5(k; m_1) \right|_{k=0}. \quad (2.95b)$$

Com relação à função de vértice de 4 pontos, a expansão (2.66) permite que escrevamos, até 2 loops:

$$\Gamma^{(4)}(0; m_1, u_0) = m_1^\epsilon \left[ u_0 - A_1 u_0^2 + \left( A_2^{(1)} + A_2^{(2)} \right) u_0^3 \right], \quad (2.96)$$

com os coeficientes  $A_1$ ,  $A_2^{(1)}$  e  $A_2^{(2)}$  dados por:

$$A_1 = m_1^\epsilon \frac{N+8}{6} I_2(0; m_1), \quad (2.97a)$$

$$A_2^{(1)} = m_1^{2\epsilon} \frac{N^2 + 6N + 20}{36} [I_2(0; m_1)]^2, \quad (2.97b)$$

$$A_2^{(2)} = m_1^{2\epsilon} \frac{5N + 22}{9} I_4(0; m_1). \quad (2.97c)$$

Finalmente, para a função  $\Gamma^{(2,1)}$ , a expansão (2.69) resulta em:

$$\Gamma^{(2,1)}(0; m_1, u_0) = 1 - C_1 u_0 + \left( C_2^{(1)} + C_2^{(2)} \right) u_0^2, \quad (2.98)$$

com  $C_1$ ,  $C_2^{(1)}$  e  $C_2^{(2)}$  dados por:

$$C_1 = m_1^\epsilon \frac{N+2}{6} I_2(0; m_1), \quad (2.99a)$$

$$C_2^{(1)} = m_1^{2\epsilon} \left( \frac{N+2}{6} \right)^2 [I_2(0; m_1)]^2, \quad (2.99b)$$

$$C_2^{(2)} = m_1^{2\epsilon} \frac{N+2}{6} I_4(0; m_1). \quad (2.99c)$$

Os coeficientes das expansões (2.94), (2.96) e (2.98) ainda possuem divergências logarítmicas. Também ainda restam três constantes de renormalização a serem determinadas. São elas  $u_0$ ,  $Z_\Phi$  e  $Z_{\Phi^2}$ . Conforme já mencionamos, devemos expandi-las em potências de  $g$  e calculamos os coeficientes dessa expansão de modo que as condições de renormalização (2.91b-2.91d) restantes sejam satisfeitas. Portanto, escrevemos:

$$u_0 = u + a_1 u^2 + a_2 u^3, \quad (2.100a)$$

$$Z_\Phi = 1 + b_2 u^2 + b_3 u^3, \quad (2.100b)$$

$$\bar{Z}_{\Phi^2} = 1 + c_1 u + c_2 u^2. \quad (2.100c)$$

onde novamente adimensionalizamos a constante de acoplamento através de  $g = m_1^\epsilon u$ . Além disso, definimos

$$\bar{Z}_{\Phi^2} = Z_\Phi Z_{\Phi^2}, \quad (2.101)$$

por razões de conveniência na condição (2.91d). Substituindo (2.100a) nas expansões (2.94), (2.96) e (2.98) e usando o resultado obtido, juntamente com (2.100b) e (2.100c), nas condições de renormalização chegamos aos coeficientes:

$$a_1 = A_1, \quad (2.102a)$$

$$b_2 = B_2, \quad (2.102b)$$

$$c_1 = C_1, \quad (2.102c)$$

$$a_2 = 2(A_1)^2 - (A_2^{(1)} + A_2^{(2)}) - 2b_2, \quad (2.102d)$$

$$b_3 = 2B_2 a_1 - B_3, \quad (2.102e)$$

$$c_2 = (a_1 + c_1)C_1 - (C_2^{(1)} + C_2^{(2)}). \quad (2.102f)$$

Dessa forma, determinamos as constantes de renormalização e através da eq. (2.89), obtemos todas as funções de vértice (que são multiplicativamente renormalizáveis) finitas.

## 2.8.2 Teoria não-massiva

Até agora, consideramos as funções de vértice com o sistema acima da temperatura crítica ( $m^2 > 0$ ). Por outro lado, estamos também interessados na descrição de tais funções exatamente no ponto crítico. Ambas as formulações conduzirão aos mesmos expoentes críticos. No capítulo 3, usaremos essa equivalência para fornecer uma nova interpretação à variável de escala  $y = \frac{L}{\xi}$  introduzida naturalmente na descrição do “crossover” dimensional de um sistema delimitado por placas planas e paralelas separadas por uma distância  $L$ . Na teoria não-massiva, podemos portanto calcular os expoentes críticos sem a dificuldade imposta tradicionalmente pelo limite  $y \rightarrow 0$  quando o comprimento de correlação  $\xi$  tende a infinito.

Dois tipos de divergências aparecem na teoria não-massiva. Uma delas refere-se às divergências no ultravioleta já estudadas na teoria massiva e podem ser removidas através da renormalização. A outra divergência tem origem física e está relacionada com o limite infravermelho, conforme mencionamos logo após o resultado (2.86). Portanto, condições de renormalização em uma teoria não-massiva devem evitar momentos externos nulos. Como  $m = 0$ , uma nova escala de momento deve ser introduzida e aqui ela será representada por  $\kappa$ . Os momentos externos são então calculados em termos de  $\kappa$  e as condições (2.91a-2.91d) são modificadas para a seguinte forma:

$$\Gamma_R^{(2)}(k = 0; 0, g) = 0, \quad (2.103a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k; 0, g) \right|_{k^2 = \kappa^2} = 1, \quad (2.103b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_i; 0, g) \Big|_{PS} = g, \quad (2.103c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_1, k_2, p; 0, g) \Big|_{\overline{PS}} = 1. \quad (2.103d)$$

Os pontos simétricos  $PS$  e  $\overline{PS}$ , nos quais os momentos externos são agora calculados, são definidos pela equação:

$$k_i \cdot k_j = \frac{\kappa^2}{4}(4\delta_{ij} - 1). \quad (2.104)$$

Em  $PS$ , temos  $k_i^2 = \frac{3}{4}\kappa^2$  e  $(k_i + k_j)^2 = \kappa^2$ , para  $i \neq j$ . Já em  $\overline{PS}$ , temos além disso:  $p^2 = (k_1^2 + k_2^2) = \kappa^2$ . Note que em (2.103a), continuamos com  $k = 0$ , pois  $\Gamma^{(2)}$  não apresenta divergências no limite infravermelho. Podemos ver isso a partir de (2.65). Apesar dos diagramas presentes lá terem divergências infravermelhas, as subtrações cancelam tais infinitos e portanto a equação (2.103a) é bem definida.

Duas características básicas distinguem as constantes de renormalização da teoria não-massiva daquelas na teoria massiva. Primeiro, a condição  $m = 0$  implica que estamos partindo de uma teoria original com uma massa crítica escrita funcionalmente como  $\mu_c = \mu_c(\lambda, \Lambda)$ . Segundo, as demais constantes  $\lambda$ ,  $Z_\Phi$  e  $Z_{\Phi^2}$  estão agora em função de  $\kappa$ ,  $g$  e  $\Lambda$ . Como resultado, teremos a equação (2.89) levemente modificada para:

$$\Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; \kappa, g) = Z_\Phi^{E/2} Z_{\Phi^2}^L \Gamma^{(E,L)}(k_i, p_j; \lambda, \Lambda). \quad (2.105)$$

As constantes de renormalização poderão então ser calculadas seguindo os mesmos passos descritos na teoria massiva. As integrais de Feynman  $D_3(k; m)$ ,  $D_5(k; m)$ ,  $I_2(k; m)$  e  $I_4(k, k'; m)$  serão calculadas com  $m = 0$  e com os momentos nos pontos simétricos. Com a massa nula, essas integrais são mais simples de serem tratadas e apenas as singularidades subdominantes e termos regulares em  $\epsilon$  serão diferentes daqueles obtidos com  $m \neq 0$ . A consistência entre as teorias massiva e não-massiva é confirmada quando, através do formalismo de grupo de renormalização, obtemos as mesmas quantidades universais.

## 2.9 Grupo de renormalização

As condições de renormalização são arbitrárias. Tomemos como exemplo a teoria não-massiva. A única restrição imposta nas constantes de renormalização é tornar a equação (2.105) finita. De resto, podemos escolher qualquer valor para  $\kappa$  em (2.103a-2.103d), resultando em diferentes versões de teorias renormalizadas. No entanto, teremos sempre a teoria original com os parâmetros  $\lambda$  e  $\Lambda$  inalterados por essa nossa liberdade de escolha. Tal invariância permite que estabeleçamos transformações entre essas diversas versões de teorias renormalizadas, dando origem ao que é conhecido como grupo de renormalização. Se considerarmos variações infinitesimais em  $\kappa$ , obtemos equações diferenciais para as funções de vértice que conduzem a resultados fundamentais para a descrição do comportamento dos observáveis físicos no ponto crítico, conforme ilustramos a seguir.

### 2.9.1 Equações do grupo de renormalização

Na equação (2.105), os valores para  $\lambda$  e  $\Lambda$  permanecem fixos enquanto podemos variar  $\kappa$ . Portanto, passamos as constantes de renormalização do lado direito para o lado esquerdo de (2.105) e derivamos com relação a  $\ln \kappa$  mantendo  $\lambda$  e  $\Lambda$  fixos:

$$\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[ Z_{\Phi}^{-E/2} Z_{\Phi^2}^{-L} \Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; \kappa, g) \right]_{\lambda, \Lambda} = 0. \quad (2.106)$$

Após algumas manipulações algébricas, chegamos às *equações do grupo de renormalização*:

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi}(u) + L \gamma_{\Phi^2}(u) \right] \Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; u, \kappa) = 0, \quad (2.107)$$

onde

$$\beta(u) = -\epsilon \left( \frac{\partial \ln u_0}{\partial u} \right)^{-1}, \quad (2.108a)$$

$$\gamma_{\Phi}(u) = \beta(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi}}{\partial u}, \quad (2.108b)$$

$$\gamma_{\Phi^2}(u) = -\beta(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2}}{\partial u}, \quad (2.108c)$$

são conhecidas como as funções de Wilson. A variável  $u$  corresponde à constante de acoplamento renormalizada e adimensionalizada através de  $g = \kappa^{\epsilon} u$ . Da mesma forma, temos  $\lambda = \kappa^{\epsilon} u_0$ . Apesar de  $u_0$ ,  $Z_{\Phi}$  e  $Z_{\Phi^2}$  divergirem com  $\Lambda$ , as funções (2.108a-2.108c) são finitas no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

A partir da equação (2.107), podemos determinar como as funções de vértices mudam com o reescalamto  $k_i \rightarrow \rho k_i$  dos momentos externos. O reescalamto no limite infravermelho

( $\rho \rightarrow 0$ ) induz um fluxo de  $u$  no espaço das constantes de acoplamento que tenderá a um ponto fixo  $u^*$  dado pelas condições

$$\beta(u^*) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\beta(u)}{du} \right|_{u=u^*} > 0. \quad (2.109)$$

Nesse caso,  $u^*$  é conhecido como ponto fixo estável no infravermelho. No ponto fixo, a teoria é invariante por escala. As funções de vértice passam então a escalar de forma homogênea e podemos calcular os expoentes críticos  $\eta$  e  $\nu$  através de:

$$\eta = \gamma_{\Phi}(u^*), \quad (2.110a)$$

$$\nu^{-1} = 2 - \eta - \bar{\gamma}_{\Phi^2}(u^*). \quad (2.110b)$$

A nova função de Wilson  $\bar{\gamma}_{\Phi^2}$  é definida em analogia com (2.108c) da seguinte forma:

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2}(u) = -\beta(u) \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\Phi^2}}{\partial u}, \quad (2.111)$$

com  $\bar{Z}_{\Phi^2}$  dado em (2.101).

Temos portanto todos os ingredientes necessários para o cálculo do expoentes críticos. Substituindo as expansões (2.100a-2.100c) para as constantes de renormalização em (2.108a), (2.108b) e (2.111), obtemos as funções de Wilson simbolicamente:

$$\beta(u) = -\epsilon u [1 - a_1 u + 2(a_1^2 - a_2) u^2], \quad (2.112a)$$

$$\gamma_{\Phi}(u) = -\epsilon u [2b_2 u + (3b_3 - 2b_2 a_1) u^2], \quad (2.112b)$$

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2}(u) = \epsilon u [c_1 + (2c_2 - c_1^2 - a_1 c_1) u]. \quad (2.112c)$$

Na regularização dimensional, os coeficientes  $a_1$ ,  $b_2$  e  $c_1$  apresentam polos simples em  $\epsilon$  que serão cancelados pelo fator  $\epsilon$  das funções acima. Da mesma forma, os polos duplos presentes em  $a_2$ ,  $b_3$  e  $c_2$  serão todos removidos pelas subtrações nos termos de ordem  $u^3$  e  $u^2$ , restando apenas polos simples a serem cancelados então pelo fator  $\epsilon$ . No próximo capítulo, mostraremos explicitamente esses cancelamentos. Consequentemente, as funções de Wilson serão todas finitas, conforme já esperávamos devido ao fato de estarem associadas aos observáveis físicos.

Na ordem 2 de loops considerada, a função  $\beta(u)$  dada em (2.112a) é um polinômio de terceiro grau em  $u$  e portanto podemos ter três raízes. Uma dessas raízes é  $u = 0$ . Abaixo da dimensão crítica ( $\epsilon > 0$ ), temos  $\left. \frac{d\beta(u)}{du} \right|_{u=0} < 0$  e  $u = 0$  não constitui portanto um ponto fixo estável no infravermelho. Restam ainda duas raízes. O ponto fixo estável no infravermelho corresponde à raiz na qual  $u^* = O(\epsilon)$ . Ou seja, quando nos aproximamos da dimensão crítica ( $\epsilon \rightarrow 0$ ),  $u^*$  tende a zero e a teoria passa a ter uma constante de acoplamento nula, tornando-se assintoticamente livre.

## 2.9.2 Equações de Callan-Symanzik

Outra forma de obtermos as leis de escala para as funções de vértice consiste em considerar o sistema acima do ponto crítico. Na teoria massiva, a massa renormalizada passa a ser o parâmetro livre nas condições de renormalização enquanto que  $\lambda$  e  $\Lambda$  permanecem fixos. Portanto, semelhantemente ao realizado na teoria não-massiva, multiplicamos a equação (2.89) por  $Z_\Phi^{-E/2} Z_{\Phi^2}^{-L}$  e derivamos com relação a  $\ln m$  mantendo  $\lambda$  e  $\Lambda$  constantes:

$$m \frac{\partial}{\partial m} \left[ Z_\Phi^{-E/2} Z_{\Phi^2}^{-L} \Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; m, g) \right]_{\lambda, \Lambda} = 0, \quad (2.113)$$

resultando nas *equações de Callan-Symanzik*:

$$\begin{aligned} \left[ m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_\Phi(u) + L \gamma_{\Phi^2}(u) \right] \Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; u, m) \\ = m^2 [2 - \gamma_\Phi(u)] \Gamma_R^{(E,L+1)}(k_i, p_j, 0; u, m). \end{aligned} \quad (2.114)$$

As funções de Wilson são novamente dadas pelas equações (2.108a-2.108c). Claro, aqui  $u_0$ ,  $Z_\Phi$  e  $Z_{\Phi^2}$  são obtidos através das condições (2.91a-2.91d) e estão em função de  $m$ ,  $u$  e  $\Lambda$ .

As equações de Callan-Symanzik são o equivalente na teoria massiva às equações do grupo de renormalização na teoria não-massiva. No entanto, a homogeneidade foi perdida devido à presença da função  $\Gamma^{(E,L+1)}$  no lado direito da equação. Consequentemente, não teremos mais a invariância de escala no limite infravermelho, como acontece na teoria não-massiva. Por outro lado, se considerarmos o limite ultravioleta ( $\frac{k_i}{m} \rightarrow \infty$ ), podemos fazer (2.114) homogênea e teremos uma equação análoga a (2.107). De fato, como os diagramas em  $\Gamma^{(E,L+1)}$  possuem um propagador a mais do que aqueles em  $\Gamma^{(E,L)}$ , podemos desprezar  $\Gamma^{(E,L+1)}$  no segundo termo de (2.114) no limite ultravioleta. Isso é uma consequência do teorema de Weinberg, o qual afirma que quando os momentos externos tendem uniformemente a infinito, diagramas com um propagador a mais decaem mais rapidamente do que aqueles sem o correspondente propagador com uma potência quadrática inversa na escala dos momentos. Portanto, no limite ultravioleta, teremos a equação (2.114) na sua forma homogênea.

As funções de Wilson são novamente calculadas através de (2.108a-2.108c), cujos coeficientes são agora dados em termos das integrais de Feynman calculadas com os momentos nulos e a massa  $m$  diferente de zero. No entanto, o novo ponto fixo  $u_\infty$  obtido a através de  $\beta(u_\infty) = 0$  não possui mais a mesma estabilidade do seu correspondente  $u^*$  na teoria não-massiva. A invariância de escala no ultravioleta da teoria é obtida apenas com a constante de acoplamento colocada exatamente nesse ponto fixo ( $u = u_\infty$ ). Os expoentes críticos  $\eta$  e  $\nu$  são então obtidos através da substituição de  $u_\infty$  nas equações (2.110a) e (2.110b). Apesar dos diferentes valores entre  $u^*$ ,  $u_\infty$  e as funções de Wilson nas teorias massiva e não-massiva, os resultados para  $\eta$  e  $\nu$  serão os mesmos. No próximo capítulo, mostraremos essa equivalência explicitamente.

# Capítulo 3

## Expoentes críticos para sistemas com geometria de placas planas e paralelas

### 3.1 Introdução

A restrição espacial introduzida pelo confinamento de um campo em um volume delimitado por superfícies planas e paralelas separadas por uma distância  $L$  produz efeitos significativos no comportamento crítico do sistema. Quando comparados com o sistema no limite  $L \rightarrow \infty$  (sistema infinito), tais efeitos se manifestam principalmente na forma de uma mudança na temperatura crítica, na alteração da amplitude de quantidades termodinâmicas (calor específico, susceptibilidade, etc) e na forma como os expoentes críticos mudam a sua dependência com a dimensão espacial  $d$  [37, 69].

Há alguns anos, Nemirovsky e Freed (NF) usaram o formalismo de teoria de campos e grupo de renormalização na descrição de fenômenos críticos em sistemas com pelo menos uma dimensão finita [34, 35]. A realização mais simples desse tipo de sistema em um espaço com  $d$  dimensões consiste em um sistema delimitado por duas (hiper-)superfícies planas de extensão infinita em um subespaço com  $d - 1$  dimensões e separadas por uma distância  $L$ . Trata-se basicamente de uma idealização para filmes finos. O sistema é descrito por um modelo de campos escalares com simetria  $O(N)$  e interação  $\Phi^4$ , da mesma forma como aquele modelado pela densidade lagrangiana (2.4). Cada componente do parâmetro de ordem está então sujeito a restrições nas superfícies na forma de condições de contorno que podem ser periódicas, antiperiódicas, Dirichlet ou Neumann. Convém observar que o volume do sistema ainda permanece infinito. Portanto, continuamos falando em transições de fase com expoentes críticos descrevendo as singularidades do comprimento de correlação, calor específico, etc.

Antes do trabalho de NF, acreditava-se na impossibilidade de usarmos métodos perturbativos para tratar fenômenos críticos na presença de tamanhos finitos [36]. No entanto, NF mostraram que quantidades universais, como os expoentes críticos, podiam de fato ser escritas em termos de expansões em  $\epsilon$  desde que a variável de escala  $y = \frac{L}{\xi}$  ( $\xi$  sendo o comprimento

de correlação do sistema) estivesse restrita à região  $y > 1$ . Para uma condição de contorno em geral, foi conjecturada a existência de três regiões de escalamento:

- (i)  $y > 1$ , métodos perturbativos podem ser usados e os expoentes críticos são calculados em termos de expansões em  $\epsilon$ , correspondendo aos mesmos obtidos para o sistema infinito ( $L \rightarrow \infty$ ) no espaço  $d$ -dimensional;
- (ii)  $y \sim 1$ , os expoentes críticos não podem mais ser calculados perturbativamente. Há uma quebra na expansão em  $\epsilon$ ;
- (iii)  $y < 1$ , a tradicional expansão em  $\epsilon = 4 - d$  é substituída agora por uma expansão em  $\epsilon' = 4 - (d - 1)$ . Em outras palavras, os expoentes críticos passam a ser aqueles calculados em um espaço com  $d - 1$  dimensões.

Essa mudança de  $d$  para  $d - 1$  dimensões na descrição do comportamento crítico do sistema é conhecida como “*crossover*” *dimensional*. Neste capítulo, vamos mostrar que podemos ampliar a região (i) para incluir  $y$  até o limite  $y \rightarrow 0$  sem qualquer quebra da expansão em  $\epsilon$ , desde que consideremos valores suficientemente grandes para  $L$ . De fato, quando as três regiões de escalamento foram propostas, uma formulação envolvendo apenas campos massivos conseguia descrever apenas a região (i). As técnicas a serem apresentadas nas próximas seções irão incluir também a região (ii) no limite  $L \rightarrow \infty$  usando a teoria massiva. Além disso, introduziremos uma formulação de campos sem massa e mostraremos que existe uma equivalência entre essa formulação e a correspondente massiva. Conseqüentemente, veremos que as regiões (i), (ii) e (iii) são consistentes com a expansão em  $\epsilon$ , contanto que os valores de  $L$  não sejam tão pequenos.

As análises de NF se restringiram às funções de Green de 2 e 4 pontos até ordem 1 loop em uma teoria massiva. Vamos ampliar no presente capítulo essas análises para incluir as contribuições até ordens de pelo menos 2 loops. Ao invés de funções de Green, usaremos as funções de vértice devido ao seu caráter mais fundamental com relação às divergências no regime ultravioleta. O sistema continuará sendo modelado pela densidade lagrangiana (2.4) com o parâmetro de ordem restrito a condições de contorno periódicas ou antiperiódicas nas duas superfícies. Vamos nos referir a ambas as condições como *PBC* (“periodic boundary condition”) ou *ABC* (“antiperiodic boundary condition”), respectivamente. Veremos portanto como o tamanho finito  $L$  introduz correções nas funções de correlação, constante de renormalização, ponto fixo, etc. No entanto, apesar dessas correções aparecerem explicitamente nos passos intermediários, todas elas são canceladas no resultado final para os expoentes críticos. Nenhuma quebra da expansão em  $\epsilon$  será observada (para valores não tão pequenos de  $L$ ) e um novo entendimento para as regiões de escalamento descritas acima será estabelecido.

### 3.2 O método de Nemirovsky e Freed na teoria massiva usando condições de contorno periódicas e anti-periódicas

Começamos pela descrição do sistema na região de escalamento (i). Consideraremos portanto a teoria acima da temperatura crítica, na qual manteremos o comprimento de correlação finito. Apenas os aspectos mais fundamentais de tamanho finito serão considerados aqui. Efeitos de superfície relacionados com as condições de contorno de Dirichlet e Neumann estão além do escopo deste trabalho. Por esse motivo, o parâmetro de ordem estará sujeito apenas às condições de contorno periódicas e antiperiódicas. Veremos a seguir que tais condições não quebram a invariância translacional do sistema e a representação das funções de vértice no espaço dos momentos continua sendo conveniente.

Originalmente, o método descrito por Nemirovsky e Freed (NF) vai até ordem de um loop na expansão diagramática das funções de Green de 2 e 4 pontos. A restrição espacial no parâmetro de ordem conduz a integrais de Feynman cujo resultado da regularização pode ser decomposto em termos com divergência no regime ultravioleta idênticas àquelas calculadas para o sistema infinito mais termos com dependência em  $L$  (termos de correção do tamanho finito). A representação integral utilizada por NF para esse termo de correção não permite (de uma forma simplificada) uma extensão dos cálculos para ordens acima de um loop [32]. Introduziremos uma representação mais conveniente para esse termo. Como resultado, teremos meios para avançar na direção do cálculo das integrais de ordens mais elevadas em loops. Além disso, a nossa análise da dependência em  $L$  dos termos de correção de tamanho finito ficará mais simples.

A forma mais natural de descrever uma geometria de placas planas e paralelas consiste em dividir o sistema de coordenadas como  $\mathbf{x} = (\vec{\rho}, z)$ . O vetor  $\vec{\rho}$  representa as coordenadas do campo no subespaço com  $d-1$  dimensões (no qual as superfícies estão inseridas) e  $z$  corresponde à coordenada axial perpendicular às superfícies. Aqui vamos colocar uma das superfícies em  $z = 0$  e a outra em  $z = L$ . A densidade lagrangiana dada em (2.4) terá então a seguinte forma:

$$\mathcal{L}(\Phi) = \frac{1}{2}(\nabla_{d-1}\Phi)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 + \frac{\mu^2}{2}\Phi^2(\vec{\rho}, z) + \frac{\lambda}{4!}\Phi^4(\vec{\rho}, z) \quad (3.1)$$

O tamanho finito  $L$  é introduzido na teoria através das condições de contorno impostas no parâmetro de ordem. Elas podem ser periódicas, ou seja,

$$\Phi(\vec{\rho}, 0) = \Phi(\vec{\rho}, L), \quad (3.2)$$

ou antiperiódicas, a saber:

$$\Phi(\vec{\rho}, 0) = -\Phi(\vec{\rho}, L). \quad (3.3)$$

Ambas as condições de contorno conduzem a diferentes tipos de ordenamento em diferentes temperaturas críticas durante a transição de fase [70]. Levaremos em consideração aqui apenas os aspectos universais do comportamento crítico como, por exemplo, os expoentes críticos.

A formulação da teoria no espaço dos momentos ainda permanece conveniente para o tipo de geometria sob consideração. O fato do sistema ser infinito ao longo do subespaço das superfícies implica em componentes de Fourier para o parâmetro de ordem dado em termos de momentos contínuos em  $d - 1$  dimensões. A homogeneidade do sistema ao longo desse subespaço garante a conservação dos momentos nos propagadores e nos vértices de interação, conforme vimos no capítulo anterior em  $d$  dimensões. Por outro lado, o domínio compacto da coordenada  $z$  ao longo da direção perpendicular às superfícies restringe os momentos a valores discretos (quase-momentos) ao longo dessa direção. Portanto, podemos expandir o campo  $\Phi$  em termos de componentes (modos) de Fourier, da seguinte forma:

$$\Phi_i(\rho, z) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}k e^{ik \cdot \rho} u_j(z) \phi_i(k, j), \quad (3.4)$$

O índice  $i = 1, 2, \dots, N$  refere-se à simetria interna do parâmetro de ordem. Já o índice  $j$  está relacionado com os quase-momentos ao longo da direção  $z$ . Note que as funções  $u_j(z)$  estão associadas às condições de contorno de  $\Phi_i$ . Para determinarmos essas funções, vamos considerar o campo  $\Phi_i$  acima como uma solução da teoria livre obtida a partir da equação de Klein-Gordon no espaço euclidiano:

$$(\nabla^2 - \mu^2)\Phi_i = 0.$$

Nesse caso,  $\Phi_i$  é usado na construção do propagador livre da teoria. Logo, vemos que  $u_j(z)$  é solução da equação de autofunções:

$$\frac{d^2}{dz^2} u_j(z) = -\kappa_j^2 u_j(z), \quad (3.5)$$

onde o autovalor  $\kappa_j$  corresponde ao quase-momento, satisfazendo a condição  $\kappa_j^2 + k^2 + \mu^2 = 0$ . As condições de contorno (3.2) ou (3.3), agora aplicadas em  $u_j(z)$ , determinarão a dependência de  $\kappa_j$  em  $j$ . Além disso, as constantes resultantes da solução geral da equação acima são fixadas através das condições de ortonormalidade:

$$\int_0^L dz u_i(z) u_j^*(z) = \delta_{ij}. \quad (3.6)$$

A relação de completeza também é satisfeita:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j(z) u_j^*(z') = \delta(z - z'). \quad (3.7)$$

Vamos analisar agora como as regras de Feynman serão modificadas para incluir o efeito do tamanho finito. Inicialmente, consideremos a energia livre do sistema dada pelo funcional  $F[\Phi] = \int d^{d-1}\rho \int_0^L dz \mathcal{L}[\Phi(\rho, z)]$  presente na definição da função de partição (2.5). A fim de

termos uma representação no espaço dos momentos para  $F[\Phi]$ , comecemos pela parte livre da teoria. A partir de (3.1) e (3.4), podemos escrever:

$$\begin{aligned} F_0[\Phi] &= \frac{1}{2} \int d^{d-1}\rho \int_0^L dz \left[ (\nabla_{d-1}\Phi)^2 + \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 \Phi^2(\rho, z) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}k \int_0^L dz \left[ (k^2 + \mu^2) u_{j_1}(z) u_{j_2}(z) + \frac{du_{j_1}}{dz} \frac{du_{j_2}}{dz} \right] \phi_i(k, j_1) \phi_i(-k, j_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Note que o índice  $i$  acima está sendo somado de 1 a  $N$  de acordo com a convenção da soma para índices repetidos considerada no capítulo anterior. O produto das derivada de  $u_j(z)$  pode ser reescrito como:

$$\frac{du_{j_1}}{dz} \frac{du_{j_2}}{dz} = \frac{d}{dz} \left( u_{j_1} \frac{du_{j_2}}{dz} \right) - u_{j_1} \frac{d^2 u_{j_2}}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left( u_{j_1} \frac{du_{j_2}}{dz} \right) + \kappa_{j_2}^2 u_{j_1}(z) u_{j_2}(z), \quad (3.9)$$

onde usamos a equação (3.5) na última igualdade. Condições de contorno periódicas (anti-periódicas) implicam em  $u_j(z)$  e  $\frac{du_j}{dz}$  periódicos (antiperiódicos). Portanto, o produto  $u_j(z) \frac{du_j}{dz}$  será sempre periódico e a integral  $\int_0^L dz \frac{d}{dz} \left( u_{j_1} \frac{du_{j_2}}{dz} \right)$  será nula. Substituindo os resultados acima em (3.8), podemos escrever:

$$F_0[\Phi] = \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}k (k^2 + \kappa_{j_2}^2 + \mu^2) S_{j_1, j_2} \phi_i(k, j_1) \phi_i(-k, j_2), \quad (3.10)$$

onde definimos o tensor:

$$S_{j_1, j_2} = \int_0^L u_{j_1}(z) u_{j_2}(z) dz. \quad (3.11)$$

O mesmo tipo de análise para a parte interagente da energia livre conduz a:

$$\begin{aligned} F_{int}[\Phi] &= \int d^{d-1}\rho \int_0^L dz \frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \Phi_{i_1}(\rho, z) \cdots \Phi_{i_4}(\rho, z) \\ &= \frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \sum_{j_1, \dots, j_4 = -\infty}^{\infty} S_{j_1, \dots, j_4} \frac{1}{(2\pi)^{3(d-1)}} \int d^{d-1}k_1 \cdots d^{d-1}k_4 \delta^{d-1}(k_1 + \cdots + k_4) \times \\ &\quad \times \phi_{i_1}(k_1, j_1) \cdots \phi_{i_4}(k_4, j_4), \end{aligned} \quad (3.12)$$

com a definição do tensor:

$$S_{j_1, j_2, j_3, j_4} = \int_0^L u_{j_1}(z) u_{j_2}(z) u_{j_3}(z) u_{j_4}(z) dz. \quad (3.13)$$

Chamamos atenção novamente para a convenção da soma usada para os índices do campo. Cada índice do tensor  $F_{i_1, \dots, i_4}$  aparece somado com o correspondente índice repetido do campo  $\Phi$ .

No capítulo anterior, apresentamos a função de partição (2.21) escrita convenientemente em termos de componentes de Fourier do propagador e da parte interagente da teoria. Aqui ela será modificada para incluir os modos referentes aos quase-momentos. Logo, baseado nos resultados (3.10) e (3.12), escrevemos:

$$Z[h] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left[ -\frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \sum_{j_1, \dots, j_4 = -\infty}^{\infty} S_{j_1, \dots, j_4} \int d^{d-1} k_1 \cdots d^{d-1} k_4 \delta^{d-1}(k_1 + \cdots + k_4) \times \frac{\delta^4}{\delta h_{i_1}(k_1, j_1) \cdots \delta h_{i_4}(k_4, j_4)} \right] Z_0[h], \quad (3.14)$$

com a função de partição da teoria livre dada por:

$$Z_0[h] = \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \int d^{d-1} k S_{j_1, j_2} G_0(k, j_2) h_i(k, j_1) h_i(-k, j_2) \right). \quad (3.15)$$

$\mathbf{h}(k, j)$  corresponde ao componente de Fourier do campo magnético externo em função também dos índices  $j$ 's dos quase-momentos. Os momentos contínuos estão agora inseridos no subespaço  $(d-1)$ -dimensional e o Delta de Dirac em (3.14) implica na conservação desses momentos em cada vértice de interação dos diagramas de Feynman. Além disso, os índices de simetria interna do campo são somados da mesma maneira como em (2.21) e teremos portanto os mesmos fatores de simetria listados no capítulo anterior para os diagramas de Feynman.

As únicas mudanças fundamentais nas funções de partição acima são as presenças dos tensores  $S_{j_1, j_2}$  e  $S_{j_1, j_2, j_3, j_4}$ , além do propagador livre  $G_0(k, j)$  modificado para incluir o quase-momento  $\kappa_j$ :

$$G_0(k, j) = \frac{1}{k^2 + \kappa_j^2 + \mu^2}. \quad (3.16)$$

Note nos resultados (3.14) e (3.15) como o tensor  $S_{j_1, j_2, j_3, j_4}$  aparece compondo o vértice de interação e  $S_{j_1, j_2}$  aparece multiplicando o propagador livre. Como resultado, as regras de Feynman serão modificadas de modo que cada linha e vértice de interação sejam representados por:

$$1 \text{ --- } 2 = \delta^{d-1}(k_1 + k_2) \delta_{i_1 i_2} S_{j_1, j_2} G_0(k_2, j_2), \quad (3.17)$$

$$2 \begin{array}{c} \swarrow 3 \\ \bullet \\ \searrow 4 \end{array} = -\frac{\lambda}{4!} F_{i_1, i_2, i_3, i_4} S_{j_1, j_2, j_3, j_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \quad (3.18)$$

Os índices (modos)  $j$ 's desempenham um papel semelhante ao dos índices do campo  $\phi_i$  e seguirão as mesmas regras de combinação, permutação, soma, etc apresentadas na seção 2.4.

Toda a informação referente às condições de contorno está contida nos tensores (3.11), (3.13) e no propagador (3.16). Consideremos agora como esses elementos serão representados em *PBC* e *ABC*. A solução da equação (3.5) satisfazendo ambas as condições de contorno é dada por:

$$u_j^{(\tau)}(z) = A \exp(i\kappa_j^{(\tau)} z), \quad (3.19)$$

onde devemos ter  $\kappa_j^{(\tau)} = \frac{2\pi}{L}(j + \tau)$  para  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . O índice  $\tau = 0$  e  $\tau = \frac{1}{2}$  identificam *PBC* e *ABC*, respectivamente. A constante  $A$  é fixada através da condição (3.6), resultando em  $A = \frac{1}{\sqrt{L}}$ . Desse modo, os tensores (3.11) e (3.13) tornam-se:

$$S_{j_1, j_2} = \delta_{j_1 + j_2, 0}, \quad (3.20)$$

$$S_{j_1, j_2, j_3, j_4} = \frac{1}{L} \delta_{j_1 + j_2 + j_3 + j_4, 0}, \quad (3.21)$$

sem qualquer distinção entre as condições de contorno consideradas. Os Deltas de Kronecker acima introduzem uma conservação dos quase-momentos da mesma forma que o Delta de Dirac em (3.14) implica na conservação dos momentos contínuos no subespaço  $(d - 1)$ -dimensional em cada vértice de interação. Ratificando o que já mencionamos, *PBC* e *ABC* não quebram a invariância translacional do sistema. Portanto, as integrais de Feynman se apresentarão de forma análoga às do sistema infinito, onde em cada loop teremos a substituição:

$$\int d^d k \longrightarrow \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} k, \quad (3.22)$$

com  $\sigma = \frac{2\pi}{L}$  correspondendo a uma escala de momento produzida naturalmente pelo tamanho finito do sistema. Note que no limite  $L \rightarrow \infty$ , o somatório em  $j$  acima pode ser identificado como uma integral de Riemann e estabelecemos então a correspondência inversa para a integral de loop para um sistema infinito em  $d$  dimensões:

$$\sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} k \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int d^d k.$$

Deixaremos para a seção 3.4 a regularização dimensional das integrais de Feynman. Antes disso, vamos discutir como as divergências presentes nessas integrais podem ser removidas da teoria.

### 3.3 Renormalização e equações de Callan-Symanzik

Divergências no regime ultravioleta estão também presentes em teorias de campos confinados entre duas superfícies. Tais divergências continuam sendo associadas ao mesmo número

finito de divergências primitivas na dimensão crítica consideradas no capítulo anterior. Portanto, a remoção desses infinitos é realizada por um número também finito de constantes de renormalização e o procedimento de renormalização será de maneira semelhante ao apresentado na equação (2.89). Essa equação terá aqui a seguinte forma:

$$\Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; g, \mu) = \left( Z_{\Phi}^{(\tau)} \right)^{\frac{E}{2}} \left( Z_{\Phi^2}^{(\tau)} \right)^M \Gamma^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \lambda, \mu_0, \Lambda). \quad (3.23)$$

Os índices  $l = 1, 2, \dots, E$  e  $l' = 1, \dots, M$  rotulam os momentos externos  $k_l$  e  $p_{l'}$  (além dos modos  $j_l$  e  $j_{l'}$  dos quase-momentos) associados com o campo  $\phi$  e o campo composto  $\phi^2$ , respectivamente. Apesar da dependência das funções de vértice nas condições de contorno, não incluiremos o índice  $\tau$  nessas funções como uma maneira de deixarmos a notação mais simples. Deixaremos essa dependência explícita apenas nas constantes multiplicativas  $Z_{\Phi}^{(\tau)}$  e  $Z_{\Phi^2}^{(\tau)}$ .

As constantes de renormalização na equação acima podem ser determinadas por condições semelhantes àsquelas consideradas em (2.91). A diferença é que agora elas devem refletir os diferentes valores das funções de vértice de acordo com a condição de contorno considerada. Portanto, tomando não apenas os momentos externos iguais a zero, mas também os quase-momentos, podemos escrever:

$$\Gamma_R^{(2)}(k = 0, j = 0; g, \mu) = \mu^2 + \sigma^2 \tau^2, \quad (3.24a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k, j = 0; g, \mu) \right|_{k=0} = 1, \quad (3.24b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_l = 0, j_l = 0; g, \mu) = g, \quad (3.24c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k = 0, j = 0, p = 0, j' = 0; g, \mu) = 1. \quad (3.24d)$$

O termo  $\sigma^2 \tau^2$  no lado direito de (3.24a) foi escolhido de modo que a massa renormalizada  $\mu$  seja independente das condições de contorno [21]. Além disso, em (3.24b) mantivemos o quase-momento nulo enquanto derivamos apenas com relação a  $k^2$ . Podemos fazer isso sem perda de generalidade porque as constantes de renormalização provenientes dessas condições continuam renormalizando a função de vértice  $\Gamma^{(2)}$  quando  $j \neq 0$ .

O parâmetro  $\mu$  pode ser escolhido livremente nas condições acima. Essa liberdade de escolha para  $\lambda$  e  $\Lambda$  fixos resulta nas equações de Callan-Symanzik associadas às transformações infinitesimais do grupo de renormalização em uma teoria massiva, conforme mencionamos na seção 2.9. Vamos investigar agora como essas equações serão modificadas em decorrência da dependência nas condições de contorno das equações dadas em (3.24). A partir da equação (3.23), podemos escrever:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ \left( Z_{\Phi}^{(\tau)} \right)^{-\frac{E}{2}} \left( Z_{\Phi^2}^{(\tau)} \right)^{-M} \Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; g, \mu) \right]_{\lambda, \Lambda} = 0. \quad (3.25)$$

Após a realização da derivada, obtemos:

$$\begin{aligned} \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta^{(\tau)} \frac{\partial}{\partial g} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi}^{(\tau)} + M \gamma_{\Phi^2}^{(\tau)} \right) \Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; g, \mu) = \\ = 2\mu^2 \frac{\partial \mu_0^2}{\partial \mu^2} \left( Z_{\Phi^2}^{(\tau)} \right)^{-1} \Gamma_R^{(E,M+1)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}', 0; g, \mu), \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde definimos as funções de Wilson como  $\beta^{(\tau)} = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}$ ,  $\gamma_{\Phi}^{(\tau)} = \mu \frac{\partial \ln Z_{\Phi}^{(\tau)}}{\partial \mu}$  e  $\gamma_{\Phi^2}^{(\tau)} = -\mu \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2}^{(\tau)}}{\partial \mu}$ , além de termos usado:

$$\Gamma^{(E,M+1)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}', 0; \lambda, \mu_0) = \frac{\partial}{\partial \mu_0^2} \Gamma^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}', 0; \lambda, \mu_0).$$

Tomando  $N = 2$ ,  $M = 0$  com os momentos e quase-momentos iguais a zero na equação acima e usando as condições (3.24a) e (3.24d), determinamos o coeficiente de  $\Gamma^{(E,M+1)}$  no lado direito da equação acima:

$$\frac{\partial \mu_0^2}{\partial \mu^2} \left( Z_{\Phi^2}^{(\tau)} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \left( 2 - \tilde{\gamma}_{\Phi}^{(\tau)} \right), \quad (3.27)$$

onde definimos:

$$\tilde{\gamma}_{\Phi}^{(\tau)} = \gamma_{\Phi}^{(\tau)} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma \tau}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (3.28)$$

Em termos das constantes de acoplamento  $u$  e  $u_0$  adimensionalizadas através de  $g = \mu^\epsilon u$  e  $\lambda = \mu^\epsilon u_0$ , podemos reescrever (3.26), com auxílio do resultado (3.27), no formato final das equações de Callan-Symanzik:

$$\begin{aligned} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta^{(\tau)}(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi}^{(\tau)}(u) + M \gamma_{\Phi^2}^{(\tau)}(u) \right] \Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; u, \mu) = \\ = \mu^2 \left[ 2 - \tilde{\gamma}_{\Phi}^{(\tau)}(u) \right] \Gamma_R^{(E,M+1)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}', 0; u, \mu). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Agora todas as funções de Wilson presentes na equação anterior são descritas em termos de parâmetros adimensionais, a saber:

$$\beta^{(\tau)}(u) = -\epsilon \left( \frac{\partial \ln u_0^{(\tau)}}{\partial u} \right)^{-1}, \quad (3.30a)$$

$$\gamma_{\Phi}^{(\tau)}(u) = \beta^{(\tau)}(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi}^{(\tau)}}{\partial u}, \quad (3.30b)$$

$$\gamma_{\Phi^2}^{(\tau)}(u) = -\beta^{(\tau)}(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2}^{(\tau)}}{\partial u}. \quad (3.30c)$$

Exceto pela dependência nas condições de contorno e tamanho finito  $L$ , essas funções são escritas na mesma forma das equações dadas em (2.108).

A única diferença entre (3.29) e a correspondente para o sistema infinito (2.114) é a presença da função  $\tilde{\gamma}_{\Phi}^{(\tau)}(u)$  que, de acordo com (3.28), é essencialmente uma versão reescalada de  $\gamma_{\Phi}^{(\tau)}(u)$ . No limite  $L \rightarrow \infty$  ( $\sigma \rightarrow 0$ ), recuperamos as equações de Callan-Symanzik do sistema infinito.

De acordo com a argumentação apresentada na seção 2.9, quando consideramos os momentos externos no regime ultravioleta ( $\frac{k_l}{\mu} \rightarrow \infty$ ), o lado direito da equação (3.29) pode ser desprezado ordem a ordem na expansão diagramática. Nesse regime, a teoria massiva será então invariante por escala desde que a constante de acoplamento seja colocada no ponto fixo não trivial  $u_{\infty}^{(\tau)}$ , dependente agora das condições de contorno e de  $L$ . Portanto, as soluções de (3.29) serão obtidas de forma análoga àsquelas para um sistema infinito e as leis de escala provenientes dessas soluções permitirão o cálculo dos expoentes críticos através das equações (2.110a) e (2.110b), onde  $u^*$  é agora substituído por  $u_{\infty}^{(\tau)}$ .

### 3.4 Regularização dimensional das integrais de Feynman

No capítulo anterior, expandimos as funções vértice até pelo menos ordem 2 loops e identificamos as integrais (2.42b), (2.68), (2.56) e (2.93) como aquelas essenciais ao cálculo dos expoentes críticos. A primeira delas refere-se ao diagrama de ordem 1 loop mostrado na figura 2.4(a) e servirá como ponto de partida para cálculo de todas as demais integrais. Levando em consideração a substituição dada em (3.22), podemos escrevê-la aqui na seguinte forma:

$$I_2^{\tau}(k, j; \sigma, \mu) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q+k)^2 + \sigma^2(l+j+\tau)^2 + \mu^2][q^2 + \sigma^2(l+\tau)^2 + \mu^2]}. \quad (3.31)$$

Seguiremos inicialmente os mesmos passos empregados na obtenção do resultado (2.82). Primeiro, reescalamos os momentos de acordo com  $\frac{q}{\mu} \rightarrow q$  e  $\frac{k}{\mu} \rightarrow k$ , onde definimos  $r \propto \frac{\sigma}{\mu}$ . De acordo com o resultado (2.29), temos  $r \propto \frac{\xi}{L}$ . Em seguida, aplicamos a parametrização de Feynman (2.79) e depois de alguns rearranjos, chegamos a:

$$I_2^{\tau}(k, j; \sigma, \mu) = r\mu^{-\epsilon} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx \int \frac{d^{d-1}q}{\{q^2 + 2xk \cdot q + xk^2 + r^2 [(l+\tau+xj)^2 + x(1-x)j^2] + 1\}^2}. \quad (3.32)$$

O próximo passo consiste na utilização do resultado (2.81), fornecendo:

$$I_2^{\tau}(k, j; \sigma, \mu) = r\mu^{-\epsilon} \frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d-1}{2}\right) \times \\ \times \int_0^1 dx \sum_{j=-\infty}^{\infty} [r^2(l+\tau+xj)^2 + x(1-x)(k^2 + r^2j^2) + 1]^{\frac{d-1}{2}-2}. \quad (3.33)$$

Depois de fatorar  $r^2$ , podemos identificar o somatório no resultado acima com uma generalização da função térmica [71]:

$$D_\alpha(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(n+a)^2 + b^2]^{-\alpha}, \quad (3.34)$$

onde estabelecemos:

$$a(x) = \tau + xj, \quad (3.35a)$$

$$b(x) = r^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + r^2j^2) + 1}, \quad (3.35b)$$

No limite  $n \rightarrow \infty$ , o termo sendo somado em (3.34) comporta-se como  $n^{-2\alpha}$  e podemos ver portanto que o somatório converge para  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Podemos construir uma continuação analítica para  $D_\alpha(a, b)$  na qual a divergência no limite  $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$  tenha uma representação conveniente no contexto da regularização dimensional. Ou seja, de uma forma geral, podemos escrever [32, 72, 73]:

$$D_\alpha(a, b) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) b^{1-2\alpha} + f_\alpha(a, b) \right], \quad (3.36)$$

A divergência de (3.34) no limite  $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$  está agora presente no polo em  $\alpha = \frac{1}{2}$  da função  $\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$ . Já  $f_\alpha(a, b)$  é uma função regular para  $\alpha = \frac{1}{2}$  que pode ser representada em diferentes formas. Nemirovsky e Freed utilizaram a representação dada na ref. [32] e aqui vamos reescrevê-la dentro da nossa notação como:

$$f_\alpha(a, b) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_b^\infty du (u^2 - b^2)^{-\alpha} \operatorname{Re} [e^{2\pi(u+ia)} - 1]^{-1}. \quad (3.37)$$

Essa representação não é uma das mais convenientes para os nossos objetivos neste trabalho. A maneira como os parâmetros  $a$  e  $b$  aparecem no resultado acima dificulta bastante a aplicação da eq. (3.36) de forma simplificada no cálculo das integrais de Feynman em ordens de loops mais elevadas. Portanto, usaremos uma representação alternativa que irá facilitar consideravelmente as nossas análises. Deduzida por Boschi-Filho e Farina [73] como uma generalização para o resultado obtido por Ambjorn e Wolfram [72], escrevemos:

$$f_\alpha(a, b) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi ma) \left(\frac{\pi m}{b}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} K_{\alpha-\frac{1}{2}}(2\pi mb), \quad (3.38)$$

onde  $K_\nu(z)$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie. O fato de termos agora uma representação envolvendo uma função especial de Bessel cujas propriedades já são bem conhecidas [68] permitirá um avanço na direção do cálculo de integrais de 2 e 3 loops que não teríamos tão facilmente com a representação dada em (3.37).

Voltando ao resultado (3.33), usaremos (3.36), juntamente com (3.35) e  $\epsilon = 4 - d$ , para reescrever:

$$I_2^{(\tau)}(k, j; \sigma, \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \sqrt{\pi} \times \\ \times \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) [x(1-x)(k^2 + r^2 j^2) + 1]^{-\frac{\epsilon}{2}} + f_{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}(a, b) \right\} \quad (3.39)$$

Sabendo que  $S_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ , podemos escrever

$$\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) S_d = 2\pi^{\frac{d}{2}} = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) S_{d-1} \quad (3.40)$$

e realizando uma expansão em  $\epsilon$  no argumento da função  $\Gamma$ , chegamos ao seguinte resultado:

$$I_2^{(\tau)}(k, j; r) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left[ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)(k^2 + r^2 j^2) + 1]^{-\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(k, j; r) \right], \quad (3.41)$$

onde definimos:

$$F_{\alpha}^{(\tau)}(k, j; r) = r^{-2\alpha} \int_0^1 dx f_{\frac{1}{2}+\alpha}(\tau + xj, h(k, j, r)), \quad (3.42)$$

com

$$h(k, j, r) = r^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + r^2 j^2) + 1}. \quad (3.43)$$

Uma comparação entre (3.41) e (2.85) mostra que a integral de ordem 1 loop (3.31) para o sistema de tamanho finito pode ser decomposta em dois termos. O primeiro deles é idêntico àquele do sistema infinito, no qual o quadrado do módulo do momento externo é agora substituído por  $k^2 + r^2 j^2$ . O segundo termo corresponde à definição (3.42), denominada aqui de *correção de tamanho finito* devido a sua dependência em  $L$ . Mostraremos a seguir que essa função de correção tende a zero no limite  $L \rightarrow \infty$ . Além disso, para  $L$  suficientemente grande,  $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(k, j; r)$  não terá polos em  $\epsilon$  e já podemos tomar  $\epsilon = 0$  nesse termo de correção.

As condições de renormalização (3.24) impõem momentos externos nulos para as integrais de Feynman e desse modo, o resultado (3.41) é simplificado para:

$$I_2^{(\tau)}(0; r) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \right]. \quad (3.44)$$

Relembramos aqui que  $r^{-1} = \frac{\mu}{\sigma} \propto \frac{L}{\xi}$  corresponde à variável de escala. Se considerarmos valores finitos para  $r$ , o segundo termo do resultado anterior é bem comportado e a expansão em  $\epsilon$  é válida, sendo apropriada para o cálculo perturbativo dos observáveis físicos. Entretanto, esse cenário é ameaçado quando estamos no limite  $r^{-1} \rightarrow 0$ . Neste caso, a função de correção torna-se singular e o método perturbativo não parece ser mais válido. Nosso interesse agora estará

voltado portanto para o estudo dos limites assintóticos da função de correção, inclusive aquele dado por  $r^{-1} \rightarrow \infty$ .

A fim de analisarmos esses limites, começaremos pelas definições (3.38) e (3.42), de onde obtemos:

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(0, 0; r) = 4r^{-\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n\tau) (\pi n)^{\frac{\epsilon}{2}} K_{\frac{\epsilon}{2}}(2\pi nr^{-1}). \quad (3.45)$$

Essa expressão mostra claramente que não há polos em  $\epsilon$  para a função de correção. No limite  $r^{-1} \rightarrow \infty$ , podemos usar a expansão assintótica da função de Bessel na forma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_{\alpha}(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

Vemos portanto que uma expansão tomando apenas o primeiro termo mais significativo corresponde ao modo  $n = 1$ . Dessa forma, temos:

$$\lim_{r^{-1} \rightarrow \infty} F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(0, 0; r) \approx 2\pi^{\frac{\epsilon}{2}} \cos(2\pi\tau) (r^{-1})^{\epsilon - \frac{1}{2}} e^{-2\pi r^{-1}}. \quad (3.46)$$

Portanto, o termo de correção tende a zero no limite  $L \rightarrow \infty$  e a integral de Feynman reproduz o correspondente valor do sistema infinito.

No outro extremo, quando  $r^{-1}$  decresce, as correções de tamanho finito ficarão maiores a ponto de terem a mesma ordem do polo  $\epsilon^{-1}$ , modificando a singularidade dominante da função de correlação de 4 pontos. Para ver como isso acontece, consideremos a identidade [68]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(nx) \cos(nxt) &= \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{4\pi}\right) + \frac{\pi}{2x\sqrt{1+t^2}} + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2n\pi + tx)^2}} - \frac{1}{2n\pi} \right] + \\ &+ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2n\pi - tx)^2}} - \frac{1}{2n\pi} \right], \quad (3.47) \end{aligned}$$

válida para valores positivos de  $x$ .  $\gamma = 0.577216\dots$  é a constante de Euler-Mascheroni. Através das identificações  $x = 2\pi r^{-1}$  e  $t = r\tau$ , obtemos a função de correção e o resultado (3.44) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} I_2^{(\tau)}(0; r) &= \mu^{-\epsilon} S_d \left[ \frac{1}{\epsilon} \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \right) + \gamma + \ln\left(\frac{r^{-1}}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{r^{-2} + \tau^2}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{r^{-2} + (n + \tau)^2}} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{r^{-2} + (n - \tau)^2}} - \frac{1}{n} \right) \right]. \quad (3.48) \end{aligned}$$

Os somatórios acima convergem. Podemos ver isso ao observar que quando  $n \rightarrow \infty$  os termos dos somatórios decrescem proporcionalmente com  $\frac{1}{n^2}$  e pelo critério da razão de Cauchy, as séries convergirão. Tomando o limite  $r^{-1} \rightarrow 0$ , essas duas séries tornam-se:

$$\lim_{r^{-1} \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\dots] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\dots] \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n + \tau} - \frac{1}{n} \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n - \tau} - \frac{1}{n} \right]. \quad (3.49)$$

A partir da representação para a função dilogarítmica  $\Psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n+z}$ , juntamente com a relação  $\Psi(1+z) = \Psi(z) + \frac{1}{z}$  e o valor  $\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2$ , chegamos a:

$$\lim_{r^{-1} \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\dots] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\dots] \right) = (2 \ln 2 - 1) \delta_{\tau, \frac{1}{2}}. \quad (3.50)$$

Portanto, para pequenos valores de  $r^{-1}$ , obtemos o seguinte resultado para (3.44):

$$I_2^{(\tau)}(0; r) \approx \mu^{-\epsilon} S_d \left[ \frac{1}{\epsilon} \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \right) + \gamma + \ln \left( \frac{r^{-1}}{2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{r^{-2} + \tau^2}} + (2 \ln 2 - 1) \delta_{\tau, \frac{1}{2}} + O(r^{-1}) \right]. \quad (3.51)$$

Podemos identificar dois tipos de comportamento singular na expressão acima dependendo das condições de contorno empregadas. Primeiro, podemos reproduzir todas as análises realizadas nas referências [34, 35] com respeito à quebra da expansão em  $\epsilon$  devido à singularidade presente no termo com a raiz quadrada. Em *PBC* ( $\tau = 0$ ), esse termo produz uma divergência no limite  $r^{-1} \propto \frac{L}{\xi} \rightarrow 0$ . Já em *ABC* ( $\tau = \frac{1}{2}$ ), essa singularidade acontece abaixo da temperatura crítica ( $t < 0$ ) quando  $r^{-2} \rightarrow -\frac{1}{4}$ . Em ambas as condições de contorno, o crossover dimensional nas referências mencionadas anteriormente foi atribuído ao efeito causado pela divergência desse termo com raiz quadrada para diferentes valores de  $t$ .

O segundo tipo de comportamento singular é predominante apenas em *ABC*. Mantendo  $t > 0$  fixo e decrescendo  $r^{-1}$ , ou seja, diminuindo apenas  $L$ , o termo com a raiz quadrada permanece finito enquanto que o módulo do termo logarítmico cresce até ter a mesma magnitude do polo em  $\epsilon$ . No limite ultravioleta, o mapeamento entre a regularização dimensional e a regularização pelo corte  $\Lambda$  nos momentos estabelece  $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow \ln \frac{\Lambda}{\mu}$ . Portanto, podemos afirmar que o termo logarítmico torna-se comparável à singularidade dominante da integral quando  $\ln \frac{\Lambda}{\mu} \sim -\ln r^{-1} = \ln \frac{1}{\mu L}$ , ou seja, quando tivermos  $L\Lambda \sim 1$ . Em termos do parâmetro de rede  $a$ , temos  $\Lambda \sim \frac{1}{a}$ , implicando em  $L \sim a$ . Em resumo, a redução de  $L$  (com  $t$  fixo) até magnitudes próximas de  $a$  produz um novo tipo de crossover pois a correção de tamanho finito domina em relação ao polo  $\epsilon^{-1}$ . Notamos que esse tipo de comportamento também ocorre em *PBC*. No entanto, o termo com a raiz quadrada proporcional a  $\left(\frac{L}{\xi}\right)^{-1}$  é dominante nesse limite.

Na nossa análise acima, não consideramos o limite  $t \rightarrow 0$  porque ele é inconsistente na teoria massiva. Na seção 2.8 afirmamos que o aparecimento de divergências no infravermelho nesse limite impossibilitam a realização da renormalização. Portanto, a nossa estratégia para acessarmos a região  $r^{-1} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$  consiste em utilizarmos a teoria não-massiva, na qual já temos naturalmente  $\xi = \infty$  com invariância por escala no regime infravermelho. Discutiremos esse regime quando definirmos o análogo da formulação de Nemirovsk e Freed para a teoria renormalizada utilizando campos de massa nula. Este ponto será retomado nas seções 3.6 e 3.7, onde introduziremos essa nova descrição de comportamento crítico para sistemas finitos e provaremos a equivalência com a formulação da teoria para campos massivos.

Consideremos agora a contribuição de 2 loops para a função de 4 pontos correspondente à integral (2.68). Aqui, com a discretização dos momentos ao longo da direção  $z$ , ela terá a seguinte forma:

$$I_4^{(\tau)}(k, k', j, j'; \mu, \sigma) = \sigma^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 - k)^2 + \sigma^2(l_1 - j + \tau)^2 + \mu^2][q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau)^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[(q_1 + q_2 + k')^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j' + \tau)^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau)^2 + \mu^2]}. \quad (3.52)$$

A integral acima é regularizada no apêndice A, cujo resultado é dado em (A.17):

$$I_4(0; \mu, r) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{2\epsilon^2} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \right]. \quad (3.53)$$

As demais integrais correspondem às contribuições de 2 e 3 loops para a função de vértice de 2 pontos e podem ser lidas das eqs. (2.56) e (2.93), respectivamente. Elas são dadas aqui respectivamente por:

$$D_3^{(\tau)}(k, j; \mu, \sigma) = \sigma^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j + \tau)^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau)^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau)^2 + \mu^2]}, \quad (3.54)$$

$$D_5^{(\tau)}(k, j; \mu, \sigma) = \sigma^3 \sum_{l_1, l_2, l_3 = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2 d^{d-1}q_3}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j + \tau)^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[(q_1 + q_3 + k)^2 + \sigma^2(l_1 + l_3 + j + \tau)^2 + \mu^2][q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau)^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau)^2 + \mu^2][q_3^2 + \sigma^2(l_3 + \tau)^2 + \mu^2]}. \quad (3.55)$$

Dada a condição de renormalização (3.24b), tudo o que precisamos fazer com as integrais acima é derivar com relação a  $k^2$  mantendo os quase-momentos externos nulos ( $j = 0$ ). Em seguida, tomamos  $k = 0$ . Esses cálculos são executados no apêndice A. Lá os resultados (A.25) e (A.33) fornecem respectivamente:

$$D_3^{(\tau)'}(\mu, r) = \left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_3^{(\tau)}(k, j = 0; \mu, r) \right|_{k=0} = -\mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{8\epsilon} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon W^{(\tau)}(r) \right], \quad (3.56)$$

$$D_5^{(\tau)'}(\mu, r) = \left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_5^{(\tau)}(k, j = 0; \mu, r) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{6\epsilon^2} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{2}\epsilon W^{(\tau)}(r) \right], \quad (3.57)$$

onde definimos  $W^{(\tau)}(r) = G^{(\tau)}(r) + H^{(\tau)}(r) - 4rF_0'^{(\tau)}(r)$ , com  $G^{(\tau)}(r)$ ,  $H^{(\tau)}(r)$  e  $F_0'^{(\tau)}(r)$  definidos no apêndice A. Não vamos escrever esse termos explicitamente pois eles serão eliminados durante o cálculo dos expoentes críticos. Só precisamos saber aqui que eles são todos bem comportados desde que não tomemos o limite  $r^{-1} \rightarrow 0$ , da mesmo forma como acontece com  $f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1})$ . Nessa condição, as expansões em epsilon acima são bem definidas e podemos usar a teoria perturbativa para calcular os observáveis físicos.

### 3.5 Cálculo dos expoentes críticos na teoria massiva

No capítulo anterior, ilustramos rapidamente como os expoentes críticos são calculados a partir da análise de grupo de renormalização. Equações diferenciais são então obtidas para as funções de vértice como uma consequência da nossa liberdade de escolha do parâmetro de massa  $\mu$  no processo de renormalização. Na seção 3.3, refizemos esses passos e chegamos às correspondentes equações de Callan-Symanzik com a presença do tamanho finito  $L$ . Tais equações permitem a determinação da forma como as funções de vértice escalam nos momentos externos. Na teoria massiva, a invariância por escala é realizada apenas no regime ultravioleta, quando então os expoentes críticos são obtidos a partir das funções de Wilson (agora dependentes das condições de contorno e de  $L$ ) calculadas no ponto fixo. Na prática, as funções de Wilson são determinadas através das expansões dadas por (2.112a-2.112c), onde os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  estão relacionados com as expansões (2.100a-2.100c) das constantes de renormalização em potências da constante de acoplamento renormalizada e adimensionalizada  $u$ . As condições de renormalização (3.24a-3.24d) implicam em resultados análogos àqueles dados pelas expressões (2.102a-2.102f). Os coeficientes  $A$ 's,  $B$ 's e  $C$ 's são calculados através das equações (2.97), (2.95) e (2.99). As regularização das integrais de Feynman usadas são agora aquelas apresentadas na seção anterior. Portanto, em termos simbólicos, podemos escrever as seguintes expressões:

$$a_1^{(\tau)} = \frac{N+8}{6} I_2^{(\tau)}(0; r), \quad (3.58a)$$

$$a_2^{(\tau)} = \frac{(N+8)^2}{18} [I_2^{(\tau)}(0; r)]^2 - \frac{N^2 + 6N + 20}{36} [I_2^{(\tau)}(0; r)]^2 - \frac{5N+22}{9} I_4^{(\tau)}(0; r) - \frac{N+2}{9} D_3'^{(\tau)}(r), \quad (3.58b)$$

$$b_2^{(\tau)} = \frac{N+2}{18} D_3'^{(\tau)}(r), \quad (3.58c)$$

$$b_3^{(\tau)} = \frac{(N+2)(N+8)}{54} \left[ I_2^{(\tau)}(0; r) D_3'^{(\tau)}(r) - \frac{1}{2} D_5'^{(\tau)}(r) \right], \quad (3.58d)$$

$$c_1^{(\tau)} = \frac{N+2}{6} I_2^{(\tau)}(r), \quad (3.58e)$$

$$c_2^{(\tau)} = \frac{N^2 + 7N + 10}{18} I_2^{(\tau)}(0; r) - \left( \frac{N+2}{6} \right)^2 [I_2^{(\tau)}(0; r)]^2 - \frac{N+2}{6} I_4^{(\tau)}(0; r). \quad (3.58f)$$

Substituindo os resultados (3.44), (3.53), (3.56) e (3.57) nas expressões acima, determinamos finalmente os coeficientes das constantes de renormalização:

$$a_1^{(\tau)} = \frac{N+8}{6\epsilon} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \epsilon \right], \quad (3.59a)$$

$$a_2^{(\tau)} = \left( \frac{N+8}{6\epsilon} \right)^2 - \frac{N^2 + 21N + 86}{36\epsilon} + \frac{N^2 + 16N + 64}{36\epsilon} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) + \frac{N+2}{72\epsilon} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon W^{(\tau)}(r) \right], \quad (3.59b)$$

$$b_2^{(\tau)} = -\frac{N+2}{144\epsilon} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon W^{(\tau)}(r) \right], \quad (3.59c)$$

$$b_3^{(\tau)} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon} \left[ 1 - \frac{7}{4}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \right], \quad (3.59d)$$

$$c_1^{(\tau)} = \frac{N+2}{6\epsilon} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \epsilon \right], \quad (3.59e)$$

$$c_2^{(\tau)} = \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon^2} - \frac{2N^2 + 17N + 26}{72\epsilon} + \frac{N^2 + 7N + 10}{36\epsilon} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}). \quad (3.59f)$$

Um aspecto fundamental que diferencia as constantes de renormalização calculadas aqui daquelas obtidas para um sistema infinito é a presença dos termos de correção dependentes tanto das condições de contorno quanto do tamanho finito  $L$ . Isso é uma consequência direta das condições de renormalização utilizadas. No entanto, conforme veremos logo a seguir, essas correções não-universais não alterarão a classe de universalidade  $(d, N)$  para os expoentes críticos.

Nosso próximo passo consiste no cálculo das funções de Wilson. Relembramos aqui a primeira delas dada em (2.112a), dependente agora de  $\tau$  e  $L$ :

$$\beta^{(\tau)}(u) = -\epsilon u \left\{ 1 - a_1^{(\tau)} u + 2 \left[ \left( a_1^{(\tau)} \right)^2 - a_2^{(\tau)} \right] u^2 \right\}. \quad (3.60)$$

Substituindo  $a_1^{(\tau)}$  e  $a_2^{(\tau)}$  na expressão acima, obtemos:

$$\beta^{(\tau)}(u) = -\epsilon u + \frac{N+8}{6} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \right] u^2 - \frac{3N+14}{12} u^3. \quad (3.61)$$

Podemos ver claramente a inexistência de quaisquer polos em  $\epsilon$  no resultado anterior, conforme havíamos mencionado na seção 2.9. De fato, o polo duplo presente em  $a_2^{(\tau)}$  é cancelado por aquele presente em  $(a_1^{(\tau)})^2$  durante a subtração  $(a_1^{(\tau)})^2 - a_2^{(\tau)}$ . Os polos simples restantes são

então eliminados pelo fator  $\epsilon$  em cada ordem da expansão. Essa é uma propriedade comum às demais funções de Wilson. Substituindo (3.59c-3.59d) e (3.59e-3.59f) respectivamente nas expansões (2.112b) e (2.112c), obtemos:

$$\gamma_{\Phi}^{(\tau)}(u) = \frac{N+2}{72}u^2 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon W^{(\tau)}(r) - \frac{N+8}{6} \left[ 1 + W^{(\tau)}(r) - f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \right] u \right\}, \quad (3.62)$$

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2}^{(\tau)}(u) = \frac{N+2}{6} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \right] u - \frac{N+2}{12}u^2. \quad (3.63)$$

Agora temos todos os ingredientes necessários para computar os expoentes críticos. O ponto fixo no regime ultravioleta é calculado através da condição  $\beta^{(\tau)}(u_{\infty}) = 0$  e a teoria invariante por escala é realizada com a constante de acoplamento  $u = u_{\infty}$ . A raiz  $u_{\infty} = 0$  corresponde à solução trivial dessa equação e não estamos interessados nela quando a dimensão espacial  $d$  estiver abaixo da dimensão crítica  $d_c = 4$ . No entanto, quando  $d \rightarrow 4$ , devemos ter o ponto fixo não-trivial sendo degenerado no ponto fixo gaussiano ( $u_{\infty} = 0$ ). Procuramos então por uma solução do tipo  $u_{\infty} = \epsilon(a + \epsilon b)$ . Substituindo  $u_{\infty}$  em (3.61) e mantendo os termos até ordem  $\epsilon^2$ , determinamos os coeficientes  $a$  e  $b$  de modo que o resultado dessa substituição seja igual a zero, resultando em:

$$u_{\infty} = \frac{6}{N+8} \epsilon \left\{ 1 + \epsilon \left[ \frac{9N+42}{(N+8)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \right] \right\}. \quad (3.64)$$

O expoente  $\eta$  é portanto calculado até ordem  $\epsilon^3$  através de:

$$\eta = \gamma_{\Phi}^{(\tau)}(u_{\infty}) = \frac{N+2}{(N+8)^2} \epsilon^2 \left\{ 1 + \left[ \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \epsilon \right\}. \quad (3.65)$$

De forma semelhante, calculamos:

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2}^{(\tau)}(u_{\infty}) = \frac{N+2}{N+8} \epsilon \left[ 1 + \frac{6N+18}{(N+8)^2} \epsilon^2 \right]. \quad (3.66)$$

A partir da equação  $\bar{\gamma}_{\Phi^2}^{(\tau)}(u_{\infty}) = 2 - \eta - \nu^{-1}$ , obtemos o expoente para o comprimento de correlação:

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)} \epsilon + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3} \epsilon^2. \quad (3.67)$$

Note que os expoentes  $\eta$  e  $\nu$  são de fato independentes das condições de contorno e são exatamente iguais àqueles calculados para o sistema infinito [15]. Todos os demais expoentes críticos são computados a partir das leis de escala. Os nossos resultados confirmam portanto as expectativas estabelecidas por Nemirovsky e Freed para ordens mais elevadas na expansão em loops. Entretanto, as conjecturas sobre a validade da expansão em  $\epsilon$  com base apenas nos valores da variável de escala  $\frac{L}{\xi}$  são enganosas. Para verificar isso, vamos discutir na próxima seção como apenas os valores de  $L$  são relevantes para a validade dessa expansão, quando então introduzirmos a teoria sem massa na descrição de sistemas com tamanho finito.

### 3.6 O método NF na teoria não-massiva

Vamos analisar agora o mesmo tipo de sistema com geometria de superfícies planas e paralelas separadas por uma distância  $L$  no qual a massa do propagador é nula. Estamos exatamente no ponto crítico e o comprimento de correlação neste caso é infinito. Mantendo  $L$  finito, nos deparamos com uma situação completamente nova. No início da formulação de teoria de escala em sistema com tamanho finito, acreditava-se na impossibilidade de utilizar o método perturbativo devido ao fato de  $\xi$  ser muito maior que  $L$ . Mostraremos que o método perturbativo permanece válido na teoria de campos sem massa para valores não tão pequenos de  $L$  e podemos de fato ampliar o limite da variável  $\frac{L}{\xi}$  para aqueles nos quais o crossover dimensional foi conjecturado.

Duas características especiais tornam a teoria não-massiva vantajosa em relação à massiva. A primeira delas refere-se à maior facilidade técnica para calcular as integrais de Feynman. A segunda característica é o ponto fixo atrativo no regime infravermelho. Na seção 2.9, comentamos sobre a estabilidade do ponto fixo  $u^*$ : independentemente do valor inicial da constante de acoplamento  $u$ , o escalamento dos momentos no limite infravermelho induz um fluxo em  $u$  com  $u \rightarrow u^*$ . Conseqüentemente, a teoria será sempre invariante por escala no regime infravermelho.

As condições de renormalização serão realizadas agora com os momentos externos das funções de vértice colocados no ponto simétrico. A equação (2.104) continua sendo uma escolha conveniente para a construção desse ponto de simetria em termos da nova escala de momento  $\kappa$ . No entanto, ainda por questão de conveniência e sem perda de generalidade, manteremos os quase-momentos externos nulos. As condições dadas em (2.103a-2.103d) para funções de vértice multiplicativamente renormalizáveis serão portanto aplicadas aqui com algumas pequenas modificações, ou seja:

$$\Gamma_R^{(2)}(k = 0, j = 0; g, 0) = \sigma^2 \tau^2, \quad (3.68a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k, j = 0; g, 0) \right|_{k=0} = 1, \quad (3.68b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_l, i_l = 0; g, 0) \Big|_{PS} = g, \quad (3.68c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_1, i_1 = 0, k_2, i_2 = 0, p, j' = 0; g, 0) \Big|_{PS} = 1. \quad (3.68d)$$

Note como a primeira dessas condições foi modificada para refletir os diferentes valores da função de vértice de 2 pontos de acordo com a condição de contorno. Além disso, o ponto simétrico  $PS$  está sendo aplicado apenas no subespaço  $(d-1)$ -dimensional. Na direção perpendicular às superfícies, podemos tomar os quase-momentos iguais a zero sem o aparecimento de quaisquer divergências no infravermelho. As constantes de renormalização provenientes das condições acima continuam renormalizando as funções de vértice quando os quase-momentos são diferentes de zero.

Implementando o procedimento de renormalização multiplicativa em termos do corte ultravioleta  $\Lambda$  nos momentos, escrevemos as funções de vértice renormalizadas nos mesmos moldes

de (2.105):

$$\Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \kappa, g) = (Z_\Phi^{(\tau)})^{E/2} (Z_{\Phi^2}^{(\tau)})^M \Gamma^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \lambda, \Lambda), \quad (3.69)$$

onde usamos a mesma notação empregada na equação (3.23).

O fato da teoria não-renormalizada ser insensível à escolha da escala de momento  $\kappa$  conduz a uma equação do tipo dado em (2.106), onde agora as constantes de renormalização  $Z_\Phi^{(\tau)}$  e  $Z_{\Phi^2}^{(\tau)}$  serão dependentes das condições de contorno e do tamanho finito  $L$ . Podemos mostrar que as equações do grupo de renormalização resultantes desse tipo de invariância têm a seguinte forma:

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta^{(\tau)}(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_\Phi^{(\tau)}(u) + M \gamma_{\Phi^2}^{(\tau)}(u) \right] \Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; u, \kappa) = 0, \quad (3.70)$$

onde as únicas modificações com relação ao sistema infinito aparecem na dependência em  $\tau$  e  $L$  das funções de Wilson escritas de forma análogas às dadas na eq. (3.30) para o caso massivo. O ponto fixo  $u^*$  é novamente obtido a partir da condição  $\beta^{(\tau)}(u^*) = 0$  e calculamos os expoentes críticos  $\eta$  e  $\nu$  com a substituição de  $u^*$  nas equações (2.110a) e (2.110b).

Passaremos agora ao cálculo das integrais de Feynman. Relembramos que o propagador na teoria não-massiva é obtido a partir da eq. (3.16) com  $\mu = 0$ , enquanto que os tensores  $S_{j_1, j_2}$  e  $S_{j_1, j_2, j_3, j_4}$  permanecem os mesmos. Portanto, o análogo não-massivo da integral (3.31) é dado por:

$$I_2^{(\tau)}(k, j; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q+k)^2 + \sigma^2(l+j+\tau)^2][q^2 + \sigma^2(l+\tau)^2]}. \quad (3.71)$$

Utilizamos a parametrização de Feynman (2.79) e o resultado (2.81) para resolvermos a parte integral nos momentos contínuos. A soma nos quase-momentos é realizada através da representação da função térmica generalizada dada em (3.36). Depois de usarmos a identidade (3.40) e expandirmos parcialmente em  $\epsilon$ , a contribuição integral em 1 loop para a função de vértice de 4 pontos torna-se:

$$I_2^{(\tau)}(k, j; \sigma) = \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)(k^2 + \sigma^2 j^2)]^{-\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(k, j; \sigma) \right\}, \quad (3.72)$$

onde

$$F_\alpha^{(\tau)}(k, j; \sigma) = \sigma^{-2\alpha} \int_0^1 dx f_{\frac{1}{2}+\alpha}(\tau + xj, h'(k, j, \sigma)), \quad (3.73)$$

$$h'(k, j, \sigma) = \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + \sigma^2 j^2)}. \quad (3.74)$$

Usando a definição (3.38), reescrevemos:

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(k, j; \sigma) = 4\sigma^{-\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 dx \cos[2\pi n(\tau + jx)] \left[ \frac{\sigma\pi n}{\sqrt{x(1-x)(k^2 + \sigma^2 j^2)}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}}\left(2\pi n\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + \sigma^2 j^2)}\right). \quad (3.75)$$

No apêndice B, mostraremos que o resultado acima não possui singularidades em  $\epsilon$ , sendo bem comportado para  $\sigma = \frac{2\pi}{L}$  finito.

Devido ao fato da escala de momento  $\kappa$  ser arbitrária, podemos escolher  $\kappa = 1$  sem qualquer perda de generalidade. Logo, o ponto simétrico corresponderá a  $k^2 = 1$ . Além disso tomamos os quasi-momentos iguais a zero. Portanto, sabendo que  $\int_0^1 dx \ln[x(1-x)] = -2$ , a expansão em  $\epsilon$  completa de (3.72) é dada por:

$$I_{2PS}^{(\tau)}(\sigma) = \frac{S_d}{\epsilon} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \right]. \quad (3.76)$$

Na teoria massiva, estudamos o comportamento do termo de correção do tamanho finito nos limites  $r^{-1} = \frac{\mu}{\sigma} = \frac{L}{2\pi\xi} \rightarrow \infty$  e  $r^{-1} \rightarrow 0$ , onde  $\xi$  foi mantido finito. Agora com o comprimento de correlação infinito, vamos analisar como a função de correção  $F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma)$  também se comporta para  $\sigma^{-1} = \frac{L}{2\pi} \rightarrow \infty$  e  $\sigma^{-1} \rightarrow 0$ . Para tal fim, lançaremos mão do resultado dado no apêndice B:

$$F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) = \frac{4\sigma}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\tau)}{n} [\cosh(\pi n\sigma^{-1}) \operatorname{shi}(\pi n\sigma^{-1}) - \sinh(\pi n\sigma^{-1}) \operatorname{chi}(\pi n\sigma^{-1})], \quad (3.77)$$

onde as funções  $\operatorname{shi}(z)$  e  $\operatorname{chi}(z)$  lá definidas são conhecidas como o seno e o cosseno hiperbólicos integrais, respectivamente. Sabendo que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [\cosh z \operatorname{shi} z - \sinh z \operatorname{chi} z] \approx \frac{1}{z} + O(z^{-2}), \quad (3.78)$$

para  $z$  real, podemos escrever:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \approx \frac{16}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\tau)}{n^2}. \quad (3.79)$$

Ou seja, no limite  $L \rightarrow \infty$ , o termo de correção também tende a zero, resultando apenas na contribuição singular do sistema infinito em (3.76).

Para entender o que acontece no outro extremo ( $L \rightarrow 0$ ), usaremos a identidade (3.47) tal como fizemos na teoria massiva. Através das substituições  $x \rightarrow z = L\sqrt{x(1-x)}$  e  $t \rightarrow \frac{2\pi\tau}{z}$ , reescrevemos (3.75) como:

$$\begin{aligned} F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) = & 2\gamma + 2 \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{L\sqrt{x(1-x)}}{4\pi} \right] + \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + x(1-x) \left(\frac{L}{4\pi}\right)^2}} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{\sqrt{(n-\tau)^2 + x(1-x) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}} - \frac{1}{n} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{\sqrt{(n+\tau)^2 + x(1-x) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}} - \frac{1}{n} \right]. \quad (3.80) \end{aligned}$$

Convém observar que a escolha  $\kappa = 1$  transforma o comprimento  $L$  em uma variável adimensional. Portanto, nenhuma inconsistência dimensional existe no resultado acima. Excetuando a integração no parâmetro de Feynman  $x$ , veremos que (3.80) possui o mesmo tipo de dependência em  $L$  que o correspondente termo de correção em (3.48) tem em  $r^{-1}$  na teoria massiva. Neste último caso, a teoria renormalizada com o comprimento de correlação finito e momentos externos nulos é completamente equivalente à teoria não-massiva renormalizada no ponto simétrico  $k^2 = 1$  e comprimento de correlação infinito.

No limite  $L \rightarrow 0$ , os dois últimos somatórios do resultado anterior são bem definidos e podemos identificá-los com  $2(2 \ln 2 - 1)\delta_{\tau, \frac{1}{2}}$ , conforme fizemos em (3.50). As divergências para valores pequenos de  $L$  vêm com o termo logarítmico e com a integral do termo com a raiz quadrada. Para resolver essa integral, consideremos a identidade [68]:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \left[ \frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}} \right], \quad (3.81)$$

válida para  $c < 0$  e  $\Delta < 0$ , onde  $\Delta = 4ac - b^2$ . Através das identificações  $a = \tau^2$  e  $b = -c = \frac{L^2}{4\pi^2}$ , obtemos:

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + x(1-x) \left(\frac{L}{4\pi}\right)^2}} = \frac{4\pi}{L} \arcsin \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16\pi^2\tau^2}{L^2}}} \right]. \quad (3.82)$$

Usando  $\int_0^1 dx \ln[x(1-x)]^{\frac{1}{2}} = -1$  e combinando esses últimos resultados com (3.80) e (3.76), chegamos a:

$$\lim_{L \rightarrow 0} I_{2PS}^{(\tau)}(\sigma) \approx \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \left[ \gamma + (2 \ln 2 - 1)\delta_{\tau, \frac{1}{2}} + \ln \left( \frac{L}{4\pi} \right) - 1 \right] + \frac{2\pi}{L} \arcsin \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16\pi^2\tau^2}{L^2}}} \right] \epsilon \right\}. \quad (3.83)$$

Essa equação nos mostra que o último termo de correção do tamanho finito em condições de contorno periódica ( $\tau = 0$ ) comporta-se exatamente como  $\frac{\pi^2}{L}$ . Quando comparado com o correspondente no caso massivo, a diferença ocorre apenas pela presença do fator  $\pi$  devido à integração no parâmetro de Feynman. O termo logarítmico ainda está presente como na teoria massiva. No entanto, a lei potência  $L^{-1}$  gerada pelo último termo é dominante e teremos o mesmo tipo de crossover da teoria massiva. Essa correspondência massivo  $\leftrightarrow$  não-massivo também acontece em condições de contorno antiperiódicas. Notando que

$$\frac{2\pi}{L} \arcsin \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16\pi^2\tau^2}{L^2}}} \right] \xrightarrow{L \rightarrow 0} \frac{2\pi}{L} \arcsin \left[ \frac{L}{2\pi} \right] \xrightarrow{L \rightarrow 0} 1$$

é bem comportado no limite  $L \rightarrow 0$ , apenas o termo  $\ln L$  contribui com o crossover quando  $L$  é da mesma ordem de grandeza do parâmetro de rede do sistema, conforme já havíamos afirmado para o caso massivo. Desse modo, completamos a nossa análise para diferentes valores de  $L$  em ambas as condições de contorno. A equivalência entre as teorias massiva e não-massiva é portanto estabelecida no que diz respeito ao crossover dimensional.

Na nossa análise para o caso não-massivo, acessamos as regiões (ii) e (iii) da variável de escala  $\frac{L}{\xi}$  ao fazer  $L$  variar de infinito a valores finitos. Vimos então a persistência de termos de correção em  $L$  mesmo no limite  $\frac{L}{\xi} \rightarrow 0$ . Contudo que evitemos valores pequenos para  $L$ , a expansão em  $\epsilon$  ainda permanece válida nesse limite. Portanto, não consideraremos mais a conjectura fenomenológica para as três regiões de escala. Para  $L$  suficientemente grande, podemos variar  $\frac{L}{\xi}$  de zero a infinito sem invalidar o método perturbativo. Os termos de correção permanecerão bem comportados e podemos usar a regularização dimensional com expansão em  $\epsilon$  no cálculo das integrais de ordens 2 e 3 loops a seguir.

Prosseguindo com o cálculo da contribuição de 2 loops da função de vértice de 4 pontos, consideremos o correspondente não-massivo da integral (3.52), fazendo  $\mu = 0$ :

$$I_4^{(\tau)}(k, k', j, j'; \sigma) = \sigma^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 - k)^2 + \sigma^2(l_1 - j + \tau)^2][q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau)^2]} \times \\ \times \frac{1}{[(q_1 + q_2 + k')^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j' + \tau)^2][q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau)^2]}. \quad (3.84)$$

Deixamos para o apêndice B a discussão sobre a regularização da integral acima no ponto simétrico. O resultado (B.30) fornece:

$$I_{4PS}^{(\tau)}(\sigma) = \frac{S_d^2}{2\epsilon^2} \left[ 1 + \frac{3\epsilon}{2} + \epsilon F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \right]. \quad (3.85)$$

Similarmente, as integrais contribuindo em ordens de 2 e 3 loops para a função de vértice são obtidas de (3.54) e (3.55), respectivamente, fazendo  $\mu = 0$ . Agora, estamos interessados na derivada com relação a  $k^2$  no ponto simétrico no qual  $k^2 = 1$  e  $j = 0$ . O cálculo dessas integrais é realizado no apêndice B, onde os resultados (B.38) e (B.41) fornecem respectivamente:

$$D'_{3PS}^{(\tau)}(\sigma) = -\frac{S_d^2}{8\epsilon} \left[ 1 + \frac{5\epsilon}{4} - 2\epsilon W^{(\tau)}(\sigma) \right], \quad (3.86)$$

$$D'_{5PS}^{(\tau)}(\sigma) = -\frac{S_d^3}{6\epsilon^2} [1 + 2\epsilon - 3\epsilon W^{(\tau)}(\sigma)], \quad (3.87)$$

onde definimos  $W^{(\tau)}(\sigma) = \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma^2 \tau^2) - \overline{F}^{(\tau)}(\sigma) + 2F_0'^{(\tau)}(\sigma)$ , com  $\overline{F}^{(\tau)}(\sigma)$  e  $F_0'^{(\tau)}(\sigma)$  dados pelas eqs. (B.37) e (B.36), respectivamente. De posse desses resultados, procedemos ao cálculo dos expoentes críticos seguindo passos análogas aos realizados na teoria massiva.

### 3.7 Expoentes críticos na teoria não-massiva

As condições de renormalização (3.68a-3.68d) serão usadas para determinarmos as constantes de renormalização  $u_0^{(\tau)}$ ,  $Z_\Phi^{(\tau)}$  e  $\bar{Z}_{\Phi^2}^{(\tau)}$  discutidas na seção anterior. Tal como na teoria massiva, elas serão expandidas em termos da constante de acoplamento adimensionalizada  $u$ , conforme realizado em (2.100a-2.100c). Os coeficientes dessas expansões continuarão sendo dados de forma análoga às eqs. (3.58), onde as integrais de Feynman que lá aparecem são substituídas pelas suas correspondentes não-massivas (3.76) e (3.85-3.87). Desse modo, calculamos:

$$a_1^{(\tau)} = \frac{N+8}{6\epsilon} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \right], \quad (3.88a)$$

$$a_2^{(\tau)} = \left( \frac{N+8}{6\epsilon} \right)^2 + \frac{2N^2 + 23N + 86}{72\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{N+8}{6} \right)^2 F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma), \quad (3.88b)$$

$$b_2^{(\tau)} = -\frac{N+2}{144\epsilon} \left[ 1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon W^{(\tau)}(\sigma) \right], \quad (3.88c)$$

$$b_3^{(\tau)} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon^2} \left[ 1 + \frac{5}{4}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \right], \quad (3.88d)$$

$$c_1^{(\tau)} = \frac{N+2}{6\epsilon} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \right], \quad (3.88e)$$

$$c_2^{(\tau)} = \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon^2} + \frac{2N^2 + 11N + 14}{72\epsilon} + \frac{N^2 + 7N + 10}{36\epsilon} F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma). \quad (3.88f)$$

Substituindo agora os coeficientes  $a_1^{(\tau)}$  e  $a_2^{(\tau)}$  em (2.112a), obtemos a função de Wilson responsável pelo fluxo de  $u$  no caso não-massivo:

$$\beta^{(\tau)}(u) = -\epsilon u + \frac{N+8}{6} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \right] u^2 - \frac{3N+14}{12} u^3. \quad (3.89)$$

A condição  $\beta(u^*) = 0$  fornece o ponto fixo  $u^*$ . Tal como fizemos no caso massivo, o valor para  $u^*$  não-trivial e estável no regime infravermelho tem o formato  $u^* = \epsilon(a + \epsilon b)$ . Seguindo um procedimento semelhante ao esboçado na seção 3.5, determinamos:

$$u^* = \frac{6}{N+8} \epsilon \left\{ 1 + \left[ \frac{9N+42}{(N+8)^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \right] \epsilon \right\}. \quad (3.90)$$

As demais funções de Wilson diretamente envolvidas no cálculo dos expoentes  $\eta$  e  $\nu$  são obtidas através das substituições dos coeficiente  $b$ 's e  $c$ 's dados acima nas equações (2.112b) e (2.112c), resultando respectivamente em:

$$\gamma_\Phi^{(\tau)}(u) = \frac{N+2}{72} u^2 \left\{ 1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon W^{(\tau)}(\sigma) - \frac{N+8}{12} \left[ 1 - 4W^{(\tau)}(\sigma) - 2F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \right] u \right\}, \quad (3.91)$$

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2}^{(\tau)}(u) = \frac{N+2}{6} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma) \right] u - \frac{N+2}{12} u^2. \quad (3.92)$$

Calculando essas funções no ponto fixo  $u^*$ , chegaremos aos mesmos valores para o expoente  $\eta = \gamma_{\Phi}^{(\tau)}(u^*)$  e para  $\bar{\gamma}_{\Phi^2}^{(\tau)}(u^*)$  obtidos na teoria massiva, conforme podemos ver nos resultados (3.65) e (3.66), respectivamente. Desse modo, o expoente  $\nu$  será idêntico ao dado em (3.67).

A teoria não-massiva com a sua invariância de escala no regime infravermelho é completamente equivalente à formulação massiva no regime ultravioleta devido ao fato de ambas fornecerem os mesmos expoentes críticos com a mesma classe de universalidade  $(d, N)$  do sistema infinito, apesar dos ingredientes calculados para tal fim, serem distintos.

A principal conclusão que podemos tirar do presente capítulo diz respeito à variável de escala  $\frac{L}{\xi}$ . A região definida por  $\frac{L}{\xi} \leq 1$  não deve mais ser considerada proibitiva para a aplicação do método perturbativo. A nossa análise na teoria sem massa (caracterizada pelo limite  $\frac{L}{\xi} \rightarrow 0$  para  $L$  finito) mostra que o escalamento de sistemas com uma geometria de placas planas e paralelas é bem comportado na temperatura crítica. Podemos de fato realizar a regularização dimensional das integrais de Feynman e a subsequente expansão em  $\epsilon$  das funções de vértice, constantes de renormalização, funções de Wilson e expoentes críticos.

Tanto na formulação da teoria com massa quanto na formulação sem massa, os termos de correção de tamanho finito são proporcionais a  $L^{-1}$  para  $L$  pequeno quando o parâmetro de ordem está sujeito a condições de contorno periódicas. Já em condições de contorno antiperiódicas, a correção é de ordem  $\ln L$  para  $L$  pequeno, também em ambas as formulações massiva e não-massiva. Portanto, é a dominância dos termos de correção sobre as singularidades dominantes das integrais de Feynman a responsável pelo crossover dimensional. Desde que evitemos valores pequenos para  $L$  (da ordem do parâmetro de rede do sistema), o método perturbativo pode ser utilizado irrespectivamente do valor de  $\frac{L}{\xi}$ .

Outra aplicação interessante da nossa análise pode ser realizada em sistemas exibindo competição no ponto de Lifshitz. Esse tipo de sistema é composto de um subespaço com competição e outro subespaço sem competição com as mesmas propriedades do sistema  $d$ -dimensional estudado até agora. No próximo capítulo, estudaremos a introdução de um tamanho finito ao longo de uma das dimensões desse subespaço não-competitivo.

# Capítulo 4

## Tamanho finito em sistemas competitivos do tipo Lifshitz

### 4.1 Introdução

Em contraste com a análise realizada no último capítulo, consideraremos a partir de agora sistemas exibindo interações competitivas nas vizinhanças de ou exatamente no ponto crítico de Lifshitz. Lembrando da nossa discussão no capítulo 1, tais sistemas são compostos por um subespaço competitivo com  $m$  dimensões juntamente com outro subespaço onde a competição está ausente ao longo de  $d - m$  direções espaciais. Quando  $d = m$ , teremos apenas o subespaço competitivo e o sistema será isotrópico. A fim de investigar de uma forma mais geral o efeito do tamanho finito nos dois tipos de subespaços, consideraremos neste trabalho o caso anisotrópico ( $m < d$ ).

No capítulo 2, apresentamos uma descrição fenomenológica em termos de campos contínuos para sistemas sem competição. Apenas os três monômios presentes na densidade lagrangiana (2.1) são relevantes na descrição das singularidades dos observáveis físicos desse tipo de sistema na criticalidade. Já em sistemas competitivos no ponto de Lifshitz, termos com derivadas de ordem superior passam a ser relevantes na teoria e a densidade lagrangiana será modificada para [66]:

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma_0}{2}(\nabla_m^2 \Phi)^2 + \frac{\delta_0}{2}(\nabla_m \Phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_{(d-m)} \Phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\Phi^4. \quad (4.1)$$

Estamos novamente considerando o parâmetro de ordem  $\Phi$  como sendo um vetor de  $N$  componentes em uma teoria  $\Phi^4$  com simetria  $O(N)$ . Note que os três últimos termos acima descrevem a parte não competitiva do sistema. A massa  $\mu$  continua dependendo da temperatura reduzida  $t$  através de  $\mu^2 \sim t$  e  $\lambda$  mantém o seu papel de constante de acoplamento. Já os dois primeiros termos estão relacionados com a competição ao longo do subespaço  $m$ -dimensional. No capítulo 2, enfatizamos a necessidade de considerar apenas monômios do tipo  $(\nabla\Phi)^2$ ,  $\Phi^2$  e  $\Phi^4$  na descrição do comportamento crítico. Entretanto, o ponto de Lifshitz é caracterizado por

$\delta_0 = 0$  e  $t = 0$ , enquanto que  $\sigma_0 > 0$  [66]. Desse modo ficamos apenas com o termo de derivada de segunda ordem do campo  $\Phi$  no subespaço competitivo, que passa então a ser relevante na teoria.

Uma análise semelhante à realizada na seção 2.7 mostra que no ponto de Lifshitz a constante de acoplamento tem dimensão  $[\lambda] = \Lambda^{4 + \frac{m}{2} - d}$ , onde  $\Lambda$  é uma escala de momento arbitrária. Logo, a dimensão crítica até a qual a teoria pode ser renormalizada é dada por  $d_c = 4 + \frac{m}{2}$  e o parâmetro usado na expansão dos expoentes críticos passa a ser  $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$ .

A anisotropia produzida pela presença do primeiro termo em (4.1) induz dois tipos de escalamento no sistema. Cada um deles relacionado a um subespaço com um determinado comprimento de correlação. Portanto, denominaremos  $\xi_{L4}$  e  $\xi_{L2}$  como os comprimentos de correlação ao longo do subespaço competitivo e não-competitivo, respectivamente. Os expoentes críticos  $\eta_{L4}$  e  $\nu_{L4}$  estão associados ao primeiro subespaço enquanto que  $\eta_{L2}$  e  $\nu_{L2}$  estarão associados ao segundo. A dependência em  $m$  dos expoentes críticos calculados perturbativamente em termos de potências de  $\epsilon_L$  introduz uma nova classe de universalidade representada pelo conjunto de parâmetros  $(N, d, m)$ .

Albuquerque e Leite [74] propuseram há alguns anos uma maneira alternativa de abordar uma teoria de campo com a densidade lagrangiana (4.1) no ponto de Lifshitz. O parâmetro  $\sigma_0$  é considerado adimensional, sendo fixado em  $\sigma_0 = 1$ . O propagador livre no espaço dos momentos passa então a ser dado por:

$$G_0(k, p) = \frac{1}{(k^2)^2 + p^2 + \mu^2}, \quad (4.2)$$

onde  $k$  e  $p$  são os momentos pertencentes aos subespaços recíprocos competitivo e não-competitivo, respectivamente. Para que haja consistência dimensional,  $k$  é tomado como tendo dimensão de momento elevado a um meio, ou seja, devemos ter  $[k] = \Lambda^{\frac{1}{2}}$ . Em seguida, Leite [75] apresenta uma formulação na qual o escalamento dos momentos em ambos os subespaços é realizada de forma independente. Dois conjuntos de condições de renormalização e equações de grupo de renormalização são propostos e as leis de escala para os expoentes críticos são obtidas independentemente em cada subespaço. Recorrendo a uma aproximação especial realizada em cada loop de integração para o caso anisotrópico, podemos calcular as integrais de Feynman analiticamente e determinar os expoentes críticos em termos de expansões em ordens (em princípio) arbitrárias de  $\epsilon_L$ .

Nosso objetivo no restante deste trabalho é aplicar o método de Nemirovsky e Freed (NF), juntamente com a formulação de Leite, na descrição do crossover dimensional e cálculo dos expoentes críticos em sistemas competitivos no ponto de Lifshitz com uma das dimensões finita. Consideraremos novamente uma geometria do tipo filme fino determinada pela delimitação espacial do sistema por duas superfícies planas e paralelas separadas por uma distância  $L$ . O parâmetro de ordem estará sujeito a condições de contorno periódicas (*PBC*) ou antiperiódicas (*ABC*) em ambas as superfícies. Existem duas maneiras de introduzirmos o tamanho finito  $L$ : podemos fazer uma das dimensões do sistema finita ao longo do (i) subespaço não-competitivo

ou ao longo do (ii) subespaço competitivo. Em ambos os casos, teremos os subespaço competitivo ou não-competitivo infinitos, respectivamente.

A configuração (i) é mais simples de ser estudada. Com algumas pequenas mudanças, todos os elementos empregados na análise de sistemas finitos sem competição permanecerão úteis e por esse motivo, vamos nos concentrar em (i) no presente capítulo. Começaremos pela teoria não-massiva (com  $\xi_{L4}$  e  $\xi_{L2}$  infinitos) e analisaremos como o crossover dimensional acontece para valores pequenos de  $L$ . O cálculo dos expoentes críticos seguirá de forma análoga ao realizado na ref. [75]. Em seguida, usaremos a correspondente versão massiva da teoria apresentada por Carvalho e Leite [76]. Mostraremos a equivalência entre as duas teorias e concluiremos portanto que o crossover dimensional é ditado apenas pelo limite  $L \rightarrow 0$ , e não pelas variáveis de escala  $\frac{L}{\xi_{L2}}$  e  $\frac{L}{\xi_{L4}^2}$ , sendo consistente com a descrição realizada no capítulo 3 para sistemas sem competição. Note que  $\xi_{L4}^2$  tem dimensão de comprimento em virtude da redefinição dimensional dos momentos no subespaço competitivo.

Por outro lado, a configuração (ii) exige uma generalização para a função térmica (3.34), na qual teremos não apenas potências quadráticas, mas também potências quárticas no índice  $j$  do somatório devido à existência de um quase-momento quártico. Deixaremos para o capítulo seguinte a tarefa de dedução de uma nova representação para essa função térmica mais geral e a subsequente aplicação na regularização das integrais de Feynman, análise do crossover dimensional e cálculo dos expoentes críticos.

## 4.2 Formulação da teoria no ponto de Lifshitz

Consideremos a densidade lagrangiana (4.1) no ponto de Lifshitz caracterizado por  $\delta_0 = 0$  e  $\mu = 0$ . Logo, a próxima contribuição mais relevante na descrição do comportamento crítico corresponde ao primeiro termo dado por  $\frac{1}{2}(\nabla_m^2 \Phi)^2$ . Como estamos considerando a configuração (i), apenas o subespaço não-competitivo apresenta uma dimensão compacta e, desse modo, vamos reescrever (4.1) convenientemente na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla_m^2 \Phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_{(d-m-1)} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x', \rho, z) \right)^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi^4(x', \rho, z). \quad (4.3)$$

Note que  $z$  é a coordenada ao longo da dimensão compacta e  $\rho$  é um vetor perpendicular ao eixo  $z$ . Colocamos então uma superfície em  $z = 0$  e a outra em  $z = L$ . As coordenadas no subespaço competitivo são representadas por  $x'$ .

O efeito do tamanho finito  $L$  será estudado através das condições de contorno periódica:

$$\Phi(x', \rho, 0) = \Phi(x', \rho, L),$$

ou antiperiódica:

$$\Phi(x', \rho, 0) = -\Phi(x', \rho, L).$$

Conforme analisamos no capítulo anterior, tais condições não quebram a invariância translacional do sistema e a representação da teoria no espaço dos momentos continua sendo conveniente. O domínio compacto da coordenada  $z$  implica no aparecimento de momentos discretos (quase-momentos) ao longo desse eixo no espaço recíproco. Portanto, o campo  $\Phi$  pode ser decomposto em termos de componentes de Fourier de forma análoga à eq. (3.4) e as regras para a construção dos diagramas de Feynman permanecem idênticas àquelas apresentadas nas eqs. (3.17) e (3.18), com os tensores  $S_{i_1, i_2}$  e  $S_{i_1, \dots, i_4}$  dados em (3.20) e (3.21). A diferença está apenas no propagador livre da teoria que passa a incluir o momento quártico do subespaço competitivo:

$$G_0(k, p, j) = \frac{1}{(k^2)^2 + p^2 + \sigma^2(j + \tau)^2}, \quad (4.4)$$

onde  $\sigma = \frac{2\pi}{L}$  e  $\tau = 0$  (ou  $\tau = \frac{1}{2}$ ) representa a condição de contorno periódica (ou antiperiódica). A variável  $j$  pertence ao conjunto dos números inteiros e está associada ao quase-momento  $\sigma j$ .

Como estamos tratando de uma teoria sem massa, devemos renormalizar as funções de vértice com os momentos externos diferentes de zero a fim de evitar as divergências no regime infravermelho. No capítulo anterior, definimos tais momentos no ponto simétrico construído a partir de uma escala arbitrária  $\kappa$ . Devido à anisotropia do sistema, caracterizada agora no espaço recíproco pela presença do momento quártico  $k$ , introduziremos escalas de momento diferentes para cada subespaço. Denominamos então  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  como as escalas nos subespaços não-competitivo e competitivo, respectivamente. Dois conjuntos de condições de renormalização nas funções de vértice são necessários para remover de forma independente as divergências no regime ultravioleta presentes em cada subespaço de momentos. No primeiro conjunto, tomamos os momentos externos  $p_i$  ao longo do subespaço não-competitivo no ponto simétrico  $PS_1$ , determinado a partir de  $p_i \cdot p_j = \frac{\kappa_1^2}{4}(4\delta_{ij} - 1)$ , enquanto que escolhemos  $k_i = 0$  no subespaço competitivo. Os quase-momentos externos também são escolhidos iguais a zero. Devido à dependência de  $\Gamma^{(2)}$  nas condições de contorno, o primeiro conjunto de equações apresentado na ref. [75] será aqui escrito como:

$$\Gamma_R^{(2)}(0; g_1) = \sigma^2 \tau^2, \quad (4.5a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p, j = 0, 0; g_1) \right|_{p^2 = \kappa_1^2} = 1, \quad (4.5b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(p_i, j_i = 0, 0; g_1) \Big|_{PS_1} = g_1, \quad (4.5c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(p_1, p_2, p', j_1 = j_2 = j' = 0, 0; g_1) \Big|_{\overline{PS}_1} = 1. \quad (4.5d)$$

O ponto simétrico  $\overline{PS}_1$  inclui o momento externo  $p'$  referente ao campo composto  $\Phi^2$  obedecendo  $p'^2 = (p_1 + p_2)^2 = \kappa_1^2$ .

O segundo conjunto de condições de renormalização é construído de forma análoga. Definimos o ponto simétrico  $PS_2$  através de  $k_i \cdot k_j = \frac{\kappa_2^2}{4}(4\delta_{ij} - 1)$  e tomamos agora os momentos

e quase-momentos externos no subespaço não-competitivo iguais a zero. Portanto, levando em consideração também as condições de contorno, escrevemos:

$$\Gamma_R^{(2)}(0; g_2) = \sigma^2 \tau^2, \quad (4.6a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial(k^2)^2} \Gamma_R^{(2)}(k, 0; g_2) \right|_{k^2=\kappa_2^2} = 1, \quad (4.6b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_i, 0; g_1) \Big|_{PS_2} = g_2, \quad (4.6c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_1, k_2, k', 0; g_2) \Big|_{\overline{PS_2}} = 1, \quad (4.6d)$$

onde temos analogamente  $(k'^2)^2 = [(k_1 + k_2)^2]^2 = \kappa_2^4$  na última equação.

Em cada conjunto das condições (4.5) ou (4.6), estamos considerando as constantes de renormalização  $Z_{\Phi^{(n)}}$  e  $Z_{\Phi^2^{(n)}}$  distintas. Aqui usamos o índice  $n$  para distinguir cada uma delas. Quando  $n = 1$ , estaremos nos referindo às constantes do subespaço não-competitivo enquanto que  $n = 2$  refere-se às constantes do subespaço competitivo. Apesar dessas constantes dependerem das condições de contorno, não iremos rotular tais quantidades com o índice  $\tau$  pois a discussão a seguir não apresenta ambiguidades, simplificando assim a notação. Outro ponto importante a ser observado diz respeito às constantes de acoplamento que foram também consideradas diferentes em cada subespaço, sendo representadas por  $g_n$  nas equações acima.

O procedimento para determinação das constantes de renormalização segue os mesmos passos delineados na seção 2.8. Definimos  $\Lambda_n$  como os cortes nos momentos em termos do quais as divergências no ultravioleta são expressas no subespaço não-competitivo ( $n = 1$ ) e competitivo ( $n = 2$ ). Portanto, o correspondente à equação (2.105) será aqui escrito como:

$$\Gamma_{R^{(n)}}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \kappa_n) = (Z_{\Phi^{(n)}})^{\frac{E}{2}} (Z_{\Phi^2^{(n)}})^M \Gamma^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; \lambda_n, \Lambda_n), \quad (4.7)$$

onde  $q_{l(n)}$  ( $l = 1, \dots, E$ ) e  $Q_{l'(n)}$  ( $l' = 1, \dots, M$ ) estão associados aos momentos externos devido a uma função de vértice de  $E$  pontos e à inserção de  $M$  campos compostos  $\Phi^2$ , respectivamente. A mesma correspondência também está sendo usada para os índices de quase-momento  $j_l$  e  $J_{l'}$ . Chamamos atenção para o fato de que  $q_{l(1)}$  refere-se aos momentos ao longo do subespaço não-competitivo enquanto  $q_{l(2)}$  são os momentos ao longo do subespaço  $m$ -dimensional.

A função de vértice no lado esquerdo da equação acima é escrita em termos de uma expansão em potências da constante de acoplamento renormalizada. Para tal finalidade, escrevemos expansões semelhantes àsquelas da eq. (2.100) na seguinte forma:

$$u_{0n} = u_n (1 + a_{1n} u_n + a_{2n} u_n^2), \quad (4.8a)$$

$$Z_{\Phi^{(n)}} = 1 + b_{2n} u_n^2 + b_{3n} u_n^3, \quad (4.8b)$$

$$\overline{Z}_{\Phi^2^{(n)}} = 1 + c_{1n} u_n + c_{2n} u_n^2, \quad (4.8c)$$

onde  $\bar{Z}_{\Phi^2(n)} = Z_{\Phi(n)} Z_{\Phi^2(n)}$  e as escalas de momento  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  foram usadas para adimensionalizar as constantes de acoplamento através de  $g_n = \kappa_n^{n\epsilon} u_n$  e  $\lambda_n = \kappa_n^{n\epsilon} u_{0n}$ . A substituição de (4.8) em (4.7) e a subsequente aplicação das condições (4.5) e (4.6) permitem a determinação dos coeficientes  $a_{in}$ ,  $b_{in}$  e  $c_{in}$  ordem a ordem na expansão em  $u_n$ . Os resultados podem então ser lidos das eqs. (2.102), onde devemos acrescentar agora a dependência em  $n$  devido ao fato dos momentos externos das integrais de Feynman estarem sendo tomados nos pontos simétricos  $PS_1$  ( $n = 1$ ) ou  $PS_2$  ( $n = 2$ ). Na seção 4.4, mostraremos esse procedimento explicitamente.

Em contraste com as condições de renormalização para uma teoria sem competição, estamos diante de duas escalas de momento diferentes que podem ser escolhidas livremente. Tal liberdade de escolha produz dois conjuntos de equações de grupo de renormalização análogas àquelas dadas em (2.106). Usando novamente o índice  $n$  para distinguir um subespaço do outro, podemos condensar esses dois conjuntos da seguinte forma:

$$\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[ Z_{\Phi(n)}^{-E/2} Z_{\Phi^2(n)}^{-M} \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \kappa_n) \right]_{\lambda, \Lambda} = 0. \quad (4.9)$$

Realizando a derivação com relação a  $\ln \kappa_n$  e mantendo os parâmetros  $\lambda_n$  e  $\Lambda_n$  fixos, obtemos as equações do grupo de renormalização:

$$\left[ \kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} + \beta_n(g_n) \frac{\partial}{\partial g_n} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi(n)}(g_n) + M \gamma_{\Phi^2(n)}(g_n) \right] \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \kappa_n) = 0, \quad (4.10)$$

onde definimos as funções de Wilson como:

$$\beta_n(g_n) = \left( \kappa_n \frac{\partial g_n}{\partial \kappa_n} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n}, \quad (4.11a)$$

$$\gamma_{\Phi(n)}(g_n) = \left( \kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} \ln Z_{\Phi(n)} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n}, \quad (4.11b)$$

$$\gamma_{\Phi^2(n)}(g_n) = \left( \kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} \ln Z_{\Phi^2(n)} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n}. \quad (4.11c)$$

A equação (4.10) está relacionada com transformações infinitesimais do grupo de renormalização de onde podemos determinar como as funções de vértice escalam nos momentos externos. Tal escalamento gera dois fluxos nas constantes de acoplamento (um para  $g_1$  e outro para  $g_2$ ) que são controlados pela função  $\beta_n(g_n)$ . No regime infravermelho, as constantes  $g_n$  fluem para os pontos fixos  $g_n^*$  dados pela condição  $\beta_n(g_n^*) = 0$ . Além disso, as funções de vértice escalam de forma homogênea, fornecendo uma teoria invariante por escala e de onde podemos extrair os expoentes  $\eta_{L2}$  e  $\nu_{L2}$  para o subespaço não-competitivo e os correspondentes  $\eta_{L4}$  e  $\nu_{L4}$  no subespaço com competição.

Na prática, as equações em (4.10) são escritas em termos das constantes de acoplamento  $u_n$  adimensionais. Portanto, usando  $g_n = \kappa_n^{n\epsilon} u_n$ , podemos reescrevê-las como:

$$\left[ \kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} + \beta_n(u_n) \frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi(n)}(u_n) + M \gamma_{\Phi^2(n)}(u_n) \right] \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \kappa_n) = 0, \quad (4.12)$$

onde as funções de Wilson passam a ser convenientemente escritas de uma forma semelhante às dadas em (3.30):

$$\beta_n(u_n) = -n\epsilon \left( \frac{\partial \ln u_{0n}}{\partial u_n} \right)^{-1}, \quad (4.13a)$$

$$\gamma_{\Phi(n)}(u_n) = \beta_n(u_n) \frac{\partial \ln Z_{\Phi(n)}}{\partial u_n}, \quad (4.13b)$$

$$\gamma_{\Phi^2(n)}(u_n) = -\beta_n(u_n) \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2(n)}}{\partial u_n}. \quad (4.13c)$$

Além disso, a fim de obter os expoentes  $\nu_{L2}$  e  $\nu_{L4}$ , precisamos da definição:

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2(n)}(u_n) = -\beta_n(u_n) \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\Phi^2(n)}}{\partial u_n} \quad (4.14)$$

Substituindo as expansões em (4.8) nas definições (4.13a-b) e (4.14), chegamos aos resultados:

$$\beta_n(u) = -n\epsilon_L u [1 - a_{1n}u + 2(a_{1n}^2 - a_{2n})u^2], \quad (4.15a)$$

$$\gamma_{\Phi(n)}(u) = -n\epsilon_L u [2b_{2n}u + (3b_{3n} - 2b_{2n}a_{1n})u^2], \quad (4.15b)$$

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2(n)}(u) = n\epsilon_L u [c_{1n} + (2c_{2n} - c_{1n}^2 - a_{1n}c_{1n})u]. \quad (4.15c)$$

Note que a função  $\beta_n(u_n)$ , tal como as demais funções de Wilson, depende do subespaço no qual as transformações de grupo de renormalização estão sendo realizadas. No entanto, se as integrais de Feynman de 1 e 2 loops que contribuem para a função de vértice de 4 pontos apresentarem os mesmos resultados nos pontos simétricos  $PS_1$  e  $PS_2$ , os coeficientes  $a_{1n}$  e  $a_{2n}$  independem de  $n$  (ver eqs. (3.58a-b)). Logo, os pontos fixos em ambos os subespaços terão o mesmo valor. Mostraremos na próxima seção que isso de fato ocorre até ordem de 2 loops.

Uma vez obtido o ponto fixo através da condição  $\beta_n(u_n^*) = 0$ , calculamos os expoentes críticos relacionados com os comprimentos e funções de correlação a partir de equações análogas às listadas em (2.110). São elas:

$$\eta_n = \gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n^*), \quad (4.16a)$$

$$\nu_n^{-1} = 2n - \eta_n - \bar{\gamma}_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}(u_n^*), \quad (4.16b)$$

onde introduzimos a notação  $\eta_1 = \eta_{L2}$  e  $\eta_2 = \eta_{L4}$ , além do mesmo procedimento para os expoentes  $\nu_n$ . Segue também das análises de Leite [75] nas equações (4.12), todo o conjunto

de relações entre os demais expoentes críticos. Para cada subespaço, podemos escrever leis de escala semelhante às de um sistema sem competição. Usando o índice  $n$  para distinguir um subespaço do outro e novamente a notação das equações acima, escrevemos:

$$\alpha_n = 2 - n \left( d - \frac{m}{2} \right) \nu_n, \quad (4.17a)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2} \nu_n \left[ n \left( d - \frac{m}{2} \right) - 2n + \eta_n \right], \quad (4.17b)$$

$$\delta_n = \frac{n \left( d - \frac{m}{2} \right) + 2n - \eta_n}{n \left( d - \frac{m}{2} \right) - 2n + \eta_n}, \quad (4.17c)$$

$$\gamma_n = \nu_n (2n - \eta_n). \quad (4.17d)$$

Na seção 4.4, calcularemos explicitamente  $\eta_{L2}$  e  $\eta_{L4}$  até ordem  $\epsilon_L^3$ , enquanto que  $\nu_{L2}$ ,  $\nu_{L4}$  e os demais expoentes listados acima serão calculados até ordem  $\epsilon_L^2$ . Antes disso, vamos regularizar dimensionalmente as integrais de Feynman e analisar sob quais condições podemos computar os expoentes críticos perturbativamente sem a existência do crossover dimensional.

### 4.3 Integrais de Feynman

Já mencionamos que as regras de Feynman usadas na expansão diagramática das funções de correlação permanecem intactas quando tratamos de sistemas com competição no ponto de Lifshitz. De fato, a invariância translacional do sistema implica na validade de regras semelhantes às apresentadas nas eqs. (3.17) e (3.18), onde temos a conservação dos momentos e quase-momentos ao longo do subespaço não-competitivo. Aqui, devemos modificá-las apenas para incluir também a conservação dos momentos no subespaço competitivo e o propagador dado em (4.4). Desse modo, uma contribuição de 1-loop como (3.71) para a função vértice de 4 pontos será modificada com a inclusão da integração sobre os momentos quárticos do subespaço  $m$ -dimensional:

$$I_2^{(\tau)}(K', P, j; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(k + K')^2]^2 + (q + P)^2 + \sigma^2(l + j + \tau)^2\}} \times \\ \times \frac{1}{[(k'^2)^2 + q^2 + \sigma^2(l + \tau)^2]}. \quad (4.18)$$

Essa integral é um componente fundamental na construção das integrais de ordens mais elevadas no número de loops e portanto a consideraremos aqui com os todos os momentos externos arbitrários, conforme fizemos na seção 3.6.

Um truque bastante conveniente para a realização da integral em  $k$  acima consiste na utilização da aproximação ortogonal proposta por Leite [75]. Nessa aproximação, considera-se os momentos pertencentes ao subespaço competitivo como sendo ortogonais entre si. Ou seja,

devemos por  $k \cdot K' = 0$  em cada loop de integração e dessa forma todas as potências ímpares em  $k$  e  $K'$  são removidas do termo  $[(k + K')^2]$  que passa agora a ser aproximado por:

$$[(k + K')^2]^2 \approx (k^2)^2 + 2k^2 K'^2 + (K'^2)^2.$$

Introduzindo a parametrização de Feynman dada pela eq. (2.79), podemos reescrever (4.18) de forma conveniente como:

$$\begin{aligned} I_2^{(\tau)}(K', P, j; \sigma) &= \sigma \int_0^1 dx \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q \times \\ &\times \int \frac{d^m k}{\{(k^2)^2 + 2xK'^2 k^2 + x(K'^2)^2 + q^2 + 2xP \cdot q + xP^2 + \sigma^2[(l + \tau)^2 + 2xj(l + \tau)^2 + xj^2]\}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A integral em  $q$  e o somatório em  $l$  seguem os mesmos princípios adotados na seção 3.6. Por outro lado, a integração em  $k$  exibe o seguinte resultado deduzido na ref. [75]:

$$\int \frac{d^m k}{[(k^2)^2 + 2ak^2 + b^2]^\beta} = \frac{S_m}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\beta - \frac{m}{4}\right)}{\Gamma(\beta)} (b^2 - a^2)^{-\beta + \frac{m}{4}}, \quad (4.20)$$

onde  $S_m$  corresponde à área de uma esfera de raio unitário em um espaço com  $m$  dimensões. Portanto, podemos reescrever (4.19) como:

$$\begin{aligned} I_2^{(\tau)}(K', P, j; \sigma) &= \frac{S_m}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \int_0^1 dx \times \\ &\times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q}{\{q^2 + 2xP \cdot q + xP^2 + \sigma^2[(l + \tau)^2 + 2xj(l + \tau) + xj^2] + x(1-x)(K'^2)^2\}^{2 - \frac{m}{4}}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Aplicando no resultado (2.81), no qual identificamos  $d \rightarrow d - m - 1$ , e usando a identidade

$$\Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) S_{d-m} = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d-m-1}{2}\right) S_{d-m-1} \quad (4.22)$$

obtida a partir de (3.40) e a definição  $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$ , resolvemos a integral em  $q$ , fornecendo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} I_2^{(\tau)}(K', P, j; \sigma) &= \frac{S_m S_{d-m}}{8\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_L}{2}\right) \times \\ &\times \int_0^1 dx \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{\sigma^2(l + \tau + jx)^2 + x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2]\}^{-\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_L}{2}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

O próximo passo consiste na utilização da representação (3.36) para a função térmica generalizada correspondente ao somatório acima. Portanto, chegamos a:

$$I_2^{(\tau)}(K', P, j; \sigma) = \frac{S_m S_{d-m}}{8} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \times \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} [(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} + F_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau)}(K', P, j; \sigma) \right\}, \quad (4.24)$$

onde ampliamos a definição (3.73) para incluir a contribuição referente ao momento  $K'$  do subespaço competitivo:

$$F_\nu^{(\tau)}(K', P, j; \sigma) = \sigma^{-2\nu} \int_0^1 dx f_{\frac{1}{2}+\nu}(\tau + xj, \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2]}), \quad (4.25)$$

com  $f_{\frac{1}{2}+\nu}(a, b)$  definido em (3.38). A fim de realizarmos uma expansão de (4.24) no parâmetro dimensional  $\epsilon_L$  de forma consistente, reescrevemos  $\frac{d-m}{2} = 2 - \frac{m}{4} - \frac{\epsilon_L}{2}$  e usamos a seguinte expansão para a função Gama:

$$\Gamma(a + bx) = \Gamma(a) [1 + bx\psi(a) + O(x^2)], \quad (4.26)$$

com  $\psi(x)$  correspondendo à função dilogarítmica. Desse modo, podemos já realizar uma expansão parcial em  $\epsilon_L$ :

$$I_2^{(\tau)}(K', P, j; \sigma) = \frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \frac{1}{\epsilon_L} \left\{ (1 + [i_2]_m \epsilon_L) [(K'^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} + \frac{\epsilon_L}{2} F_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau)}(K', P, j; \sigma) \right\}, \quad (4.27)$$

onde usamos a definição:

$$[i_2]_m = 1 + \frac{1}{2} \left[ \psi(1) - \psi\left(2 - \frac{m}{4}\right) \right]. \quad (4.28)$$

O fator  $\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)$  em (4.27) é resultado de cada loop de integração. Por exemplo, uma integral com  $l$  loops terá esse fator elevado a  $l$ . Portanto, ele pode ser absorvido na redefinição da constante de acoplamento  $u_n$ , pois, conforme vimos na seção 2.6, a expansão no número de loops corresponde também a uma expansão em potências de  $u_n$  em uma teoria com apenas uma interação monomial do tipo  $\Phi^4$ . Tal propriedade será usada daqui por diante para simplesmente removermos esse fator de cada integral de Feynman.

Ambas as condições de renormalização (4.5) e (4.6) exigem o cálculo do resultado anterior nos pontos simétricos  $PS_1$  e  $PS_2$ . Na primeira delas, temos  $P^2 = \kappa_1^2$ ,  $j = 0$  e  $K' = 0$ , enquanto que na segunda, temos  $(K'^2)^2 = \kappa_2^4$  e  $P = \sigma j = 0$ . Sem qualquer perda de generalidade, podemos fixar as escalas de momento para  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$  e vemos portanto que (4.27) é idêntico nos dois pontos de simetria:

$$I_{2PS_1}^{(\tau)}(\sigma) = I_{2PS_2}^{(\tau)}(\sigma) = \frac{1}{\epsilon_L} \left[ 1 + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right]. \quad (4.29)$$

Note que a definição (4.25) é reduzida a (3.73) quando consideramos (4.27) nos pontos  $PS_1$  e  $PS_2$ . Por esse motivo, o termo  $F_0^{(\tau)}(1, 0; \sigma)$  presente na expressão acima é idêntico àquele na eq. (3.76). Além disso, esse termo é denominado de correção do tamanho finito devido ao fato dele ser nulo no limite  $L \rightarrow \infty$  ( $\sigma \rightarrow 0$ ), conforme podemos ver na eq. (3.79). Já no outro extremo do limite ( $L \rightarrow 0$ ), podemos utilizar toda a análise realizada na seção 3.6. Realizando um procedimento semelhante àquele empregado na obtenção de (3.83), chegamos ao resultado:

$$\lim_{L \rightarrow 0} I_{2PS_n}^{(\tau)} \approx \frac{1}{\epsilon_L} + [i_2]_m + \gamma + (2 \ln 2 - 1) \delta_{\tau, \frac{1}{2}} + \ln \left( \frac{L}{4\pi} \right) - 1 + \frac{2\pi}{L} \arcsin \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16\pi^2 \tau^2}{L^2}}} \right], \quad (4.30)$$

para  $n = 1, 2$ . Na condição de contorno periódica ( $\tau = 0$ ), o termo de correção do tamanho finito fornece  $\frac{\pi^2}{L}$  e portanto torna-se singular no limite  $L \rightarrow 0$ , resultando no que foi denominado de crossover dimensional no capítulo anterior. Por outro lado, tomando  $\tau = \frac{1}{2}$  na condição de contorno antiperiódica, temos:

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{2\pi}{L} \arcsin \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16\pi^2 \tau^2}{L^2}}} \right] = 1,$$

que é bem comportado e o crossover dimensional é devido à presença do termo  $\ln \left( \frac{L}{4\pi} \right)$  cujo módulo cresce de forma ilimitada quando  $L$  tende a zero. Portanto, desde que evitemos valores pequenos para  $L$ , podemos usar o método perturbativo para calcular os expoentes críticos em termos de expansões em  $\epsilon_L$ .

As demais integrais de Feynman de ordem 2 e 3 loops podem ser escritas pela mesma extensão aplicada à integral (3.71) na determinação de (4.18). Lembrando a presença do momento quártico em cada propagador, a contribuição de ordem 2 loops para a função de vértice de 4 pontos pode ser obtida a partir de (3.84), resultando em:

$$\begin{aligned} I_4^{(\tau)}(K, K', P, P', j, j'; \sigma) &= \sigma^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q_1 d^m k_1 d^{d-m-1} q_2 d^m k_2}{\{[(k_1 - K)^2]^2 + (q_1 - P)^2 + \sigma^2(l_1 - j + \tau)^2\}} \times \\ &\times \frac{1}{[(k_1^2)^2 + q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau)^2] \{[(k_1 + k_2 + K')^2]^2 + (q_1 + q_2 + P')^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j' + \tau)^2\}} \times \\ &\times \frac{1}{[(k_2^2)^2 + q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau)^2]}. \quad (4.31) \end{aligned}$$

A integral acima é calculada usando novamente a aproximação ortogonal. Neste caso, devemos ter  $k_1 \cdot K = k_2 \cdot K = 0$  e  $k_1 \cdot K' = k_2 \cdot K' = 0$ . Deixamos para o apêndice C o esboço das operações envolvidas no cálculo dessa integral. Aqui, mostramos apenas o resultado da eq. (C.5) nos pontos simétricos:

$$I_{4PS_n}^{(\tau)}(\sigma) = \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_L}{2} + 2[i_2]_m \epsilon_L + \epsilon_L F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right], \quad (4.32)$$

para  $n = 1, 2$ . Note que a expressão acima independe do ponto simétrico considerado.

As contribuições de 2 e 3 loops para a função de vértice de 2 pontos podem ser determinadas a partir da generalização de (3.54) e (3.55) tomando  $\mu = 0$ , respectivamente. Portanto, escrevemos:

$$D_3^{(\tau)}(K, P, j; \sigma) = \sigma^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q_1 d^m k_1 d^{d-m-1} q_2 d^m k_2}{[(k_1 + k_2 + K)^2]^2 + (q_1 + q_2 + P)^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j + \tau)^2} \times \\ \times \frac{1}{[(k_1^2)^2 + q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau)^2][(k_2^2)^2 + q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau)^2]}, \quad (4.33)$$

$$D_5^{(\tau)}(K, P, j; \sigma) = \sigma^3 \sum_{l_1, l_2, l_3 = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q_1 d^m k_1 d^{d-m-1} q_2 d^m k_2 d^{d-m-1} q_3 d^m k_3}{[(k_1 + k_2 + K)^2]^2 + (q_1 + q_2 + P)^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j + \tau)^2} \times \\ \times \frac{1}{[(k_1 + k_3 + K)^2]^2 + (q_1 + q_3 + P)^2 + \sigma^2(l_1 + l_3 + j + \tau)^2} \times \\ \times \frac{1}{[(k_1^2)^2 + q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau)^2][(k_2^2)^2 + q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau)^2][(k_3^2)^2 + q_3^2 + \sigma^2(l_3 + \tau)^2]}. \quad (4.34)$$

Devido às condições de renormalização (4.5) e (4.6), estamos interessados nas derivadas das integrais acima com relação a  $P^2$  e  $(K^2)^2$  nos pontos de simetria. Definindo

$$D_{3PS_1}^{(\tau)}(\sigma) = \left. \frac{\partial}{\partial P^2} D_3^{(\tau)}(0, P, 0; \sigma) \right|_{P^2=1} \quad \text{e} \quad D_{3PS_2}^{(\tau)}(\sigma) = \left. \frac{\partial}{\partial (K^2)^2} D_3^{(\tau)}(K, 0, 0; \sigma) \right|_{(K^2)^2=1},$$

além do análogo para  $D_5^{(\tau)}(K, P, j; \sigma)$ , listamos os seguintes resultados obtidos nas eqs. (C.9) e (C.14) do apêndice C:

$$D_{3PS_n}^{(\tau)}(\sigma) = -\frac{1}{8\epsilon_L} \left[ 1 + \frac{\epsilon_L}{4} - 2\epsilon_L X_n^{(\tau)}(\sigma) \right], \quad (4.35)$$

$$D_{5PS_n}^{(\tau)}(\sigma) = -\frac{1}{6\epsilon_L^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_L}{2} - 3\epsilon_L X_n^{(\tau)}(\sigma) \right], \quad (4.36)$$

onde definimos o termo de correção do tamanho finito por:

$$X_n^{(\tau)}(\sigma) = -[i_2]_m + \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma^2 \tau^2) - M^{(\tau)}(\sigma) + 2F_{0,1}^{(\tau)}(SP_n),$$

com  $M^{(\tau)}(\sigma)$  e  $F_{0,1}^{(\tau)}(SP_n)$  definidos na eq. (C.10). Da mesma forma como aconteceu na análise do efeito de tamanho finito em sistemas sem competição, não precisamos especificar esse termo de correção pois ele será cancelado durante o cálculo dos expoentes críticos. Basta que consideremos apenas  $\sigma = \frac{2\pi}{L}$  finito para garantir a validade da expansão em  $\epsilon_L$ .

## 4.4 Cálculo dos expoentes críticos

De posse dos resultados da regularização dimensional das integrais de Feynman, podemos calcular os expoentes críticos usando os ingredientes apresentados na seção 4.2. Primeiro, devemos calcular as funções de Wilson e começaremos por (4.15a). Os coeficientes  $a_{1n}$  e  $a_{2n}$  podem ser obtidos de expressões como (3.58a-b), onde as integrais  $I_2^{(\tau)}$ ,  $I_4^{(\tau)}$  e  $D_3^{(\tau)}$  lá presentes são substituídas pelas correspondentes calculadas na seção anterior. Portanto, a partir dos resultados (4.29), (4.32) e (4.35) obtemos as seguintes expressões:

$$a_{1n} = \frac{N+8}{6\epsilon_L} \left[ 1 + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right], \quad (4.37a)$$

$$a_{2n} = \left( \frac{N+8}{6\epsilon_L} \right)^2 - \frac{3N+14}{24\epsilon_L} + \frac{2}{\epsilon_L} \left( \frac{N+8}{6} \right)^2 \left[ [i_2]_m + \frac{1}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right]. \quad (4.37b)$$

Substituindo os resultados anteriores na eq. (4.15a), escrevemos a função beta de Wilson como:

$$\beta_n(u) = -n\epsilon_L u \left\{ 1 - \frac{N+8}{6} \left[ 1 + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right] u + \frac{3N+14}{12} u^2 \right\}. \quad (4.38)$$

A dependência da função anterior em  $n$  está apenas no fator multiplicativo do termo entre chaves. Portanto, a condição  $\beta_n^{(\tau)}(u_n^*) = 0$  para a determinação do ponto fixo fornecerá um resultado independente do subespaço no qual estamos aplicando as condições de renormalização, conforme mencionamos na seção 4.2. Ou seja, o reescalamto no infravermelho fará com que as constantes de acoplamento  $u_1$  e  $u_2$  convirjam a um mesmo valor dado pelo ponto fixo estável:

$$u^* = \frac{6\epsilon_L}{N+8} \left[ 1 + \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} \epsilon_L - [i_2]_m \epsilon_L - \frac{\epsilon_L}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right]. \quad (4.39)$$

Consideremos a função de Wilson representada por (4.15b). Calculamos então os coeficientes  $b_{2n}$  e  $b_{3n}$  através das eqs. (3.58c-d) nas quais substituímos os resultados (4.29), (4.35) e (4.36) no lugar das integrais  $I_2^{(\tau)}$ ,  $D_3^{(\tau)}$  e  $D_5^{(\tau)}$  que lá aparecem. Portanto, chegamos a:

$$b_{2n} = -\frac{N+2}{144\epsilon_L} \left[ 1 + \frac{\epsilon_L}{4} - 2\epsilon_L X_n^{(\tau)}(\sigma) \right], \quad (4.40a)$$

$$b_{3n} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon_L^2} \left[ 1 - \frac{\epsilon_L}{4} + 3[i_2]_m \epsilon_L + \frac{3}{2} \epsilon_L F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right]. \quad (4.40b)$$

Substituindo  $b_{2n}$  e  $b_{3n}$  na eq. (4.15b), obtemos:

$$\gamma_{\Phi_n}(u) = n \frac{N+2}{72} u^2 \left\{ 1 + \frac{\epsilon_L}{4} - 2\epsilon_L X_n^{(\tau)}(\sigma) - \frac{N+8}{12} \left[ 1 - 4X_n^{(\tau)}(\sigma) - 4[i_2]_m - 2F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right] u \right\} \quad (4.41)$$

Um procedimento análogo ao realizado anteriormente conduz aos coeficientes  $c_{1n}$  e  $c_{2n}$  necessários ao cálculo da função representada em (4.15c). São eles:

$$c_{1n} = \frac{N+2}{6\epsilon_L} \left[ 1 + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right], \quad (4.42a)$$

$$c_{2n} = \frac{N^2 + 7N + 10}{36\epsilon_L^2} - \frac{N+2}{24\epsilon_L} + \frac{N+7N+10}{18\epsilon_L} \left[ [i_2]_m + \frac{1}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right]. \quad (4.42b)$$

Usando  $c_{1n}$  e  $c_{2n}$  na eq. (4.15c), calculamos a última função de Wilson restante:

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2 n}(u) = n \frac{N+2}{6} \left[ 1 + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right] u - n \frac{N+2}{12} u^2. \quad (4.43)$$

Os expoentes críticos são obtidos a partir das eqs. dadas em (4.16). Portanto, substituindo o ponto fixo  $u^*$  apresentado em (4.39) no resultado (4.41), obtemos o primeiro conjunto de expoentes:

$$\eta_{L2} = \frac{\eta_{L4}}{2} = \frac{N+2}{2(N+8)^2} \epsilon_L^2 \left[ 1 - \frac{\epsilon_L}{4} + \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} \epsilon_L \right], \quad (4.44)$$

Realizando a mesma substituição em (4.43), calculamos:

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2 n}(u^*) = n \frac{N+2}{N+8} \epsilon_L \left[ 1 + \frac{6(N+3)}{(N+8)^2} \epsilon_L \right]. \quad (4.45)$$

A partir das eqs. (4.16), podemos calcular  $\nu_{L2}$  e  $\nu_{L4}$  até ordem  $\epsilon_L^2$ :

$$\nu_{L2} = 2\nu_{L4} = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)} \epsilon_L + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3} \epsilon_L^2. \quad (4.46)$$

Os demais expoentes listados em (4.17) podem ser obtidos com a substituição dos resultados (4.44) e (4.46). Ao fazermos isso, observamos que os fatores relacionados com o índice  $n$  são cancelados, resultando em expoentes críticos idênticos nos dois subespaços:

$$\alpha_{L2} = \alpha_{L4} = \frac{4-N}{2(N+8)} \epsilon_L - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{4(N+8)^3} \epsilon_L^2, \quad (4.47a)$$

$$\beta_{L2} = \beta_{L4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(N+8)} \epsilon_L + \frac{(N+2)(2N+1)}{2(N+8)^3} \epsilon_L^2, \quad (4.47b)$$

$$\delta_{L2} = \delta_{L4} = 3 + \epsilon_L + \frac{N^2+14N+60}{2(N+8)^2} \epsilon_L^2, \quad (4.47c)$$

$$\gamma_{L2} = \gamma_{L4} = 1 + \frac{N+2}{2(N+8)} \epsilon_L + \frac{(N+2)(N^2+22N+52)}{4(N+8)^3} \epsilon_L^3. \quad (4.47d)$$

Podemos observar duas características fundamentais nos resultados (4.44), (4.46) e (4.47) que são também compartilhadas pelo sistema sem competição. A primeira delas diz respeito

à independência dos expoentes críticos tanto nas condições de contorno quanto no tamanho finito  $L$ . De fato, todos os termos de correção foram cancelados. A segunda característica, que pode ser vista como uma consequência da primeira, refere-se à igualdade desses resultados em relação àqueles obtidos na ref. [75] para um sistema infinito. Ou seja, a presença de uma dimensão compacta no sistema não altera a classe de universalidade descrita pelo conjunto  $(N, d, m)$ . Lembramos no entanto que essas conclusões só são válidas se estivermos fora da região de crossover dimensional caracterizada por valores pequenos de  $L$ .

## 4.5 Teoria massiva

Continuando a nossa análise sobre o efeito do tamanho finito na universalidade do comportamento crítico e no crossover dimensional, consideremos o sistema acima da temperatura crítica. Ainda permaneceremos na região crítica de Lifshitz, isto é, mantendo  $\delta_0 = 0$  e  $\mu^2 > 0$  na densidade lagrangiana (4.1). Consideraremos portanto a formulação massiva da teoria.

Recentemente, Carvalho e Leite [76] propuseram um método de renormalização e análise das equações de Callan-Symanzik para a teoria de campos massivos descrevendo sistemas competitivos na linha crítica de Lifshitz. Dois conjuntos de condições de renormalização semelhantes a (4.5) e (4.6) continuam sendo necessários para a remoção das divergências no regime ultravioleta em ambos os subespaços competitivo e não-competitivo. Notamos que na teoria não-massiva, duas escalas  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  de momento foram utilizadas na construção dos pontos simétricos  $PS_1$  e  $PS_2$ , nos quais as funções de vértice foram renormalizadas. Já no contexto de uma teoria massiva, tais escalas não são mais necessárias pois podemos realizar a renormalização com os momentos externos nulos. Logo, devemos ter dois outros parâmetros constituindo as novas escalas de momento. Carvalho e Leite introduzem tais quantidades como um componente vetorial a mais no espaço dos momentos. Seguindo um procedimento denominado de *redução dimensional*, essas quantidades entram naturalmente na teoria como os parâmetros de massa  $\mu_1$  (no subespaço sem competição) e  $\mu_2$  (no subespaço competitivo). Portanto,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  possuem naturalmente a mesma dimensão canônica dos respectivos momentos em cada subespaço. Ou seja, denominando  $M$  como uma escala de massa arbitrária, podemos escrever  $[\mu_1] = M$  e  $[\mu_2] = M^{\frac{1}{2}}$ . Consequentemente, esses parâmetros devem entrar na densidade lagrangiana com potências diferentes para refletir essa redefinição na escala de massa ao longo do subespaço competitivo. Definindo  $\mu_{0n}$  ( $n = 1, 2$ ) como o correspondente não-renormalizado de  $\mu_n$ , reescrevemos a densidade lagrangiana na ref. [76] na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2}(\nabla_m^2 \Phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_{(d-m-1)} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi \right)^2 + \frac{1}{2} \mu_{0n}^{2n} \Phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_n \Phi^4, \quad (4.48)$$

onde separamos a derivada em  $z$  para enfatizar que o tamanho finito está ao longo do eixo  $z$  no subespaço não-competitivo. Observamos também que estamos considerando constantes de acoplamento  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  distintas, similarmente ao realizado no caso sem massa.

O índice  $n$  determina com quais parâmetros originais na densidade lagrangiana estamos começando. Por exemplo, se quisermos construir a teoria no subespaço não-competitivo com a massa  $\mu_1$  e a constante de acoplamento  $g_1$  renormalizadas, começamos com  $\mu_{01}$  e  $\lambda_1$ , tomando  $n = 1$ . A liberdade de escolha em  $\mu_1$  resultará na transformação do grupo de renormalização para esse subespaço com a subsequente determinação dos expoentes críticos associados com o comprimento de correlação  $\xi_{L2}$ . A temperatura reduzida  $t$  entra na teoria através de  $\mu_1^2 \sim t$  e em ordem zero no número de loops (nível de árvore), temos  $\xi_{L2} = \sqrt{2}\mu_1^{-1} \propto t^{-\frac{1}{2}}$ . Da mesma forma, quando  $n = 2$ , estamos considerando inicialmente os parâmetros  $\mu_{02}$  e  $\lambda_2$  com a construção posterior da teoria com os correspondentes parâmetros  $\mu_2$  e  $g_2$  renormalizados e expoentes críticos associados com  $\xi_{L4}$ . Neste caso, temos  $\mu_2^4 \sim t$  e  $\xi_{L4} = \sqrt{2}\mu_2^{-1} \propto t^{-\frac{1}{4}}$  em nível de árvore. Em consequência disso, a dimensão de  $\xi_{L4}$  é de comprimento elevado a um meio. Para cada valor de  $n$ , teremos divergências quadráticas e logarítmicas no regime ultravioleta escritas em termos do corte  $\Lambda_n$  nos momentos. Tais divergências serão novamente removidas através da redefinição da massa e da constante de acoplamento, além das constantes de renormalização multiplicativas  $Z_{\Phi^{(n)}}$  e  $Z_{\Phi^2^{(n)}}$  ( $n = 1, 2$ ). Desse modo, as funções de vértice multiplicativamente renormalizáveis são expressas em termos das funções e dos parâmetros originais não-renormalizados na seguinte forma:

$$\Gamma_{R^{(n)}}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \mu_n) = Z_{\Phi^{(n)}}^{\frac{E}{2}} Z_{\Phi^2^{(n)}}^M \Gamma^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; \mu_{0n}, \lambda_n, \Lambda_n), \quad (4.49)$$

onde os argumentos  $q_{l(n)}$ ,  $Q_{l'(n)}$ ,  $j_l$  e  $J_{l'}$  possuem os mesmos significados explicados logo após a eq. (4.7).

Nesta seção, vamos aplicar o método de Carvalho e Leite no cálculo dos expoentes críticos e na descrição do crossover dimensional, adaptando-o para incluir o tamanho finito  $L$  através das condições de contorno periódicas ( $\tau = 0$ ) ou antiperiódicas ( $\tau = \frac{1}{2}$ ). Começaremos pelas condições de renormalização no subespaço rotulado por  $n = 1$ . Lembrando que escolhemos a massa renormalizada independente de  $\tau$ , podemos escrever:

$$\Gamma_{R1}^{(2)}(0; \mu_1, g_1) = \mu_1^2 + \sigma^2 \tau^2, \quad (4.50a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{R1}^{(2)}(k=0, p, j=0; \mu_1, g_1) \right|_{p=0} = 1, \quad (4.50b)$$

$$\Gamma_{R1}^{(4)}(0; \mu_1, g_1) = g_1, \quad (4.50c)$$

$$\Gamma_{R1}^{(2,1)}(0; \mu_1, g_1) = 1. \quad (4.50d)$$

Os momentos  $p$  e  $k$  na eq. (4.50b) referem-se aos subespaços não-competitivo e competitivo, respectivamente. Nas demais equações, os momentos externos são nulos. Por enquanto, estamos removendo apenas as divergências no regime ultravioleta devido às integrais nos diagramas de Feynman dos momentos pertencentes ao subespaço não-competitivo. A fim de remover as

divergências restantes no subespaço  $m$ -dimensional, devemos considerar um segundo conjunto de condições mostrado a seguir:

$$\Gamma_{R2}^{(2)}(0; \mu_2, g_2) = \mu_2^4 + \sigma^2 \tau^2, \quad (4.51a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial(k^2)^2} \Gamma_{R2}^{(2)}(k, p=0, j=0; \mu_2, g_2) \right|_{k=0} = 1, \quad (4.51b)$$

$$\Gamma_{R2}^{(4)}(0; \mu_2, g_2) = g_2, \quad (4.51c)$$

$$\Gamma_{R2}^{(2,1)}(0; \mu_2, g_2) = 1, \quad (4.51d)$$

onde a potência quártica de  $\mu_2$  na primeira equação acima reflete diretamente a redefinição da escala de massa no subespaço competitivo.

Os parâmetros de massa  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são arbitrários e podemos usar essa liberdade de escolha para construir as equações de Callan-Symanzik associadas a transformações infinitesimais do grupo de renormalização. Como os parâmetros  $\lambda_n$  e  $\Lambda_n$  são independentes de  $\mu_n$ , podemos reescrever a eq. (4.49) nos mesmos moldes de (3.25), ou seja:

$$\mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} \left[ Z_{\Phi(n)}^{-\frac{E}{2}} Z_{\Phi^2(n)}^{-M} \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \mu_n) \right]_{\lambda_n, \Lambda_n} = 0. \quad (4.52)$$

Após derivação com relação a  $\mu_n$  (mantendo  $\lambda_n$  e  $\Lambda_n$  fixos) e a adimensionalização das constantes de acoplamento através de  $g_n = \mu_n^{n\epsilon_L} \lambda_n$ , chegamos a equações análogas às dadas em (3.29), a saber:

$$\begin{aligned} & \left[ \mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} + \beta_n(u_n) \frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi(n)}(u_n) + M \gamma_{\Phi^2(n)}(u_n) \right] \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \mu_n) \\ & = \mu_n^{2n} [2n - \tilde{\gamma}_{\Phi(n)}(u_n)] \Gamma_{R(n)}^{(E,M+1)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}, 0; g_n, \mu_n), \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde  $\tilde{\gamma}_{\Phi(n)}(u_n) = \gamma_{\Phi(n)} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma\tau}{\mu_n} \right)^2 \right]$  e as funções de Wilson são dadas no mesmo formato apresentado em (4.13). Similarmente ao mencionado nas seções 2.9 e 3.3, o lado direito das equações de Callan-Symanzik acima pode ser desprezado quando os momentos externos das funções de vértice são escalados no regime ultravioleta. A teoria invariante por escala é então obtida tomando  $u_n = u_{\infty n}$ , onde  $u_{\infty n}$  corresponde ao ponto fixo em cada subespaço  $n$ .

Os expoentes críticos serão calculados seguindo os mesmos passos empregados nas seções anteriores. Usaremos portanto as representações dadas em (4.15), onde os coeficientes  $a$ 's,  $b$ 's e  $c$ 's serão obtidos a partir das eqs. (3.58) com as integrais de Feynman substituídas por aquelas que serão regularizadas a seguir. Depois de determinadas as funções de Wilson, calculamos o ponto fixo  $u_{\infty}$  e finalmente os expoentes críticos ao substituir  $u_{\infty}$  nas eqs. (4.16).

De acordo com o usual no cálculo das integrais de Feynman, começaremos com a contribuição de 1 loop para a função de vértice de 4 pontos por ser de fundamental importância para o cálculo

das contribuições de 2 e 3 loops. Lembrando que estamos lidando com propagadores massivos, escrevemos:

$$I_2^{(\tau)}(K', P, j; \mu_n, r_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} r_n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{[(k + K')^2]^2 + (q + P)^2 + r_n^2(l + j + \tau)^2 + 1} \times \frac{1}{(k^2)^2 + q^2 + r_n^2(l + \tau)^2 + 1}, \quad (4.54)$$

onde definimos  $r_n = \frac{\sigma}{\mu_n}$  e os momentos foram reescalados como  $\frac{K}{\sqrt{\mu_n}} \rightarrow K$  e  $\frac{P}{\mu_n} \rightarrow P$  em cada subespaço  $n$ . Usando os mesmos procedimentos descritos na seção 4.3, onde a aproximação ortogonal desempenha um papel fundamental, chegamos ao seguinte resultado:

$$I_2^{(\tau)}(K', P, j; \mu_n, r_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} \frac{S_m S_{d-m}}{8} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \times \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \int_0^1 dx \{x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + r_n^2 j^2] + 1\}^{-\frac{\epsilon_L}{2}} + F_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau)}(K', P, j; r_n) \right\}, \quad (4.55)$$

onde ampliamos a definição (3.42) com a inclusão do momento quártico:

$$F_{\beta}^{(\tau)}(K, P, j; r) = r^{-2\beta} \int_0^1 dx f_{\frac{1}{2}+\beta} \left( \tau + xj, r^{-1} \sqrt{x(1-x)[(K^2)^2 + P^2 + r^2 j^2] + 1} \right). \quad (4.56)$$

Realizando uma expansão em  $\epsilon_L$  e usando a definição (4.28), podemos escrever:

$$I_2^{(\tau)}(K', P, j; \mu_n, r_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} \frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \frac{1}{\epsilon_L} \left\{ (1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L) \times \int_0^1 dx \{x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + r_n^2 j^2] + 1\}^{-\frac{\epsilon_L}{2}} + \frac{\epsilon_L}{2} F_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau)}(K', P, j; r_n) \right\}. \quad (4.57)$$

Tomando os momentos externos iguais a zero, obtemos:

$$I_2^{(\tau)}(0; \mu_n, r_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} \frac{1}{\epsilon_L} \left[ 1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right]. \quad (4.58)$$

Note que o fator  $\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)$  foi removido do resultado anterior pelas mesmas razões explicitadas logo após a eq. (4.28).

A variável de escala  $r_n$  depende do subespaço no qual a teoria é construída. Ou seja, temos  $r_1^{-1} \propto \frac{L}{\xi_{L2}}$  e  $r_2^{-1} \propto \frac{L}{\xi_{L4}^2}$  para os subespaços não-competitivo e competitivo, respectivamente. Comparando o resultado acima com o equivalente sem competição dado em (3.44), vemos que as conclusões tiradas na seção 3.4 serão as mesmas aqui. Na teoria massiva, mantemos  $\xi_{L2}$  e  $\xi_{L4}$  fixos enquanto variamos  $L$ . No limite  $L \rightarrow \infty$ , podemos afirmar a partir de (3.46) que o termo de correção tende a zero e recuperamos o resultado do sistema infinito. Já no limite

$L \rightarrow 0$ , o termo de correção comporta-se de forma singular e podemos usar a identidade (3.47) para escrevermos:

$$\lim_{r_n^{-1} \rightarrow 0} I_2^{(\tau)}(0; \mu_n, r_n) \approx \mu_n^{-n\epsilon_L} \left[ \frac{1}{\epsilon_L} - 1 + [i_2]_m + \gamma + \ln \left( \frac{r_n^{-1}}{2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{r_n^{-2} + \tau^2}} + (2 \ln 2 - 1)\delta_{\tau, \frac{1}{2}} + O(r_n^{-1}) \right]. \quad (4.59)$$

Na condição de contorno periódica ( $\tau = 0$ ), o termo proporcional a  $L^{-1}$  é dominante quando  $L$  for pequeno e como consequência teremos o mesmo tipo de crossover dimensional presente no sistema sem competição. A mesma equivalência também é estabelecida na condição de contorno antiperiódica ( $\tau = \frac{1}{2}$ ), na qual o termo  $\ln L$  passa a ser dominante. Seguindo os mesmos argumentos que procedem a eq. (3.51), podemos mostrar que o crossover dimensional ocorre quando  $L \sim a_1$  ou  $L \sim a_2$ , onde  $a_1$  e  $a_2$  correspondem aos parâmetros de rede dos subespaços não-competitivo e competitivo, respectivamente. Desse modo, a equivalência entre a teoria massiva e a não-massiva é estabelecida no que diz respeito ao crossover dimensional. Desde que consideremos  $L$  suficientemente grande, a expansão em  $\epsilon_L$  é válida e podemos prosseguir para o cálculo dos expoentes críticos.

A próxima integral de Feynman a ser calculada corresponde ao análogo massivo de (4.31). Adicionando a massa  $\mu$  em cada propagador, temos:

$$\begin{aligned} I_4^{(\tau)}(K, K', P, P', j, j'; \mu_n, r_n) &= \\ &= \mu_n^{-2n\epsilon_L} r_n^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q_1 d^m k_1 d^{d-m-1} q_2 d^m k_2}{[(k_1 - K)^2]^2 + (q_1 - P)^2 + r_n^2(l_1 - j + \tau)^2 + 1} \times \\ &\quad \times \frac{1}{[(k_1 + k_2 + K')^2]^2 + (q_1 + q_2 + P')^2 + r_n^2(l_1 + l_2 + j' + \tau)^2 + 1} \times \\ &\quad \times \frac{1}{[(k_1^2)^2 + q_1^2 + r_n^2(l_1 + \tau)^2 + 1][(k_2^2)^2 + q_2^2 + r_n^2(l_2 + \tau)^2 + 1]}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

O cálculo dessa integral é realizado no apêndice C dentro do qual obtemos o resultado (C.18) quando os momentos externos são nulos:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu_n, r_n) = \mu_n^{-2n\epsilon_L} \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left[ 1 - \frac{3}{2}\epsilon_L + 2[i_2]_m \epsilon_L + \epsilon_L f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right]. \quad (4.61)$$

As integrais correspondentes às contribuições de ordens 2 e 3 loops são obtidas com a introdução do parâmetro  $\mu$  em cada propagador de (4.33) e (4.34). Neste caso estamos interessados nas derivadas:

$$D_3^{(\tau)}(\mu_1, r_1) = \frac{\partial}{\partial P^2} D_3^{(\tau)}(0, P, 0; \mu_1, r_1) \Big|_{P=0} \quad \text{e} \quad D_3^{(\tau)}(\mu_2, r_2) = \frac{\partial}{\partial (K^2)^2} D_3^{(\tau)}(K, 0, 0; \mu_2, r_2) \Big|_{K=0},$$

além das correspondentes para  $D_5^{(\tau)}(K, P, j; \mu_n, r_n)$ . Observe como cada tipo de derivada está associada com a massa  $\mu_1$  ou  $\mu_2$  referente a um dado subespaço. Recorrendo novamente ao apêndice C, listamos a seguir os resultados (C.22) e (C.26):

$$D_3^{(\tau)}(\mu_n, r_n) = -\mu_n^{-2n\epsilon_L} \frac{1}{8\epsilon_L} \left[ 1 - \frac{5}{4}\epsilon_L + 2\epsilon_L Y_n(r_n) \right], \quad (4.62)$$

$$D_5^{(\tau)}(\mu_n, r_n) = -\mu_n^{-3n\epsilon_L} \frac{1}{6\epsilon_L^2} \left[ 1 - \frac{7}{4}\epsilon_L + 3\epsilon_L Y_n(r_n) \right], \quad (4.63)$$

onde o termo de correção  $Y_n(r_n)$  (com  $n = 1, 2$ ) é extraído de (C.22).

Todos os elementos necessários à obtenção das funções de Wilson já foram reunidos. Substituindo as expressões (4.58), (4.61) e (4.62) pelas correspondentes nas eqs. (3.58a-b), calculamos os coeficientes:

$$a_{1n} = \frac{N+8}{6\epsilon_L} \left[ 1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right], \quad (4.64a)$$

$$a_{2n} = \left( \frac{N+8}{6\epsilon_L} \right)^2 - \frac{4N^2 + 73N + 298}{72\epsilon_L} + \frac{(N+8)^2}{18\epsilon_L} \left[ [i_2]_m + \frac{1}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right]. \quad (4.64b)$$

Usando os resultados listados acima na expansão (4.15a), obtemos:

$$\beta_n^{(\tau)}(u) = -nu \left\{ \epsilon_L - \frac{N+8}{6} \left[ 1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right] u + \frac{3N+14}{12} u^2 \right\}. \quad (4.65)$$

A condição  $\beta_n^{(\tau)}(u_{\infty n}) = 0$  fornece o ponto fixo  $u_{\infty n}$  dado por:

$$u_{\infty} = \frac{6\epsilon_L}{N+8} \left\{ 1 + \left[ \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + 1 - [i_2]_m - \frac{1}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right] \epsilon_L \right\}. \quad (4.66)$$

Neste caso, a dependência do ponto fixo em  $n$  está apenas na variável de escala  $r_n^{-1}$ . Devido ao fato de podermos escolher valores finitos para  $r_n^{-1}$  livremente, essa dependência torna-se irrelevante e podemos fazer  $u_{\infty}$  independente do subespaço sob consideração. Portanto, a teoria invariante por escala no regime ultravioleta é obtida com as duas constantes de acoplamento  $u_1$  e  $u_2$  iguais a  $u_{\infty}$ , sem quaisquer referências ao subespaço no qual as condições de renormalização estão sendo aplicadas.

A fim de calcular os expoentes críticos, consideremos as funções de Wilson representadas por (4.15b-c). Os coeficientes  $b_{2n}$ ,  $b_{3n}$ ,  $c_{2n}$  e  $c_{3n}$  são obtidos a partir das eqs. (3.58c-f), onde as integrais  $I_2^{(\tau)}$ ,  $I_4^{(\tau)}$ ,  $D_3^{(\tau)}$  e  $D_5^{(\tau)}$  são substituídas pelos resultados (4.58), (4.61), (4.62) e (4.63), respectivamente. Logo, chegamos às seguintes expressões:

$$b_{2n} = -\frac{N+2}{144\epsilon_L} \left[ 1 - \frac{5}{4}\epsilon_L + 2\epsilon_L Y_n(r_n) \right], \quad (4.67a)$$

$$b_{3n} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon_L^2} + \frac{(N+2)(N+8)}{108\epsilon_L} \frac{13}{48} - \frac{(N+2)(N+8)}{432\epsilon_L} \left[ [i_2]_m + \frac{\epsilon_L}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right], \quad (4.67b)$$

$$c_{1n} = \frac{N+2}{6\epsilon_L} \left[ 1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right], \quad (4.67c)$$

$$c_{2n} = \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon_L^2} - \frac{4N^2 + 31N + 46}{72\epsilon_L} + \frac{(N+2)(N+5)}{18\epsilon_L} \left[ [i_2]_m + \frac{1}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right]. \quad (4.67d)$$

Substituindo a eq. (4.64a) e as expressões acima nas expansões (4.15b-c), calculamos:

$$\gamma_{\Phi_n}^{(\tau)}(u_\infty) = n \frac{N+2}{(N+8)^2} \frac{\epsilon_L^2}{2} \left\{ 1 + \left[ \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \epsilon_L \right\}, \quad (4.68a)$$

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2_n}^{(\tau)}(u_\infty) = n \frac{N+2}{N+8} \epsilon_L \left[ 1 + \frac{6(N+3)}{(N+8)^2} \epsilon_L \right]. \quad (4.68b)$$

Comparando os dois resultados anteriores com (4.44) e (4.45), notamos que todos os expoentes críticos são idênticos nas formulações massiva e não-massiva da teoria, corroborando com o princípio da universalidade já estabelecido para o comportamento crítico de sistemas infinitos.

O nosso estudo sobre o efeito de tamanho finito em sistema com competição reproduz todas as conclusões obtidas no capítulo anterior. De fato, como estamos lidando com uma dimensão compacta apenas ao longo do subespaço não-competitivo, os termos de correção do tamanho finito presentes em (4.29) e (4.58) são idênticos aos das eqs. (3.76) e (3.44) para o sistema sem competição. Logo, o crossover dimensional manifesta-se dentro dos mesmos valores pequenos de  $L$ . Além disso, a classe de universalidade permanece inalterada em relação àquela determinada para o sistema infinito [75], sendo neste caso caracterizada pelo conjunto de parâmetros  $(N, d, m)$ .

Um ponto importante a ser mencionado aqui diz respeito à viabilidade dos métodos de Leite e Carvalho na descrição do comportamento crítico em sistemas com tamanho finito. Ambos os métodos tratam os escalamentos nos subespaços competitivo e não-competitivo de forma independente, onde para cada subespaço, considera-se escalas de momento e constantes de acoplamento distintas. No entanto, quando sistema está na criticalidade, tais constantes correspondem aos pontos fixos apresentados em (4.39) e (4.66) que independem do subespaço no qual são calculados (mesmo com presença do termo de correção) em consequência da aproximação ortogonal. Desse modo, retomamos a teoria com uma única constante de acoplamento, conforme também ocorre com o sistema infinito.

# Capítulo 5

## Tamanho finito ao longo do subespaço competitivo

### 5.1 Introdução

Um passo importante no estudo do efeito do tamanho finito em sistemas com competição na região crítica de Lifshitz consiste na extensão do método de Nemirovsky e Freed (NF) para incluir uma dimensão finita ao longo do subespaço competitivo. Nesse caso, calculamos de forma exata alguns expoentes críticos até ordem  $\epsilon_L^2$ . Quando aplicado a um espaço onde não há competição, vimos nos dois capítulos anteriores que as funções de vértice calculadas com o auxílio do método NF possuem termos de correção dependentes da restrição espacial do sistema. Se evitarmos a região de crossover dimensional, os expoentes críticos obtidos são idênticos aos do sistema infinito. O mesmo tipo de comportamento também estará presente quando estendemos esse procedimento ao subespaço competitivo. No entanto, os resultados quantitativos para os termos de correção e expoentes críticos serão diferentes, conforme veremos.

Consideraremos o mesmo tipo de geometria composta por superfícies planas e paralelas ao longo do subespaço sem competição separadas por uma distância  $L$ , nas quais o parâmetro de ordem estará sujeito a condições de contorno periódicas ( $PBC$ ) ou antiperiódicas ( $ABC$ ). A fim de analisarmos apenas os aspectos mais fundamentais das mudanças introduzidas na teoria devido às condições de contorno, restringiremos o nosso estudo a um sistema uniaxial ( $m = 1$ ). O subespaço competitivo passa a ser unidimensional e o chamaremos aqui de eixo competitivo que será perpendicular às superfícies.

Devido à presença de momentos quárticos no propagador livre, alguns procedimentos não convencionais foram realizados ao longo dos últimos anos a fim de regularizar dimensionalmente as integrais de Feynman. Por exemplo, Leite [75] introduz a aproximação ortogonal que em princípio pode ser aplicada em integrais com um número arbitrário de loops. Os expoentes críticos nesse método foram calculados analiticamente no capítulo anterior tanto na teoria massiva quanto na não-massiva. Alternativamente, Diehl e Shpot [77] usam um procedimento de

renormalização por subtração mínima [15] no espaço das coordenadas através do formalismo de funções testes e obtêm os coeficientes das constantes de renormalização de forma numérica. Eles usam a teoria não-massiva e calculam apenas os expoentes  $\eta_{L2}$  e  $\eta_{L4}$  em ordem 2 loops, ou seja, até  $O(\epsilon_L^2)$ . Os demais expoentes críticos são obtidos em  $O(\epsilon_L)$ . Logo em seguida, os mesmos autores [78] tentam estender os seus resultados até ordem de 2 loops no espaço dos momentos. É importante observar que as integrais de Feynman apresentadas na ref. [78] são um resultado direto do cálculo no espaço das coordenadas, transformado em seguida para o espaço dos momentos. Entretanto, essa transformação é inconsistente com a homogeneidade e os resultados numéricos só fazem sentido quando a análise é feita no espaço das coordenadas. Os expoentes críticos resultantes desse método são expressos em termos de integrais impróprias cujos resultados (excetuando  $m = 2$  e  $m = 6$ ) só podem ser obtidos aproximadamente. Portanto, somos instigados a procurar por um método no qual possamos realizar todos os cálculos analiticamente e de forma exata (até ordem  $\epsilon_L^2$ ) no espaço dos momentos.

Neste capítulo, seguiremos uma nova abordagem para a regularização das integrais de Feynman. Utilizando o formalismo de integrais de Mellin-Barnes, empregado comumente na representação de funções especiais [79], seremos capazes de extrair as partes singular e regular das integrais de Feynman no espaço dos momentos e de calcular os expoentes  $\eta_{L2}$  e  $\nu_{L2}$  até ordem  $\epsilon_L^2$  em termos de integrais paramétricas cujos resultados numéricos podem ser obtidos exatamente com a precisão desejada. Desse modo, evitamos as dificuldades encontradas originalmente por Diehl e Shpot. Os cálculos relacionados com  $\eta_{L4}$  e  $\nu_{L4}$  são bastante extensos e deixaremos a tarefa de apresentá-los em um trabalho futuro. Apesar de estar em um estágio preliminar, o nosso estudo corresponde a uma extensão dos trabalhos de Leite, Diehl e Shpot (pelo menos para  $m = 1$ ) tanto no que diz respeito ao cálculo exato dos expoentes críticos quanto na introdução do tamanho finito  $L$ .

## 5.2 Condições de contorno e regras de Feynman aplicadas ao eixo de competição

Consideremos inicialmente a teoria na região crítica de Lifshitz caracterizada pelos parâmetros  $\delta_0 = 0$  e  $\mu^2 > 0$  na densidade lagrangiana (4.1). Denominando  $z$  como a coordenada ao longo do eixo de competição e  $\rho$  como as coordenadas ao longo do subespaço não-competitivo, reescrevemos a densidade lagrangiana de nosso interesse para uma teoria com interação  $\Phi^4$  e simetria  $O(N)$  na seguinte forma:

$$\mathcal{L}(\Phi) = \frac{c^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_{d-1} \Phi)^2 + \frac{\mu^2}{2} \Phi^2(\rho, z) + \frac{\lambda}{4!} \Phi^4(\rho, z), \quad (5.1)$$

onde  $c$  é uma constante com dimensão canônica de comprimento introduzida por questão de consistência dimensional da expressão acima. Colocamos então uma das superfícies em  $z = 0$  e a outra em  $z = L$ . Desse modo, as condições de contorno no parâmetro de ordem são

implementadas como:

$$\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, L), \text{ em } PBC. \quad (5.2a)$$

$$\Phi(\rho, 0) = -\Phi(\rho, L), \text{ em } ABC. \quad (5.2b)$$

Na seção 3.6, expandimos o campo  $\Phi$  em termos de componentes de Fourier  $\phi(k, j)$ , onde  $k$  corresponde ao momento contínuo ao longo do espaço recíproco  $(d-1)$ -dimensional e  $j$  são os índices de quase-momentos resultantes da discretização dos momentos devido ao domínio compacto da variável  $z$ . Na configuração considerada no presente capítulo, momentos contínuos e discretos pertencem a subespaços com propriedades diferentes, ou seja, estão ao longo do subespaço não-competitivo e do eixo de competição, respectivamente. Faremos portanto uma pequena modificação na expansão (3.4), reescrevendo-a aqui como:

$$\Phi_i(\rho, z) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} e^{ik \cdot \rho} v_j(z) \phi_i(k, j), \quad (5.3)$$

onde denominamos  $v_j(z)$  como as novas funções-base da expansão para distinguir das correspondentes  $u_j(z)$  utilizadas em (3.4). Excetuando isso, nenhuma outra mudança foi efetuada. Naturalmente,  $v_j(z)$  satisfaz as mesmas condições de contorno de  $\Phi(\rho, z)$ :  $v_j(0) = v_j(L)$  em  $PBC$  e  $v_j(0) = -v_j(L)$  em  $ABC$ .

As funções  $v_j(z)$  estão intimamente relacionadas com o propagador livre e o vértice de interação da teoria. Podemos determiná-las a partir da equação de movimento do campo  $\Phi$  na teoria livre. Portanto, consideramos a densidade lagrangiana (5.1) sem a interação  $\Phi^4$ :

$$\mathcal{L}_0(\partial_z^2 \Phi, \nabla \Phi, \Phi) = \frac{c^2}{2} \partial_z^2 \Phi_i \partial_z^2 \Phi_i + \frac{1}{2} \partial_\alpha \Phi_i \partial_\alpha \Phi_i + \frac{\mu^2}{2} \Phi_i \Phi_i, \quad (5.4)$$

onde usamos  $\partial_z \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  e  $\partial_\alpha \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_\alpha}$ . Os índices repetidos são todos somados, com  $i = 1, \dots, N$  e  $\alpha = 1, \dots, d-1$ . Chamamos atenção para a dependência de  $\mathcal{L}_0$  na derivada de ordem superior do campo  $\Phi$  com relação a  $z$ . Neste caso, devemos utilizar uma generalização da equação de Euler-Lagrange para teorias de campo com derivadas de ordem superior [80–82]. Dentro dos nossos propósitos neste trabalho, escrevemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \Phi_i} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\alpha \Phi_i)} + \partial_z^2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_z^2 \Phi_i)} = 0. \quad (5.5)$$

Aplicando a equação acima em (5.4), vemos que o campo  $\Phi$  não-interagente satisfaz a seguinte equação:

$$\left( c^2 \frac{\partial^4}{\partial z^4} - \nabla_{d-1}^2 + \mu^2 \right) \Phi_i = 0. \quad (5.6)$$

A partir da expansão (5.3), podemos deduzir a equação diferencial satisfeita pelas funções-base:

$$\frac{d^4}{dz^4} v_j(z) = \kappa_j^4 v_j(z), \quad (5.7)$$

onde o quase-momento  $\kappa_j$  está restrito à condição “*on shell*” dos campos:  $c^2\kappa_j^4 + k^2 + \mu^2 = 0$ . Note a mudança no sinal entre a equação anterior e aquela dada em (3.5). Essa nova convenção é necessária para que  $v_j(z)$  tenha a mesma periodicidade de  $\Phi$ . De fato, a solução geral de (5.7) é dada por:

$$v_j(z) = a_1 e^{\kappa_j z} + a_2 e^{-\kappa_j z} + a_3 e^{i\kappa_j z} + a_4 e^{-i\kappa_j z}. \quad (5.8)$$

Os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  devem ser nulos, caso contrário não teremos uma solução periódica. Além disso, escolhamos  $a_3 = 0$  e as condições de contorno em (5.2) implicam em  $\kappa_j = \sigma(j + \tau)$ , onde definimos  $\sigma = \frac{2\pi}{L}$  e  $\tau = 0, \frac{1}{2}$  representam *PBC* ou *ABC*, respectivamente. A partir da condição de ortonormalidade  $\int_0^L dz v_{j_1}(z)v_{j_2}(z) = \delta_{j_1 j_2}$ , obtemos  $a_4 = \frac{1}{\sqrt{L}}$  e chegamos ao resultado:

$$v_j(z) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\frac{2\pi}{L}(j+\tau)z}. \quad (5.9)$$

Apesar da equação (5.7) fornecer para  $v_j(z)$  uma solução mais geral do que a correspondente (3.5) para  $u_j(z)$ , as restrições impostas pelas condições de contorno implicam em  $v_j(z) = u_j(z)$ .

Desejamos saber como as regras para a construção dos diagramas de Feynman apresentam-se nessa nova configuração de sistema. Consideremos inicialmente a energia livre do sistema dada por  $F[\Phi] = \int d^{d-1}\rho \int_0^L dz \mathcal{L}[\Phi(\rho, z)]$  no espaço dos momentos, onde as regras de Feynman são bastante simplificadas. Começando pela parte livre da teoria, tomamos apenas os três primeiros termos de (5.1) e usamos a expansão (5.3), resultando em:

$$\begin{aligned} F_0[\Phi] &= \frac{1}{2} \int d^{d-1}\rho \int_0^L dz \left[ c^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)^2 + (\nabla_{d-1} \Phi)^2 + \mu^2 \Phi^2(\rho, z) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}k \int_0^L dz \left[ c^2 \frac{d^2 v_{j_1}}{dz^2} \frac{d^2 v_{j_2}}{dz^2} + (k^2 + \mu^2) v_{j_1}(z) v_{j_2}(z) \right] \times \\ &\quad \times \phi_i(k, j_1) \phi_i(-k, j_2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Estamos novamente usando o convenção da soma para os índices  $i$  repetidos variando de 1 a  $N$  no último termo acima. Podemos reescrever o produto das derivadas segundas na seguinte forma:

$$\frac{d^2 v_{j_1}}{dz^2} \frac{d^2 v_{j_2}}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{d v_{j_1}}{dz} \frac{d^2 v_{j_2}}{dz^2} \right) - \frac{d}{dz} \left( v_{j_1}(z) \frac{d^3 v_{j_2}}{dz^3} \right) + v_{j_1}(z) \frac{d^4 v_{j_2}}{dz^4}. \quad (5.11)$$

Sabendo que as derivadas de  $v_j(z)$  são também periódicas ou antiperiódicas, vemos que a integração em  $z$  na expressão anterior será nula nos dois primeiros termos do lado direito e dessa forma, temos:

$$\int_0^L dz \frac{d^2 v_{j_1}}{dz^2} \frac{d^2 v_{j_2}}{dz^2} = \int_0^L dz v_{j_1}(z) \frac{d^4 v_{j_2}}{dz^4} = \kappa_{j_2}^4 S_{j_1, j_2}, \quad (5.12)$$

onde usamos a equação (5.7) e definimos o tensor  $S_{j_1, j_2} = \int_0^L dz v_{j_1}(z)v_{j_2}(z)$ , similarmente ao realizado em (3.11). Substituindo o resultado anterior em (5.10), chegamos a:

$$F_0[\Phi] = \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \frac{S_{j_1, j_2}}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}k (c^2 \kappa_j^4 + k^2 + \mu^2) \phi_i(k, j_1) \phi_i(-k, j_2). \quad (5.13)$$

Portanto, comparando a expressão acima com (3.10), concluimos que uma linha diagramática continua sendo representada pela eq. (3.17), na qual o propagador livre passa a ser dado por:

$$G_0(k, j) = \frac{1}{c^2 \kappa_j^4 + k^2 + \mu^2}. \quad (5.14)$$

Voltamos a nossa atenção agora para o vértice de interação. Calculando a parte interagente da energia livre no espaço dos momentos, obtemos:

$$F_{int}[\Phi] = \frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \sum_{j_1, \dots, j_4 = -\infty}^{\infty} \frac{S_{j_1, \dots, j_4}}{(2\pi)^{3(d-1)}} \int d^{d-1}k_1 \cdots d^{d-1}k_4 \delta^{d-1}(k_1 + \cdots + k_4) \times \\ \times \phi_{i_1}(k_1, j_1) \cdots \phi_{i_4}(k_4, j_4). \quad (5.15)$$

Analogamente ao resultado (3.12), definimos o tensor  $S_{j_1, \dots, j_4} = \int_0^L dz v_{j_1}(z) \cdots v_{j_4}(z)$ . Além disso,  $F_{i_1, \dots, i_4}$  é dado em (2.3) e a convenção da soma para índices repetidos está sendo novamente utilizada. Desse modo, permanecemos com a mesma representação dada em (3.18) para o vértice de interação. Se levarmos em consideração a solução (5.9), chegamos à conclusão de que os quase-momentos ao longo do eixo de competição também são conservados em cada linha e vértice dos diagramas de Feynman. Ou seja:

$$S_{j_1, j_2} = \delta_{j_1 j_2} \quad \text{e} \quad S_{j_1, j_2, j_3, j_4} = \frac{1}{L} \delta_{j_1 + j_2 + j_3 + j_4, 0}. \quad (5.16)$$

Em outras palavras, as condições de contorno periódica ou antiperiódica continuam não quebrando a simetria de translação do sistema, conforme esperado. As regras para a construção dos diagramas de Feynman permanecem inalteradas, com exceção do propagador livre que passa a ser dado por (5.14).

### 5.3 Regularização em 1 loop

A contribuição diagramática de ordem 1 loop da função de 4 pontos é a mais básica de todas, pois todos os demais diagramas de ordem superior no número de loops podem ser expressos em termos dela. Vimos como isso foi realizado nos capítulos 3 e 4. Novamente, começaremos

analisando essa contribuição na formulação massiva da teoria. Utilizando o propagador (5.14), o correspondente à integral  $I_2^{(\tau)}$  será aqui dado por:

$$I_2^{(\tau)}(j, k; \mu, r) = \mu^{-\epsilon_L} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[r^4(l+j+\tau)^4 + (k+q)^2 + 1][r^4(l+\tau)^4 + q^2 + 1]}, \quad (5.17)$$

onde definimos  $r = \frac{\sigma'}{\sqrt{\mu}}$ , com  $\sigma' = \sqrt{c}\sigma$  correspondendo a uma escala de momento no eixo de competição. Lembramos que no subespaço competitivo, a dimensão dos momentos é a metade da dimensão dos momentos no subespaço sem competição. Com essa definição para  $\sigma'$ , podemos checar que o mesmo acontece para os quase-momentos, ou seja, eles possuem a metade da dimensão de  $k$ . Conforme realizamos no capítulo anterior, podemos construir duas variáveis de escala  $r_2^{-1} = \frac{\sqrt{\mu_2^2}}{\sigma'} \propto \frac{L}{\sqrt{c\xi_{L4}}}$  e  $r_1^{-1} = \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sigma'} \propto \frac{L}{\sqrt{c\xi_{L2}}}$  para os subespaços com e sem competição, respectivamente. No entanto, omitiremos o índice  $n = 1, 2$  de  $r_n$  como uma forma de simplificar a notação.

Os primeiros passos empregados no cálculo da integral acima são os usuais: aplicamos a parametrização de Feynman (2.79) seguido pelo resultado (2.81). Portanto, chegamos a:

$$I_2^{(\tau)}(j, k; \mu, r) = \mu^{-\epsilon_L} \frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon_L}{2}\right) r^{-2\epsilon_L} \times \\ \times \int_0^1 dx \sum_{l=-\infty}^{\infty} [x(l+j+\tau)^4 + (1-x)(l+\tau)^4 + x(1-x)r^{-4}k^2 + r^{-4}]^{-\frac{1}{4} - \frac{\epsilon_L}{2}}. \quad (5.18)$$

Note que  $\epsilon_L = 4 + \frac{1}{2} - d$  no caso uniaxial. Após algumas manipulações algébricas, podemos reescrever o termo entre colchetes no somatório como:

$$x(l+j+\tau)^4 + (1-x)(l+\tau)^4 + x(1-x)r^{-4}k^2 + r^{-4} = (l+\varphi_1)^4 + a(l+\varphi_2)^2 + b, \quad (5.19)$$

onde definimos:

$$\varphi_1 = \tau + xj, \quad (5.20a)$$

$$\varphi_2 = \tau + \frac{j}{3}(1+x), \quad (5.20b)$$

$$a = 6x(1-x)j^2, \quad (5.20c)$$

$$b = \frac{j^4}{3}(x - 2x^2 + 2x^3 - x^4) + x(1-x)r^{-4}k^2 + r^{-4}. \quad (5.20d)$$

O termo no lado direito de (5.19) é mais simples de ser tratado analiticamente e por esse motivo vamos considerá-lo em detrimento do termo do lado esquerdo. Vemos portanto que o cálculo da integral (5.17) deve passar pela continuação analítica da seguinte função:

$$E_\nu(\varphi_1, \varphi_2; a, b) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [(l+\varphi_1)^4 + a(l+\varphi_2)^2 + b]^{-\frac{1}{4}-\nu}. \quad (5.21)$$

No limite  $|l| \rightarrow \infty$ , o termo do somatório comporta-se como  $|l|^{-1-\nu}$  e já podemos antecipar que a função definida acima possui um polo em  $\nu$ . Nosso objetivo na próxima seção é desenvolver uma representação para essa integração nos quase-momentos na qual possamos de fato separar um polo em  $\nu$  de uma parte regular. O estudo detalhado dessa parte regular permite a determinação da região de crossover dimensional.

## 5.4 Integração dos quase-momentos ao longo do eixo de competição

Uma forma de tratar analiticamente a função (5.21) consiste em reescrever o somatório em termos de integrais cujas soluções permitam uma separação das partes singular e regular. O primeiro passo nesse sentido é realizado através da seguinte representação para a função Gama de Euler [68]:

$$\Gamma(\alpha)A^{-\alpha} = \int_0^{\infty} dy y^{\alpha-1} e^{-Ay}, \quad (5.22)$$

válida para  $\text{Re } \alpha > 0$ . O próximo passo é executado com a auxílio da fórmula da soma de Poisson. Então, seja  $f(x)$  uma função não-negativa tal que a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$  exista, podemos afirmar [83]:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi imt} dt. \quad (5.23)$$

Portanto, usando a representação (5.22) em (5.21) e identificando

$$f(x) = \exp[-(x + \varphi_1)^4 - a(x + \varphi_2)^2 - b],$$

podemos escrever:

$$E_{\nu}(\varphi_1, \varphi_2; a, b) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{4} + \nu)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi im\varphi_1} \int_0^{\infty} dy y^{\nu-\frac{3}{4}} e^{-\theta y} g(\gamma, a, y, 2\pi m), \quad (5.24)$$

onde definimos por conveniência:

$$\gamma = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (5.25a)$$

$$\theta = b + a\gamma^2, \quad (5.25b)$$

além de:

$$g(\gamma, a, y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-yt^4 - yat^2 - 2ya\gamma t - i\omega t). \quad (5.26)$$

O desenvolvimento de uma representação conveniente para a função definida acima é de fundamental importância não apenas no cálculo da integral de 1 loop como também na extensão para ordens mais elevadas no número de loops. Notamos que estamos trabalhando basicamente

com uma transformada de Fourier de uma exponencial do polinômio  $-yt^4 - yat^2 - 2ya\gamma t$ , cuja solução não é conhecida em termos de (ou combinações de) funções elementares. Vamos proceder então com uma expansão de Taylor da função  $e^{-2ya\gamma t}$  seguida da identidade  $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ , fornecendo o resultado:

$$g(\gamma, a, y, \omega) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2ya\gamma)^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} dt t^{2n} e^{-yt^4 - yat^2} \cos(\omega t) + 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2ya\gamma)^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} dt t^{2n+1} e^{-yt^4 - yat^2} \sin(\omega t). \quad (5.27)$$

As duas integrais em  $t$  não possuem soluções analíticas conhecidas devido à presença das funções trigonométricas. Podemos contornar essa dificuldade reescrevendo  $\cos z$  e  $\sin z$  em termos de representações por integrais de Mellin-Barnes. Consideremos primeiro a função  $G$  de Meijer que pode ser usada para representar diversas funções elementares e especiais. De uma forma geral, ela é definida como [68, 84]:

$$G_{p,q}^{m,n} \left( x \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds. \quad (5.28)$$

O caminho de integração  $C$  separa os polos de  $\Gamma(b_j - s)$  dos polos de  $\Gamma(1 - a_j + s)$  no plano complexo e deve ser escolhido de acordo com os parâmetros  $m, n, p$  e  $q$  para que a integral seja convergente. Desse modo, devemos ter  $b_j + l_1 \neq 1 - a_j - l_2$ , onde  $l_1, l_2 = 0, 1, 2, \dots$  são números inteiros não-negativos. Se tivermos as condições  $\delta = m + n - \frac{1}{2}(p + q) > 0$  e  $|\arg x| < \delta\pi$  satisfeitas,  $C$  parte de  $-i\infty$  e vai até  $i\infty$  de modo que os polos de  $\Gamma(1 - a_j + s)$  fiquem à esquerda enquanto que os polos de  $\Gamma(b_j - s)$  permaneçam à direita. A figura 5.1 mostra o caminho  $C$  para o caso particular  $m = n = 1$ . As situações com as quais iremos lidar neste capítulo sempre respeitam as condições anteriores e por esse motivo sempre consideraremos um caminho do tipo ilustrado na figura 5.1. As referências [68, 84] trazem mais detalhes sobre outros tipos de caminho, caso tais condições não sejam satisfeitas.

Podemos estabelecer uma conexão entre as funções  $G$  de Meijer e as funções hipergeométricas através da fórmula [68, 84]:

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} G_{p,q+1}^{1,p} \left( -x \middle| \begin{matrix} 1 - a_1, \dots, 1 - a_p \\ 0, 1 - b_1, \dots, 1 - b_q \end{matrix} \right) \quad (5.29)$$

Várias funções elementares podem ser escritas em termos de funções hipergeométricas e as funções trigonométricas não são uma exceção. Na ref. [84], temos as identidades:

$$\cos z = {}_0F_1 \left( ; \frac{1}{2}; -\frac{z^2}{4} \right), \quad (5.30a)$$

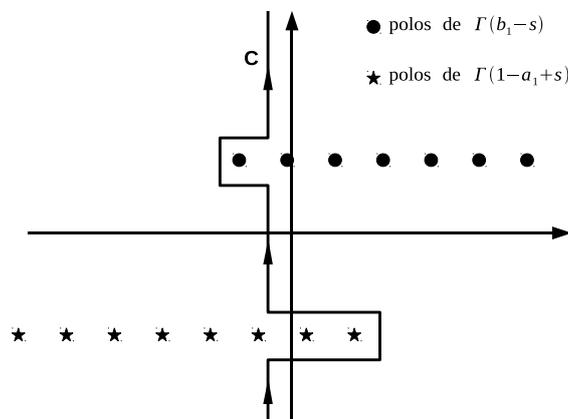


Figura 5.1: Plano complexo com um dos possíveis caminhos de integração na definição das funções  $G$  de Meijer.

$$\sin z = z {}_0F_1 \left( \frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4} \right). \quad (5.30b)$$

Portanto, a partir de (5.29) e (5.28), podemos escrever as seguintes representações integrais:

$$\cos z = \sqrt{\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^s ds, \quad (5.31a)$$

$$\sin z = \sqrt{\pi} \frac{z}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^s ds, \quad (5.31b)$$

onde devemos ter  $c < 0$ . Observe que o caminho de integração  $C$  foi escolhido como uma linha reta paralela ao eixo imaginário partindo de  $c - i\infty$  até  $c + i\infty$ . Representações desse tipo são conhecidas como integrais de Mellin-Barnes. Dada a restrição  $c < 0$ , a linha  $C$  passará à esquerda dos polos de  $\Gamma(-s)$ . Substituindo os resultados (5.31) na função (5.27) e após a mudança de variável  $t^2 \rightarrow t$ , obtemos:

$$\begin{aligned} g(\gamma, a, y, \omega) = & (2y)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\gamma)^{2n} (2y)^{\frac{3n}{2}}}{(2n)!} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \left(\frac{\omega^2}{4}\right)^s (2y)^{-\frac{s}{2}} I\left(n + \frac{1}{2}, s\right) + \\ & + i \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2y)^{\frac{1}{4}} a\gamma \omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\gamma)^{2n} (2y)^{\frac{3n}{2}}}{(2n+1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_{c''-i\infty}^{c''+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)} \left(\frac{\omega^2}{4}\right)^s (2y)^{-\frac{s}{2}} I\left(n + \frac{3}{2}, s\right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde usamos a definição:

$$I(p, s) = \int_0^{\infty} dt t^{p+s-1} e^{-\frac{t^2}{2} - a\sqrt{\frac{y}{2}}t}, \quad (5.33)$$

que é bem definida para  $\operatorname{Re}(p+s) > 0$ . Além disso, devemos ter  $-\frac{1}{2} < c' < 0$  e  $-\frac{3}{2} < c'' < 0$  a fim de que  $\operatorname{Re}(n+s+\frac{1}{2}) > 0$  e  $\operatorname{Re}(n+s+\frac{3}{2}) > 0$  para todo  $n \geq 0$ , respectivamente nas duas integrais  $I(n+\frac{1}{2}, s)$  e  $I(n+\frac{3}{2}, s)$  presentes em (5.32). Desse modo, podemos comutar as integrações em  $s$  e  $t$ , conforme realizado em (5.32).

Podemos identificar a integral (5.33) com uma das representações integrais das *funções cilíndricas parabólicas* [85], a saber:

$$D_\alpha(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}-zt} t^{-\alpha-1} dt, \quad \text{para } \operatorname{Re} \alpha < 0. \quad (5.34)$$

Portanto, se considerarmos apenas a integral em  $y$  na eq. (5.24), calculamos:

$$\begin{aligned} i_\nu(\gamma, a, \theta, \omega) &= \int_0^\infty dy y^{\nu-\frac{3}{4}} e^{-\theta y} g(\gamma, a, y, \omega) \\ &= 2^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(a\gamma)^{2n} 2^{\frac{3n}{2}}}{(2n)!} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s)\Gamma(n+\frac{1}{2}+s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{2}}\right)^s L_0(\nu, n, a, \theta, s) + \\ &+ i \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2^{\frac{1}{4}} a \gamma \omega \sum_{n=0}^\infty \frac{(a\gamma)^{2n} 2^{\frac{3n}{2}}}{(2n+1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_{c''-i\infty}^{c''+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s)\Gamma(n+\frac{3}{2}+s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)} \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{2}}\right)^s L_{\frac{1}{2}}(\nu, n, a, \theta, s), \end{aligned} \quad (5.35)$$

com a seguinte definição:

$$L_\varrho(\nu, n, a, \theta, s) = \int_0^\infty dy y^{\nu+\varrho+\frac{3n}{2}-\frac{s}{2}-1} e^{-\theta y + \frac{a^2}{8}y} D_{-2\varrho-\frac{1}{2}-n-s} \left( a \sqrt{\frac{y}{2}} \right), \quad (5.36)$$

para  $\varrho = 0, \frac{1}{2}$ . Chamamos atenção novamente para a validade da comutação entre as integrais em  $y$  e  $s$  realizada em (5.35). Como  $\operatorname{Re}(\nu + \varrho + \frac{3n}{2} - \frac{s}{2}) > 0$  para todo  $n \geq 0$  devido às restrições em  $c'$  e  $c''$ , esse procedimento é justificado. A integral presente na definição anterior é conhecida [85] e aqui escrevemos:

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{\frac{\beta}{2}-1} D_{-\alpha}(2\sqrt{kt}) dt = \frac{2^{1-\beta-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2})} (z+k)^{-\frac{\beta}{2}} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}; \frac{\alpha+\beta+1}{2}; \frac{z-k}{z+k}\right), \quad (5.37)$$

para  $\operatorname{Re} \beta > 0$  e  $\operatorname{Re} \frac{z}{k} > 0$ .  $F$  corresponde à função hipergeométrica gaussiana. Além desse resultado, vamos usar a fórmula da dobra dada por [68]:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad (5.38)$$

como uma maneira de colocarmos os fatoriais  $(2n)!$  e  $(2n+1)!$  na definição (5.35) em um

formato mais adequado. Fazendo isso, podemos mostrar que:

$$i_\nu(\gamma, a, \theta, \omega) = 2^{\frac{1}{2}-2\nu} \pi^{\frac{3}{2}} \theta^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a^2 \gamma^2}{16\theta^{\frac{3}{2}}}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \nu + 2n\right) n!} H_{\nu,n}^{(1)}\left(\frac{a^2}{4\theta}, \frac{\omega^2}{4} \theta^{\frac{1}{2}}\right) \\ + i 2^{-\frac{5}{2}-2\nu} \pi^{\frac{3}{2}} \theta^{-\frac{1}{2}-\nu} a \gamma \omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a^2 \gamma^2}{16\theta^{\frac{3}{2}}}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) \Gamma\left(\frac{7}{4} + \nu + 2n\right) n!} H_{\nu,n}^{(2)}\left(\frac{a^2}{4\theta}, \frac{\omega^2}{4} \theta^{\frac{1}{2}}\right), \quad (5.39)$$

onde usamos as definições:

$$H_{\nu,n}^{(1)}(y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s) \Gamma(2\nu + 3n - s) \Gamma\left(\frac{1}{2} + n + s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right)} z^s \times \\ \times F\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2} + \frac{s}{2}, \nu + \frac{3n}{2} - \frac{s}{2}; \frac{3}{4} + \nu + 2n; 1 - y\right), \quad (5.40a)$$

$$H_{\nu,n}^{(2)}(y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c''-i\infty}^{c''+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s) \Gamma(1 + 2\nu + 3n - s) \Gamma\left(\frac{3}{2} + n + s\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + s\right)} z^s \times \\ \times F\left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2} + \frac{s}{2}, \frac{1}{2} + \nu + \frac{3n}{2} - \frac{s}{2}; \frac{7}{4} + \nu + 2n; 1 - y\right). \quad (5.40b)$$

Podemos visualizar as funções  $H^{(1)}(y, z)$  e  $H^{(2)}(y, z)$  como generalizações das funções  $G$  de Meijer nas quais o integrando é composto não apenas por funções Gama, como também por funções hipergeométricas.

A fim de expressarmos a função (5.21) em termos das partes singular e regular, devemos reescrever o somatório em  $m$  da eq. (5.24) de modo a separar o termo  $m = 0$  (modo-zero) dos demais com  $m \neq 0$ . Veremos a seguir que o modo-zero contém a parte singular. Estamos interessados então na integral (5.35) quando  $\omega = 0$ . Usando um procedimento semelhante na obtenção de (5.39), calculamos:

$$i_\nu(\gamma, a, \theta, \omega = 0) = 2^{\frac{1}{2}-2\nu} \pi \theta^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu + 3n)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \nu + 2n\right) n!} \left(\frac{a^2 \gamma^2}{16\theta^{\frac{3}{2}}}\right)^n \times \\ \times F\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}, \nu + \frac{3n}{2}; \frac{3}{4} + \nu + 2n; 1 - \frac{a^2}{4\theta}\right). \quad (5.41)$$

Portanto, a partir do resultado anterior, de (5.39) e (5.24), podemos estabelecer a seguinte representação para a função (5.21):

$$E_\nu(\varphi_1, \varphi_2; a, b) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \theta^{-\nu}}{2\Gamma\left(\frac{1}{4} + \nu\right)} \left[ \Sigma_\nu^{(0)}\left(\frac{a^2 \gamma^2}{16\theta^{\frac{3}{2}}}, \frac{a^2}{4\theta}\right) + \Sigma_\nu^{(1)}\left(\varphi_1, \frac{a^2 \gamma^2}{16\theta^{\frac{3}{2}}}, \frac{a^2}{4\theta}, \theta^{\frac{1}{2}}\right) \right. \\ \left. - \Sigma_\nu^{(2)}\left(\varphi_1, \frac{a^2 \gamma^2}{16\theta^{\frac{3}{2}}}, \frac{a^2}{4\theta}, \theta^{\frac{1}{2}}\right) \right]. \quad (5.42)$$

Por razões de conveniência, realizamos as seguintes definições:

$$\Sigma_{\nu}^{(0)}(x, y) = \frac{2^{\frac{3}{2}-2\nu}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+3n)x^n}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu+2n\right)n!} F\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}, \nu+\frac{3n}{2}; \frac{3}{4}+\nu+2n; 1-y\right), \quad (5.43a)$$

$$\Sigma_{\nu}^{(1)}(\varphi, x, y, z) = \frac{2^{\frac{3}{2}-2\nu}\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n H_{\nu,n}^{(1)}(y, \pi^2 m^2 z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu+2n\right)n!}, \quad (5.43b)$$

$$\Sigma_{\nu}^{(2)}(\varphi, x, y, z) = \frac{2^{\frac{5}{2}-2\nu}\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} x^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} m \sin(2\pi m\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n H_{\nu,n}^{(2)}(y, \pi^2 m^2 z)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\nu+2n\right)n!}. \quad (5.43c)$$

Antes de aplicarmos (5.42) na regularização das integrais de Feynman, vamos analisar a convergência das séries presentes nas definições acima. Nem todos os valores de  $x$  e  $y$  fornecerão séries finitas. Devemos estabelecer então um domínio de convergência que, no apêndice D, mostramos ser dado pela desigualdade:

$$x < f(y) = \frac{1}{12\sqrt{3}} \left(1 + y + y\sqrt{1 + \frac{3}{y}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2 + \sqrt{1 + \frac{3}{y}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{y}}}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.44)$$

Já o argumento  $\varphi$  pode variar em todo eixo real e  $z > 0$ . A figura 5.2 mostra a curva determinada por  $f(y)$  e o domínio de convergência representado pela região abaixo da curva. Resta saber se as variáveis  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $a$  e  $b$  fornecem valores para os argumentos  $x$  e  $y$  dentro dessa região. A partir de (5.42), vemos que  $x = \frac{a^2\gamma^2}{16\theta^{\frac{3}{2}}}$  e  $y = \frac{a^2}{4\theta}$ . Se utilizarmos a definição (5.25b), podemos escrever  $x$  e  $y$  parametricamente como:

$$x = \frac{\alpha^2}{16(\beta + \alpha)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\alpha^2}{4(\beta + \alpha)}, \quad (5.45)$$

onde  $\alpha = \frac{a}{\gamma^2}$  e  $\beta = \frac{b}{\gamma^4}$ . Como estamos admitindo  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  e  $\gamma$  um número real qualquer devido à diferença em (5.25a), os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  assumem valores reais não-negativos. Quando  $\beta = 0$ , podemos relacionar  $x$  e  $y$  como  $x = \frac{1}{8}y^{\frac{1}{2}}$ , cujo locus geométrico é dado pela curva preta na figura 5.2. As demais curvas em azul e verde são obtidas com  $\beta > 0$  fixo, variando apenas  $\alpha$ . No limite  $\beta \rightarrow \infty$ , podemos ver que  $\frac{x}{y} \approx 0$  para  $\alpha$  finito e desse modo concluímos que  $x$  e  $y$  varrem toda a região cinza mostrada na figura. Se tomarmos o limite  $y \rightarrow \infty$  na função  $f(y)$ , obtemos:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) \approx \frac{1}{8}y^{\frac{1}{2}}. \quad (5.46)$$

Ou seja, a curva vermelha aproxima-se assintoticamente da curva preta (nunca havendo cruzamento) e portanto a região cinza sempre estará contida no domínio de convergência das séries. Logo, as funções apresentadas em (5.43) são bem definidas para as variáveis  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$ , além de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  reais quaisquer.

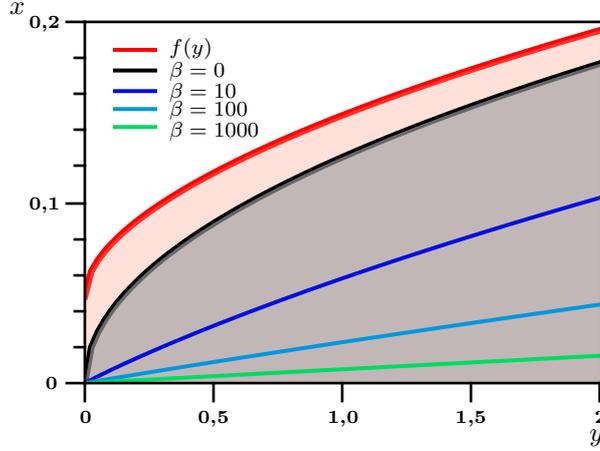


Figura 5.2: Domínio de convergência das séries em (5.43) determinado pela região abaixo da curva vermelha. A região cinza contém os valores reais de  $x$  e  $y$  quando os argumentos das funções em (5.43) são tais que  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , com  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sem restrições no eixo real.

Voltemos agora ao cálculo da integral de Feynman de 1 loop. Como estamos tratando inicialmente da teoria massiva, as condições de renormalização podem ser realizadas com os momentos externos iguais a zero. Portanto estamos interessados em (5.18) com  $k = 0$  e  $j = 0$ . A partir das definições (5.20) e (5.25), temos  $\varphi_1 = \varphi_2 = \tau$ ,  $\gamma = 0$ ,  $a = 0$  e  $\theta = r^{-4}$ . Utilizando o resultado (5.42), juntamente com as definições em (5.43) e identificando  $\nu = \frac{\epsilon_L}{2}$ , calculamos:

$$I_2^{(\tau)}(0; r) = \mu^{-\epsilon_L} \frac{S_{d-1}}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \left[ \frac{2^{\frac{3}{2}-\epsilon_L} \pi \Gamma(\epsilon_L)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\epsilon_L}{2}\right)} F\left(\frac{1}{4}, \frac{\epsilon_L}{2}; \frac{3}{4} + \frac{\epsilon_L}{2}; 1\right) + \Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right]. \quad (5.47)$$

Podemos observar já a presença do polo em  $\epsilon_L$  devido à função  $\Gamma(\epsilon_L)$ . Essa singularidade é consequência da função (5.43a). As demais funções em (5.43) são decorrentes do tamanho finito  $L$ , conforme observamos no resultado anterior através da dependência de  $\Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(1)}$  em  $r$ . Iremos estudar esse termo de correção em breve. A função hipergeométrica pode ser escrita em termos de funções Gama da seguinte forma [68]:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}, \quad (5.48)$$

válido para  $\text{Re } \gamma > \text{Re}(\alpha + \beta)$ . Outra identidade importante no desenvolvimento de (5.47) será [68]:

$$\Gamma(z) \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (5.49)$$

além da fórmula da dobra (5.38) e da expansão (4.26) que resulta em:

$$\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \left[1 - \frac{\epsilon_L}{2} \psi\left(\frac{7}{4}\right) + O(\epsilon_L^2)\right]. \quad (5.50)$$

Portanto, identificando  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = \frac{\epsilon_L}{2}$ ,  $\gamma = \frac{3}{4} + \frac{\epsilon_L}{2}$  e  $z = \frac{1}{4}$  nas relações acima, podemos escrever a expansão em  $\epsilon_L$  de (5.47) como:

$$I_2^{(\tau)}(0; r) = \mu^{-\epsilon_L} \frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \frac{1}{\epsilon_L} \left[1 - \epsilon_L + [i_2]_1 \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2})\right], \quad (5.51)$$

onde usamos a definição (4.28) com  $m = 1$ . Note que o fator  $\frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)$  é o mesmo presente no resultado (4.27) quando  $m = 1$  e  $S_1 = 2$ , sendo então eliminado em cada loop de integração pela redefinição da constante de acoplamento. Comparando a expressão anterior com (4.58), vemos que a principal diferença está na correção do tamanho finito dada pelo termo com dependência em  $r$ . Os demais termos seriam as únicas contribuições caso o sistema fosse infinito. Portanto, podemos afirmar que a aproximação ortogonal é bem sucedida no cálculo da parte singular da integral de Feynman em 1 loop com  $m = 1$ , quando comparada ao nosso resultado exato.

## 5.5 Análises assintóticas do termo de correção

Na seção anterior, consideramos o último termo em (5.51) como uma correção do tamanho finito  $L$  devido à sua dependência em  $r$ . Para que tal afirmação seja realmente correta, devemos verificar se esse termo tende a zero quando tomamos o limite  $r^{-1} \propto L \rightarrow \infty$ . Outra análise igualmente importante diz respeito ao crossover dimensional resultante de singularidades no termo de correção no limite  $r^{-1} \rightarrow 0$ . Portanto, nosso objetivo nesta seção será estudar o comportamento assintótico de  $\Sigma_{\nu}^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2})$  em ambos os limites. Primeiro, usamos as definições (5.43b) e (5.40a) para reescrevermos:

$$\Sigma_{\nu}^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) = \frac{2^{\frac{1}{2}} \pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m \tau) \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\Gamma(-s) \Gamma\left(\nu - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{s}{2}\right)} \left(\frac{r^{-2} \pi^2 m^2}{2}\right)^s ds. \quad (5.52)$$

Tomamos  $\nu = \frac{\epsilon_L}{2}$  por questão de brevidade.

Começaremos o nosso estudo pelo limite  $r^{-1} \rightarrow \infty$ . A integral em  $s$  acima pode ser identificada com uma função  $G$  de Meijer. De fato, realizando a mudança de variável  $s \rightarrow 2s$  e utilizando a fórmula da dobra (5.38), podemos reescrevê-la como um caso particular de (5.28). Apesar das refs. [84, 86] trazerem alguns métodos para tratar o comportamento assintótico da função  $G$ , as nossas análises serão baseadas no método apresentado por Braaksma [87], que pode ser aplicado diretamente na integral anterior. Na abordagem a seguir, reproduziremos apenas a parte de nosso interesse nesse método. Consideremos então uma função definida como:

$$H_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j - \beta_j s)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j - \alpha_j s)} z^s ds, \quad (5.53)$$

onde devemos ter  $\omega < \operatorname{Re} \frac{b_j}{\beta_j}$  de modo que os polos de  $\Gamma(b_j - \beta_j s)$  estejam à direita do caminho de integração. Além disso,  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são números reais positivos. Desse modo, o termo mais significativo na expansão assintótica de  $H_0(z)$  no limite  $z \rightarrow \infty$  pode ser escrito como:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} H_0(\beta^{-1} \mu^{-\mu} z) \approx A_0 (2\pi)^{q-p-1} \frac{1}{\mu} z^{\frac{1-\alpha}{\mu}} \exp(-z^{\frac{1}{\mu}}), \quad (5.54)$$

dadas as seguintes definições:

$$\mu = \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{j=1}^p \alpha_j, \quad (5.55a)$$

$$\beta = \prod_{j=1}^p \alpha_j^{\alpha_j} \prod_{j=1}^q \beta_j^{-\beta_j}, \quad (5.55b)$$

$$\alpha = \sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j + \frac{1}{2}(q - p + 1), \quad (5.55c)$$

$$A_0 = (2\pi)^{\frac{1}{2}(p-q+1)} \mu^{\alpha - \frac{1}{2}} \prod_{j=1}^p \alpha_j^{\frac{1}{2} - a_j} \prod_{j=1}^q \beta_j^{b_j - \frac{1}{2}}. \quad (5.55d)$$

Observamos que o resultado (5.54) só é válido para  $\mu > 0$  e  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\mu$ .

A integral presente em (5.52) ainda não está no mesmo formato de (5.53). A identidade (5.49) será então útil para escrevermos:

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{s}{2}\right)} = \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{s}{2}\right) \left( e^{\frac{\pi}{4}i} e^{\frac{\pi}{2}is} + e^{-\frac{\pi}{4}i} e^{-\frac{\pi}{2}is} \right). \quad (5.56)$$

Desse modo, a substituição da expressão acima na integral de (5.52) resulta em:

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma\left(\nu - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{s}{2}\right)} x^s ds = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{\pi}{4}i} H_0\left(xe^{\frac{\pi}{2}i}\right) + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\pi}{4}i} H_0\left(xe^{-\frac{\pi}{2}i}\right), \quad (5.57)$$

onde  $H_0(z)$  é uma integral do tipo dado em (5.53):

$$H_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \Gamma(-s)\Gamma\left(\nu - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{s}{2}\right) z^s ds. \quad (5.58)$$

Se usarmos as definições (5.55) na integral anterior, podemos a partir de (5.54) calcular o seguinte limite assintótico:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} H_0(z) \approx \pi 2^{\frac{7}{8} - \frac{\nu}{2}} z^{-\frac{3}{8} + \frac{\nu}{2}} e^{-2\sqrt{2}z}. \quad (5.59)$$

Substituindo esse resultado em (5.57), obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) \approx 2^{\frac{7}{8} - \frac{\nu}{2}} x^{-\frac{3}{8} + \frac{\nu}{2}} e^{-2\sqrt{x}} \cos\left(2\sqrt{x} - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi\nu}{4}\right). \quad (5.60)$$

Vemos que a integral representada por  $H(x)$  tem um decaimento exponencial para valores grandes de  $x$ . Logo, tomando  $x = \frac{r^{-2}\pi^2 m^2}{2}$ , apenas o termo com  $m = 1$  em (5.52) será significativo quando  $r^{-1} \rightarrow \infty$  e assim obtemos o limite:

$$\lim_{r^{-1} \rightarrow \infty} \Sigma_{\nu}^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \approx 2^{\frac{7}{4} - \nu} \pi^{\frac{1}{4} + \nu} \cos(2\pi\tau) \cos\left(\sqrt{2}\pi r^{-1} - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi\nu}{4}\right) (r^{-1})^{-\frac{3}{4} + \nu} e^{-\sqrt{2}\pi r^{-1}}. \quad (5.61)$$

Portanto, concluímos que no limite  $r^{-1} \propto L \rightarrow \infty$ , a função (5.52) tende a zero e podemos de fato considerá-la como uma correção devido ao tamanho finito do sistema. A figura 5.3 exibe o gráfico dessa função, juntamente com a curva assintótica obtida anteriormente para condições de contorno periódicas ( $\tau = 0$ ) e  $\nu = 0$ . Com o objetivo de estabelecer uma comparação com o correspondente termo de correção de um sistema sem competição, colocamos também a curva da função definida em (3.38). As funções foram calculadas numericamente com o auxílio do software Mathematica [88]. O gráfico inserido contém o mesmo conjunto de curvas com  $r^{-1}$  no intervalo entre 1,0 e 1,6 e com o eixo das ordenadas reescalado para melhor visualização. Note como a assíntota tende ao resultado (5.52) dentro desse intervalo. A diferença no comportamento das funções de correção para os dois tipos de sistemas é bastante notável. Enquanto  $f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1})$  apresenta um decaimento monotônico, a função (5.61) decai de forma oscilatória. Considerando a dependência das massas  $\mu_1 \propto t^{\frac{1}{2}}$  e  $\mu_2 \propto t^{\frac{1}{4}}$  na temperatura reduzida  $t$ , concluímos que o período de oscilação cresce proporcionalmente com  $t^{-\frac{1}{4}}$ , quando nos aproximamos da temperatura crítica.

Vamos analisar agora o outro extremo do limite, quando  $r^{-1} \rightarrow 0$ . Neste caso, consideraremos as condições de contorno separadamente. Em  $PBC$ , o termo de correção (5.52) torna-se:

$$\Sigma_0^{(1)}(\tau = 0, 0, 0, r^{-2}) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{s}{2}\right)} \left(\frac{r^{-2}\pi^2 m^2}{2}\right)^s ds. \quad (5.62)$$

Relembramos que a restrição imposta ao caminho de integração  $C$  era tal que  $-\frac{1}{2} < c' < 0$ . No entanto, podemos ampliar o domínio de  $c'$  para incluir toda a parte negativa do eixo real, pois não há polos no integrando à esquerda de  $C$ . Esse procedimento pode ser visto como uma deformação no caminho de integração dentro do domínio de analiticidade do integrando, não alterando o resultado da integral. Se realizarmos a restrição  $c' < -\frac{1}{2}$ , podemos comutar a integral em  $s$  com o somatório em  $m$  e assim identificamos a seguinte representação da função Zeta de Riemann [68]:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (5.63)$$

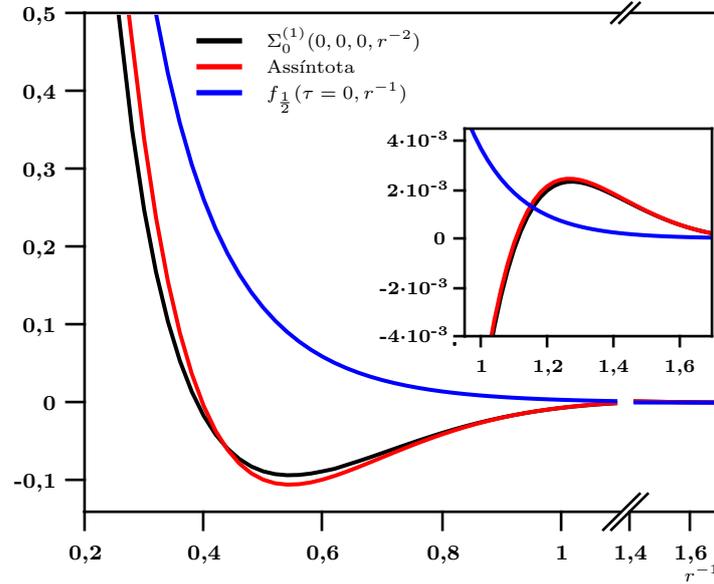


Figura 5.3: Curvas referentes às funções de correção do tamanho finito para as teorias com e sem competição. O gráfico inserido corresponde ao mesmo conjunto de curvas com o eixo das ordenadas reescalado.

válida para  $\text{Re } z > 1$ . Portanto, podemos escrever:

$$\Sigma_0^{(1)}(\tau = 0, 0, 0, r^{-2}) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{s}{2}\right)} \zeta(-2s) \left(\frac{r^{-2}\pi^2}{2}\right)^s ds. \quad (5.64)$$

A fim de entendermos melhor a natureza dos polos presentes no integrando acima, faremos a mudança de variável  $s \rightarrow 2s$  e usaremos em seguida a fórmula da dobra (5.38), resultando em:

$$\Sigma_0^{(1)}(\tau = 0, 0, 0, r^{-2}) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{[\Gamma(-s)]^2 \Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + s\right)} \zeta(-4s) \left(\frac{r^{-4}\pi^4}{16}\right)^s ds, \quad (5.65)$$

onde agora tomamos  $c' < -\frac{1}{4}$ . Podemos visualizar agora três tipos de polos no integrando. O primeiro deles são os polos duplos  $0, 1, 2, \dots$  da função  $[\Gamma(-s)]^2$ . O segundo tipo corresponde aos polos  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  referentes a  $\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)$ . Já o terceiro polo está na função Zeta e ele surgiu como uma consequência da comutação realizada em (5.62) entre a integral e o somatório. A função  $\zeta(z)$  possui um único polo em  $z = 1$ , cujo resíduo pode ser extraído de [89]:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\zeta(z)}{\Gamma(1-z)} = -1. \quad (5.66)$$

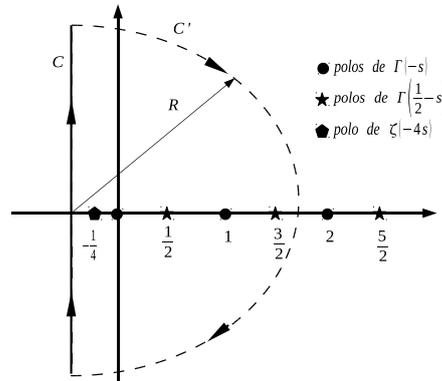


Figura 5.4: Plano complexo com a disposição dos polos no integrando do termo de correção dado em (5.65).

Logo, obtemos  $\text{Res } \zeta(1) = 1$ . Portanto, concluímos que  $\zeta(-4s)$  possui um polo em  $s = -\frac{1}{4}$  cujo resíduo é igual a  $\frac{1}{4}$ . A figura 5.4 mostra a disposição desses polos e o caminho de integração  $C$  no plano complexo.

O limite  $r^{-1}$  do termo de correção do tamanho finito é obtido a partir de uma expansão da integral (5.65) em séries de potências de  $r^{-1}$ , cuja dedução pode ser melhor entendida com o auxílio da figura 5.4. Considere inicialmente o caminho  $C$  com uma extensão finita no qual os extremos estão no semicírculo  $C'$  de raio  $R$ . Logo, a representação integral de Mellin-Barnes é reobtida quando  $R \rightarrow \infty$  e a integral ao longo de  $C'$  é nula. Nesse limite, o caminho fechado  $C \cup C'$  circunda todos os polos do integrando em (5.65) e podemos utilizar o teorema dos resíduos para obter a série de potências desejada. Precisamos conhecer então os resíduos de cada polo. Realizaremos primeiramente a expansão de Laurent de  $[\Gamma(-s)]^2$  em torno dos polos  $p = 0, 1, \dots$ . A partir da propriedade recursiva da função Gama, escrevemos:

$$\Gamma(x-p) = \frac{\Gamma(1+x)}{x(x-1)(x-2)\cdots(x-p)} = \frac{\Gamma(1+x)}{(-1)^p(p!)x(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{p}\right)}. \quad (5.67)$$

Para valores pequenos de  $x$ , podemos estabelecer a expansão:

$$\Gamma(x-p) = \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{x} [1 + \psi(p+1)x + O(x^2)], \quad (5.68)$$

onde usamos os resultados [68]:

$$\Gamma(1+x) = 1 - \gamma x + O(x^2), \quad (5.69a)$$

$$\psi(p+1) = -\gamma + \sum_{n=1}^p \frac{1}{n}, \quad (5.69b)$$

com  $\gamma$  sendo a constante de Euler. Se realizarmos a mudança  $x - p = -s$  e mantivermos  $s$  suficientemente próximo de um dos polos  $p$ , determinamos as seguintes séries de Laurent:

$$\Gamma(-s) = -\frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{s-p} \left\{ 1 - \psi(p+1)(s-p) + O[(s-p)^2] \right\}, \quad (5.70a)$$

$$[\Gamma(-s)]^2 = \frac{1}{(p!)^2} \frac{1}{(s-p)^2} \left\{ 1 - 2\psi(p+1)(s-p) + O[(s-p)^2] \right\}. \quad (5.70b)$$

A partir dessas expansões, podemos extrair os resíduos para os polos simples e duplos.

A fórmula integral de Cauchy afirma que se  $f(z)$  for uma função analítica em um contorno fechado  $C$ , temos:

$$\frac{d^n f(z_0)}{dz_0^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad (5.71)$$

onde a integral é computada no sentido anti-horário. Portanto, observamos que ao aplicar o teorema dos resíduos em (5.65), os polos duplos resultarão em uma derivada de ordem primeira da parte regular do integrando multiplicada pelo resíduo  $\frac{1}{(p!)^2}$  calculado em (5.70b). Os demais polos são simples, cujos resíduos são também extraídos de (5.70). Existe apenas uma exceção dada por  $\zeta(-4s)$  cujo polo simples corresponde a  $s = -\frac{1}{4}$  com  $\text{Res} \zeta(-4s) = \frac{1}{4}$ . Feitas todas essas considerações e notando que o sentido do caminho de integração é horário, calculamos:

$$\begin{aligned} \Sigma_0^{(1)}(0, 0, 0, r^{-2}) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \left\{ \frac{1}{4} \frac{[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)]^2 \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{1}{4}} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p!)^2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) \zeta(-4s)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+s\right)} x^s \right]_{s=p} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\psi(p+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right) \zeta(-4p)}{(p!)^2 \Gamma\left(\frac{3}{4}+p\right)} x^p + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p [\Gamma\left(-\frac{1}{2}-p\right)]^2}{p! \Gamma\left(\frac{5}{4}+p\right)} \zeta(-2-4p) x^{\frac{1}{2}+p} \right\}, \quad (5.72) \end{aligned}$$

onde colocamos  $x = \frac{r^{-4}\pi^4}{16}$  por questão de brevidade. Apenas os dois primeiros termos na expansão acima irão fornecer contribuições singulares no limite  $r^{-1} \rightarrow 0$ . Desse modo, com auxílio da identidade (5.49) e do resultado  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$  proveniente da continuação analítica da função Zeta de Riemann [68], chegamos ao limite assintótico:

$$\lim_{r^{-1} \rightarrow 0} \Sigma_0^{(1)}(0, 0, 0, r^{-2}) = \frac{(r^{-1})^{-1}}{4} + 2 \ln r^{-1} + O(r^0). \quad (5.73)$$

Substituindo essa expressão no resultado (5.51) e omitindo o fator absorvido na redefinição da constante da acoplamento, temos:

$$\lim_{r^{-1} \rightarrow 0} I_2^{(\tau=0)}(0; r) \approx \mu^{-\epsilon_L} \left[ \frac{1}{\epsilon_L} - 1 + [i_2]_1 + \frac{(r^{-1})^{-1}}{8} + \ln r^{-1} + O(r^0) \right]. \quad (5.74)$$

Apesar do termo de correção no eixo competitivo ter um comportamento bastante diferente do corresponde em um sistema sem competição quando os valores da variável de escala  $r^{-1}$

são grandes, podemos observar nesse último resultado o mesmo tipo de singularidade em  $r^{-1}$  presente na eq. (3.51) quando  $\tau = 0$ . Portanto, chegaremos às mesmas conclusões realizadas no final da seção 3.4 com respeito ao crossover dimensional em uma teoria massiva com condições de contorno periódicas no parâmetro de ordem.

Para completar a nossa análise, precisamos investigar como o termo (5.52) comporta-se quando utilizamos condições de contorno antiperiódicas. Neste caso, temos  $\tau = \frac{1}{2}$  fornecendo  $\cos(2\pi m\tau) = (-1)^m$  e a comutação do somatório em  $m$  com a integral em  $s$  resultará na presença do termo  $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^{2s}$  compondo o integrando. Esse somatório pode ser escrito em termos da função Zeta de Riemann através da seguinte representação [68]:

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^z}, \quad (5.75)$$

válida para  $\text{Re } z > 0$ . Portanto, depois de realizarmos a mudança de variável  $s \rightarrow 2s$  e usarmos a fórmula da dobra (5.38), reescrevemos (5.52) com  $\epsilon_L = 0$  como:

$$\Sigma_0^{(1)} \left( \frac{1}{2}, 0, 0, r^{-2} \right) = \frac{-\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{4})} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{[\Gamma(-s)]^2 \Gamma(\frac{1}{2} - s)}{\Gamma(\frac{3}{4} + s)} \zeta(-4s) (1 - 2^{1+4s}) \left( \frac{r^{-4}\pi^4}{2} \right)^s ds. \quad (5.76)$$

O ponto  $s = -\frac{1}{4}$  no plano complexo mostrado na figura 5.4 não é mais um polo no integrando acima devido ao cancelamento produzido pelo termo  $(1 - 2^{1+4s})$ . Desse modo, o teorema dos resíduos levará em consideração apenas os polos das funções  $[\Gamma(-s)]^2$  e  $\Gamma(\frac{1}{2} - s)$ . Um procedimento completamente análogo ao empregado na dedução de (5.73) nos leva então ao limite assintótico:

$$\lim_{r^{-1} \rightarrow 0} \Sigma_0^{(1)} \left( \frac{1}{2}, 0, 0, r^{-2} \right) \approx 2 \ln r^{-1} + O(r^0), \quad (5.77)$$

cuja substituição em (5.51) resulta em:

$$\lim_{r^{-1} \rightarrow 0} I_2^{(\tau=\frac{1}{2})}(0; r) \approx \mu^{-\epsilon_L} \left[ \frac{1}{\epsilon_L} - 1 + [i_2]_1 + \ln r^{-1} + O(r^0) \right]. \quad (5.78)$$

Portanto, em condições de contorno antiperiódicas, o polo em  $r^{-1}$  desaparece e ficamos apenas com a divergência logarítmica  $\ln r^{-1}$  também presente na correção de tamanho finito em um sistema sem competição. O crossover dimensional nesse caso ocorre para valores ainda menores de  $L$  que, conforme vimos na seção 3.4, passam a ser da mesma ordem de grandeza do parâmetro de rede do sistema. Lembramos que estamos tomando os comprimentos de correlação  $\xi_{L2}$  e  $\xi_{L4}$  finitos enquanto variamos apenas  $L$ . Os limites  $\xi_{L2} \rightarrow \infty$  e  $\xi_{L4} \rightarrow \infty$  são inconsistentes com a formulação massiva e devemos recorrer à teoria sem massa se quisermos acessar a variável  $r^{-1}$  com valores próximos de zero.

## 5.6 Crossover dimensional na teoria não-massiva

Na formulação da teoria usando campos sem massa, iremos considerar apenas o diagrama de Feynman contribuindo em ordem de um loop para a função de vértice de 4 pontos. Nosso objetivo é analisar o crossover dimensional e verificar se podemos de fato estabelecer a equivalência entre as teorias massiva e não-massiva, conforme realizado em sistemas sem competição nos dois capítulos anteriores. O ponto de partida será então a eq. (5.17) que será modificada ao tomarmos a massa  $\mu$  nula em cada propagador, resultando na seguinte integral:

$$I_2^{(\tau)}(j, k; \sigma') = \sigma' \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[\sigma'^4(l+j+\tau)^4 + (k+q)^2][\sigma'^4(l+\tau)^4 + q^2]}, \quad (5.79)$$

lembrando que  $\sigma' = \sqrt{c}\sigma = \frac{2\pi\sqrt{c}}{L}$ , onde  $c$  é uma constante com dimensão de comprimento presente na densidade lagrangiana (5.1). O mesmo procedimento empregado na obtenção do resultado (5.18) pode também ser usado aqui para escrevermos:

$$I_2^{(\tau)}(j, k; \sigma') = \sigma'^{-2\epsilon_L} \frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon_L}{2}\right) \times \\ \times \int_0^1 dx \sum_{l=-\infty}^{\infty} [(l+\varphi_1)^4 + a(l+\varphi_2)^2 + b']^{-\frac{1}{4} - \frac{\epsilon_L}{2}}, \quad (5.80)$$

onde  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  e  $a$  são definidos nas eqs. (5.20a-c), enquanto que o parâmetro correspondente  $b'$  é agora dado por:

$$b' = \frac{j^4}{3}(x - 2x^2 + 2x^3 - x^4) + x(1-x)\sigma'^{-4}k^2. \quad (5.81)$$

Ao aplicar as condições de renormalização na teoria não-massiva, mantivemos sempre os quase-momentos nulos enquanto os demais momentos externos foram colocados no ponto de simetria. Continuaremos fazendo o mesmo nesta seção. Seja  $\kappa_1$  uma escala de momento no subespaço não-competitivo, o ponto simétrico corresponde a valores do momento  $k$  na expressão acima tal que o módulo seja fixo e igual a  $\kappa_1$ . Sendo  $\kappa_1$  uma escala arbitrária, podemos tomar  $k^2 = \kappa_1^2 = 1$ . Além disso, utilizando o resultado (5.42), simplificamos a integral (5.80) para a seguinte forma:

$$I_{2PS}^{(\tau)}(\sigma') = I^{(\tau)}(j=0, k^2=1; \sigma') = \frac{S_{d-1}}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \times \\ \times \left\{ \Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(0)}(0,0) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} + g_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau)}(\sigma'^2) \right\}, \quad (5.82)$$

onde definimos:

$$g_{\nu}^{(\tau)}(\sigma'^2) = \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\nu} \Sigma_{\nu}^{(1)}\left(\tau, 0, 0, \sigma'^2 \sqrt{x(1-x)}\right). \quad (5.83)$$

A partir das fórmulas (5.48), (5.38) e (5.49), seguidas pela expansão (4.26), calculamos:

$$\Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(0)}(0,0) = \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon_L} \left[1 + \psi(1)\frac{\epsilon_L}{2} + O(\epsilon_L^2)\right]. \quad (5.84)$$

Prosseguindo com a expansão em  $\epsilon_L$  de (5.82), usamos a expansão (5.50) e o valor para a  $\int_0^1 dx \ln[x(1-x)] = -2$ , fornecendo:

$$I_{2PS}^{(\tau)}(\sigma') = \frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \frac{1}{\epsilon_L} \left[1 + [i_2]_1 \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} g_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau)}(\sigma'^{-2})\right], \quad (5.85)$$

com  $[i_2]_1$  dado em (4.28). Podemos observar novamente a semelhança que existe entre o resultado anterior e aquele apresentado na eq. (5.85) para  $m = 1$ , quando tratamos da teoria sem massa com a restrição espacial no subespaço não-competitivo. A aproximação ortogonal também funciona muito bem na determinação da parte singular da integral de Feynman em ordem 1 loop. A única diferença está no termo de correção do tamanho finito  $g_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau)}(\sigma'^{-2})$ .

Precisamos analisar o último termo da expressão acima para saber se podemos de fato considerá-lo como uma correção devido à restrição do comprimento  $L$ . Além disso, estamos interessados em verificar como o crossover dimensional manifesta-se no limite  $L \rightarrow 0$ . Estudaremos primeiramente o limite  $L \rightarrow \infty$ . A partir das definições (5.43b) e (5.40a), rescrevemos (5.83) como:

$$g_{\nu}^{(\tau)}(\sigma'^2) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m\tau) \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s)\Gamma\left(\nu - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{s}{2}\right)} \left(\frac{\pi^2 m^2 \sigma'^{-2}}{2}\right)^s \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\nu + \frac{s}{2}}, \quad (5.86)$$

onde a comutação entre as integrais em  $x$  e  $s$  é válida desde que  $\text{Re}\left(-\nu + \frac{s}{2}\right) > -1$ . Como estamos antecipando que o termo de correção é regular quando  $\nu = \frac{\epsilon_L}{2} = 0$ , devemos ter  $-2 < c' < 0$  para que a condição de comutatividade seja válida. A integral em  $x$  corresponde à uma das representações da função beta de Euler [68] dada por:

$$B(a_1, a_2) = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1 + a_2)} = \int_0^1 dt t^{a_1-1} (1-t)^{a_2-1}, \quad (5.87)$$

para  $\text{Re } a_1 > 0$  e  $\text{Re } a_2 > 0$ . Após usarmos essa representação e a fórmula da dobra (5.38), obtemos:

$$g_{\nu}^{(\tau)}(\sigma'^2) = \frac{2^{-\frac{1}{2}+2\nu} \pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m\tau) \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s)\Gamma\left(\nu - \frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1 - \nu + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \nu + \frac{s}{2}\right)} \left(\frac{\pi^2 m^2 \sigma'^{-2}}{4}\right)^s ds. \quad (5.88)$$

Dada a restrição  $-2 < c' < 0$ , podemos ver que mesmo para  $\nu = \frac{\epsilon_L}{2} = 0$ , os polos das funções  $\Gamma(-s)$  e  $\Gamma(-\frac{s}{2})$  estão à direita do caminho de integração enquanto que os polos de  $\Gamma(1 + \frac{s}{2})$  estão à esquerda. Portanto, a integral acima é bem comportada e podemos tomar  $\epsilon_L = 0$  no termo de correção presente em (5.85).

A fim de realizarmos a expansão assintótica da integral em  $s$  acima no limite  $\sigma'^{-1} \propto L \rightarrow \infty$ , consideraremos uma integral mais geral do tipo:

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C h(s) z^s ds, \quad (5.89)$$

com:

$$h(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s) \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \beta_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \beta_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - \alpha_j s)}, \quad (5.90)$$

onde  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são números reais positivos enquanto que  $a_j$  e  $b_j$  são números complexos tais que os polos de  $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)$  e  $\Gamma(b_j - \beta_j s)$  possam ser separados por um caminho  $C$  do tipo mostrado na figura 5.4. Observe que isso de fato acontece na integral da eq. (5.88). Seguindo o método apresentado por Braaksma [87], considere  $\omega$  como um número real satisfazendo as condições:

$$\omega \neq \frac{1}{\alpha_j} \operatorname{Re}(a_j - 1 - l), \quad \text{para } j = 1, \dots, n \text{ e } l = 0, 1, \dots; \quad (5.91a)$$

$$\omega < \frac{1}{\beta_j} \operatorname{Re} b_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, m. \quad (5.91b)$$

Caso tenhamos

$$\delta_0 = \left( \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{j=n+1}^p \alpha_j \right) \pi > \frac{1}{2} \mu \pi > 0, \quad (5.92a)$$

$$|\arg z| < \delta_0 - \frac{1}{2} \mu \pi, \quad (5.92b)$$

com  $\mu$  definido em (5.55a), podemos escrever:

$$H(z) = Q_\omega(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} h(s) z^s ds, \quad (5.93)$$

onde  $Q_\omega(z)$  corresponde ao somatório de todos os resíduos de  $h(s)z^s$  nos polos  $s = (a_j - 1 - l)/\alpha_j$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) para os quais  $\omega < \operatorname{Re} s$ . Ou seja, o resultado (5.93) trata-se de uma expansão em potências de  $z$  sucessivamente menores, onde o segundo termo no lado direito dessa expressão é de ordem  $z^\omega$ . Quanto menor for o valor de  $\omega$  escolhido de modo a satisfazer as desigualdades

em (5.91a), maior será a ordem dessa expansão cujo valor será tão próximo da integral (5.89) quanto se queira no limite  $|z| \rightarrow \infty$ .

Passaremos então ao exemplo dado pela integral em (5.88) com  $\nu = 0$ , cujos parâmetros são identificados como  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2}$  e  $\beta_3 = \beta_4 = \frac{1}{2}$ , resultando em  $\delta_0 = \frac{3\pi}{2}$  e  $\mu = 2$ . Logo, vemos que as desigualdades (5.92) são satisfeitas com  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ . Além disso, devemos ter  $\omega < 0$  e  $\omega \neq \operatorname{Re} s_1$ , onde  $s_1 = 2(-1 - l)$  são os polos referentes à função  $\Gamma(1 + \frac{s}{2})$ . A partir da expansão de Laurent (5.70a), concluímos que os resíduos dessa função são dados por  $\frac{2(-1)^l}{l!}$ . Como estamos interessados apenas no termo mais significativo da expansão assintótica de (5.88), tomamos  $l = 0$  com  $-4 < \omega < -2$  e desse modo podemos escrever:

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(-\frac{s}{2})\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{s}{2})\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{s}{2})} z^s ds \stackrel{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2}{\Gamma(-\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})} z^{-2} + O(z^{-4}). \quad (5.94)$$

Identificando  $z = \frac{\pi^2 m^2 \sigma'^{-2}}{4}$  e usando a identidade (5.49), obtemos o limite  $L \rightarrow \infty$  da função (5.88):

$$\lim_{\sigma'^{-1} \rightarrow \infty} g_0^{(\tau)}(\sigma'^2) \approx -\frac{4}{\pi^4} (\sigma'^{-1})^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m \tau) m^{-4}. \quad (5.95)$$

Portanto, concluímos que a função (5.88) tende a zero para valores grandes de  $L$  e podemos de fato considerá-la como uma correção devido ao tamanho finito do sistema. Na figura 5.5, temos o gráfico com as curvas dessa função e da assíntota calculada acima em condições de contorno periódicas ( $\tau = 0$ ). O gráfico inserido mostra mais detalhadamente a aproximação entre as curvas no limite  $\sigma'^{-1} \rightarrow \infty$ . A principal diferença entre os termos de correção das teorias massiva e não-massiva é que, neste último caso, a oscilação está ausente para  $L$  suficientemente grande. A função  $g_0^{(\tau=0)}(\sigma'^2)$  decresce para  $\sigma'^{-1}$  variando de 0 até aproximadamente 1, crescendo monotonicamente a partir desse ponto e tendendo assintoticamente ao eixo das abscissas.

O limite  $L \rightarrow 0$  da função de correção pode ser obtidos através de um procedimento semelhante ao executado na obtenção do mesmo limite da função (5.52). Começamos então pelas condições de contorno periódicas ( $\tau = 0$ ). Na expressão dada em (5.88), realizamos a mudança de variável  $s \rightarrow 2s$  e usamos a fórmula (5.38) e a representação (5.63) para a função Zeta de Riemann logo após a comutação do somatório com a integral, resultando em:

$$g_0^{(\tau=0)}(\sigma'^2) = \frac{2^{-\frac{1}{2}} \pi}{\Gamma(\frac{1}{4})} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{[\Gamma(-s)]^2 \Gamma(\frac{1}{2}-s) \Gamma(1+s)}{\Gamma(\frac{3}{4}+s) \Gamma(\frac{3}{2}+s)} \zeta(-4s) \left( \frac{\pi^4 \sigma'^{-4}}{64} \right)^s ds, \quad (5.96)$$

onde devemos ter a restrição  $-1 < c' < -\frac{1}{4}$  para garantir a validade da comutação da integral com o somatório. Além dos polos mostrados na figura 5.4, o integrando acima possui os polos  $s = -1 - l$ , sendo  $l$  um número inteiro não-negativo. No entanto, esses últimos polos não contribuirão quando a integral for computada ao longo do caminho fechado  $C \cup C'$  da figura 5.4. Portanto, o teorema dos resíduos levará em consideração apenas os polos à direita de  $C$  e

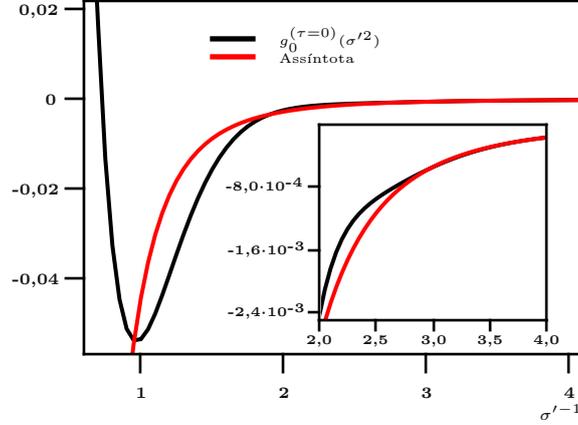


Figura 5.5: Gráfico da função de correção do tamanho finito na teoria não-massiva. O gráfico menor inserido corresponde às mesmas curvas com os eixos reescalados para melhor visualização do limite  $\sigma'^{-1} \rightarrow \infty$ .

chegaremos a uma expansão semelhante a (5.72):

$$\begin{aligned}
g_0^{(\tau=0)}(\sigma'^2) = \frac{2^{-\frac{1}{2}}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \left\{ \frac{1}{4} \frac{[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)]^2 [\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} x^{-\frac{1}{4}} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p!)^2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) \Gamma(1+s) \zeta(-4s)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+s\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)} x^s \right]_{s=p} \right. \\
+ 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\psi(p+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right) \Gamma(1+p) \zeta(-4p)}{(p!)^2 \Gamma\left(\frac{3}{4}+p\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)} x^p \\
\left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p [\Gamma\left(-\frac{1}{2}-p\right)]^2 \Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right) \zeta(-2-4p)}{p! \Gamma\left(\frac{5}{4}+p\right) \Gamma(2+p)} x^{\frac{1}{2}+p} \right\}, \quad (5.97)
\end{aligned}$$

onde colocamos  $x = \frac{\pi^4 \sigma'^{-4}}{64}$  com o intuito de abreviar a equação. No limite  $\sigma'$  tendendo a zero, consideramos apenas as contribuições singulares do resultando acima. Logo, após usarmos a fórmula (5.49), obtemos:

$$\lim_{\sigma'^{-1} \rightarrow 0} g_0^{(\tau=0)}(\sigma'^2) \approx \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} (\sigma'^{-1})^{-1} + 2 \ln \sigma'^{-1} + O(\sigma'^0). \quad (5.98)$$

Em condições de contorno antiperiódicas ( $\tau = \frac{1}{2}$ ), podemos usar o mesmo procedimento empregado na dedução de (5.96). A única diferença está na representação da função Zeta, que será agora substituída por aquela dada em (5.75). Portanto, reescrevemos (5.88) como:

$$g_0^{(\tau=\frac{1}{2})}(\sigma'^2) = -\frac{2^{-\frac{1}{2}}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{[\Gamma(-s)]^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) \Gamma(1+s)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+s\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)} \zeta(-4s) (1-2^{1+4s}) x^s ds, \quad (5.99)$$

com  $x = \frac{\pi^4 \sigma'^{-4}}{64}$ . Observamos que o ponto  $s = -\frac{1}{4}$  não constitui mais um polo do integrando acima. Desse modo, não teremos uma contribuição do tipo  $x^{-\frac{1}{4}}$  presente na série (5.97), restando apenas o próximo termo singular com divergência logarítmica. Ou seja:

$$\lim_{\sigma'^{-2} \rightarrow 0} g_0^{(\tau=\frac{1}{2})}(\sigma'^2) \approx 2 \ln \sigma'^{-1} + O(\sigma'^0). \quad (5.100)$$

Comparando os resultados (5.98) e (5.100) com os correspondentes limites (5.73) e (5.77) calculados na teoria massiva, notamos os mesmos tipos de singularidades. Podemos então afirmar que ambas as formulações da teoria com campos massivos e não-massivos são equivalentes quanto ao limite  $L \rightarrow 0$ . Na seção 3.6, usamos essa equivalência para concluir que a conjectura fenomenológica sobre valores pequenos para a variável de escala  $\frac{L}{\xi}$  não constitui uma regra para caracterizar o crossover dimensional. Ao invés disso, é o confinamento do campo a regiões cada vez menores ( $L \rightarrow 0$ ) entre as superfícies o responsável por esse comportamento singular. Quando o confinamento é realizado ao longo do eixo competitivo, as mesmas singularidades também se manifestam, apesar dos efeitos à longa distância  $L \rightarrow \infty$  terem uma natureza completamente distinta, conforme vimos nas figuras 5.3 e 5.5. Logo, as variáveis de escala  $\frac{L}{\sqrt{c\xi_{L4}}}$  e  $\frac{L}{\sqrt{c\xi_{L2}}}$  não estão relacionadas com o crossover dimensional, sendo caracterizado apenas por valores pequenos para  $L$ . Desde que evitemos tais valores, podemos prosseguir com o cálculo perturbativo dos expoentes críticos.

## 5.7 Regularização em 2 loops

De agora em diante, voltaremos a nossa atenção para a teoria massiva na qual as integrais de Feynman em ordens mais elevadas no número de loops serão calculadas. Por enquanto, consideraremos apenas as contribuições em 2 loops para as funções de vértice de 2 e 4 pontos. A partir do propagador livre dado em (5.14), podemos expressar o análogo das integrais  $I_4^{(\tau)}$  e  $D_3^{(\tau)}$  em termos de (5.17) respectivamente na seguinte forma:

$$I_4^{(\tau)}(j, j_3, k, k_3; \mu, r) = \mu^{-\epsilon_L r} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{I_2^{(\tau)}(q + k_3, l + j_3; \mu, r)}{[r^4(l - j + \tau)^4 + (q - k)^2 + 1][r^4(l + \tau)^4 + q^2 + 1]}, \quad (5.101a)$$

$$D_3^{(\tau)}(j, k; \mu, r) = \mu^2 r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{I_2^{(\tau)}(q, l; \mu, r)}{r^4(l - j + \tau)^4 + (q - k)^2 + 1}. \quad (5.101b)$$

O parâmetro de massa  $\mu$  é escolhido de acordo com o subespaço no qual aplicamos as condições de renormalização. Como neste trabalho estamos renormalizando as funções de vértice apenas no subespaço sem competição através das equações (4.50), tomaremos  $\mu = \mu_1$  com  $r = \sqrt{\frac{c}{\mu_1}} \sigma \propto \frac{\sqrt{c\xi_{L2}}}{L}$ . Conforme mencionamos na introdução, a renormalização ao longo do eixo competitivo

será apresentada posteriormente. Portanto estamos interessados na regularização dimensional das seguintes quantidades:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu_1, r) = I_4^{(\tau)}(j = j_3 = 0, k = k_3 = 0; \mu_1, r), \quad (5.102a)$$

$$D_3^{(\tau)}(\mu_1, r) = \left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_3^{(\tau)}(j = 0, k; \mu_1, r) \right|_{k=0}. \quad (5.102b)$$

O cálculo dessas quantidades passa por uma representação adequada da integral (5.17) com os momentos e quase-momentos externos arbitrários. Combinando os resultados (5.18) e (5.42), reescrevemos essa integral como:

$$I_2^{(\tau)}(j, k; \mu, r) = \mu^{-\epsilon_L} \frac{S_{d-1}}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \int_0^1 dx Z^{-\epsilon_L} \left[ \Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(0)}(X, Y) + \Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(1)}(\tau + xj, X, Y, r^{-2}Z) - \Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(2)}(\tau + xj, X, Y, r^{-2}Z) \right], \quad (5.103)$$

onde a partir das definições (5.20) e (5.25), escrevemos:

$$X = \frac{a^2 \gamma^2}{16\theta^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{4} (1-x)^2 (1-2x)^2 r^6 j^6 \{x(1-x) [k^2 + (3x^2 - 3x + 1)r^4 j^4] + 1\}^{-\frac{3}{2}}, \quad (5.104a)$$

$$Y = \frac{a^2}{4\theta} = 9x^2 (1-x)^2 r^4 j^4 \{x(1-x) [k^2 + (3x^2 - 3x + 1)r^4 j^4] + 1\}^{-1}, \quad (5.104b)$$

$$Z = r^2 \theta^{\frac{1}{2}} = \{x(1-x) [k^2 + (3x^2 - 3x + 1)r^4 j^4] + 1\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.104c)$$

Apesar da notável complexidade resultante da substituição de (5.103) nas integrais (5.101), podemos de fato extrair as singularidades dimensionais presentes em (5.102). Segue então desse ponto a necessidade de encontrarmos uma representação bastante conveniente para as funções  $\Sigma_\nu^{(i)}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) definidas em (5.43). No apêndice E, representaremos tais funções em termos de integrais de Mellin-Barnes e desse modo poderemos tratar as expressões resultantes seguindo o procedimento usual de regularização das integrais de Feynman. Os resultados dessa técnica são listados nas eqs. (E.26) e (E.31):

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu_1, r) = \mu_1^{-2\epsilon_L} \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left[ 1 - \frac{3}{2}\epsilon_L + i_c \epsilon_L + 2[i_2]_1 \epsilon_L + \Sigma_0^{(\tau)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \epsilon_L \right], \quad (5.105a)$$

$$D_3^{(\tau)}(\mu_1, r) = -\mu_1^{-2\epsilon_L} \frac{1}{8\epsilon_L} (1 + j_c), \quad (5.105b)$$

Observe que na segunda expressão acima consideramos apenas o primeiro termo da expansão, pois estamos interessados apenas em calcular  $\eta_{L2}$  até a primeira ordem  $\epsilon_L^2$ . As constantes  $i_c$  e

$j_c$  são calculadas a partir das fórmulas:

$$i_c = \frac{\sqrt{2\pi}}{2 [\Gamma(\frac{1}{4})]^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{3n}{2}) \Gamma(\frac{3}{4} + \frac{3n}{2})}{(2n)!n!} 2^n \int_0^1 dx \int_0^1 dy [x(1-x)]^{\frac{n}{2}} (1-2x)^{2n} \times \\ \times y(1-y)^{\frac{3n}{2}-1} \left\{ w_n(x, y) - \frac{\pi^{-\frac{3}{2}}}{2} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2 \delta_{n,0} \right\}, \quad (5.106a)$$

$$j_c = \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{3n}{2}) \Gamma(\frac{3}{4} + \frac{3n}{2})}{(2n)!n!} 2^n \int_0^1 dx \int_0^1 dy [x(1-x)]^{\frac{n}{2}} (1-2x)^{2n} \times \\ \times y(1-y)^{\frac{3n}{2}} w_n(x, y) - 1, \quad (5.106b)$$

dada a definição:

$$w_n(x, y) = [1 - 3(1-y)x(1-x)]^{-\frac{1}{4} - \frac{3n}{2}} \times \\ \times F\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}, \frac{1}{4} + \frac{3n}{2}; 1 + 2n; 1 - \frac{9x(1-x)(1-y)}{1 - 3(1-y)x(1-x)}\right). \quad (5.107)$$

As integrais em  $x$  e  $y$  acima resultam das parametrizações de Feynman e são relativamente fáceis de calcular numericamente. Usando a rotina **NIntegrate** do software Mathematica [88], obtemos resultados com a precisão desejada. Os somatórios em  $n$ , por sua vez, possuem uma convergência rápida e são calculados com apenas algumas dezenas de iterações. Para uma precisão de dez algarismos significativos, obtemos os seguintes valores:

$$i_c = -0,1161123374; \quad (5.108a)$$

$$j_c = -0,06116214977. \quad (5.108b)$$

As séries representadas por  $i_c$  e  $j_c$  apresentam uma vantagem em relação às integrais obtidas por Diehl e Shpot [77, 78] necessárias também ao cálculo das integrais de 2 loops no espaço das coordenadas, conforme o realizado pelos autores. O integrador do Mathematica falha em calcular tais integrais, obrigando-os a recorrer a uma aproximação baseada na análise assintótica do integrando. A estimativa de exatidão desses resultados é de quatro algarismos e aqui teremos condições de checar a veracidade dessa afirmação quando calcularmos os expoentes críticos.

Comparando o resultado (5.105a) com o análogo (4.61) quando  $m = 1$ , podemos afirmar novamente que a aproximação ortogonal é bem sucedida na obtenção da divergência dominante da contribuição em 2 loops para a função de vértice de 4 pontos. A diferença aparece apenas em ordem de  $\epsilon_L^{-1}$  devido à presença de  $i_c$  e do termo de correção do tamanho finito. Com relação ao termo de correção, um resultado diferente é esperado devido ao fato da restrição espacial estar no eixo competitivo e já podemos antecipar que ele não contribuirá para o cálculo dos expoentes críticos, conforme vimos nos dois capítulos anteriores. Por outro lado,  $i_c$  fará parte

do resultado para os expoentes e podemos usar  $-\frac{3}{2} + 2[i_2]_1 \approx -0,32$  para calcularmos um erro relativo de aproximadamente 26% entre os coeficientes de  $\epsilon_L^{-1}$  da aproximação ortogonal e do nosso resultado exato. O mesmo tipo de comparação entre (5.105b) e (4.62) nos mostra que o erro relativo da aproximação ortogonal é de apenas 6,1% na divergência dominante do diagrama de 2 loops que contribui para a função de vértice de 2 pontos.

## 5.8 Cálculo dos expoentes críticos

Uma vez calculadas as integrais de Feynman, procedemos à obtenção das funções de Wilson, ponto fixo e expoentes críticos. As constantes de renormalização envolvidas nas definições das funções de Wilson são expressas em termos de expansões em potências da constante de acoplamento renormalizada e adimensionalizada, conforme podemos ver nas eqs. (4.8). Como estamos considerando apenas o subespaço não-competitivo, temos o índice  $n = 1$  e calcularemos apenas os expoentes críticos associados a esse subespaço. Os coeficientes  $a_{i1}$ ,  $b_{i1}$  e  $c_{i1}$  dessas expansões são calculados a partir das fórmulas (3.58), onde as integrais  $I_2^{(\tau)}$ ,  $I_4^{(\tau)}$  e  $D_3^{(\tau)}$  lá presentes são substituídas pelas correspondentes da seção anterior. Lembramos também que a contribuição diagramática de três loops não foi computada e por isso o coeficiente  $b_{31}$  não fará parte da expansão perturbativa. Portanto, substituindo os resultados (5.51) e (5.105) nas expressões (3.58), calculamos:

$$a_{11} = \frac{N+8}{6\epsilon_L} \left[ 1 - \epsilon_L + [i_2]_1 \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right], \quad (5.109a)$$

$$a_{21} = \left( \frac{N+8}{6\epsilon_L} \right)^2 - \frac{4N^2 + 73N + 298}{72\epsilon_L} + \frac{N^2 + 16N + 64}{18\epsilon_L} \left[ [i_2]_1 + \frac{1}{2} \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right] - \frac{5N+22}{18\epsilon_L} i_c + \frac{N+2}{72\epsilon_L} j_c, \quad (5.109b)$$

$$b_{21} = -\frac{N+2}{144\epsilon_L} (1 + j_c), \quad (5.109c)$$

$$c_{11} = \frac{N+2}{6\epsilon_L} \left[ 1 - \epsilon_L + [i_2]_1 \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right], \quad (5.109d)$$

$$c_{21} = \frac{N^2 + 7N + 10}{36\epsilon_L^2} - \frac{4N^2 + 31N + 46}{72\epsilon_L} + \frac{N^2 + 7N + 10}{18\epsilon_L} \left[ [i_2]_1 + \frac{1}{2} \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right] - \frac{N+2}{12\epsilon_L} i_c. \quad (5.109e)$$

Inserindo os coeficientes  $a_{11}$  e  $a_{21}$  na função beta de Wilson (4.15a), obtemos:

$$\beta_1(u) = -\epsilon_L u + \frac{N+8}{6} \left[ 1 - \epsilon_L + [i_2]_1 \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right] u^2 - \left( \frac{3N+14}{12} + \frac{5N+22}{9} i_c - \frac{N+2}{36} j_c \right) u^3. \quad (5.110)$$

O ponto fixo  $u_\infty$  no regime ultravioleta é obtido através da equação  $\beta_1(u_\infty) = 0$ . Neste caso, procuramos apenas por uma solução na qual  $u_\infty \rightarrow 0$  quando  $\epsilon_L \rightarrow 0$ . Desse modo, chegamos a:

$$u_\infty = \frac{6\epsilon_L}{N+8} \left\{ 1 + \left[ \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + \frac{4(5N+22)}{(N+8)^2} i_c - \frac{N+2}{(N+8)^2} j_c + 1 - [i_2]_1 - \frac{1}{2} \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right] \epsilon_L \right\} \quad (5.111)$$

A substituição dos coeficientes  $b_{21}$ ,  $c_{11}$  e  $c_{21}$  nas demais funções de Wilson (4.15b-c) resulta em:

$$\gamma_{\Phi(1)}(u) = \frac{N+2}{72} (1+j_c) u^2, \quad (5.112a)$$

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2(1)}(u) = \frac{N+2}{6} \left[ 1 - \epsilon_L + [i_2]_1 \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right] u - \frac{N+2}{12} (1+2i_c) u^2. \quad (5.112b)$$

Observe que escrevemos apenas o primeiro termo da expansão de  $\gamma_{\Phi(1)}(u)$  pois o coeficiente  $b_{31}$ , necessário à contribuição de ordem mais elevada, está ausente. Substituindo o ponto fixo  $u_\infty$  na primeira das expressões anteriores, calculamos o expoente crítico:

$$\eta_{L2} = \gamma_{\Phi(1)}(u_\infty) = \frac{N+2}{2(N+8)^2} (1+j_c) \epsilon_L^2. \quad (5.113)$$

Fazendo o mesmo com a segunda expressão, temos:

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2(1)}(u_\infty) = \frac{N+2}{N+8} \epsilon_L \left\{ 1 + \left[ \frac{6N+18}{(N+8)^2} + \frac{14N+40}{(N+8)^2} i_c - \frac{N+2}{(N+8)^2} j_c \right] \epsilon_L \right\}. \quad (5.114)$$

O expoente  $\nu_{L2}$  é computado através da equação (4.16b), na qual realizamos uma expansão até ordem  $\epsilon_L^2$ , fornecendo o resultado:

$$\nu_{L2} = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)} \epsilon_L + \frac{N+2}{8(N+8)^3} [N^2 + 23N + 60 + 4(7N+20)i_c - (N-4)j_c] \epsilon_L^2. \quad (5.115)$$

Os demais expoentes podem ser obtidos a partir de  $\eta_{L2}$  e  $\nu_{L2}$  através das leis de escala dadas em (4.17). Lembramos que nesse caso, só estamos computando os expoentes resultantes do

escalamento no subespaço sem competição. Então, realizando os cálculos até ordem  $\epsilon_L^2$ , obtemos a seguinte lista:

$$\gamma_{L2} = 1 + \frac{N+2}{2(N+8)}\epsilon_L + \frac{(N+2)}{4(N+8)^3} [N^2 + 22N + 52 + 4(7N+22)i_c - 2(N+2)j_c] \epsilon_L^2, \quad (5.116a)$$

$$\alpha_{L2} = \frac{4-N}{2(N+8)}\epsilon_L - \frac{N+2}{4(N+8)^3} [N^2 + 30N + 56 + 8(7N+22)i_c - 2(N-4)j_c] \epsilon_L^2, \quad (5.116b)$$

$$\delta_{L2} = 3 + \epsilon_L + \frac{1}{2(N+8)^2} [N^2 + 14N + 60 - 2(N+2)j_c] \epsilon_L^2, \quad (5.116c)$$

$$\beta_{L2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(N+8)}\epsilon_L + \frac{N+2}{2(N+8)^3} [2N+1 + (7N+22)i_c + 3j_c] \epsilon_L^2. \quad (5.116d)$$

As constantes  $i_c$  e  $j_c$  funcionam como correções para os expoentes críticos fornecidos pela aproximação ortogonal. Podemos observar então que se tomarmos  $i_c = j_c = 0$ , os expoentes calculados em (5.113), (5.115) e (5.116) serão respectivamente iguais a (4.44), (4.46) e (4.47). Nossas análises ainda não abrangem o eixo competitivo sobre o qual obteríamos os expoentes  $\eta_{L4}$  e  $\nu_{L4}$ . No entanto, temos fortes razões para acreditar que as relações  $\eta_{L4} = 2\eta_{L2}$  e  $\nu_{L2} = 2\nu_{L4}$  estabelecidas em (4.44) e (4.46) como uma consequência da aproximação ortogonal não são satisfeitas ordem a ordem na expansão em potências de  $\epsilon_L$ . Comparando novamente os expoentes calculados nesta seção com aqueles da seção 4.4, vemos que todas as correções ocorrem em ordem  $\epsilon_L^2$ . Portanto, esperamos que a primeira das relações anteriores não seja satisfeita enquanto que a segunda delas seja assegurada apenas para as duas primeiras ordens  $\epsilon_L^0$  e  $\epsilon_L^1$ . Pelo mesmo motivo, a igualdade entre os expoentes com diferentes índices  $L2$  e  $L4$  listados em (4.47) deve falhar em  $O(\epsilon_L^2)$ . Ao que nos consta, não existem razões físicas para que a susceptibilidade, magnetização e inclusive o calor específico possuam o mesmo comportamento crítico nos dois subespaços quando consideramos todas as peculiaridades de um sistema competitivo em um cálculo exato.

Com o intuito de estabelecer uma comparação entre os resultados obtidos por DS, pela aproximação ortogonal (AO) e pelo nosso cálculo exato (CE), consideremos os coeficientes de  $\epsilon_L^2$  para cada uma das expansões realizadas pelos diferentes métodos. Por exemplo, a partir de (4.44) e (5.113), construímos os coeficientes:

$$C^{(\eta_{L2})} = \frac{N+2}{2(N+8)^2} \text{ e } C^{(\nu_{L2})} = \frac{N+2}{2(N+8)^2}(1+j_c),$$

para AO e CE, respectivamente. A partir da eq. (61) da referência [78], escrevemos:

$$C^{(\eta_{L2})} = \frac{N+2}{(N+8)^2} \frac{2}{7} j_\phi(1),$$

para o método de DS, onde  $j_\phi(1) = 1,642(9)$ . Os demais coeficientes são construídos de forma semelhante, sendo também listados na tabela 2 da ref. [78]. Na tabela 5.1, listamos todos

Coeficientes	Método			Erro relativo (%)	
	CE	DS	AO	DS-CE	AO-CE
$C^{(\eta_{L2})}$	0,0173859	0,0173757	0,0185185	0,59	6,5
$C^{(\nu_{L2})}$	0,0366648	0,037113	0,0432099	1,2	18
$C^{(\gamma_{L2})}$	0,063681	0,065533	0,0771605	2,9	21
$C^{(\alpha_{L2})}$	-0,0614146	-0,062429	-0,0895062	1,7	46
$C^{(\delta_{L2})}$	0,465228	—	0,462963	—	0,49
$C^{(\beta_{L2})}$	-0,00113322	-0,00155	0.00617284	36,8	645

Tabela 5.1: Coeficientes de segunda ordem das expansões em  $\epsilon_L$  para os expoentes críticos. As colunas DS-CE e AO-CE correspondem respectivamente aos erros relativos entre os métodos DS e AO com relação aos nossos resultados.

esses coeficientes para o modelo ANNNI com  $N = 1$ . Nas duas últimas colunas computamos os erros relativos com relação aos nossos resultados. A discrepância entre o resultado de DS e o nosso para  $C^{(\eta_{L2})}$  ocorre a partir do quarto algarismo significativo, mostrando uma boa concordância com a estimativa realizada em [78]. Entretanto, os demais coeficientes apresentam diferenças mais acentuadas chegando a um máximo de 36% para  $C^{(\beta_{L2})}$ . A principal razão dessa discordância está nas leis de escala utilizadas por DS, correspondendo àquelas deduzidas por Hornreich, Luban e Shtrikman [66]. São elas:

$$\gamma_L = (4 - \eta_{L4})\nu_{L4} = (2 - \eta_{L2})\nu_{L2}, \quad (5.117a)$$

$$\alpha_L = 2 - m\nu_{L4} - (d - m)\nu_{L2}, \quad (5.117b)$$

$$\beta_L = \frac{1}{2}(2 - \alpha_L - \gamma_L), \quad (5.117c)$$

$$\gamma_L = \beta_L(\delta_L - 1). \quad (5.117d)$$

Em contraste com as eqs. (4.17) atribuídas a Leite [75], as leis de escala acima não levam em consideração o reescalamamento dos momentos de forma independente em cada subespaço. Note a ausência dos índices do subespaço nos expoentes  $\alpha_L$ ,  $\beta_L$ ,  $\gamma_L$  e  $\delta_L$ . Além disso, as leis de escala de Leite são as únicas que permitem o tratamento de sistemas isotrópicos ( $d = m$ ).

A aproximação ortogonal também apresenta uma diferença maior para  $C^{(\beta_{L2})}$ . De fato, a intensa dependência desse coeficiente em  $i_c$  através do fator de proporcionalidade  $7N + 22$  é a causa do grande erro relativo (incluindo a mudança de sinal) entre os dois métodos, apesar do valor relativamente pequeno de  $i_c$ . Por outro lado,  $C^{(\delta_{L2})}$  depende mais fracamente de  $j_c$  e o erro associado é de apenas 0,49%.

O modelo ANNNI em três dimensões é de grande interesse experimental e computacional. Portanto, na tabela 5.2, mostramos os expoentes críticos calculados para  $d = 3$  ( $\epsilon_L = \frac{3}{2}$ ) e  $m = 1$  tanto pelos métodos teóricos CE, AO e DS quanto por simulações de Monte Carlo (SMC). Podemos observar agora uma maior proximidade entre os resultados de DS e os nossos.

	$\eta_{L2}$	$\nu_{L2}$	$\gamma_{L2}$	$\alpha_{L2}$	$\delta_{L2}$	$\beta_{L2}$
CE	0,0391182	0,707496	1,39328	0,111817	5,54676	0,24745
DS	0,0391183	0,709	1,397	0,11	—	0,247
AO	0,0416667	0,722222	1,42361	0,0486111	5,54167	0,263889
SMC1	—	—	$1,40 \pm 0,06$	0,2	—	$0,19 \pm 0,02$
SMC2	—	—	$1,36 \pm 0,03$	$0,18 \pm 0,02$	—	$0,238 \pm 0,005$
SMC3	—	0,63	1,384	0,195	—	0,271
DS-CE (%)	0,0	0,21	0,27	1,6	—	0,18
AO-CE (%)	6,5	2,1	2,2	57	0,092	6,6

Tabela 5.2: Expoentes críticos obtidos teoricamente (CE, DS e AO) e através de simulações de Monte Carlo (SMC) apresentadas por três fontes diferentes: SMC1, SMC2 e SMC3 para as referências [92], [91] e [93], respectivamente. As linhas DS-CE e AO-CE correspondem novamente aos erros relativos (%) dos resultados de DS e AO em relação aos nossos.

O erro para a maior parte dos expoentes não passa de 1%, chegando a um máximo de 1,6% para  $\alpha_{L2}$ . Semelhantemente, a aproximação ortogonal também apresenta menos discrepâncias, com exceção de  $\alpha_{L2}$  que possui um erro de 56%. Esse comportamento já era esperado, pois as expansões em  $\epsilon_L$  fornecidas pelos três métodos são idênticas (excetuando  $\alpha_{L2}$ ) nas duas primeiras ordens em  $\epsilon_L$ . Outra característica exibida pela aproximação ortogonal é a sua tendência em sobre-estimar os expoentes  $\eta_{L2}$  e  $\nu_{L2}$ , conforme podemos concluir da tabela acima para o sistema anisotrópico uniaxial, como também das análises de Leite apresentadas na referência [90] usando um cálculo exato das integrais de Feynman para o sistema isotrópico ( $d = m$ ).

Com relação às estimativas dadas por SMC, podemos afirmar que em geral existe uma melhor concordância com os métodos de CE e DS. Principalmente no que diz respeito à comparação dos resultados para os expoentes  $\gamma_{L2}$  e  $\beta_{L2}$  apresentados por Pleimiling e Henkel [91] (SMC2), cujas margens de erro fornecem intervalos de valores mais próximos dos obtidos teoricamente. Em simulações mais recentes realizadas por Murtazaev e Ibaev (SMC3),  $\gamma_{L2}$  aproxima-se mais dos nossos resultados enquanto que  $\beta_{L2}$  está mais próximo do expoente fornecido pela AO. Devido aos desvios relativamente grandes nos resultados para  $\beta_{L2}$ , somos levados a crer que as melhores estimativas dadas pelas três simulações correspondem aos expoentes  $\alpha_{L2}$  e  $\gamma_{L2}$ . Entretanto, o expoente  $\alpha_{L2}$  é bastante diferente dos resultados teóricos. Provavelmente, a origem dessa diferença está na pouca confiabilidade da expansão (5.116b) em virtude da série já começar em ordem  $\epsilon_L$  com o parâmetro de expansão relativamente alto ( $\epsilon_L = 1,5$ ).

Por se tratarem de estimativas com precisão de poucos algarismos significativos, as simulações de Monte Carlo não podem ser usadas para atestar quais dos dois métodos (CE ou DS) fornecem melhores valores para os expoentes críticos. No entanto, é importante ressaltarmos as principais diferenças existentes entre essas duas formas de analisar um sistema competitivo

na região crítica de Lifshitz. No método de Diehl e Shpot, a regularização das integrais de Feynman da teoria não-massiva é realizada no espaço das coordenadas através da utilização de funções testes [77]. Os expoentes críticos são então expressos em termos de integrais impróprias que só podem ser calculadas (exceto os casos  $m = 2, 6$ ) aproximadamente. Por outro lado, utilizamos neste trabalho o método de Nemirovsky e Freed adaptado ao eixo de competição e assim toda a análise da teoria com campos massivos foi realizada no espaço dos momentos. As integrais de Feynman foram regularizadas através de uma representação adequada em termos de integrais de Mellin-Barnes e as singularidades foram removidas com a aplicação das condições de renormalização no subespaço sem competição. Desse modo, somos capazes de calcular os expoentes críticos a partir de integrais paramétricas cujos resultados podem ser obtidos com a precisão numérica desejada. Consequentemente, não nos deparamos com as mesmas dificuldades encontradas por Diehl e Shpot. A formulação não-massiva também foi empregada em ordem 1 loop, de onde pudemos estabelecer uma equivalência com a teoria massiva durante o crossover dimensional, induzido unicamente por valores pequenos do tamanho finito  $L$ . Embora este trabalho ainda não esteja completo, podemos considerá-lo como um avanço no sentido da construção de uma teoria (com ou sem massa) totalmente consistente no espaço dos momentos e com resultados *exatos* para as singularidades das integrais de Feynman.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Os expoentes críticos para sistemas delimitados por superfícies planas e paralelas foram calculados até ordens de pelo menos 2 loops usando a descrição fenomenológica da teoria de campos escalares. O comprimento  $L$  referente à separação entre as superfícies foi introduzido nas nossas análises através das condições de contorno periódicas (*PBC*) ou antiperiódicas (*ABC*) impostas no parâmetro de ordem. Tanto a formulação massiva quanto a não-massiva da teoria foram empregadas nessas análises. Um fato já bem estabelecido no estudo de fenômenos críticos em sistemas infinitos é a independência dos observáveis físicos em relação a esses dois tipos de formulação, dando suporte à hipótese da universalidade. Mostramos portanto que essa equivalência ainda persiste em sistemas de tamanho finito com geometria de superfícies planas e paralelas através da obtenção dos mesmos valores para os expoentes críticos em ambas as formulações. Desse modo, pudemos estabelecer novos critérios para a determinação do crossover dimensional.

Dois tipos de sistemas foram considerados neste trabalho. No primeiro deles, tínhamos apenas interações ferromagnéticas (usando novamente a linguagem do magnetismo) enquanto que no segundo, o sistema apresentava um subespaço no qual as interações ferromagnéticas e antiferromagnéticas competem entre si, conforme ilustrado pelo modelo ANNNI.

Para o tratamento de sistemas sem competição, partimos de uma densidade lagrangiana escrita em termos do parâmetro de ordem  $\Phi$  com interação do tipo  $\Phi^4$  e simetria  $O(N)$ , onde  $N$  é o número de componentes de  $\Phi$ . Seguimos então com a extensão do procedimento empregado por Nemirovsky e Freed (NF), no qual computamos as funções de vértice 1PI de 2 e 4 pontos até ordens de 3 e 2 loops, respectivamente. Na formulação massiva da teoria, o comprimento de correlação  $\xi$  é mantido finito e todas as integrais de Feynman foram expressas em termos de uma parte singular (polos em  $\epsilon$ ) mais outro termo de correção dependente da variável de escala  $L/\xi$ . A parte singular corresponde à mesma obtida para um sistema infinito. Esse fato foi consistentemente confirmado ao observarmos que o termo de correção tende a zero no limite  $L/\xi \rightarrow \infty$ . O outro extremo do limite assintótico ( $L/\xi \rightarrow 0$ ) também foi analisado e pudemos checar o mesmo tipo de crossover dimensional relatado por NF em consequência da correção de tamanho finito ser proporcional a  $(L/\xi)^{-1}$  em *PBC* e a  $\ln(L/\xi)$  em *ABC*. No entanto, o

limite  $\xi \rightarrow \infty$  é inconsistente com a teoria massiva devido às divergências no infravermelho e as nossas análises restringiram-se apenas a  $L \rightarrow 0$ .

A fim de acessar a região  $L/\xi \rightarrow 0$  com  $L$  finito, recorremos à formulação não-massiva da teoria na qual já temos  $\xi = \infty$ . Novamente, as integrais de Feynman possuem uma parte singular mais um termo de correção dependente de  $L$ . Para  $L$  finito, mostramos que esse termo é regular e nenhum crossover dimensional acontece, em contraste com as previsões da conjectura de escalamento em tamanho finito quando  $L/\xi \rightarrow 0$ . Porém, no limite  $L \rightarrow 0$ , obtemos um comportamento similar ao do caso massivo, com o termo de correção variando respectivamente como  $L^{-1}$  e  $\ln L$  em *PBC* e *ABC*. Portanto, concluímos que o crossover dimensional decorre apenas de valores pequenos para  $L$ . Uma comparação entre *PBC* e *ABC* mostra que tais valores são ainda menores em *ABC*, sendo da mesma ordem de grandeza do parâmetro de rede do sistema. Mantendo  $L$  finito, obtemos os mesmos expoentes críticos de sistemas infinitos.

O segundo tipo de sistema de nosso interesse corresponde àqueles com interações competitivas exibindo um ponto crítico de Lifshitz (*PL*). Com a finalidade de calcular os expoentes críticos referentes à transição de fase em *PL*, consideramos novamente uma teoria de campos escalares com interação  $\Phi^4$  seguida de uma nova extensão do método de NF. Diferentemente de sistemas sem competição, as derivadas segundas do parâmetro de ordem ao longo do subespaço competitivo passam a ser necessárias para uma descrição satisfatória do problema na região crítica de Lifshitz. Já no subespaço não-competitivo, continuamos com os mesmos termos relevantes ao estudo de sistemas sem competição. Devido a essa anisotropia espacial, as funções de vértice escalam de forma distinta em cada subespaço, resultando em diferentes comprimentos de correlação  $\xi_{L2}$  e  $\xi_{L4}$ .

Existem duas maneiras de introduzirmos o tamanho finito no sistema. A mais simples delas consiste em tornar finita uma das dimensões ao longo do subespaço não-competitivo. Regularizamos as integrais de Feynman até ordens de 3 loops com auxílio da aproximação ortogonal e as expressamos em termos de uma parte singular (com polos em  $\epsilon_L$ ) mais outra regular, correspondendo aos termos de correção de tamanho finito. Os resultados decorrentes dessa análise são inteiramente equivalentes aos de sistemas sem competição tanto no que se refere à obtenção dos expoentes críticos quanto ao crossover dimensional. Desde que evitemos valores pequenos de  $L$ , podemos calcular os expoentes críticos em termos de expansões em  $\epsilon_L$ .

A outra maneira de analisarmos o tamanho finito em sistemas com competição consistiu em compactar uma das dimensões ao longo do subespaço competitivo. A fim de simplificar o nosso estudo, consideramos apenas o caso uniaxial. Nesse caso, as regras de Feynman foram modificadas para incluir a integração de quase-momentos quárticos ao longo do eixo competitivo. Com essa finalidade, buscamos um novo procedimento para representar de forma conveniente os somatórios nos quase-momentos. Como resultado, chegamos a representações dadas em termos de integrais de Mellin-Barnes, usualmente empregadas na análise de funções especiais. De posse dessas representações, fomos capazes de regularizar as integrais de Feynman de forma exata até ordem 2 loops e expressá-las novamente em termos de uma parte singular mais o termo de correção. Estudamos o termo de correção tanto na formulação massiva quanto na não-massiva e pudemos concluir que o crossover dimensional é novamente regido apenas por

valores pequenos para  $L$ . Evitada essa região, calculamos os expoentes  $\eta_{L2}$  e  $\nu_{L2}$  até ordem  $\epsilon_L^2$ .

Todos os demais expoentes foram calculados através das leis de escala no subespaço não-competitivo. Tais expoentes são escritos em termos de integrais paramétricas cujos valores numéricos podem ser calculados com a precisão desejada. Computamos então essas integrais com uma precisão de dez algarismos significativos e comparamos os nossos expoentes com os resultados apresentados pela aproximação ortogonal e por Diehl e Shpot [77, 78], além das estimativas fornecidas por simulações de Monte Carlo. Os resultados dessa comparação foram sumarizados nas tabelas 5.1 e 5.2.

Verificamos que o cálculo de  $\eta_{L2}$  em ordem  $\epsilon_L^3$  torna-se extremamente complicado. Isso mostra que mesmo para o caso uniaxial, essa técnica não é simples o suficiente para permitir uma solução geral em teoria de perturbação acima de 2 loops. Além disso, os expoentes ao longo dos eixos de competição não têm uma interpretação clara. No entanto, podemos inferir os seus valores ao extrapolarmos a analogia com sistemas sem competição, tomando o limite  $L \rightarrow \infty$ .

O nosso objetivo neste trabalho foi investigar como o confinamento de um campo escalar entre duas superfícies planas e paralelas pode alterar os valores dos expoentes críticos. Para isso, precisamos considerar apenas as condições de contorno periódicas e antiperiódicas. Outras restrições espaciais mais complexas, nas quais a invariância translacional é quebrada, são dadas pelas condições de contorno de Neumann (*NBC*) e Dirichlet (*DBC*). Também podemos ter condições mistas, nas quais aplicamos *NBC* em uma superfície e *DBC* na outra. Tais condições de contorno são mais condizentes com a realidade física de filmes finos (por exemplo), pois refletem um acoplamento diferente entre os spins das superfícies em relação à interação spin-spin no interior do sistema. Consequentemente, as superfícies terão uma temperatura crítica e uma resposta a um campo magnético externo diferentes do restante do sistema. Novos expoentes críticos seriam então introduzidos para descrever o comportamento da magnetização, susceptibilidade, calor específico, etc em cada superfície [70].

A fim de tratar todas essas peculiaridades, uma teoria de campo escalar aplicada na descrição fenomenológica desse tipo de sistema deve conter um parâmetro superficial  $c_0$  que acople com o campo  $\Phi^2$  nas superfícies. Novas divergências no ultravioleta surgirão com a quebra da invariância translacional e a renormalização de  $c_0$  absorverá parte dessas divergências. As demais divergências serão removidas por uma nova constante de renormalização multiplicativa aplicada nas funções de vértice quando calculadas nas superfícies. Desse modo, a teoria apresentará um novo tipo de escalamento, resultando em expoentes críticos e leis de escala diferentes nas superfícies [94–98]. A extensão de método de NF usando *NBC* e *DBC* até ordem de 2 loops e com o tipo de geometria considerada neste trabalho ainda resta para ser realizada. Tais análises ficarão portanto para futuros desenvolvimentos.

Podemos considerar também possíveis aplicações de *NBC* e *DBC* em sistemas competitivos exibindo pontos críticos de Lifshitz. Como uma forma de visualizarmos mais facilmente como isso pode ser realizado, consideremos um sistema uniaxial em um espaço tridimensional. Na configuração mais simples, na qual a dimensão compacta está ao longo do subespaço não-competitivo, uma das dimensões das superfícies delimitadoras estende-se ao longo do eixo de

competição enquanto a outra segue paralelamente ao subespaço sem competição. Portanto, entre os spins dessas superfícies, teremos os acoplamento ferro e antiferromagnético competindo entre si ao longo do eixo competitivo e apenas interações ferromagnéticas ao longo do subespaço sem competição. O parâmetro superficial  $c_0$  refletirá essa anisotropia através da sua dependência do subespaço sob consideração, resultando também em expoentes superficiais distintos para cada subespaço. Por outro lado, quando o tamanho finito está ao longo do eixo competitivo, ambas as superfícies estão ao longo do subespaço sem competição e teremos apenas um parâmetro  $c_0$  isotrópico.

Ao mencionarmos interações competitivas até o presente momento, nos referimos apenas a acoplamentos antiferromagnéticos  $J_2 < 0$  entre spins com seus segundos vizinhos intercalados por acoplamentos ferromagnéticos  $J_1 > 0$  entre spins mais próximos, compondo o modelo ANNNI. Podemos generalizar esse modelo ao incluir outra interação ferromagnética  $J_3 > 0$  entre terceiros vizinhos ao longo da mesma direção. Uma determinada combinação de valores para as razões  $-J_2/J_1$  e  $J_3/J_1$  origina uma região crítica de Lifshitz no diagrama de fases dentro da qual temos um ponto multicrítico conhecido agora como ponto de Lifshitz de terceiro caráter [99]. Se os acoplamentos  $J_2$  e  $J_3$  são estendidos a subespaços com respectivamente  $m_2$  e  $m_3$  dimensões de um sistema  $d$ -dimensional ( $d \geq m_2 + m_3$ ), teremos um sistema  $m_3$ -axial com um ponto de Lifshitz de terceiro caráter genérico e uma nova classe de universalidade caracterizada pelo conjunto de parâmetros  $(N, d, m_2, m_3)$ .

Esse procedimento pode ser estendido gradativamente para incluir um número  $L$  de acoplamentos  $J_1, J_2, \dots, J_L$  cujos sinais são alternados ( $J_1 > 0, J_2 < 0, J_3 > 0, \dots$ ), de modo que as interações ferro e antiferromagnéticas sejam intercaladas entre si [100–102]. A construção mais geral que podemos ter consiste em estender cada uma dessas interações  $J_i$  para um subespaço  $m_i$ -dimensional, onde  $\sum_{i=1}^L m_i = d$ . O sistema passará a ser portanto chamado de  $m_L$ -axial e com um ponto de Lifshitz de  $L$ -ésimo caráter genérico, cuja classe de universalidade é dada por  $(N, d, m_1, m_2, \dots, m_L)$ . Uma descrição fenomenológica em termos de campos escalares também pode ser aplicada a esses tipos de sistemas. Nesse caso, a região crítica de Lifshitz é tal que para um dado subespaço com  $m_i$  dimensões, o termo dinâmico não-nulo mais relevante na densidade lagrangiana corresponde a  $(\nabla_{m_i}^i \Phi)^2$ , resultando no propagador livre da teoria dado por:

$$G(k_1, k_2, \dots, k_L) = \left( \sum_{i=2}^L k_i^{2i} + k_1^2 + \mu^2 \right)^{-1}.$$

Observamos que as dimensões canônicas dos momentos de ordens mais elevadas foram redefinidas de modo que a expressão acima seja dimensionalmente consistente, conforme ilustramos no capítulo 4 para o caso particular  $L = 2$ .

O tratamento de sistemas  $m_L$ -axiais com tamanho finito pode ser vista como uma consequência natural das nossas análises para sistemas mais simples, a ser realizada posteriormente com o auxílio das formulações de Leite e Carvalho [90, 103, 104]. O primeiro caso a ser considerado é análogo ao realizado no capítulo 4 e segue sem grandes dificuldades. Começando com uma das dimensões finitas ao longo do subespaço sem competição  $m_1$ -dimensional e aplicando

$PBC$  e  $ABC$ , teremos o componente  $z$  do vetor  $k_1$  discreto (quase-momento). As integrais de Feynman envolvidas com o propagador anterior são regularizadas com o auxílio da aproximação ortogonal e o somatório nos quase-momentos restante desse procedimento pode ser identificado com a função térmica generalizada (3.34). Os expoentes críticos são então calculados em termos de expansões em potências de um novo parâmetro dimensional  $\epsilon_L = 4 + \sum_{i=2}^L [(i-1)/i]m_i - d$ .

Prosseguindo para um grau a mais de dificuldade, podemos fazer compacta uma das dimensões do segundo subespaço ( $i = 2$ ), no qual já existem interações competitivas. Nesse caso, é o componente  $z$  do vetor  $k_2$  que passa a ser discreto. Utilizando novamente a aproximação ortogonal, podemos resolver as integrais em todos os momentos contínuos para cada loop nos diagramas de Feynman e chegaremos a um somatório nos quase-momentos correspondente ao mesmo tipo de somatório (5.21) estudado no capítulo 5. Pelo menos para o caso particular em que  $m_2 = 1$ , podemos calcular os expoentes  $\eta_i$  e  $\nu_i$  perturbativamente em termos de  $\epsilon_L$ , com exceção de  $\eta_2$  e  $\nu_2$ , cujos métodos para a obtenção dos resultados em  $L = 2$  ainda restam para serem apresentados. Condições de contorno em subespaços com índice  $i > 2$  conduzem a somatórios bem mais complexos, cujas representações não dispomos no momento. Um dos nossos objetivos para trabalhos futuros consiste em também desenvolver novas representações para esses tipos de somatórios.

# Apêndice A

## Regularização Dimensional das Integrais de Feynman na Teoria Massiva

A regularização dimensional da contribuição de 1 loop para a função de vértice de 4 pontos já foi realizada em detalhes na seção 3.4 e aqui vamos fazer o mesmo para as integrais de ordem 2 e 3 loops. Começaremos pela integral (3.52), na qual podemos identificar  $I_2^{(\tau)}(q_1 + k', l_1 + j'; \mu, \sigma)$  no integrando. Ou seja:

$$I_4^{(\tau)}(k, j, k', j'; \mu, \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I_2^{(\tau)}(q + k', l + j'; \mu, \sigma)}{[(q - k)^2 + \sigma^2(l - j + \tau)^2 + \mu^2][q^2 + \sigma^2(l + \tau)^2 + \mu^2]}. \quad (\text{A.1})$$

Tomando os momentos e quase-momentos externos iguais a zero, obtemos:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu, \sigma) = \mu^{-2\epsilon} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I_2^{(\tau)}(q, l; \mu, \sigma)}{[q^2 + \sigma^2(l + \tau)^2 + \mu^2]^2}. \quad (\text{A.2})$$

A vantagem de termos identificado a integral (3.31) no integrando acima deve-se ao fato de já termos a regularização dela em (3.41). Portanto, podemos escrever:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu, \sigma) = \mu^{-2\epsilon} S_d \left[ \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{1}{[q^2 + r^2(l + \tau)^2 + 1]^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{[x(1-x)(q^2 + r^2\tau^2) + 1]^{\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{1}{2} F_{\frac{\epsilon}{2}, 2}^{(\tau)}(r) \right], \quad (\text{A.3})$$

onde definimos de forma generalizada:

$$F_{\alpha, \beta}^{(\tau)}(r) = \frac{1}{S_d} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{F_{\alpha}^{(\tau)}(q, l; r)}{[q^2 + r^2(l + \tau)^2 + 1]^{\beta}}, \quad (\text{A.4})$$

com  $F_\alpha^{(\tau)}$  definido em (3.42).

As singularidades (polos em  $\epsilon$ ) da integral (A.3) originam-se do primeiro termo, enquanto que o segundo produz apenas termos regulares (de ordem  $\epsilon^0$ ), podendo portanto ser desprezado na nossa análise. A fim de mostrarmos a regularidade desse termo, consideremos inicialmente a definição (3.42), juntamente com (3.38):

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(q, j; r) = 4r^{-\epsilon} \int_0^1 dx \sum_{m=1}^{\infty} \cos[2\pi m(\tau + jx)] \left[ \frac{\pi m}{r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left( 2\pi m r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1} \right). \quad (\text{A.5})$$

Podemos simplificar o resultado acima se tomarmos  $j = 0$ . Para  $x$  variando de 0 a 1, a função de Bessel e o termo com a raiz quadrada terão todos valores reais positivos. Já a função cosseno varia de  $-1$  a  $1$ . Logo, podemos estabelecer a desigualdade

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(q, j; r) < F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(q, j = 0; r). \quad (\text{A.6})$$

Além disso, o integrando é simétrico em torno de  $x = \frac{1}{2}$  e portanto chegamos ao resultado:

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(q, j = 0; r) = 8r^{-\epsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m\tau) \int_0^{\frac{1}{2}} dx \left[ \frac{\pi m}{r^{-1} \sqrt{x(1-x)q^2 + 1}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left( 2\pi m r^{-1} \sqrt{x(1-x)q^2 + 1} \right). \quad (\text{A.7})$$

No limite  $q \rightarrow \infty$ , escolhemos um parâmetro real  $\lambda \ll 1$  tal que ainda tenhamos  $\lambda q^2 \rightarrow \infty$ . A ideia é dividir os limites de integração em duas partes: na primeira consideramos os argumentos das funções até ordem  $x$  e, desde que  $r$  seja finito, podemos usar a expansão assintótica da função de Bessel na segunda parte:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(q, j = 0; r) = 8r^{-\epsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m\tau) \left[ \int_0^\lambda dx \left( \frac{\pi m}{r^{-1} \sqrt{xq^2 + 1}} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left( 2\pi m r^{-1} \sqrt{xq^2 + 1} \right) + \int_\lambda^{\frac{1}{2}} dx \left( \frac{\pi m}{r^{-1} \sqrt{x(1-x)q^2 + 1}} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \left. \times \sqrt{\frac{\pi}{4\pi m r^{-1} \sqrt{x(1-x)q^2 + 1}}} \exp \left( -2\pi m r^{-1} \sqrt{x(1-x)q^2 + 1} \right) \right]. \quad (\text{A.8})$$

O segundo termo pode ser desprezado no limite considerado, pois ele decai muito mais rapidamente que o primeiro termo. Realizando a mudança de variável  $y = 1 + xq^2$ , simplificamos o

resultado acima para:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(q, j = 0; r) = \frac{8r^{-\frac{\epsilon}{2}}}{q^2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m\tau) (\pi m)^{\frac{\epsilon}{2}} \int_1^{\infty} dy y^{-\frac{\epsilon}{4}} K_{\frac{\epsilon}{2}}(2\pi m r^{-1} y). \quad (\text{A.9})$$

Usando a identidade [68]

$$\int_1^{\infty} dx x^{-\frac{\nu}{2}} (x-1)^{\mu-1} K_{\nu}(a\sqrt{x}) = \Gamma(\mu) 2^{\mu} a^{-\mu} K_{\nu-\mu}(a), \quad (\text{A.10})$$

chegamos ao seguinte resultado:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(q, j = 0; r) = \frac{8r^{1-\frac{\epsilon}{2}}}{q^2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m\tau) (\pi m)^{\frac{\epsilon}{2}-1} K_{\frac{\epsilon}{2}-1}(2\pi m r^{-1}), \quad (\text{A.11})$$

que é notoriamente regular em  $\epsilon = 0$ . De uma forma mais geral, podemos usar a desigualdade (A.6) para estabelecer:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F_0^{(\tau)}(q, j; r) < \frac{8r}{q^2 + r^2 j^2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m\tau) (\pi m)^{-1} K_{-1}(2\pi m r^{-1}) \quad (\text{A.12})$$

Convém observar que no limite  $r^{-1} \rightarrow 0$ , não há como garantir que o primeiro membro da desigualdade acima é finito. Desse modo, para  $r$  finito, vemos que a integral na definição (A.4) não possui divergências no limite ultravioleta quando  $\alpha = 0$  e  $\beta = 2$ , podendo de fato ser desprezado em (A.3). Logo, escrevemos:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu, \sigma) = \mu^{-2\epsilon} S_d \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[q^2 + r^2(l+\tau)^2 + 1]^2 \left[q^2 + r^2\tau^2 + \frac{1}{x(1-x)}\right]^{\frac{\epsilon}{2}}} \quad (\text{A.13})$$

Introduzindo mais uma parametrização de Feynman através da identidade (2.79), reescrevemos o resultado anterior como:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu, \sigma) = \mu^{-2\epsilon} S_d \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma\left(2 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \\ \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{\left[q^2 + r^2(l+y\tau)^2 + y(1-y)r^2\tau^2 + y + \frac{1-y}{x(1-x)}\right]^{2+\frac{\epsilon}{2}}}. \quad (\text{A.14})$$

A integração no momento  $q$  é realizada com auxílio de (2.81), resultando em:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu, \sigma) = \mu^{-2\epsilon} S_d \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) S_{d-1} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \\ \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ r^2(l+y\tau)^2 + y(1-y)r^2\tau^2 + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{-\frac{1}{2}-\epsilon}. \quad (\text{A.15})$$

Usaremos a representação (3.36) da função térmica generalizada para colocar o somatório em  $l$  em um formato adequado para a regularização dimensional. Em seguida, usaremos a identidade (3.40) e a definição  $d = 4 - \epsilon$  de modo que possamos escrever:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu, \sigma) = \mu^{-2\epsilon} S_d^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right)}{2\epsilon\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \\ \times \left[ \Gamma(\epsilon) \left( y(1-y)\tau^2 + r^{-2}y + \frac{(1-y)r^{-2}}{x(1-x)} \right)^{-\epsilon} \right. \\ \left. + f_{\frac{1}{2}+\epsilon} \left( y\tau, \sqrt{y(1-y)\tau^2 + r^{-2}y + \frac{(1-y)r^{-2}}{x(1-x)}} \right) \right]. \quad (\text{A.16})$$

Note que o integrando possui um polo em  $y = 1$  quando  $\epsilon = 0$  devido ao termo  $(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1}$ . No entanto, o termo entre colchetes é regular em  $y = 1$ . Uma expansão de Taylor desse termo em torno de  $y = 1$  mostra que, a fim de obtermos os polos  $\epsilon^{-2}$  e  $\epsilon^{-1}$ , precisamos apenas do primeiro termo dessa expansão. Logo, após realizarmos a expansão em  $\epsilon$  e omitirmos os termos de ordem  $\epsilon^0$ , chegamos finalmente ao resultado:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu, \sigma) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{2\epsilon^2} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon f_{\frac{1}{2}}(\tau, r^{-1}) \right]. \quad (\text{A.17})$$

Passaremos agora à regularização dimensional da contribuição de ordem 2 loops da função de vértice de 2 pontos: a integral dada em (3.54). Novamente, podemos identificar a inserção de  $I_2^{(\tau)}$  no integrando de modo que podemos escrever:

$$D_3^{(\tau)}(k, j; \mu, r) = \mu^{2-2\epsilon} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I_2^{(\tau)}(q+k, l+j; \mu, r)}{q^2 + r^2(l+\tau)^2 + 1}. \quad (\text{A.18})$$

Substituindo o resultado (3.41), a expressão acima torna-se:

$$D_3^{(\tau)}(k, j; \mu, r) = \mu^{2-2\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left[ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{q^2 + r^2(l+\tau)^2 + 1} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\{x(1-x)[(q+k)^2 + r^2(l+j)^2] + 1\}^{\frac{\epsilon}{2}}} + S_d \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau)}(k, j; r) \right], \quad (\text{A.19})$$

onde usamos a definição (A.4). Depois de inserir mais um parâmetro de Feynman, resolver a integral no momento  $q$  e utilizar a identidade (3.40), semelhantemente ao que fizemos com a integral  $I_4^{(\tau)}$ , obtemos o seguinte resultado para a expressão anterior:

$$D_3^{(\tau)}(k, j; \mu, r) = \mu^{2-2\epsilon} S_d^2 \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \epsilon\right)}{2\sqrt{\pi}\epsilon\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \times \int_0^1 dy (1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ r^2[l - y(j - \tau)]^2 + y(1-y)[k^2 + r^2(j - \tau)^2] + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{\frac{1}{2}-\epsilon} \\ \left. + \frac{1}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau)}(k, j; r) \right\}. \quad (\text{A.20})$$

Nosso interesse é na derivada de  $D_3^{(\tau)}(k, j; \mu, r)$  com relação ao módulo quadrado do momento externo  $k$ . Na condição de renormalização (3.24b), tomamos o índice de quase-momento  $j = 0$  e derivamos apenas com relação a  $k^2$ , tomando em seguida  $k = 0$ . Lembrando que o momento está escalado com a massa  $\mu$  (ou seja,  $\frac{k}{\mu} \rightarrow k$ ), realizamos a derivação da seguinte forma:

$$D_3^{(\tau)'}(\mu, r) = \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_3^{(\tau)}(k, j = 0; \mu, r) \Big|_{k=0} \\ = -\mu^{-2\epsilon} S_d^2 \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)}{2\sqrt{\pi}\epsilon\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \left. \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ r^2(l + y\tau)^2 + y(1-y)r^2\tau^2 + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{-\frac{1}{2}-\epsilon} - \frac{1}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)'}(r) \right\}, \quad (\text{A.21})$$

onde usamos a propriedade  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  e definimos:

$$F_{\nu}^{(\tau)'}(r) = \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} F_{\nu, 1}^{(\tau)}(k, j = 0; r) \Big|_{k=0}. \quad (\text{A.22})$$

Empregando novamente a representação (3.36) para a função térmica generalizada no somatório em  $l$  de (A.21) e expandindo o argumento das funções  $\Gamma$  em  $\epsilon$  com a omissão dos termos de ordem  $\epsilon^1$ , chegamos a:

$$D_3^{(\tau)'}(\mu, r) = -\mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{4\epsilon} \left\{ (1-\epsilon) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \times \left[ y(1-y)\tau^2 + r^{-2}y + \frac{r^{-2}(1-y)}{x(1-x)} \right]^{-\epsilon} + \epsilon \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \left. \times f_{\frac{1}{2}+\epsilon} \left( y\tau, \sqrt{y(1-y)\tau^2 + r^{-2}y + \frac{r^{-2}(1-y)}{x(1-x)}} \right) - 2\epsilon F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)'}(r) \right\}. \quad (\text{A.23})$$

Esse último resultado pode ser simplificado ainda mais ao notarmos que o termo dependente de  $r$  pode ser calculado em  $\epsilon = 0$ . De fato, podemos, através da mesma argumentação empregada para eliminarmos  $F_{\frac{\epsilon}{2}, 2}^{(\tau)}(r)$  de (A.3), mostrar a regularidade de  $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(r)$  em  $\epsilon = 0$  quando  $r$  for finito. Além disso, a integral da função  $f_{\frac{1}{2}+\epsilon}(y\tau, \dots)$  também possui o mesmo tipo de comportamento. Portanto, definindo as seguintes integrais paramétricas:

$$G^{(\tau)}(r) = -2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \ln \left[ y(1-y)r^2\tau^2 + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right] - \frac{1}{2}, \quad (\text{A.24a})$$

$$H^{(\tau)}(r) = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y f_{\frac{1}{2}} \left( y\tau, \sqrt{y(1-y)\tau^2 + r^{-2}y + \frac{r^{-2}(1-y)}{x(1-x)}} \right), \quad (\text{A.24b})$$

obtemos o resultado final:

$$D_3^{(\tau)}(\mu, r) = -\mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{8\epsilon} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon W^{(\tau)}(r) \right], \quad (\text{A.25})$$

onde definimos  $W^{(\tau)}(r) = G^{(\tau)}(r) + H^{(\tau)}(r) - 4F_0^{(\tau)}(r)$ .

Para finalizar a regularização dimensional das integrais de Feynman na teoria massiva, consideremos a contribuição de ordem 3 loops para a função vértice de dois pontos dada em (3.55). Em termos da integral  $I_2^{(\tau)}$ , podemos escrevê-la como:

$$D_5^{(\tau)}(k, j; \mu, r) = \mu^{2-\epsilon} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{\left[ I_2^{(\tau)}(q, j; \mu, r) \right]^2}{(q-k)^2 + r^2(l-j+\tau)^2 + 1}. \quad (\text{A.26})$$

Pelos mesmos motivos envolvidos no cálculo de (A.21), já podemos tomar  $j = 0$  e deixar  $k$  livre. Substituindo (3.41) na integral acima e mantendo apenas as duas primeiras ordens na expansão em  $\epsilon$ , obtemos:

$$D_5^{(\tau)}(k, j=0; \mu, r) = \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^2}{\epsilon^2} \left\{ (1-\epsilon)r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{(q-k)^2 + r^2(j+\tau)^2 + 1} \times \right. \\ \left. \times \left[ \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)(q^2 + r^2l^2) + 1]^{\frac{\epsilon}{2}}} \right]^2 + \epsilon S_d F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau)}(k, j=0; r) + O(\epsilon^2) \right\}. \quad (\text{A.27})$$

Não é uma tarefa difícil mostrar que:

$$\left[ \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)(q^2 + r^2l^2) + 1]^{\frac{\epsilon}{2}}} \right]^2 = (1+2\epsilon) \int_0^1 \frac{dx}{[q^2 + r^2l^2 + \frac{1}{x(1-x)}]^{\epsilon}} + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.28})$$

Portanto, podemos escrever:

$$D_5^{(\tau)}(k, j = 0; \mu, r) = \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^2}{\epsilon^2} \left\{ (1 + \epsilon) \int_0^1 dx r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{(q-k)^2 + r^2(l+\tau)^2 + 1} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\left[ q^2 + r^2 l^2 + \frac{1}{x(1-x)} \right]^\epsilon} + \epsilon S_d F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau)}(k, j = 0; r) + O(\epsilon^2) \right\}. \quad (\text{A.29})$$

Novamente, introduzimos mais uma parametrização de Feynman e resolvemos a integral em  $q$ , seguido da identidade (3.40), produzindo o resultado:

$$D_5^{(\tau)}(k, j = 0; \mu, r) = \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\epsilon)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\epsilon)} (1 + \epsilon) \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1-y)^{\epsilon-1} \times \right. \\ \left. \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ r^2(l+y\tau)^2 + y(1-y)(k^2 + r^2\tau^2) + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\epsilon} + \epsilon F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau)}(k, j = 0; r) \right\} \quad (\text{A.30})$$

Calculando a derivada com relação a  $k^2$ , obtemos:

$$D_5^{(\tau)}(\mu, r) = \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} I_5^{(\tau)}(k, j = 0; \mu, r) \Big|_{k=0} \\ = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\epsilon)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\epsilon)} (1 + \epsilon) \int_0^1 dx \int_0^1 dy y (1-y)^\epsilon \times \right. \\ \left. \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ r^2(l+y\tau)^2 + y(1-y)r^2\tau^2 + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\epsilon} + \epsilon F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(r) \right\}. \quad (\text{A.31})$$

Realizando agora o somatório em  $l$  através da representação da função térmica generalizada, a expressão acima torna-se:

$$D_5^{(\tau)}(\mu, r) = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{2\epsilon\Gamma(\epsilon)} (1 + \epsilon) \int_0^1 dx \int_0^1 dy y (1-y)^\epsilon \times \right. \\ \left. \times \left\{ \Gamma\left(\frac{3\epsilon}{2}\right) \left[ y(1-y)\tau^2 + r^{-2}y + \frac{r^{-2}(1-y)}{x(1-x)} \right]^{-\frac{3}{2}\epsilon} + \right. \right. \\ \left. \left. + f_{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\epsilon} \left( y\tau, \sqrt{y(1-y)\tau^2 + r^{-2}y + \frac{r^{-2}(1-y)}{x(1-x)}} \right) \right\} + F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau)}(r) \right\}. \quad (\text{A.32})$$

Finalmente, realizamos a expansão em  $\epsilon$  e identificamos os termos resultantes com as funções paramétricas (A.24a) e (A.24b). Dessa forma, chegamos a:

$$D_5^{(\tau)}(\mu, r) = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{6\epsilon^2} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{2}\epsilon W^{(\tau)}(r) \right] \quad (\text{A.33})$$

Todas essas integrais e definições serão usadas nas seções 3.4 e 3.5 para o cálculo dos expoentes críticos na formulação massiva.

# Apêndice B

## Regularização Dimensional das Integrais de Feynman na Teoria Não-Massiva

Seguiremos passos semelhantes aos realizados no apêndice A para regularizarmos as integrais de Feynman com o parâmetro de massa  $\mu$  igual a zero e com os momentos externos no ponto simétrico. Começaremos pela integral (3.84) que, tal como a correspondente massiva, pode também ser escrita em termos de  $I_2^{(\tau)}$ :

$$I_4^{(\tau)}(k, j, k', j'; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I_2^{(\tau)}(q + k', l + j'; \sigma)}{[(q - k)^2 + \sigma^2(l - j + \tau)^2][q^2 + \sigma^2(l + \tau)^2]}. \quad (\text{B.1})$$

Integrais de Feynman não-massivas possuem divergência no regime infravermelho ( $k \rightarrow 0$  e  $j \rightarrow 0$ ). No entanto, podemos tomar  $j = 0$  e colocar apenas os momentos contínuos no ponto simétrico sem que haja quaisquer divergências no infravermelho. Fazendo isso, simplificaremos bastante os resultados da regularização dimensional. Portanto, tomando inicialmente  $j = j' = 0$ , introduzindo uma parametrização de Feynman e substituindo o resultado (3.72) na integral acima, podemos reescrevê-la como:

$$I_4^{(\tau)}(k, j = 0, k', j' = 0; \sigma) = \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \sigma \int_0^1 dx \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[q^2 - 2xk \cdot q + xk^2 + \sigma^2(l + \tau)^2]^2 [(q + k')^2 + \sigma^2 l^2]^{\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{S_d}{2} G_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(k, k'; \sigma) \right\}, \quad (\text{B.2})$$

onde definimos:

$$G_{\alpha}^{(\tau)}(k, k'; \sigma) = \frac{\sigma}{S_d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{F_{\alpha}^{(\tau)}(q + k', l; \sigma)}{[(q - k)^2 + \sigma^2(l + \tau)^2][q^2 + \sigma^2(l + \tau)^2]}. \quad (\text{B.3})$$

Divergências no regime ultravioleta da integral acima podem ser estudadas considerando o limite  $q \rightarrow \infty$  do integrando. Analisaremos então como a função  $F_\alpha^{(\tau)}(q + k', l; \sigma)$  se comporta nesse limite quando  $\alpha = \frac{\epsilon}{2} = 0$ . A partir de eq. (3.75), podemos ver que uma desigualdade análoga a (A.6) é satisfeita:

$$F_\alpha(q, j; \sigma) < F_\alpha(q, j = 0; \sigma), \quad (\text{B.4})$$

para  $j \neq 0$ . Portanto, se quisermos um majorante para o integrando de (B.3), precisamos considerar apenas a situação na qual  $j = 0$ :

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau)}(k, j = 0; \sigma) = 8k^{-\frac{\epsilon}{2}}\sigma^{-\frac{\epsilon}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n\tau)(\pi n)^{\frac{\epsilon}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{4}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left( 2\pi nk\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)} \right), \quad (\text{B.5})$$

onde usamos a propriedade do integrando ser simétrico em torno de  $x = \frac{1}{2}$ . Definindo uma nova variável de integração através de  $x(1-x) = \frac{y}{2}$  e reescrevendo  $\nu = \frac{\epsilon}{2}$  e  $b = 2\pi nk\sigma^{-1}$ , reduzimos a integral em  $x$  da seguinte maneira:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx [x(1-x)]^{-\frac{\nu}{2}} K_\nu \left( b\sqrt{x(1-x)} \right) = 2^\nu \int_0^1 dy y^{1-\nu} (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} K_\nu \left( \frac{b\nu}{2} \right). \quad (\text{B.6})$$

A segunda integral acima já foi previamente estudada [68] e de uma forma generalizada, temos:

$$\int_0^1 dy y^{1-\nu} (1-y^2)^\mu K_\nu(cy) = 2^{-\nu-2} c^\nu (\mu+1)^{-1} \Gamma(-\nu) {}_1F_2 \left( 1; \nu+1, \mu+2; \frac{c^2}{4} \right) \\ + \pi 2^{\mu-1} c^{-(\mu+1)} \operatorname{cosec}(\pi\nu) \Gamma(\mu+1) I_{\mu-\nu+1}(c), \quad (\text{B.7})$$

para  $\operatorname{Re} \mu > -1$  e  $\operatorname{Re} \nu < 1$ .  ${}_1F_2$  corresponde à função hipergeométrica gaussiana enquanto que  $I_{\mu-\nu+1}$  é a função de Bessel modificada do primeiro tipo. Tomando  $\mu = -\frac{1}{2}$ , podemos reescrever a função hipergeométrica em termos da função de Struve [68]:

$${}_1F_2 \left( 1; \nu+1, \frac{3}{2}; \frac{b^2}{16} \right) = 2^{2\nu} \sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu) b^{-\nu-\frac{1}{2}} L_{\nu-\frac{1}{2}} \left( \frac{b}{2} \right). \quad (\text{B.8})$$

A partir da identidade  $\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu) = -\pi \operatorname{cosec}(\pi\nu)$  e do resultado anterior, obtemos:

$$\int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\nu}{2}} K_\nu \left( b\sqrt{x(1-x)} \right) = 2^{\nu-1} \pi^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cosec}(\pi\nu) \left[ I_{\frac{1}{2}-\nu} \left( \frac{b}{2} \right) - L_{\nu-\frac{1}{2}} \left( \frac{b}{2} \right) \right] \quad (\text{B.9})$$

A função  $\operatorname{cosec}(\pi\nu)$  possui um polo em  $\nu$ . Portanto, para calcularmos essa integral em  $\nu = \frac{\epsilon}{2} = 0$ , realizaremos expansões em  $\nu$  nas funções de Bessel e Struve acima. Começemos pela primeira delas, na qual consideramos a seguinte representação integral [68]:

$$I_{\frac{1}{2}-\nu}(z) = \frac{2 \left( \frac{z}{2} \right)^{\frac{1}{2}-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1-\nu)} \int_0^1 (1-t^2)^{-\nu} \cosh(zt) dt. \quad (\text{B.10})$$

Usando as expansões  $a^\nu = 1 + \nu \ln a + O(\nu^2)$ ,  $\Gamma(1 - \nu) = 1 - \nu\psi(1) + O(\nu^2)$  e desprezando os termos de ordem  $\nu^2$ , depois de algumas manipulações, chegamos a:

$$I_{\frac{1}{2}-\nu}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \nu\psi(1) - \nu \ln\left(\frac{z}{2}\right)\right] \left[\frac{1}{z} \sinh z - \nu \frac{1}{z} \ln 2 \sinh z + \nu \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{\sinh(z t)}{1+t} dt - \nu \int_0^1 \cosh(z t) \ln(1-t) dt\right]. \quad (\text{B.11})$$

A última integral acima pode ser colocada em uma formato mais apropriado. Consideremos primeiramente o objeto  $f_z(\lambda) = \int_0^1 \ln t e^{\lambda z t} dt$ . Derivando com relação a  $\lambda$  e integrando por partes, obtemos

$$\frac{d}{d\lambda} f_z(\lambda) = -z f_z(\lambda) + \frac{1}{\lambda} (1 - e^{\lambda z}).$$

Resolvendo a equação diferencial, encontramos  $\lambda f_z(\lambda) = \frac{1}{z} \int_0^\lambda (1 - e^{tz}) \frac{dt}{t}$ , de modo que podemos escrever:

$$\int_0^1 \cosh(z t) \ln(1-t) dt = \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{\sinh[z(1-t)] - \sinh z}{t} dt. \quad (\text{B.12})$$

Substituindo esse resultado na função de Bessel modificada e continuando com a expansão em  $\nu$ , vemos que:

$$I_{\frac{1}{2}-\nu}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi z}} \left[ \sinh z + \nu \sinh z (\psi(1) - \ln z) + \nu \int_0^1 \frac{\sinh(z t)}{1+t} dt - \nu \int_0^1 \frac{\sinh[z(1-t)] - \sinh z}{t} dt \right]. \quad (\text{B.13})$$

Seguiremos um procedimento semelhante para a função de Struve, cuja representação integral é dada por [68]:

$$L_\alpha(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sinh[z \cos \phi] (\sin \phi)^{2\alpha} d\phi, \quad (\text{B.14})$$

com  $\text{Re } \alpha > -\frac{1}{2}$ . Realizando a mudança de variável  $\cos \phi = t$  e pondo  $\alpha = \nu - \frac{1}{2}$ , podemos reescrever a integral acima como:

$$L_{\nu-\frac{1}{2}}(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1} \sinh(z t) dt. \quad (\text{B.15})$$

Um procedimento similar ao executado para a representação da função de Bessel modificada (B.10) conduz a:

$$L_{\nu-\frac{1}{2}}(z) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \nu [1 + \nu(\ln z - \ln 2 - \psi(1))] \left[ \sinh z \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1} dt + \int_0^1 \frac{\sinh(z t) - \sinh z}{1-t^2} (1-t^2)^\nu dt \right]. \quad (\text{B.16})$$

A primeira integral acima pode ser resolvida através da mudança de variável  $t^2 = t'$ , de onde identificamos a representação para a função beta de Euler [68]. Expandindo em  $\nu$  e mantendo apenas os termos até ordem  $\nu^0$ , obtemos:

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1} dt = \frac{1}{2\nu} \left[ 1 + \nu \left( \psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) \right]. \quad (\text{B.17})$$

O primeiro termo da expansão em  $\nu$  da segunda integral em (B.16) é ordem  $\nu^0$  e já podemos tomar  $\nu = 0$ . Depois de algumas manipulações algébricas, podemos reescrever essa integral como:

$$\int_0^1 \frac{\sinh(z t) - \sinh z}{1-t^2} (1-t^2)^\nu dt = \frac{1}{2} \left[ -\ln 2 \sinh z + \int_0^1 \frac{\sinh(z t)}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{\sinh[z(1-t)] - \sinh z}{t} dt \right]. \quad (\text{B.18})$$

A substituição desses dois últimos resultados em (B.16) resulta na seguinte expansão em  $\nu$  para a função de Struve:

$$L_{\nu-\frac{1}{2}}(z) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[ \sinh z \left( 1 + \nu \ln z - 2\nu \ln 2 - \nu \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) + \nu \int_0^1 \frac{\sinh(z t)}{1+t} dt + \nu \int_0^1 \frac{\sinh[z(1-t)] - \sinh z}{t} dt \right]. \quad (\text{B.19})$$

Combinando os resultados (B.13) e (B.19) com a integral (B.9), além de usarmos  $\nu = \frac{\epsilon}{2}$  e  $b = 2\pi n k \sigma^{-1}$ , podemos mostrar que:

$$\int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{4}} K_{\frac{\epsilon}{2}} \left( 2\pi n k \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)} \right) = 2^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\pi \epsilon}{2\pi n k \sigma^{-1}} \operatorname{cosec} \left( \frac{\pi \epsilon}{2} \right) \left[ \cosh(\pi n k \sigma^{-1}) \times \int_0^{\pi n k \sigma^{-1}} \frac{\sinh t}{t} dt - \sinh(\pi n k \sigma^{-1}) \left( \gamma + \ln(\pi n k \sigma^{-1}) + \int_0^{\pi n k \sigma^{-1}} \frac{\cosh t - 1}{t} dt \right) \right], \quad (\text{B.20})$$

onde usamos as relações  $\gamma = -\psi(1)$  e  $\gamma = -2 \ln 2 - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$  para a constante de Euler-Mascheroni. A primeira integral do lado direito do resultado acima é definida como a *integral seno hiperbólico* cujo símbolo é  $\operatorname{shi}(\pi n k \sigma^{-1})$ . Já o termo entre parênteses multiplicando  $\sinh(\pi n k \sigma^{-1})$  é definido como a *integral cosseno hiperbólico*, sendo representada por  $\operatorname{chi}(\pi n k \sigma^{-1})$ . Usando a expansão  $\operatorname{cosec} \left( \frac{\pi \epsilon}{2} \right) = \frac{2}{\pi \epsilon} + \frac{\pi \epsilon}{12} + O(\epsilon^2)$ , vemos que a expressão acima é regular no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Portanto, podemos tomar  $\epsilon = 0$  na função de correção (B.5) e escrever:

$$F_0^{(\tau)}(k, j = 0; \sigma) = \frac{4\sigma}{\pi k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n \tau)}{n} \left[ \cosh(\pi n k \sigma^{-1}) \operatorname{shi}(\pi n k \sigma^{-1}) - \sinh(\pi n k \sigma^{-1}) \operatorname{chi}(\pi n k \sigma^{-1}) \right]. \quad (\text{B.21})$$

Para analisar o limite  $k \rightarrow \infty$ , vamos reescrever o termo entre colchetes acima (definindo  $z = \pi n k \sigma^{-1}$ ) em um formato apropriado:

$$\cosh z \operatorname{shi} z - \sinh z \operatorname{chi} z = \frac{e^z}{2} (\operatorname{shi} z - \operatorname{chi} z) + \frac{e^{-z}}{2} (\operatorname{shi} z + \operatorname{chi} z). \quad (\text{B.22})$$

Se usarmos a representação da função gama incompleta  $\Gamma(0, z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ , podemos reduzir a expressão anterior para:

$$\cosh z \operatorname{shi} z - \sinh z \operatorname{chi} z = \frac{e^z}{2} \Gamma(0, z) - \frac{e^{-z}}{2} \Gamma(0, -z). \quad (\text{B.23})$$

O primeiro termo da expansão assintótica de  $\Gamma(0, z)$  é dado por  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(0, z) \approx \frac{e^{-z}}{z}$ . Desse modo, obtemos:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\cosh z \operatorname{shi} z - \sinh z \operatorname{chi} z) \approx \frac{1}{z}, \quad (\text{B.24})$$

que corresponde ao limite  $k \rightarrow \infty$ . Portanto, concluímos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_0^{(\tau)}(k, j = 0; \sigma) \approx \frac{16}{L^2 k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n \tau)}{n^2}. \quad (\text{B.25})$$

A desigualdade (B.4) pode ser usada agora para mostrarmos o seguinte resultado:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_0^{(\tau)}(k, j; \sigma) < \frac{16}{L^2 k^2 + 4\pi^2 j^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n \tau)}{n^2} \quad (\text{B.26})$$

Este comportamento garante que a integral (B.3) é regular sem qualquer polo em  $\epsilon$  e portanto pode ser omitida na expansão em  $\epsilon$  da integral  $I_4$  em (B.2).

Avançando para o próximo passo no cálculo de (B.2), empregaremos outra parametrização de Feynman dada por (2.79) e reescreveremos a integral como:

$$I_4^{(\tau)}(k, k', j = j' = 0; \sigma) = \frac{S_d}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma\left(2 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \int_0^1 dx \int_0^1 dz z(1-z)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \times \\ \times \int \frac{d^{d-1}q}{\{q^2 + 2[(1-z)k' - z x k] \cdot q + z x k^2 + (1-z)k'^2 + \sigma^2(l + \tau z)^2 + z(1-z)\sigma^2 \tau^2\}^{2+\frac{\epsilon}{2}}}. \quad (\text{B.27})$$

A integral em  $q$  é realizada com auxílio de (2.81) e depois de usarmos a identidade (3.40), chegamos a:

$$I_4^{(\tau)}(k, k', j = j' = 0; \sigma) = \frac{S_d^2}{2\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)}{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \int_0^1 dx \int_0^1 dz z(1-z)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \\ \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{\sigma^2(l + \tau z)^2 + z(1-z)\sigma^2 \tau^2 + z x k^2 + (1-z)k'^2 - [(1-z)k' - z x k]^2\}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}. \quad (\text{B.28})$$

Existe um polo em  $z = 1$  no integrando quando  $\epsilon = 0$ . Portanto, tal como fizemos no apêndice A, podemos tomar  $z = 1$  no termo entre chaves e desse modo estaremos considerando apenas as ordens  $\epsilon^{-2}$  e  $\epsilon^{-1}$  da expansão. Identificando o somatório com a representação da função térmica generalizada em (3.36), realizando a expansão em  $\epsilon$  e desprezando os termos de ordem  $\epsilon^0$ , obtemos:

$$I_4^{(\tau)}(k, j = j' = 0; \sigma) = \frac{S_d^2}{2\epsilon^2} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{2} - \epsilon \int_0^1 dx \ln[x(1-x)k^2] + \epsilon F_0^{(\tau)}(k, 0; \sigma) \right]. \quad (\text{B.29})$$

Como o nosso interesse é nas condições de renormalização com as funções de vértice calculadas em no ponto simétrico (no qual temos  $k^2 = 1$ ), o resultado acima torna-se:

$$I_{4PS}^{(\tau)}(k^2 = 1, j = j' = 0; \sigma) = \frac{S_d^2}{2\epsilon^2} \left[ 1 + \frac{3}{2}\epsilon + \epsilon F_0^{(\tau)}(\sigma) \right], \quad (\text{B.30})$$

para  $F_0^{(\tau)}(\sigma) = F_0^\tau(k = 0, 0; \sigma)$ .

Na sequência de regularização dimensional das integrais de Feynman, consideremos a integral dada em (3.54) com  $\mu = 0$ . Em termos de  $I_2^{(\tau)}$ , escrevemos:

$$D_3^{(\tau)}(k, j; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I_2^{(\tau)}(q, l; \sigma)}{(q-k)^2 + \sigma^2(l-j+\tau)^2} \quad (\text{B.31})$$

Tomando já  $j = 0$  e substituindo o resultado (3.72) para a integral de 1 loop  $I_2^{(\tau)}$ , obtemos:

$$D_3^{(\tau)}(k, j = 0; \sigma) = \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \left. \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q-k)^2 + \sigma^2(l-j+\tau)^2](q^2 + \sigma^2 l^2)^{\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) S_d F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau)}(k, 0; \sigma) \right\}, \quad (\text{B.32})$$

onde definimos o análogo de (A.4) através de:

$$F_{\alpha, \beta}^{(\tau)}(k, j; \sigma) = \frac{\sigma}{S_d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{F_\alpha^{(\tau)}(q+k, l+j; \sigma)}{[q^2 + \sigma^2(l+\tau)^2]^\beta}. \quad (\text{B.33})$$

A aplicação da parametrização de Feynman e a realização subsequente da integral em  $q$  com o utilização da identidade (3.40) conduzem a:

$$D_3^{(\tau)}(k, j = 0; \sigma) = \frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \epsilon\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy (1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \right. \\ \left. \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} [y(1-y)(k^2 + \sigma^2 \tau^2) + \sigma^2(l+y\tau)^2]^{\frac{1}{2}-\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau)}(k, 0; \sigma) \right\} \quad (\text{B.34})$$

A função acima deve ser derivada com relação a  $k^2$  e depois tomamos  $k^2 = 1$ . Em seguida, usamos a representação (3.36), resultando em:

$$D'_{3PS}(\sigma) = -\frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left[ \Gamma(\epsilon) (y(1-y)(1 + \sigma^2\tau^2))^{-\epsilon} + \sigma^{-2\epsilon} f_{\frac{1}{2}+\epsilon}(y\tau, \sigma^{-1}\sqrt{y(1-y)(1 + \sigma^2\tau^2)}) \right] \right. \\ \left. - \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) F'_{\frac{\epsilon}{2}}(\sigma) \right\}, \quad (\text{B.35})$$

onde definimos:

$$F'_\alpha(\sigma) = \left. \frac{\partial}{\partial k^2} F_{\alpha,1}(\tau)(k, 0; \sigma) \right|_{k^2=1}. \quad (\text{B.36})$$

A definição acima é bem comportada para  $\alpha = 0$  pelos mesmos motivos usados para mostrar que (B.3) também é regular. Logo, podemos tomar  $\epsilon = 0$  no termo  $F'_{\frac{\epsilon}{2}}(\sigma)$  do resultado anterior. Além disso, se definirmos

$$\bar{F}(\tau)(\sigma) = \int_0^1 dy y f_{\frac{1}{2}}(y\tau, \sigma^{-1}\sqrt{y(1-y)(1 + \sigma^2\tau^2)}) \quad (\text{B.37})$$

e realizarmos a expansão em  $\epsilon$ , chegaremos ao seguinte resultado:

$$D'_{3PS}(\sigma) = -\frac{S_d^2}{8\epsilon} \left[ 1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon W(\tau)(\sigma) \right], \quad (\text{B.38})$$

onde definimos  $W(\tau)(\sigma) = \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma^2\tau^2) - \bar{F}(\tau)(\sigma) + 2F'_0(\tau)(\sigma)$ .

Concluimos o apêndice apresentando rapidamente o cálculo da integral (3.55) com a massa  $\mu$  igual a zero. Em termos de  $I_2^{(\tau)}$ , podemos escrevê-la como:

$$D_5^{(\tau)}(k, j; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{[I_2^{(\tau)}(q, l; \sigma)]^2}{(q-k)^2 + \sigma^2(l-j+\tau)^2}. \quad (\text{B.39})$$

Tomando novamente  $j = 0$  e substituindo (3.72), obtemos:

$$D_5^{(\tau)}(k, j=0; \sigma) = \frac{S_d^2}{\epsilon^2} \left[ (1 + \epsilon)\sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q-k)^2 + \sigma^2(l+\tau)^2](q^2 + \sigma^2l^2)^\epsilon} + \right. \\ \left. + \epsilon S_d F'_{\frac{\epsilon}{2},1}(\tau)(k, 0; \sigma) \right], \quad (\text{B.40})$$

onde realizamos uma expansão parcial em  $\epsilon$ . Agora, executando os mesmos passos que levaram ao resultado (B.38), podemos mostrar que a derivada com relação a  $k^2$  no ponto  $k^2 = 1$  da função acima é dada por:

$$D'_{5PS}(\sigma) = -\frac{S_d^3}{6\epsilon^2} [1 + 2\epsilon - 3\epsilon W(\tau)(\sigma)]. \quad (\text{B.41})$$

Os resultados (B.30), (B.38) e (B.41) serão então usados na seção 3.6 para o cálculo das funções de vértice nas condições de renormalização.

# Apêndice C

## Regularização das Integrais de Feynman: dimensão compacta perpendicular aos eixos competitivos

Vamos tratar inicialmente da regularização dimensional das integrais de Feynman na teoria não-massiva. Consideremos portanto a integral (4.31) escrita convenientemente em termos da integral (4.18):

$$I_4^{(\tau)}(K, K', P, P', j, j'; \sigma) = \sigma^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1}q d^m k I_2^{(\tau)}(K' + k, P + q, j' + l; \sigma)}{\{[(K - k)^2]^2 + (q - P)^2 + \sigma^2(l - j + \tau)^2\}} \times \frac{1}{(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2(l + \tau)^2}. \quad (\text{C.1})$$

Para resolver essa integral, substituímos o resultado (4.24) e notamos que o termo de correção do tamanho finito será de ordem  $\epsilon_L^0$  e já podemos omiti-lo, conforme realizamos no apêndice B. Portanto, tomando os índices de quase-momentos  $j = j' = 0$ , obtemos:

$$I_4^{(\tau)}(K, K', P, P', 0, 0; \sigma) = \frac{S_m S_{d-m}}{8} \sigma^{-2\epsilon_L} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{d^{d-m-1}q d^m k}{\{[(k - K)^2]^2 + (q - P)^2 + \sigma^2(l + \tau)^2\} [(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2(l + \tau)^2]} \times \frac{1}{\{[(k + K')^2]^2 + (q + P')^2 + \sigma^2 l^2\}^{\frac{\epsilon_L}{2}}}. \quad (\text{C.2})$$

Realizando parametrizações de Feynman duas vezes com a aplicação da aproximação ortogonal, as integrais em  $k$  (4.20) e em  $q$  (2.81), juntamente com representação (3.36) para o somatório

em  $l$ , chegamos ao resultado:

$$I_4^{(\tau)}(K, K', P, P', 0, 0; \sigma) = \sigma^{-2\epsilon_L} \left[ \frac{S_m S_{d-m}}{8} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \right]^2 \frac{[\Gamma(1 - \frac{\epsilon_L}{2})]^2}{\Gamma(2 - \epsilon_L)} \times \\ \times \int_0^1 dy \int_0^1 dz z(1-z)^{\frac{\epsilon_L}{2}-1} \left\{ \Gamma(\epsilon_L) [Q^\tau(y, z; K, K', P, P')]^{-\epsilon_L} + \right. \\ \left. + \sigma^{-\epsilon_L} f_{\frac{1}{2}+\epsilon_L} \left( z\tau, \sigma^{-1} \sqrt{Q^\tau(y, z; K', K, P, P')} \right) \right\}, \quad (C.3)$$

onde definimos:

$$Q^\tau(y, z; K, K', P, P') = z(1-z)\tau^2 + yzP^2 + (1-z)P'^2 - [(1-z)P' - yzP]^2 + yz(K^2)^2 + \\ + (1-z)(K'^2)^2 - [(1-z)K'^2 - yzK^2]^2. \quad (C.4)$$

Note que o integrando acima possui um polo em  $z = 1$  quando  $\epsilon_L = 0$ . Pelo mesmos motivos já explicitados no apêndice A, basta que tomemos  $z = 1$  no termo entre colchetes para obtermos a expansão nas duas primeiras ordens  $\epsilon_L^{-2}$  e  $\epsilon_L^{-1}$ . Desse modo, vemos que (C.4) possui os mesmos valores quando os momentos externos são tomados nos pontos simétricos dos dois subespaços ( $K^2 = 1$  e  $P^2 = 0$  ou  $K^2 = 0$  e  $P^2 = 1$ ). Prosseguindo com a expansão nos argumentos das funções  $\Gamma$ , podemos mostrar que:

$$I_{4SP_n}^{(\tau)} = \sigma^{-2\epsilon_L} \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_L}{2} + 2[i_2]_m \epsilon_L + \epsilon_L F_0^{(\tau)}(1, 0, 0; \sigma) \right], \quad (C.5)$$

com  $F_\nu^{(\tau)}(K, P, j; \sigma)$  definido em (4.25). O fator  $\left[ \frac{S_m S_{d-m}}{8} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \right]^2$  removido devido à redefinição da constante de acoplamento. De agora em diante, esse procedimento ficará implícito para as demais integrais.

A próxima integral de Feynman de nosso interesse é dada em (4.33). Reescrevendo essa integral em termos de (4.18), obtemos:

$$D_3^{(\tau)}(K, P, j; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{I_2^{(\tau)}(k, q, l; \sigma)}{[(k-K)^2]^2 + (q-P)^2 + \sigma^2(l-j+\tau)^2}. \quad (C.6)$$

Aplicando os mesmos procedimentos realizados na integral anterior, que incluem a substituição de (4.24), parametrização de Feynman e solução das integrais em  $k$  e  $q$ , chegamos a:

$$D_3^{(\tau)}(K, P, 0; \sigma) = \sigma^{2-2\epsilon_L} \left[ \frac{S_m S_{d-m}}{8} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \right]^2 \left\{ \frac{[\Gamma(1 - \frac{\epsilon_L}{2})]^2}{\Gamma(2 - \epsilon_L)} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \epsilon_L\right) \times \right. \\ \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 dy y^{\frac{\epsilon_L}{2}-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ [l + (1-y)\tau]^2 + y(1-y)\tau^2 + y(1-y)\sigma^{-2}[(K'^2)^2 + P^2] \right\}^{\frac{1}{2}-\epsilon_L} \\ \left. + 2 \frac{\Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right)} F_{\frac{\epsilon_L}{2}, 1}^{(\tau)}(K, P, 0; \sigma) \right\}, \quad (C.7)$$

dada a definição:

$$F_{\alpha,\beta}^{(\tau)}(K, P, j; \sigma) = \frac{\sigma}{\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{F_{\alpha}^{(\tau)}(K+k, P+q, l+j; \sigma)}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2(l+\tau)^2]^\beta}. \quad (\text{C.8})$$

Realizando a derivada com relação a  $P^2$  ou  $(K^2)^2$  nos pontos simétricos, seguidas pela utilização da representação (3.36) para o somatório em  $l$  e expansão em  $\epsilon_L$ , podemos condensar o resultado com o índice  $n$  do subespaço da seguinte forma:

$$D_{3SP_n}^{(\tau)}(\sigma) = -\sigma^{-2\epsilon_L} \frac{1}{8\epsilon_L} \left[ 1 + \frac{\epsilon_L}{4} + 2[i_2]_m \epsilon_L - \epsilon_L \ln(1 + \sigma^2 \tau^2) + \right. \\ \left. + 2\epsilon_L M_0^{(\tau)}(\sigma) - 4\epsilon_L F_{0,1}^{(\tau)}(SP_n) \right], \quad (\text{C.9})$$

onde usamos:

$$M_{\alpha}^{(\tau)}(\sigma) = \sigma^{-2\alpha} \int_0^1 dy y^{\frac{\alpha}{2}} (1-y) f_{\frac{1}{2}+\alpha} \left( (1-y)\tau, \sigma^{-1} \sqrt{y(y-1)(1+\sigma^2 \tau^2)} \right), \quad (\text{C.10a})$$

$$F_{0,1}^{(\tau)}(SP_1) = \frac{\partial}{\partial P^2} F_{0,1}^{(\tau)}(0, P, 0; \sigma) \Big|_{P^2=1} \quad \text{e} \quad F_{0,1}^{(\tau)}(SP_2) = \frac{\partial}{\partial (K^2)^2} F_{0,1}^{(\tau)}(K, 0, 0; \sigma) \Big|_{K^2=1}. \quad (\text{C.10b})$$

A integral de 3 loops (4.34), quando escrita em termos de (4.18), assume a forma:

$$D_5^{(\tau)}(K, P, j; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{[I_2^{(\tau)}(k, q, l; \sigma)]^2}{[(k-K)^2]^2 + (q-P)^2 + \sigma^2(l-j+\tau)^2}. \quad (\text{C.11})$$

Substituindo (4.27) na integral anterior e mantendo apenas os termos potencialmente de ordens  $\epsilon_L^{-2}$  e  $\epsilon_L^{-1}$ , podemos transformar (C.11) em:

$$D_5^{(\tau)}(K, P, j; \sigma) = \sigma^{2-3\epsilon_L} \left[ \frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \right]^2 \frac{1}{\epsilon_L^2} \left\{ (1 + 2[i_2]_m \epsilon_L) \times \right. \\ \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(k+K)^2]^2 + (q+P)^2 + \sigma^2(l+j)^2\}^{\epsilon_L} [(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2(l+\tau)^2]} \\ \left. + \epsilon_L \frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) F_{0,1}^{(\tau)}(K, P, j; \sigma) \right\}. \quad (\text{C.12})$$

Uma parametrização de Feynman seguida pelas soluções das integrais em  $k$  e  $q$  com  $j = 0$

conduz à seguinte expressão:

$$D_5^{(\tau)}(K, P, 0; \sigma) = \sigma^{2-3\epsilon_L} \left[ \frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \right]^3 \frac{1}{\epsilon_L^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\epsilon_L)} (1 + 2[i_2]_m \epsilon_L) \times \right. \\ \times \left[ 1 + \psi\left(2 - \frac{m}{4}\right) \frac{\epsilon_L}{2} \right] \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\epsilon_L\right) \int_0^1 dy y^{\epsilon_L-1} \times \\ \left. \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ [l + (1-y)\tau]^2 + y(1-y)\sigma^{-2}[(K^2)^2 + P^2 + \sigma^2\tau^2] \right\}^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\epsilon_L} + \epsilon_L F_{0,1}^{(\tau)}(K, P, 0; \sigma) \right\}. \quad (\text{C.13})$$

Após a realização das derivadas com relação a  $P^2$  ou  $(K^2)^2$  nos pontos de simetria, a utilização da representação do somatório em  $l$  e uma expansão em  $\epsilon_L$ , o resultado anterior torna-se:

$$D_{5SP_n}^{(\tau)}(\sigma) = -\sigma^{-3\epsilon_L} \frac{1}{6\epsilon_L^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_L}{2} + 3[i_2]_m \epsilon_L - \frac{3}{2}\epsilon_L \ln(1 + \sigma^2\tau^2) + \right. \\ \left. + 3\epsilon_L M_0^{(\tau)}(\sigma) - 6\epsilon_L F_{0,1}^{(\tau)}(SP_n) \right]. \quad (\text{C.14})$$

Usaremos os resultados (C.5), (C.9) e (C.14) na seção 4.4 para calcularmos os expoentes críticos na formulação massiva da teoria de campo.

Passaremos agora ao cálculo das integrais de Feynman na teoria massiva. Reescrevendo a integral (4.60) em termos de (4.54) e já com os momentos externos nulos, obtemos:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu_n, r_n) = \mu_n^{-n\epsilon} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{I_2^{(\tau)}(k, q, l; \mu_n, r_n)}{[(k^2)^2 + q^2 + r_n^2(l + \tau)^2 + 1]^2}. \quad (\text{C.15})$$

Substituindo (4.57) na integral acima e realizando a mesma sequência de passos que levaram a (C.3), obtemos o seguinte resultado:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu_n, r_n) = \mu_n^{-2n\epsilon_L} r_n^{-2\epsilon_L} \left[ \frac{S_m S_{d-m}}{8} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \right]^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} \times \\ \times y(1-y)^{\frac{\epsilon_L}{2}-1} \left\{ \Gamma(\epsilon_L) [R^\tau(x, y; r_n)]^2 + f_{\frac{1}{2}+\epsilon_L} \left( y\tau, \sqrt{R^\tau(x, y; r_n)} \right) \right\}, \quad (\text{C.16})$$

dado que:

$$R^\tau(x, y; r_n) = y(1-y)\tau^2 + r_n^{-2}y + \frac{r_n^{-2}(1-y)}{x(1-x)}. \quad (\text{C.17})$$

Novamente, temos o polo  $y = 1$  quando  $\epsilon_L = 0$ . Tomando o termo entre colchetes com  $y = 1$  e continuando com a expansão em  $\epsilon_L$ , podemos mostrar que:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu_n, r_n) = \mu_n^{-2n\epsilon_L} \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left[ 1 - \frac{3}{2}\epsilon_L + 2[i_2]_m \epsilon_L + \epsilon_L f_{\frac{1}{2}}(\tau, r_n^{-1}) \right]. \quad (\text{C.18})$$

Partindo para o correspondente massivo da integral (4.33), podemos reescrevê-la em termos de (4.54) como:

$$D_3^{(\tau)}(K, P, j; \mu_n, r_n) = \mu_n^{n(2-\epsilon_L)} r_n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k I_2^{(\tau)}(k, q, l; \mu_n, r_n)}{[(k-K)^2]^2 + (q-P)^2 + r_n^2(l-j+\tau)^2 + 1}. \quad (\text{C.19})$$

A substituição de (4.57) na expressão acima acompanhada dos mesmos passos empregados na obtenção de (C.7) conduz a:

$$\begin{aligned} D_3^{(\tau)}(K, P, 0; \mu_n, r_n) &= \mu_n^{2n(1-\epsilon_L)} \left[ \frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \right]^2 \times \\ &\times \left\{ \frac{r_n^{2(1-\epsilon_L)}}{4\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \epsilon_L\right) \int_0^1 dx \int_0^1 dy [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} y^{\frac{\epsilon_L}{2}-1} \times \right. \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ [l + (1-y)\tau]^2 + y(1-y)[r_n^{-2}(K^2)^2 + r_n^{-2}P^2 + \tau^2] + r_n^{-2} \left[ 1 - y + \frac{y}{x(1-x)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}-\epsilon_L} + \\ &\left. + \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right)} F_{\frac{\epsilon_L}{2}, 1}^{(\tau)}(K, P, j=0; r_n) \right\}. \quad (\text{C.20}) \end{aligned}$$

Analogamente a (C.8), definimos:

$$F_{\alpha, \beta}^{(\tau)}(K, P, j; r_n) = \frac{r_n}{\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{F_{\alpha}^{(\tau)}(K+k, P+q, l+j; r_n)}{[(k^2)^2 + q^2 + r_n^2(l+\tau)^2 + 1]^{\beta}}, \quad (\text{C.21})$$

com  $F_{\alpha}^{(\tau)}(k, q, j; r_n)$  dado em (4.56). Depois de realizarmos as derivadas com relação a  $P^2$  ou  $(K^2)^2$ , tomarmos os momentos externos iguais a zero, usarmos a representação (3.36) seguida pela expansão em  $\epsilon_L$ , chegamos a:

$$\begin{aligned} D_3^{(\tau)}(\mu_n, r_n) &= -\mu_n^{-2n\epsilon_L} \frac{1}{8\epsilon_L} \left[ 1 - \frac{5}{4}\epsilon_L + 2[i_2]_m \epsilon_L + \epsilon_L G^{\tau}(r_n) + \right. \\ &\left. + \epsilon_L H^{\tau}(r_n) - 4\epsilon_L F_{0,1}'^{(\tau)n}(r_n) \right], \quad (\text{C.22}) \end{aligned}$$

com  $G^{\tau}(r_n)$  e  $H^{\tau}(r_n)$  definidos em (A.24), além de:

$$F_{0,1}'^{(\tau)1}(r_1) = \left. \frac{\partial}{\partial P^2} F_{0,1}^{(\tau)}(0, P, 0; r_1) \right|_{P=0} \quad \text{e} \quad F_{0,1}'^{(\tau)2}(r_2) = \left. \frac{\partial}{\partial (K^2)^2} F_{0,1}^{(\tau)}(K, 0, 0; r_2) \right|_{K=0}. \quad (\text{C.23})$$

O correspondente massivo da integral de 3 loops pode ser lido de (4.34) e, em termos da integral (4.54), escrevemos:

$$D_5^{(\tau)}(K, P, j; \mu_n, r_n) = \mu_n^{n(2-\epsilon_L)} r_n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k \left[ I_2^{(\tau)}(k, q, l; \mu_n, r_n) \right]^2}{[(k-K)^2]^2 + (q-P)^2 + r_n^2(l-j+\tau)^2 + 1}. \quad (\text{C.24})$$

Substituindo a integral (4.55), com a realização de duas parametrizações de Feynman em sequência e a resolução das integrais em  $k$  e  $q$ , podemos reescrever a expressão anterior como:

$$\begin{aligned}
D_5^{(\tau)}(K, P, j; \mu_n, r_n) &= \mu_n^{n(2-3\epsilon_L)} \left[ \frac{S_m S_{d-m}}{8} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \right]^3 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \frac{3}{2} \epsilon_L \psi\left(2 - \frac{m}{4}\right) \right] \times \right. \\
&\times \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \epsilon_L\right) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 dw [x(1-x)y(1-y)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} [z(1-z)]^{\frac{\epsilon_L}{2}-1} (1-w)^{\epsilon_L-1} \times \\
&\times r_n^{2-3\epsilon_L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ (l+w\tau)^2 + w(1-w)r_n^{-2}[(K^2)^2 + P^2 + r_n^2\tau^2] + r_n^{-2}w + \frac{r_n^{-2}(1-w)z}{x(1-x)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{r_n^{-2}(1-w)(1-z)}{y(1-y)} \right\}^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\epsilon_L} + 4\Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) F_{0,1}^{(\tau)}(K, P, 0; r_n) \left. \right\}. \quad (C.25)
\end{aligned}$$

Após derivarmos com relação a  $P^2$  ou  $(K^2)^2$ , calcularmos o somatório e prosseguirmos com a expansão em  $\epsilon_L$ , obtemos o resultado:

$$\begin{aligned}
D_5^{(\tau)}(\mu_n, r_n) &= -\mu_n^{-3n\epsilon_L} \frac{1}{6\epsilon_L^2} \left[ 1 - \frac{7}{4} \epsilon_L + 3[i_2]_m \epsilon_L + \frac{3}{2} \epsilon_L G^\tau(r_n) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \epsilon_L H^\tau(r_n) - 6\epsilon_L F_{0,1}^{(\tau)n}(r_n) \right]. \quad (C.26)
\end{aligned}$$

Os resultados (C.18), (C.22) (C.26) serão usados na seção 4.5 para o cálculo dos expoentes críticos na teoria massiva.

## Apêndice D

### Análise da convergência das funções

$$\Sigma_{\nu}^{(0)}, \Sigma_{\nu}^{(1)} \text{ e } \Sigma_{\nu}^{(2)}$$

Uma condição será estabelecida entre as variáveis  $x$  e  $y$  para que as definições apresentadas em (5.43) sejam convergentes. Escrevemos a primeira delas convenientemente na seguinte forma:

$$\Sigma_{\nu}^{(0)}(x, y) = \frac{2^{\frac{3}{2}-2\nu}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} u_{\nu,n}^{(0)}(x, y), \quad (\text{D.1})$$

dada a definição:

$$u_{\nu,n}^{(0)}(x, y) = \frac{\Gamma(2\nu + 3n)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \nu + 2n\right) n!} x^n F\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}, \nu + \frac{3n}{2}; \frac{3}{4} + \nu + 2n; 1 - y\right). \quad (\text{D.2})$$

Vamos aplicar o critério de D'Alembert (teste da razão) para analisarmos a convergência de (D.1). Ou seja, devemos ter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{\nu,n+1}^{(0)}(x, y)}{u_{\nu,n}^{(0)}(x, y)} < 1, \quad (\text{D.3})$$

como uma condição necessária e suficiente à convergência da série.

Para investigar esse limite, vamos considerar a representação integral para a função hipergeométrica gaussiana [105]:

$$F(a, b; c; 1 - z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty} t^{b-1} (1+t)^{a-c} (1+tz)^{-a} dt, \quad (\text{D.4})$$

mediante as seguintes condições para garantir a convergência da integral acima:

$$\text{Re } b > 0, \text{ Re } c > \text{Re } b \text{ e } |\arg z| < \pi. \quad (\text{D.5})$$

Desse modo, podemos escrever:

$$u_{\nu,n}^{(0)}(x, y) = \frac{\Gamma(2\nu + 3n)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right) n!} x^n I_{\nu,n}(y), \quad (\text{D.6})$$

onde definimos:

$$I_{\nu,n}(y) = \int_0^{\infty} t^{\nu+\frac{3n}{2}-1} (1+t)^{-\frac{1}{2}-\nu-\frac{3n}{2}} (1+yt)^{-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}} dt. \quad (\text{D.7})$$

O comportamento assintótico em  $n \rightarrow \infty$  da definição anterior pode ser determinado através do método do ponto de sela [106]. Reescrevemos então a função (D.7) no formato:

$$I_{\nu,n}(y) = \int_0^{\infty} g_{\nu}(y, t) e^{nf(y,t)} dt, \quad (\text{D.8})$$

com as funções:

$$g_{\nu}(y, t) = t^{\nu-1} (1+t)^{-\frac{1}{2}-\nu} (1+yt)^{-\frac{1}{4}}, \quad (\text{D.9a})$$

$$f(y, t) = -\frac{1}{2} [\ln(1+yt) + 3 \ln(1+t) - 3 \ln t]. \quad (\text{D.9b})$$

No limite  $n \rightarrow \infty$ , teremos o primeiro termo da expansão assintótica de (D.8) dado por [106]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\nu,n}(y) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\left| n \frac{\partial^2 f(y, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} \right|^{\frac{1}{2}}} g_{\nu}(y, t_0) e^{nf(y,t_0)} e^{i\alpha}, \quad (\text{D.10})$$

onde  $t_0$  corresponde ao ponto de sela obtido a partir de:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(y, t) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad (\text{D.11})$$

e  $\alpha$  é dado por:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg \left[ \frac{\partial^2 f(y, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} \right]. \quad (\text{D.12})$$

Resolvendo a equação (D.11), obtemos os resultados  $t_0 = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{y}}$  para  $y \geq 0$ . No entanto, estamos interessados apenas em  $t_0 > 0$ , pois esse resultado está dentro do caminho de integral (no semi-eixo real positivo) da integral em (D.7). Portanto, teremos o ponto de sela:

$$t_0 = 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{y}}. \quad (\text{D.13})$$

Além disso, temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(y, t) = -\frac{3}{2t^2} \left[ 1 - \frac{t^2}{(1+t)^2} - \frac{y^2}{3(1+yt)^2} \right]. \quad (\text{D.14})$$

Substituindo  $t_0$  no resultado acima, vemos que  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(y, t) < 0$  para  $y \geq 0$  e a partir de (D.12), temos  $\alpha = 0$ . Portanto, reescrevemos o limite (D.10) de forma mais simples como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\nu,n}(y) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{nf^{(2)}(y)}} g_{\nu}(y, t_0) e^{nf(y,t_0)}, \quad (\text{D.15})$$

no qual temos a definição:

$$f^{(2)}(y) = - \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(y, t) \right|_{t=t_0}. \quad (\text{D.16})$$

O limite assintótico das funções  $\Gamma$  presentes em (D.6) pode ser extraído da equação [68]:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)} e^{-a \ln z} = 1. \quad (\text{D.17})$$

Usando a fórmula da dobra (5.38) e a equação acima, podemos mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(2\nu + 3n)}{\Gamma(\nu + \frac{3n}{2}) \Gamma(\frac{3}{4} + \frac{n}{2}) n!} \approx \frac{2^{2\nu+2n}}{4\sqrt{3}\pi} 3^{\frac{3n}{2}} \exp \left[ \left( \nu - \frac{3}{4} \right) \ln n + \left( \frac{1}{2} + \nu \right) \ln \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \ln 2 \right]. \quad (\text{D.18})$$

Combinando os resultados (D.15) e (D.18) em (D.6), concluímos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{\nu, n+1}^{(0)}(x, y)}{u_{\nu, n}^{(0)}(x, y)} \approx 12\sqrt{3} x e^{f(y, t_0)}. \quad (\text{D.19})$$

Portanto, o critério de D'Alembert (D.3) implica em  $x < \frac{1}{12\sqrt{3}} e^{-f(y, t_0)}$ . Substituindo as funções dadas em (D.9), juntamente com o valor para  $t_0$ , chegamos à condição de convergência da série (D.1):

$$x < \left( 1 + y + y \sqrt{1 + \frac{3}{y}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 + \sqrt{1 + \frac{3}{y}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{y}}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{D.20})$$

Vamos analisar agora da função (5.43b). A origem das divergências dessa função está no somatório em  $n$  e buscaremos novamente por condições nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  para garantir a convergência da série. Vamos reescrever esse somatório convenientemente como:

$$\Sigma_{\nu}^{(1)}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\nu, n}^{(1)}(x, y, z), \quad (\text{D.21})$$

para  $u_{\nu, n}^{(1)}(x, y, z)$  definido por:

$$u_{\nu, n}^{(1)}(x, y, z) = \frac{x^n}{\Gamma(\frac{1}{2} + n) \Gamma(\frac{3}{4} + \nu + 2n) n!} H_{\nu, n}^{(1)}(y, z). \quad (\text{D.22})$$

A partir da definição (5.40a), da representação (D.4) e com o auxílio da fórmula da dobra (5.38) para simplificar o resultado, obtemos:

$$u_{\nu, n}^{(1)}(x, y, z) = \frac{2^{2\nu+4n-\frac{3}{2}}}{\pi} \frac{x^n}{\Gamma(\frac{1}{2} + n) n!} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s) \Gamma(\frac{1}{4} + \frac{n}{2} + \frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu + \frac{3n}{2} - \frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + s)} z^s I_{\nu, n}(s, y), \quad (\text{D.23})$$

com  $I_{\nu,n}(s, y)$  definido de forma semelhante a (D.7):

$$I_{\nu,n}(s, y) = \int_0^\infty t^{\nu + \frac{3n}{2} - \frac{s}{2} - 1} (1+t)^{-\frac{1}{2} - \nu - \frac{3n}{2} + \frac{s}{2}} (1+yt)^{-\frac{1}{4} - \frac{n}{2} - \frac{s}{2}} dt. \quad (\text{D.24})$$

A representação integral para a função gama  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-tz} t^{z-1} dt$  (válida para  $\text{Re } z > 0$ ), implica na desigualdade:

$$|\Gamma(z)| \leq \Gamma(\text{Re } z). \quad (\text{D.25})$$

A igualdade ocorre quando  $z$  é real. Pelo mesmo motivo, a definição (D.24) resulta em uma desigualdade semelhante:

$$|I_{\nu,n}(s, y)| \leq I_{\nu,n}(\text{Re } s, y). \quad (\text{D.26})$$

Portanto, tomando o módulo da série (D.21), podemos escrever:

$$|\Sigma'_\nu(1)(x, y, z)| \leq \frac{2^{2\nu - \frac{3}{2}}}{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \left| \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2} + s)} z^s ds \right| \sum_{n=0}^{\infty} u'_{\nu,n}(1)(x, y), \quad (\text{D.27})$$

onde definimos:

$$u'_{\nu,n}(1)(x, y) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{n}{2} + \frac{c'}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu + \frac{3n}{2} - \frac{c'}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + n) n!} (16x)^n I_{\nu,n}(c', y). \quad (\text{D.28})$$

Pelo lema 7 apresentado por Braaksma na referência [87], a integral em  $s$  acima é convergente para  $z > 0$ . A convergência da série (D.21) passa então a depender da série das funções  $u'_{\nu,n}(1)(x, y)$  e deverá satisfazer o critério de D'Alembert. Note que a variável  $z$  não entra nesse critério, bastando apenas que  $z > 0$ .

O limite assintótico em  $n$  da função  $I_{\nu,n}(c', y)$  é obtido de forma análoga a (D.15) através do método do ponto de sela. Neste caso, teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\nu,n}(c', y) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n f^{(2)}(y)}} g_\nu(c'; y, t_0) e^{n f(y, t_0)}, \quad (\text{D.29})$$

dada a redefinição:

$$g_\nu(c'; y, t) = t^{\nu - \frac{c'}{2} - 1} (1+t)^{-\frac{1}{2} - \nu + \frac{c'}{2}} (1+yt)^{-\frac{1}{4} - \frac{c'}{2}}, \quad (\text{D.30})$$

enquanto que  $f(y, t)$  e  $f^{(2)}(y)$  permanecem os mesmos das respectivas definições (D.9b) e (D.16). Além disso, seguindo os mesmos passos empregados na obtenção do resultado (D.18), chegamos ao limite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{c'}{2} + \frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu - \frac{c'}{2} + \frac{3n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + n) n!} &\approx 2^{-\frac{1}{2} - 2n} 3^{-\frac{1}{2} + \frac{3n}{2}} \times \\ &\times \exp \left[ - \left( \frac{3}{4} - \nu \right) \ln n + \left( \frac{3}{4} - \nu \right) \ln 2 + \left( \frac{1}{2} + \nu - \frac{c'}{2} \right) \ln 3 \right]. \quad (\text{D.31}) \end{aligned}$$

Portanto, a partir da definição (D.28) e dos resultados (D.29) e (D.31), calculamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'_{\nu, n+1}(x, y)}{u'_{\nu, n}(x, y)} \approx 12\sqrt{3}xe^{f(y, t_0)}. \quad (\text{D.32})$$

Comparando o limite acima com (D.19) concluímos que a condição satisfeita pelas variáveis  $x$  e  $y$  para garantir a convergência absoluta da série (D.21) é idêntica à apresentada pela desigualdade (D.20). Uma análise completamente análoga mostra que teremos os mesmos critérios para a convergência absoluta da função (5.43c).

# Apêndice E

## Regularização das Integrais de Feynman: dimensão compacta ao longo do eixo de competição

Antes de regularizarmos as integrais em (5.101), vamos reescrever a função (5.43a) em um formato adequado. Com essa finalidade, consideremos inicialmente o termo  $(1+x)^{-a}$ , que pode ser relacionado com uma função hipergeométrica através da identidade [105]:

$$(1+x)^{-a} = {}_1F_0(a; -x). \quad (\text{E.1})$$

Usando a fórmula (5.29) seguida pela representação integral de Mellin-Barnes (5.28) para a função  $G$  de Meijer, chegamos ao resultado:

$$(1+x)^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(-s)\Gamma(a+s)x^s ds, \quad (\text{E.2})$$

onde devemos ter:

$$-\text{Re } a < \delta < 0. \quad (\text{E.3})$$

Outra identidade importante pode ser deduzida com o auxílio da figura E.1. A partir da representação integral de Cauchy e do teorema dos resíduos aplicado ao polo  $s = 0$ , podemos escrever:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{C \cup C'} \Gamma(-s)\Gamma(a+s)x^s ds = 1. \quad (\text{E.4})$$

As linhas tracejadas estão em  $-i\infty$  e  $i\infty$  no plano complexo e as integrais ao longo dessas linhas serão nulas. Podemos ver isso através de [68]:

$$|\Gamma(x+iy)| \stackrel{|y| \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{2\pi} |y|^{-\frac{1}{2}+x} e^{-\frac{\pi}{2}|y|},$$

de modo que o integrando anula-se em cada linha tracejada. Portanto, usando (E.2) e a identidade (E.4), obtemos:

$$(1+x)^{-a} - 1 = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta'-i\infty}^{\delta'+i\infty} \Gamma(-s)\Gamma(a+s)x^s ds, \quad \text{para } 0 < \delta' < 1. \quad (\text{E.5})$$

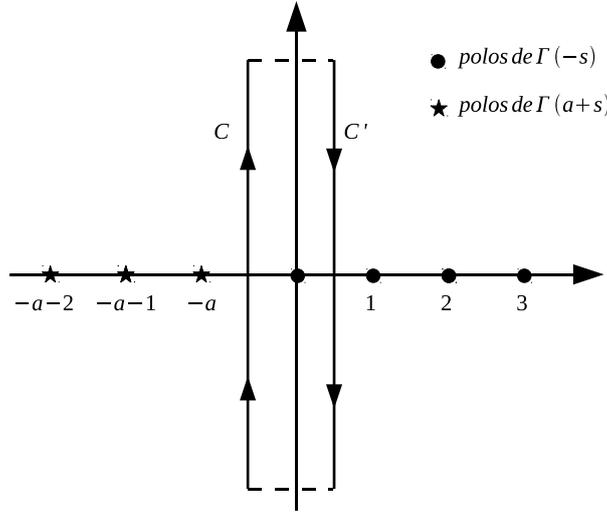


Figura E.1: Plano complexo com um os polos do integrando da representação (E.2). Por simplicidade, consideramos  $\text{Im } a = 0$ .

Substituindo o resultado (E.2) na representação integral (D.4) para a função hipergeométrica gaussiana, podemos escrever:

$$F(a, b; c; 1-z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^\infty dt t^{b-1} (1+t)^{a-c} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \Gamma(-s)\Gamma(a+s)(zt)^s. \quad (\text{E.6})$$

A comutação entre as integrais em  $s$  e  $t$  só é possível se tivermos  $\text{Re}(b+s) > 0$  e  $\text{Re}(a+b-c+s) < 0$ . Combinando essas duas condições, juntamente com (E.3), vemos que  $\delta$  deve ser tal que:

$$-\min(\text{Re } a, \text{Re } b) < \delta < \min[0, \text{Re}(c-a-b)]. \quad (\text{E.7})$$

Uma vez realizada a comutação, a integral em  $t$  pode ser identificada com uma das representações da função beta de Euler [68]:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^\infty t^{x-1} (1+t)^{-x-y} dt, \quad \text{para } \text{Re } x > 0 \text{ e } \text{Re } y > 0. \quad (\text{E.8})$$

Desse modo, o resultado (E.6) torna-se:

$$F(a, b; c; 1-z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(-s)\Gamma(c-a-b-s)\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)z^s ds. \quad (\text{E.9})$$

Realizando um procedimento semelhante com a identidade (E.5), chegamos a:

$$F(a, b; c; 1 - z) - \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - b)\Gamma(c - a)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c - b)\Gamma(c - a)} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta' - i\infty}^{\delta' + i\infty} \Gamma(-s)\Gamma(c - a - b - s)\Gamma(s + a)\Gamma(s + b)z^s ds, \quad (\text{E.10})$$

para  $\delta'$  satisfazendo:

$$0 < \delta' < \min[1, \text{Re}(c - a - b)]. \quad (\text{E.11})$$

De posse dessas representações, tomamos o somatório envolvido na definição da função (5.43a) e separamos o modo zero ( $n = 0$ ) dos demais modos. Assim, podemos expressar essa função em três partes da seguinte forma:

$$\Sigma_\nu^{(0)}(x, y) = \Gamma(\nu) + \Theta_\nu(y) + \Theta'_\nu(x, y), \quad (\text{E.12})$$

dadas as definições:

$$\Theta_\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta' - i\infty}^{\delta' + i\infty} \Gamma(-s)\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} + s\right)\Gamma(\nu + s)y^s ds, \quad (\text{E.13a})$$

$$\Theta'_\nu(x, y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8x)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right)n!} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta' - i\infty}^{\delta' + i\infty} \Gamma(-s)\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2} + s\right)\Gamma\left(\nu + \frac{3n}{2} + s\right)y^s ds. \quad (\text{E.13b})$$

Uma definição importante para a simplificação das equações quando estivermos lidando com integrais de 2 loops é dada por:

$$\mathcal{I}^\tau(\alpha, \beta, \gamma; x, k) = r \sum_{l=-\infty}^{\infty} (rl)^{4\gamma} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q - k)^2 + r^4(l + \tau)^4 + 1]^\alpha} \times \\ \times \frac{1}{\{x(1 - x)[q^2 + (3x^2 - 3x + 1)r^4 l^4 + 1]\}^\beta}. \quad (\text{E.14})$$

Realizando uma parametrização de Feynman seguida pela solução da integral em  $q$ , obtemos:

$$\mathcal{I}^\tau(\alpha, \beta, \gamma; x, k) = \frac{S_{d-1}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha + \beta - \frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} r^{1+4\gamma+2(d-1)-4\alpha-4\beta} [x(1 - x)]^{-\beta} \times \\ \int_0^1 dy y^{\frac{d-1}{2}-\beta-1} (1 - y)^{\beta-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^{4\gamma} [(l + \tau)^4 + A(x, y)l^4 + (1 - y)r^{-4}k^2 + r^{-4}B(x, y)]^{\frac{d-1}{2}-\alpha-\beta}, \quad (\text{E.15})$$

onde definimos:

$$A(x, y) = \frac{1}{y}(1 - y)(3x^2 - 3x + 1), \quad (\text{E.16a})$$

$$B(x, y) = 1 + \frac{1 - y}{xy(1 - x)}. \quad (\text{E.16b})$$

Passaremos agora à regularização da integral de 2 loops (5.101a). Para tal finalidade, substituímos a expressão (5.103) em (5.101a) e levamos em consideração a representação (E.12) com as definições dadas em seguida. Portanto, teremos o resultado:

$$\begin{aligned} I_4^{(\tau)}(0; \mu_1, r) = & \mu_1^{-2\epsilon_L} \frac{S_{d-1}}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \mathcal{J}^\tau\left(2, \frac{\epsilon_L}{2}, 0; x, 0\right) + \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta' - i\infty}^{\delta' + i\infty} ds \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + s\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2} + s\right) \times \\ & \quad \times [9x^2(1-x)^2]^s \mathcal{J}^\tau\left(2, \frac{\epsilon_L}{2} + s, s; x, 0\right) + \\ & + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2x^2(1-x)^2(1-2x)^2]^n}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right) n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} ds \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2} + s\right) \times \\ & \quad \times \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2} + \frac{3n}{2} + s\right) [9x^2(1-x)^2]^s \mathcal{J}^\tau\left(2, \frac{\epsilon_L}{2} + \frac{3n}{2} + s, \frac{3n}{2} + s; x, 0\right) + \\ & \quad \left. + r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q Z^{-\epsilon_L} \frac{[\Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(1)}(\tau, X, Y, r^{-2}Z) - \Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(2)}(\tau, X, Y, r^{-2}Z)]}{[q^2 + r^4(l + \tau)^4 + 1]^2} \right\}. \quad (\text{E.17}) \end{aligned}$$

Veremos a seguir que o primeiro termo entre chaves na expressão acima possuem polos duplos e simples em  $\epsilon_L$ , enquanto que o segundo e o terceiro possuem apenas polos simples. Já o termo na última linha é resultante da inserção das correções de tamanho finito e discutiremos no final deste apêndice que ele é regular em  $\epsilon_L$ . Como estamos interessados apenas nas duas primeiras ordens  $\epsilon_L^{-1}$  e  $\epsilon_L^{-2}$ , podemos desprezá-lo no decorrer da nossa análise.

Utilizando o resultado (E.15) juntamente com a representação (5.42) e realizando a expansão em  $\epsilon_L$  seguindo argumentos análogos aos usados no apêndice A, podemos escrever até ordem  $\epsilon_L^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \mathcal{J}^\tau\left(2, \frac{\epsilon_L}{2}, 0; x, 0\right) = & \frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \frac{1}{\epsilon_L^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_L}{2} + \psi(1)\epsilon_L + \right. \\ & \left. + i_c^{(1)}\epsilon_L + \epsilon_L \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right], \quad (\text{E.18}) \end{aligned}$$

com  $i_c^{(1)}$  definido por:

$$i_c^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y(1-y)^{-1} \left\{ [1 - 3(1-y)x(1-x)]^{-\frac{1}{4}} - 1 \right\}. \quad (\text{E.19})$$

O segundo e o terceiro termos de (E.17) são de ordem  $\epsilon_L^{-1}$ . Essa singularidade vem do somatório

$$S = \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^{4(\frac{3n}{2}+s)} [(l+\tau)^4 + A(x,y)l^4 + r^{-4}B(x,y)]^{-\frac{1}{4}-\epsilon_L-\frac{3n}{2}-s}, \quad (\text{E.20})$$

presente na definição de:

$$\mathcal{I}^\tau \left( 2, \frac{\epsilon_L}{2} + \frac{3n}{2} + s, \frac{3n}{2} + s; x, 0 \right), \quad (\text{E.21})$$

conforme podemos ver em (E.15). No limite  $|l| \rightarrow \infty$ , o termo sendo somado comporta-se como  $|l|^{-1-4\epsilon_L}$  e portanto  $S$  em (E.20) terá um polo em  $\epsilon_L$  cujo resíduo é o dobro do resíduo da função zeta  $\zeta(1+4\epsilon_L)$ . Ou seja, podemos reescrever  $S$  como:

$$S = 2\zeta(1+4\epsilon_L) + \text{parte regular} = \frac{1}{2\epsilon_L} + \text{parte regular}, \quad (\text{E.22})$$

de acordo com as eqs. (5.66) e (5.70a). Tomando apenas a parte singular de (E.21) e substituindo na expressão (E.17), juntamente com (E.18), chegamos ao seguinte resultado até ordem  $\epsilon_L^{-1}$ :

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu_1, r) = \mu_1^{-2\epsilon_L} \frac{S_{d-1}^2}{4} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \right]^2 \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_L}{2} + \psi(1)\epsilon_L + \right. \\ \left. + (i_c^{(1)} + i_c^{(2)} + i_c^{(3)})\epsilon_L + \epsilon_L \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0, r^{-2}) \right], \quad (\text{E.23})$$

com  $i_c^{(2)}$  e  $i_c^{(3)}$  definidos como:

$$i_c^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y(1-y)^{-1} [1-3(1-y)x(1-x)]^{-\frac{1}{4}} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta'-i\infty}^{\delta'+i\infty} \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) \left[ \Gamma\left(\frac{1}{4}+s\right) \right]^2 [u(x,y)]^s ds, \quad (\text{E.24a})$$

$$i_c^{(3)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2 [\Gamma(\frac{1}{4})]^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{3}{4}+\frac{n}{2}) n!} \int_0^1 dx \int_0^1 dy [x(1-x)]^{\frac{n}{2}} (1-2x)^{2n} y(1-y)^{\frac{3n}{2}-1} \times \\ \times [1-3(1-y)x(1-x)]^{-\frac{1}{4}-\frac{3n}{2}} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}+s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{3n}{2}+s\right) [u(x,y)]^s ds, \quad (\text{E.24b})$$

além da definição:

$$u(x,y) = \frac{9x(1-x)(1-y)}{1-3(1-y)x(1-x)}. \quad (\text{E.25})$$

Se usarmos as identidades (E.9) e (E.10) para expressar as integrais acima em termos de funções hipergeométricas, podemos mostrar que a soma  $i_c = i_c^{(1)} + i_c^{(2)} + i_c^{(3)}$  corresponde à expressão dada em (5.106a). Continuando com a expansão em  $\epsilon_L$  e usando a definição (4.28), reescrevemos (E.23) como:

$$I_4^{(\tau)}(0; \mu_1, r) = \mu_1^{-2\epsilon_L} \frac{1}{2\epsilon_L} \left[ 1 - \frac{3\epsilon}{2} + i_c \epsilon_L + 2[i_2]_1 \epsilon_L + \epsilon_L \Sigma_0^{(1)}(\tau, 0, 0; r^{-2}) \right], \quad (\text{E.26})$$

onde o fator  $\frac{S_{d-1}^2}{4} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \right]^2$  foi absorvido na redefinição da constante de acoplamento.

A próxima integral a ser regularizada é aquela apresentada em (5.101b). Substituindo o resultado (5.103) nessa integral e levando em consideração a representação (E.12), chegamos, depois de derivarmos com relação a  $k^2$  no ponto  $k = 0$ , a uma expressão análoga a (E.17). A saber:

$$\begin{aligned} D_3^{(\tau)}(\mu_1, r) = & \mu_1^{-2\epsilon_L} \frac{S_{d-1}}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \mathcal{I}^{\tau} \left(1, \frac{\epsilon_L}{2}, 0; x\right) + \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta'-i\infty}^{\delta'+i\infty} ds \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}+s\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}+s\right) \times \\ & \quad \times [9x^2(1-x)^2]^s \mathcal{I}^{\tau} \left(1, \frac{\epsilon_L}{2}+s, s; x\right) + \\ & + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2x^2(1-x)^2(1-2x)^2]^n}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{n}{2}\right) n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}+s\right) \times \\ & \quad \times \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}+\frac{3n}{2}+s\right) [9x^2(1-x)^2]^s \mathcal{I}^{\tau} \left(1, \frac{\epsilon_L}{2}+\frac{3n}{2}+s, \frac{3n}{2}+s; x\right) + \\ & \left. + r \frac{\partial}{\partial k^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q Z^{-\epsilon_L} \frac{\left[ \Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(1)}(\tau, X, Y, r^{-2}Z) - \Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(2)}(\tau, X, Y, r^{-2}Z) \right]}{(q-k)^2 + r^4(l+\tau)^4 + 1} \right|_{k=0} \right\}. \quad (\text{E.27}) \end{aligned}$$

A única diferença em relação a (E.17) está na definição:

$$\mathcal{I}^{\tau} \left(1, \frac{\epsilon_L}{2} + \frac{3n}{2} + s, \frac{3n}{2} + s; x\right) = \frac{\partial}{\partial k^2} \mathcal{I}^{\tau} \left(1, \frac{\epsilon_L}{2} + \frac{3n}{2} + s, \frac{3n}{2} + s; x, k\right) \Big|_{k=0}, \quad (\text{E.28})$$

além da derivação do termos de correção do tamanho finito, que são todos regulares em  $\epsilon_L$ . O somatório em  $l$  presente na definição acima é idêntico àquele mostrado em (E.20), resultando no mesmo polo mostrado em (E.22). Como estamos interessados apenas na primeira ordem da expansão em  $\epsilon_L$ , tomaremos apenas a parte singular desse somatório obtida em (E.22). Portanto, até ordem  $\epsilon_L^{-1}$ , obtemos:

$$D_3^{(\tau)}(\mu_1, r) = -\mu_1^{-2\epsilon_L} \frac{S_{d-1}^2}{4} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \right]^2 \frac{1}{8\epsilon_L} (1 + j_c^{(1)} + j_c^{(2)} + j_c^{(3)}), \quad (\text{E.29})$$

no qual as constantes  $j_c^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são definidas como:

$$j_c^{(1)} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \left\{ [1 - 3(1-y)x(1-x)]^{-\frac{1}{4}} - 1 \right\}, \quad (\text{E.30a})$$

$$j_c^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y [1 - 3(1-y)x(1-x)]^{-\frac{1}{4}} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta'-i\infty}^{\delta'+i\infty} \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right) \left[ \Gamma\left(\frac{1}{4} + s\right) \right]^2 [u(x, y)]^s ds, \quad (\text{E.30b})$$

$$j_c^{(3)} = \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}) \Gamma(\frac{3}{4} + \frac{n}{2}) n!} \int_0^1 dx \int_0^1 dy [x(1-x)]^{\frac{n}{2}} (1-2x)^{2n} y(1-y)^{\frac{3n}{2}} \times \\ \times [1 - 3(1-y)x(1-x)]^{-\frac{1}{4} - \frac{3n}{2}} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(-s) \Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2} + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{3n}{2} + s\right) [u(x, y)]^s ds. \quad (\text{E.30c})$$

A função  $u(x, y)$  é definida em (E.25). As identidades (E.9) e (E.10) podem ser usadas novamente para mostrarmos que a soma  $j_c = j_c^{(1)} + j_c^{(2)} + j_c^{(3)}$  resulta na expressão dada em (5.106b). Continuando com a expansão em  $\epsilon_L$  de (E.29), obtemos:

$$D_3^{(\tau)}(\mu_1, r) = -\mu_1^{-2\epsilon_L} \frac{1}{8\epsilon_L} (1 + j_c). \quad (\text{E.31})$$

O fator  $\frac{S_{d-1}^2}{4} [\Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{7}{4})]^2$  foi novamente removido devido à redefinição da constante de acoplamento.

A análise do termo de correção em (E.17) ainda resta a ser realizada. Começamos portanto considerando uma nova representação para a função definida em (5.40a). A partir da representação (E.9) e da fórmula da dobra (5.38), podemos escrevê-la em termos de uma integral de Mellin-Barnes dupla:

$$H_{\nu, n}^{(1)}(y, z) = \frac{2^{-\frac{3}{2} + 2\nu + 4n}}{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4} + \nu + 2n\right) \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Gamma(-s) \Gamma(-s') \Gamma\left(\frac{1}{2} - s'\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2} + \frac{s}{2} + s'\right) \Gamma\left(\nu + \frac{3n}{2} - \frac{s}{2} + s'\right) y^{s'} z^s ds ds'. \quad (\text{E.32})$$

De acordo com a condição (E.7), devemos ter  $\delta$  tal que:

$$-\min\left(\frac{1}{4} + \frac{c'}{2}, -\frac{c'}{2}\right) < \delta < 0, \quad (\text{E.33})$$

independentemente de  $n$  e  $\nu$ . Lembramos que  $-\frac{1}{2} < c' < 0$ . Substituindo (E.32) em (5.43b) e usando a definição (E.14), calculamos a primeira das correções de tamanho finito na última linha de (E.17) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q Z^{-\epsilon_L} \frac{\Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(1)}(\tau, X, Y, r^{-2}Z)}{[q^2 + r^4(l + \tau)^4 + 1]^2} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m\tau) \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[4x^2(1-x)^2(1-2x)^2]^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) n!} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds ds' \Gamma(-s)\Gamma(-s')\Gamma\left(\frac{1}{2} - s'\right) \times \\
&\times \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2} + \frac{s}{2} + s'\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2} + \frac{3n}{2} - \frac{s}{2} + s'\right) (\pi^2 m^2 r^{-2})^s [9x^2(1-x)^2]^{s'} \times \\
&\times \mathcal{J}^\tau \left(2, \frac{\epsilon_L}{2} + \frac{3n}{2} + s' - \frac{s}{2}, \frac{3n}{2} + s'; x, 0\right). \quad (\text{E.34})
\end{aligned}$$

Diferentemente de (E.21), vemos a partir do resultado (E.15), que

$$\mathcal{J}^\tau \left(2, \frac{\epsilon_L}{2} + \frac{3n}{2} + s' - \frac{s}{2}, \frac{3n}{2} + s'; x, 0\right)$$

é dados em termos do somatório:

$$\bar{S} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^{4\left(\frac{3n}{2} + s'\right)} [(l + \tau)^4 + A(x, y)l^4 + r^{-4}B(x, y)]^{-\frac{1}{4} - \epsilon_L - \frac{3n}{2} - s' + \frac{s}{2}}. \quad (\text{E.35})$$

Tomando o limite

$$\lim_{|l| \rightarrow \infty} l^{4\left(\frac{3n}{2} + s'\right)} [(l + \tau)^4 + A(x, y)l^4 + r^{-4}B(x, y)]^{-\frac{1}{4} - \epsilon_L - \frac{3n}{2} - s' + \frac{s}{2}} \approx |l|^{-1 - 4\epsilon_L + 2s}, \quad (\text{E.36})$$

concluimos que  $\bar{S}$  não terá polo em  $\epsilon_L$ , pois  $\text{Re}(-\epsilon_L + \frac{s}{2}) = -\epsilon_L + \frac{s}{2} < 0$  (para  $\epsilon_L \geq 0$ ) e a correção de tamanho finito (E.34) será regular em  $\epsilon_L$ , conforme queríamos mostrar.

A outra contribuição na última linha de (E.17), proveniente do tamanho finito, vem do termo:

$$r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q Z^{-\epsilon_L} \frac{\Sigma_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(2)}(\tau, X, Y, r^{-2}Z)}{[q^2 + r^4(l + \tau)^4 + 1]^2}. \quad (\text{E.37})$$

Uma análise completamente análoga àquela que levou ao resultado (E.34) mostra que esse termo também é regular. O mesmo também pode ser dito com relação ao último termo presente em (E.27).

# Referências Bibliográficas

- [1] Th. Andrews. On the Continuity of the Gaseous and Liquid States of Matter. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 159:575, 1869.
- [2] M. E. Fisher. The Theory of Equilibrium Critical Phenomena. *Reports on Progress in Physics*, 30:615, 1967.
- [3] P. Heller. Experimental Investigations of Critical Phenomena. *Reports on Progress in Physics*, 30:731, 1967.
- [4] B. Widom. Equation of State in the Neighborhood of the Critical Point. *Journal of Chemical Physics*, 43:3898, 1965.
- [5] Shang-Keng Ma. *Modern Theory of Critical Phenomena*. Perseus Publishing, 2000.
- [6] L. Onsager. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review*, 65:117, 1944.
- [7] K. G. Wilson. Renormalization Group and Critical Phenomena I. Renormalization Group and The Kadanoff Scaling Picture. *Physical Review B*, 4:3174, 1971.
- [8] K. G. Wilson. Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior. *Physical Review B*, 4:3184, 1971.
- [9] K. G. Wilson and M. E. Fisher. Critical Exponents in 3.99 Dimensions. *Physical Review Letters*, 28:240, 1972.
- [10] K. G. Wilson. Feynman-Graph Expansion for Critical Exponents. *Physical Review Letters*, 28:548, 1972.
- [11] K. G. Wilson and J. Kogut. The Renormalization Group and the  $\epsilon$  Expansion. *Physics Reports*, 12:75, 1974.
- [12] L. P. Kadanoff. Scaling Laws for Ising Models Near  $T_c$ . *Physics*, 2:263, 1966.

- 
- [13] E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin. Field Theoretical Approach to Critical Phenomena. In C. Domb and M. S. Green, editors, *Phase Transition and Critical Phenomena*, volume 6. Academic Press, 1976.
- [14] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 4th edition, 2002.
- [15] D. J. Amit and V. Martín-Mayor. *Field Theory, The Renormalization Group and Critical Phenomena*. World Scientific, 3rd edition, 2005.
- [16] B. A. Scheibner, M. R. Meadows, R. C. Mockler, and W. J. O’Sullivan. Critical Phenomena in Fluid Films: Scaling Crossover and Law of Corresponding States. *Physical Review Letters*, 43:590, 1979.
- [17] M. R. Meadows, B. A. Scheibner, R. C. Mockler, and W. J. O’Sullivan. Critical Phenomena in Fluid Films: Critical-Temperature-Shift, Crossover-Temperature, and Coexistence-Curve-Amplitude Exponents, and a Fluid-Boundary Interaction. *Physical Review Letters*, 43:592, 1979.
- [18] T. P. Chen and F. M. Gasparini. Scaling of the Specific Heat of Confined Helium Near  $T_\lambda$ . *Physical Review Letters*, 40:331, 1978.
- [19] F. M. Gasparini, G. Agnolet, and J. D. Reppy. Failure of Bulk-Correlation-Length Scaling for the Superfluid Density of Confined  $^4\text{He}$ . *Physical Review B*, 29:138, 1984.
- [20] F. M. Gasparini, M. O. Kimball, K. P. Mooney, and M. Diaz-Avila. Finite-Size Scaling of  $^4\text{He}$  at the Superfluid Transition. *Reviews of Modern Physics*, 80:1009, 2008.
- [21] W. Huhn and V. Dohm. Possible Resolution of the Finite-Size Scaling Problem in  $^4\text{He}$ . *Physical Review Letters*, 61:1368, 1988.
- [22] M. Krech and S. Dietrich. Finite-Size Scaling for Critical Films. *Physical Review Letters*, 66:345, 1991.
- [23] M. Krech and S. Dietrich. Free Energy and Specific Heat of Critical Films and Surfaces. *Physical Review A*, 46:1886, 1992.
- [24] M. Krech and S. Dietrich. Specific Heat of Critical Films, the Casimir Force and Wetting Films Near Critical End Points. *Physical Review A*, 46:1922, 1992.
- [25] A. Maciolek, A. Gambassi, and S. Dietrich. Critical Casimir Effect in Superfluid Wetting Films. *Physical Review E*, 76:031124, 2007.
- [26] B. S. Kay. Casimir Effect in Quantum Field Theory. *Physical Review D*, 20:3052, 1979.

- [27] L. H. Ford. Quantum Vacuum Energy in General Relativity. *Physical Review D*, 11:3370, 1975.
- [28] L. H. Ford. Casimir Effect for a Self-Interacting Scalar Field. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 368:305, 1979.
- [29] L. H. Ford. Vacuum Polarization in a Nonsimply Connected Spacetime. *Physical Review D*, 21:933, 1980.
- [30] D. J. Toms. Casimir Effect and Topological Mass. *Physical Review D*, 21:928, 1980.
- [31] L. H. Ford and T. Yoshimura. Mass Generation by Self-Interaction in Non-Minkowskian Spacetimes. *Physics Letters A*, 70:89, 1979.
- [32] N. D. Birrel and L. H. Ford. Renormalization of Self-Interacting Scalar Field Theories in a Nonsimply Connected Spacetime. *Physical Review D*, 22:330, 1980.
- [33] M. B. Kislinger and P. D. Morley. Collective Phenomena in Gauge Theories. II. Renormalization in Finite-Temperature Field Theory. *Physical Review D*, 13:2771, 1976.
- [34] A. M. Nemirovsky and K. F. Freed. Renormalization Group Treatment of Finite Size Scaling with  $\epsilon$  Expansion. *Journal of Physics A*, 18:L319, 1985.
- [35] A. M. Nemirovsky and K. F. Freed. Surface and Finite Size Effects in Critical Phenomena. *Nuclear Physics B*, 270:423, 1986.
- [36] E. Brezin. An Investigation of Finite Size Scaling. *J. Physique*, 43:15, 1982.
- [37] M. E. Fischer and M. N. Barber. Scaling Theory for Finite-Size Effects in the Critical Region. *Physical Review Letters*, 28:1516, 1972.
- [38] J. B. da Silva Jr. and M. M. Leite. Parallel Plates and Critical Exponents for Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions. In *NSTI-Nanotech*, volume 2, page 137, 2011.
- [39] J. B. da Silva Jr. and M. M. Leite. Critical Exponents from Parallel Plate Geometries Subject to Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Physics*, 53:43303, 2012.
- [40] Y. Shapira, C. C. Becerra, N. F. Oliveira Jr, and T. S. Chang. Phase Diagram, Susceptibility and Magnetostriction of  $MnP$ : Evidence for a Lifshitz Point. *Physical Review B*, 24:2780, 1981.
- [41] C. C. Becerra, Y. Shapira, N. F. Oliveira, and T. S. Chang. Lifshitz Point in  $MnP$ . *Physical Review Letters*, 44:1692, 1980.

- [42] C. C. Becerra, H. J. Brumatto, and N. F. Oliveira Jr. Line of Multicritical Lifshitz Points in the Phase Diagram of  $MnP$ . *Physical Review B*, 54:15997, 1996.
- [43] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas. Theoretical Interpretation for the Occurrence of a Lifshitz Point in  $MnP$ . *Physical Review B*, 24:5430, 1981.
- [44] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas. Spin-Localized Model for the Lifshitz Point in  $MnP$ . *Physical Review B*, 29:6341, 1984.
- [45] A. Zięba, C. C. Becerra, H. Fjellvåg, N. F. Oliveira Jr, and A. Kjekshus.  $Mn_{0.9}Co_{0.1}P$  in an External Field: Lifshitz Point and Irreversibility Behavior of Disordered Incommensurate Phases. *Physical Review B*, 46:3380, 1992.
- [46] T. Plackowski, M. Matusiak, and J. Sznajd. Isothermal Magnetocaloric Effect in the Vicinity of the Lifshitz Point in  $Mn_{0.9}Co_{0.1}P$ . *Physica Status Solidi B*, 249:158, 2012.
- [47] Yu. M. Vysochanskiĭ and V. Yu. Slivka. Lifshitz Point on the State Diagram of Ferroelectrics. *Soviet Physics Uspekhi*, 35:123, 1992.
- [48] R. M. Yevych, Yu M. Vysochanskii, M. M. Khoma, and S. I. Perechinskii. Lattice Instability at Phase Transitions Near the Lifshitz Point in Proper Monoclinic Ferroelectrics. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 18:4047, 2006.
- [49] A. Oleaga, A. Salazar, A. A. Kohutych, and Yu. M. Vysochanskii. Critical Behavior Near the Lifshitz Point in  $Sn_2P_2(S_{1-x}Se_x)_6$  Ferroelectric Semiconductors from Thermal Diffusivity Measurements. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23:25902, 2011.
- [50] E. Abrahams and I. E. Dzyaloshinskii. A Possible Lifshitz Point for TTF-TCNQ. *Solid State Communications*, 23:883, 1977.
- [51] C. Hartzstein, V. Zevin, and M. Weger. Landau Theory of Phase Transitions in TTF-TCNQ. *Journal de Physique*, 41:677, 1980.
- [52] A. Michelson. Physical Realization of a Lifshitz Point in Liquid Crystals. *Physical Review Letters*, 39:464, 1977.
- [53] I. Mušević, B. Žekš, R. Blinc, Th. Rasing, and P. Wyder. Phase Diagram of a Ferroelectric Chiral Smectic Liquid Crystal Near the Lifshitz Point. *Physical Review Letters*, 48:192, 1982.
- [54] S. B. Rananavare, V. G. K. M. Pisipati, and E. W. Mong. Smectic-A — Smectic-C — Smectic-C\* Multicritical Point in Ferroelectric Liquid Crystals. *Physical Review Letters*, 72:3558, 1994.

- [55] A. E. Jacobs and L. Benguigui. Landau Theory of the Helicoidal C\* Phase in Smectic Liquid Crystals: Re-entrance of the Smectic-C\* Phase and Order of the Smectic-C - Smectic-C\* Transition. *Physical Review A*, 39:3622, 1989.
- [56] B. Zalar, A. Gregorovič, M. Simsič, A. Zidanšek, and R. Blinc. Anisotropy of the Critical Magnetic Field in a Ferroelectric Liquid Crystal. *Physical Review Letters*, 80:4458, 1998.
- [57] M. Škarabot, R. Blinc, and I. Muševič. Lifshitz Point in the Phase Diagram of a Ferroelectric Liquid Crystal in an External Magnetic Field. *Physical Review E*, 61:3961, 2000.
- [58] G. H. Fredrickson and S. T. Milner. Thermodynamics of Random Copolymer Melts. *Physical Review Letters*, 67:835, 1991.
- [59] F. S. Bates, W. Maurer, T. P. Lodge, M. F. Schulz, and M. W. Matsen. Isotropic Lifshitz Behavior in Block Copolymer-Homopolymer Blends. *Physical Review Letters*, 75:4429, 1995.
- [60] R. R. Netz and M. Schick. Liquid-Crystalline Phases of Semiflexible Diblock Copolymer Melts. *Physical Review Letters*, 77:302, 1996.
- [61] F. S. Bates, W. M. Maurer, P. M. Lipic, M. A. Hillmyer, K. Almdal, K. Mortensen, G. H. Fredrickson, and T. P. Lodge. Polymeric Bicontinuous Microemulsions. *Physical Review Letters*, 79:849, 1997.
- [62] J. Singleton. Why do Physicists Love Charge-Transfer Salts? *Journal of Solid State Chemistry*, 168:675, 2002.
- [63] R. J. Elliot. Phenomenological Discussion of Magnetic Ordering in the Heavy Rare-Earth Metals. *Physical Review*, 124:346, 1961.
- [64] W. Selke and M. E. Fisher. Spatially Modulated Phase in Ising Models with Competing Interactions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 15:403, 1980.
- [65] W. Selke. Spatially Modulated Structures. In C. Domb and J. L. Lebowitz, editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 15. Academic Press, 1992.
- [66] R. M. Hornreich, M. Luban, and S. Shtrikman. Critical Behavior at the Onset of  $k$ -Space Instability on the  $\lambda$  Line. *Physical Review Letters*, 35:1678, 1975.
- [67] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [68] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 7th edition, 2007.

- [69] M. E. Fischer and A. E. Ferdinand. Interfacial, Boundary and Size Effects at Critical Points. *Physical Review Letters*, 19:169, 1967.
- [70] M. N. Barber. Finite-Size Scaling. In C. Domb and J. L. Lebowitz, editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 8. Academic Press, 1983.
- [71] G. W. Gibbons. Thermal Zeta Functions. *Physics Letters A*, 60:385, 1977.
- [72] J. Ambjorn and S. Wolfram. Properties of Vacuum. I. Mechanical and Thermodynamic. *Annals of Physics*, 147:1, 1983.
- [73] H. Boschi-Filho and C. Farina. Generalized Thermal Zeta-Functions. *Physics Letters A*, 205:255, 1995.
- [74] L. C. de Albuquerque and M. M. Leite. Anisotropic Lifshitz Point at  $O(\epsilon_L^2)$ . *Journal of Physics A*, 34:L327, 2001.
- [75] M. M. Leite. Renormalization-Group Picture of the Lifshitz Critical Behavior. *Physical Review B*, 67:104415, 2003.
- [76] P. R. S. Carvalho and M. M. Leite. Callan-Symanzik Method for  $m$ -Axial Lifshitz Points. *Annals of Physics*, 324:178, 2009.
- [77] H. W. Diehl and M. Shpot. Critical Behavior at  $m$ -Axial Lifshitz Points: Field-Theory Analysis and  $\epsilon$ -Expansion Results. *Physical Review B*, 62:12338, 2000.
- [78] M. Shpot and H. W. Diehl. Two-Loop Renormalization-Group Analysis of Critical Behavior at  $m$ -Axial Lifshitz Points. *Nuclear Physics B*, 612:340, 2001.
- [79] R. B. Paris and D. K. Kaminski. *Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals*. Cambridge University Press, 2001.
- [80] T. S. Chang. Field Theories with High Derivatives. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 44:76, 1948.
- [81] J. S. de Wet. On the Quantization of Field Theories Derived from Higher Order Lagrangians. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 44:546, 1948.
- [82] A. O. Barut and G. H. Mullen. Action Principle for Higher Order Lagrangians with an Indefinite Metric. *Annals of Physics*, 20:203, 1962.
- [83] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, 2nd edition, 1981.
- [84] Y. L. Luke. *The Special Functions and Their Approximations*, volume 1. Academic Press, 1969.

- [85] A. Erdélyi et al. *Higher Transcendental Functions*, volume 2. McGraw Hill, 1953.
- [86] J. L. Fields. The Asymptotic Expansion of the Meijer  $G$ -Function. *Mathematics of Computation*, 26:757, 1972.
- [87] B. L. J. Braaksma. Asymptotic Expansions and Analytic Continuations for Barnes-Integrals. *Compositio Mathematica*, 15:239, 1963.
- [88] Mathematica versão 5.2 (Wolfram Research).
- [89] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, 4th edition, 1927.
- [90] M. M. Leite. Critical Behavior of Generic Competing Systems. *Physical Review B*, 72:224432, 2005.
- [91] M. Pleimling and M. Henkel. Anisotropic Scaling and Generalized Conformal Invariance at Lifshitz Points. *Physical Review Letters*, 87:125702, 2001.
- [92] K. Kaski and W. Selke. Monte Carlo Coarse Graining for the Three-Dimensional Axial Next-Nearest-Neighbor Ising Model. *Physical Review B*, 31:3128, 1985.
- [93] A. K. Murtazaev and Zh. G. Ibaev. Critical Properties of the Anisotropic Ising Model with Competing Interactions. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 113:106, 2011.
- [94] H. W. Diehl and S. Dietrich. Field-Theoretical Approach to Multicritical Behavior Near Free Surfaces. *Physical Review B*, 24:2878, 1981.
- [95] H. W. Diehl, S. Dietrich, and E. Eisenriegler. Universality, Irrelevant Surface Operators and Corrections to Scaling in Systems with Free Surfaces and Defect Planes. *Physical Review B*, 27:2937, 1983.
- [96] A. M. Nemirovsky and K. F. Freed. Surface-Interaction Exponents for Surface Susceptibility: Renormalization-Group Crossover for  $\chi_1$ . *Physical Review B*, 31:3161, 1985.
- [97] A. M. Nemirovsky and K. F. Freed. Surface Transition and  $\epsilon$  Expansion. *Journal of Physics A*, 18:3275, 1985.
- [98] A. M. Nemirovsky, Z. Wang, and K. F. Freed. Crossover Renormalization-Group Approach to Semi-Infinite Inhomogeneous Critical Behavior. *Physical Review B*, 36:3755, 1987.
- [99] W. Selke. Critical Behavior Near Lifshitz Points. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 9:7, 1978.

- 
- [100] J. F. Nicoll, T. S. Chang, and H. E. Stanley. Exact and Approximate Differential Renormalization-Group Generators. *Physical Review A*, 13:1251, 1976.
- [101] J. F. Nicoll, G. F. Tuthill, T. S. Chang, and H. E. Stanley. Renormalization Group Calculation for Critical Points of Higher Order with General Propagator. *Physics Letters A*, 58:1, 1976.
- [102] W. Selke. Lifshitz Points of Higher Character. *Physics Letters A*, 61:443, 1977.
- [103] M. M. Leite. New Universality Classes for Generic Higher Character Lifshitz Points. *Physics Letters A*, 326:281, 2004.
- [104] P. R. S. Carvalho and M. M. Leite. Callan-Symanzik-Lifshitz Approach to Generic Competing Systems. *Annals of Physics*, 325:151, 2010.
- [105] L. J. Slater. *Generalized Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press, 1966.
- [106] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 7th edition, 2012.