
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS E
TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO

**ANÁLISE DO MAPEAMENTO DE
INTERVISIBILIDADE**

ADAUTO PEREIRA RAMOS COSTA

Orientador: Prof^a. Dra Ana Lúcia Bezerra Candeias

Dissertação de Mestrado

Recife, 2014

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS
E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO**

Adauto Pereira Ramos Costa

**ANÁLISE DO MAPEAMENTO DA INTERVISIBILIDADE
Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, do Centro de Tecnologia e Geociências da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, área de concentração Cartografia e Sistemas de Geoinformação defendida no dia 27/01/2014.

Orientadora: Profa. Dra Ana Lúcia Bezerra Candeias

Recife

2014

Catálogo na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

C837a Costa, Aduino Pereira Ramos.
Análise do mapeamento de intervisibilidade / Aduino Pereira Ramos
Costa. - Recife: O Autor, 2014.
xii, 119 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Lúcia Bezerra Candeias.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da
Geoinformação, 2014.
Inclui Referências e Anexos.

1. Engenharia Cartográfica. 2. Interisibilidade. 3. Cone de
interisibilidade. 4. Lançamento de projéteis. 5. Modelagem 3D. I.
Candeias, Ana Lúcia Bezerra. (Orientadora). II. Título.

UFPE

526.1 CDD (22. ed.)

BCTG/2014-120

“ANÁLISE DO MAPEAMENTO DA INTERVISIBILIDADE”

POR

ADAUTO PEREIRA RAMOS COSTA

Dissertação defendida e aprovada em 27/01/2014.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. ANA LÚCIA BEZERRA CANDEIAS

Departamento de Engenharia Cartográfica - Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. EDISON APARECIDO MITISHITA

Departamento de Geomática – Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. JOÃO RODRIGUES TAVARES JÚNIOR

Departamento de Engenharia Cartográfica - Universidade Federal de Pernambuco

“E, estando Paulo no meio do Areópago, disse: Homens atenienses, em tudo vos vejo um tanto supersticiosos; Porque, passando eu e vendo os vossos santuários, achei também um altar em que estava escrito: AO DEUS DESCONHECIDO. Esse, pois, que vós honrais, não o conhecendo, é o que eu vos anuncio. O Deus que fez o mundo e tudo que nele há, sendo Senhor do céu e da terra, não habita em templos feitos por mãos de homens; Nem tampouco é servido por mãos de homens, como que necessitando de alguma coisa; pois ele mesmo é quem dá a todos a vida, e a respiração, e todas as coisas; E de um só sangue fez toda a geração dos homens, para habitar sobre toda a face da terra, determinando os tempos já dantes ordenados, e os limites da sua habitação; Para que buscassem ao Senhor, se porventura, tateando, o pudessem achar; ainda que não está longe de cada um de nós; Porque nele vivemos, e nos movemos, e existimos; como também alguns dos vossos poetas disseram: Pois somos também sua geração. Sendo nós, pois, geração de Deus, não havemos de cuidar que a divindade seja semelhante ao ouro, ou à prata, ou à pedra esculpida por artifício e imaginação dos homens. Mas Deus, não tendo em conta os tempos da ignorância, anuncia agora a todos os homens, e em todo o lugar, que se arrependam; Porquanto tem determinado um dia em que com justiça há de julgar o mundo, por meio do homem que destinou; e disso deu certeza a todos, ressuscitando-o dentre os mortos. E, como ouviram falar da ressurreição dos mortos, uns escarneciam, e outros diziam: Acerca disso te ouviremos outra vez. E assim Paulo saiu do meio deles. Todavia, chegando alguns homens a ele, creram; entre os quais foi Dionísio, areopagita, uma mulher por nome Dâmaris, e com eles outros.”

Dedico este trabalho
à minha esposa Gisane Miranda,
companheira em todos os momentos.

Agradecimentos

Ao Criador dos Céus e da Terra, e tudo que nela há. Aquele que não habita em templos feitos por mãos humanas e nem requer nada de nossas mãos, como se precisasse de alguma coisa, por guiar-me e dar-me sabedoria para viver neste mundo.

Aos meus pais, Edison Mesel e Marta Costa, por me indicarem a educação como tarefa primordial.

À minha esposa, Gisane Miranda, pela compreensão, paciência e carinho.

À Professora Dra. Ana Lúcia Bezerra Candeias, por ter sido a primeira grande incentivadora para eu realizar pesquisas durante a graduação e pós-graduação.

Ao Professor Dr. Daniel Carneiro, também participante e incentivador de minhas pesquisas durante a graduação e pós-graduação.

Aos professores da banca de qualificação, andamento e defesa, especialmente ao Professor Dr. João Rodrigues Tavares Junior que participou destes três momentos e que auxiliou com comentários importantes ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas do curso, pelos momentos de descontração e alegria que são proporcionados todos os dias.

A todos os outros professores do Curso de Graduação Engenharia Cartográfica e Pós-graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Objetivo geral.....	3
1.2. Objetivos específicos.....	3
2. EMBASAMENTO TEÓRICO	4
2.1. Estruturas de Dados do Modelo Digital de Superfície	4
2.2. O problema da intervisibilidade	6
2.2.1.Aplicações da Intervisibilidade.....	9
2.2.2.Trabalhos relacionados a algoritmos de intervisibilidade	14
3. METODOLOGIA	19
3.1. Parametrização	19
3.2. Desenvolvimento matemático da intervisibilidade.....	21
3.2.1.Linha de visada linear	21
3.2.1.1.Equação da face triangular	23
3.2.1.2.Problemas de intervisibilidade em visadas lineares	27
3.2.2.Cone de intervisibilidade	44
3.2.2.1.Equação Paramétrica do Cone	47
3.2.2.2.Problemas de intervisibilidade em cones.....	51
3.3. Caso geral da Intervisibilidade	63
3.3.1.Lançamento de projéteis sobre um MDS.....	65
4. RESULTADOS	72
4.1. Linhas de visada lineares	72
4.2. Cone de intervisibilidade	84
4.3. Lançamento de projéteis	86
4.4. Estudo de intervisibilidade entre marcos geodésicos e edifícios no Campus Joaquim Amazonas da UFPE	89
5. CONCLUSÕES	103
5.1. Recomendações	104
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105
ANEXO 1. ALGUNS SOFTWARES QUE CALCULAM A INTERVISIBILIDADE ...112	
i.MATLAB 7.10.....	112

ii.ArcGIS 10.....	113
ANEXO 2. LISTA DE EDIFÍCIOS CADASTRADOS DO CAMPUS JOAQUIM AMAZONAS DA UFPE.....	118

RESUMO

COSTA, A. P. R. **Análise do Mapeamento da Intervisibilidade**. Recife, 2014, 119p. Dissertação (Mestrado) – Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco.

A intervisibilidade é a visibilidade mútua entre dois ou mais pontos. Não é baseada apenas no espectro eletromagnético do visível. Ela é fundamental para inúmeras atividades que vão desde arqueologia a fins militares. Nas Ciências Geodésicas tem larga aplicação em levantamentos topográficos, os quais necessitam de intervisibilidade entre as estações. Esta dissertação aborda o tema da intervisibilidade geométrica utilizando conceitos da Álgebra Linear e Geometria Analítica e trata não somente a clássica linha de visada como sendo um segmento de reta, como também casos mais complexos como o cone de intervisibilidade e lançamento balístico sobre o MDS. Demonstrem-se neste trabalho casos particulares de intersecção entre superfícies. As equações desenvolvidas permitem respostas relevantes utilizando-se estruturas vetoriais triangulares do Modelo Digital de Superfície. São realizados testes com dados sintéticos para avaliar as equações desenvolvidas. Também é realizada uma avaliação da intervisibilidade entre os marcos geodésicos da rede geodésica cadastral do Campus Joaquim Amazonas da Universidade Federal de Pernambuco.

Palavras-chave: Intervisibilidade, cone de intervisibilidade, lançamento de projéteis, modelagem 3D.

ABSTRACT

The intervisibility is mutual visibility between two or more points. It is not based only on the visible electromagnetic spectrum. It is decisive for numerous activities ranging from archeology to military purposes. In Geodetic Sciences has wide applications in surveying, which require intervisibility between stations. This study shows the issue of intervisibility using geometric concepts of Linear Algebra and Analytic Geometry and treats not only the classic line of sight as a line segment, as well as more complex cases like cone intervisibility and ballistic launch on the MDS. It is demonstrated in this study, particular cases of intersection between surfaces. The equations developed allow relevant answers using triangular vector structures of the Digital Surface Model. Tests with synthetic data were conducted to evaluate the equations developed well as an assessment of intervisibility between the geodetic landmarks of cadastral geodetic network's campus Joaquim Amazonas of the Federal University of Pernambuco.

Keywords: intervisibility, intervisibility's cone, projectiles's launching, 3D modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Esquema de um MDS representado matricialmente. Fonte: MILLER (2011).....	5
Figura 2. Esquema de um MDS representado por uma TIN. Solução obtida no MATLAB 7.10.	6
Figura 3. Esquemas de visibilidade ponto-ponto e ponto-região. (a) Visibilidade ponto-ponto. Fonte: PENNEY (1998). (b) Visibilidade ponto-região do ponto 98, onde as partes mais escuras são os locais não visíveis. Fonte: NAGY (1994).....	7
Figura 4. O observador B enxerga o solo do observador A, mas a recíproca não é verdadeira. Adaptado de FISHER (1996).....	8
Figura 5. Estruturas de visibilidade. (a) Contínua: as áreas mais escuras são as áreas não visíveis pelo ponto V. (b) Discreta: apenas os vértices são ditos visíveis ou não visíveis (mais escuros). Adaptado de Floriani e Magillo (2005).....	9
Figura 6. Aplicações da intervisibilidade em torres de incêndio (a) e impacto visual de edificações (b). Adaptado de FISHER (1996).	10
Figura 7. Aplicação da intervisibilidade em computação gráfica Fonte: TIMONEN (2012).....	12
Figura 8. O ponto P pode ser obtido diretamente através das coordenadas (x, y, z) ou pelo par (s, t)	21
Figura 9. Esquema da visada \overline{AB} que corta Ω	22
Figura 10. Intersecção dos dois paralelogramos. Situação em que a visada intercepta o plano de Ω , mas não pertence a Ω	24
Figura 11. O parâmetro $s_t = s_u$	26
Figura 12. O parâmetro $s_t > 1$	26
Figura 13. O parâmetro $s_u < 0$	27
Figura 14. Pontos T, T' e T'' obtidos pelo corte do plano vertical em Ω	28
Figura 15. Esquema do cálculo da intervisibilidade do ponto A com o perfil obtido no Problema 1.	29
Figura 16. Esquema da circunferência inclinada em relação ao plano horizontal.	31
Figura 17. Pontos P', P'' e P''' obtidos do corte de Ω pelo plano que contém a circunferência inclinada ao plano horizontal.	33

Figura 18. (a) Elevação do ponto A, fixo B. (b) Elevação do ponto B, fixo A. Os pontos T e T' nas duas figuras são os mesmos.	36
Figura 19. Esquema da nova visada paralela ao plano horizontal.	37
Figura 20. (a) Redução da elevação em P_1 , fixos P_2 e P_3 . (b) Redução da elevação em P_2 , fixos P_1 e P_3	40
Figura 21. Esquema do	42
Figura 22. Elevação do ponto P3.	44
Figura 23. Vetor \vec{q} rotacionado em torno do eixo Y' , criando um cone.	44
Figura 24. (a) Esquema do uso do cone de intervisibilidade para determinação do ângulo de elevação. (b) Simulação da representação tridimensional do cone de intervisibilidade de um marco geodésico (EPS6), próximo a edifícios representados digitalmente através de redes triangulares. Solução obtida no MATLAB 7.10.	46
Figura 25. (a) Esquema geral de um cone. (b) Configuração inicial. (c) Cone rotacionado.	48
Figura 26. Sabendo-se os parâmetros as circunferências são escritas.	50
Figura 27. Cone interceptando o plano da face Ω	52
Figura 28. Região Ψ : porção do plano que contém Ω , visível pelo cone resolvido no Problema 10.	53
Figura 29. Corte do cone de intervisibilidade pelo plano da face Ω . (a) Plano visto posteriormente ao observador. (b) O plano é visto posteriormente, porém ele também corta o cone anteriormente ao observador. (c) O plano está totalmente anterior ao observador.	54
Figura 30. (a) Região Ψ . (b) Parte visível de Ψ em Ω	60
Figura 31. Representação geométrica das raízes da equação (72) para a borda $\overline{P_1P_2}$. (a) Corte de Ψ em dois pontos. (b) Corte de Ψ em apenas um ponto. (c) A região Ψ não corta $\overline{P_1P_2}$	61
Figura 32. Representação geométrica para duas raízes complexas da equação (72) em todas as bordas de Ω	62
Figura 33. Casos especiais em que se tem apenas um ponto de intersecção em uma única borda de Ω	63
Figura 34. Infinitas linhas de visada compõem a curva $f(t)$	64

Figura 35. (a) Esquema do movimento de um objeto no espaço tridimensional sujeito à resistência do ar e à gravidade. (b) Esquema da trajetória de um objeto que intercepta uma face triangular Ω	66
Figura 36. Gráfico da função $W_n(\mu)$ e seus dois ramos. Adaptado de Chapeau-Blondeau e Monir (2002).	70
Figura 37. Representação bidimensional do modelo virtual criado.	72
Figura 38. Vista do modelo 3D de 226 edifícios criados para simulação da intersecção da visada AB.	73
Figura 39. Vista do modelo 3D de 226 edifícios criados (em vermelho) para simulação da intersecção da visada AB (em azul) e os objetos e seus planos interceptados (em verde). (a) Vista completa da cena. (b) Objetos interceptados mais próximos do ponto A. (c) Objetos Interceptados mais próximos do ponto B.	74
Figura 40. MDS vetorial utilizado nos próximos exemplos.	75
Figura 41. Visadas interceptadas sobre o terreno.	76
Figura 42. Solução do Problema 1 para cada trecho em que as partes abaixo da visada estão em cinza e as acima estão em preto.	77
Figura 43. Solução obtida a partir do Problema 2. As imagens (a), (c), (e) e (g) são os locais dos perfis abaixo (preto) e acima da visada (cinza). Já as imagens (b), (d), (f) e (h) são os locais visíveis (cinza) e invisíveis (preto) pelos pontos iniciais nos perfis.	78
Figura 44. Solução para o Problema 3 e suas vistas tridimensional e bidimensional. Abaixo da visada em cinza e as acima em preto.	79
Figura 45. Solução obtida a partir do Problema 3 em suas vistas bidimensional (a) e tridimensional (b) para as faces triangulares, em que as partes abaixo da visada estão em cinza e as acima estão em preto.	80
Figura 46. Solução obtida a partir do Problema 3 a respeito da visualização do nível da água em uma determinada enchente, em suas vistas bidimensional (a) e tridimensional (b). As partes em preto são as áreas não atingidas pela enchente.	81
Figura 47. As cruzes representam as elevações calculadas para haver intervisibilidade entre os pontos.	82

Figura 48. Novos triângulos calculados. (a) Vista bidimensional. (b) Vista tridimensional onde se percebe a desconexão entre os vértices dos triângulos vizinhos.	83
Figura 49. Região observável do observador situado no ponto A_{merc} em suas vistas (a) bidimensional e (b) tridimensional.....	85
Figura 50. Região observável do observador situado no ponto B_{merc} em suas vistas (a) bidimensional e (b) tridimensional.....	86
Figura 51. Trajetória do objeto e os locais da queda calculados, em suas vistas	87
Figura 52. Trajetória do objeto lançado da aeronave e os locais da queda calculados, em suas vistas (a) bidimensional e (b) tridimensional.	88
Figura 53. Trajetória do projétil disparado e os locais da queda calculados, em suas vistas (a) bidimensional e (b) tridimensional.....	89
Figura 54. (a) Visão geral dos marcos e edifícios. (b) Linhas de visada em estudo..	91
Figura 55. As regiões em preto estão acima das visadas em estudo.	93
Figura 56. Esquema do uso do cone de intervisibilidade para escolha do melhor ângulo de elevação no rastreamento de satélites GNSS. Na imagem, v é o ângulo de elevação e α a abertura do cone.....	95
Figura 57. Abrangência dos cones em cada marco geodésico com ângulo de elevação de 5° (abertura de 170°).....	96
Figura 58. Abrangência dos cones em cada marco geodésico para um ângulo de elevação de 15° (abertura de 150°).....	97
Figura 60. Resultado das intersecções entre os cones e as edificações considerando o ângulo de elevação de 5° (abertura de 170°).	99
Figura 61. Resultado das intersecções entre os cones e as edificações considerando o ângulo de elevação de 15° (abertura de 150°).	100
Figura 62. Resultado das intersecções entre os cones e as edificações considerando o ângulo de elevação de 30° (abertura de 120°).	101
Figura 63. Resultado da função <i>los2</i> do MATLAB 7.10 (MATHWORKS, 2013).....	112
Figura 64. Resultado da função <i>viewshed</i> do MATLAB 7.10 mostrando os locais visíveis e invisíveis por um observador situado no ponto A. Observe que a função <i>los2</i> também foi utilizada neste exemplo. Adaptado de Mathworks (2013).....	113

Figura 65. (a) Entrada da ferramenta *Skyline* do ArcGIS 10. (b) Resultado mostrando a linha de silhueta no terreno. Adaptado de ESRI (2012).115

Figura 66. (a) Linha de silhueta calculada pela ferramenta *Skyline*. (b) Volume de sombra calculado por *Skyline Barrier*. (c) Gráfico polar obtido por *Skyline Graph*. Adaptado de ESRI (2012).116

Figura 67. Resultado da ferramenta *Viewshed* do ArcGIS mostrando em branco os locais visíveis por um observador situado no triângulo da imagem. Adaptado de ESRI (2012).....117

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Valores dos coeficientes para cada um dos parâmetros da face Ω	59
Tabela 2. Coordenadas dos 5 pontos utilizados nos próximos resultados.	76
Tabela 3. Locais de intersecção entre a trajetória do objeto e o MDS.	87
Tabela 4. Locais de intersecção entre a trajetória do objeto e o MDS.	87
Tabela 5. Locais de intersecção entre a trajetória do objeto e o MDS.	88
Tabela 6. Coordenadas dos marcos da rede geodésica cadastral.....	90
Tabela 7. Visadas interceptadas pelos edifícios (ver ANEXO 2).....	92
Tabela 8. Ângulo de abertura para cada ângulo de elevação.	94
Tabela 9. Resultado geral dos cones de intervisibilidade.....	102

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CAD – Computer Aided Design

GNSS – Global Navigation Satellite System

GRS80 – Geodetic Reference System 1980

LIDAR – Light Detection and Ranging

MDE – Modelo Digital de Elevação

MDS – Modelo Digital de Superfície

MDT – Modelo Digital de Terreno

SIRGAS2000 – Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas 2000

TIN – Triangular Irregular Network

UTM – Universal Transversa de Mercator

WGS84 – World Geodetic System of 1984

1. INTRODUÇÃO

A intervisibilidade consiste em visibilidade mútua entre dois ou mais pontos e sua análise é fundamental para os levantamentos topográficos, geodésicos, de radioenlace, em operações militares, entre outros.

A intervisibilidade não se baseia apenas na faixa do espectro do visível. Os *termovisores*, por exemplo, se baseiam em uma câmera que trabalha no espectro eletromagnético infravermelho emitido pelo objeto. A radiação emitida por ele é convertida em um sinal eletrônico que é processado para exibição de imagem térmica, onde cada pixel representa um valor de temperatura. Este equipamento permite que o observador enxergue situações que vão da detecção de pontos quentes em redes elétricas, à aplicações militares, as quais podem ser apresentadas através de uma equipe tática numa determinada operação noturna que necessite visualizar o ambiente e os objetos sobre ele.

Em aplicações práticas tais como na construção de estradas, tem-se a necessidade da análise da intervisibilidade entre os condutores dos veículos. Para esta análise se utilizam parâmetros que incluem o tipo do terreno, a velocidade, o horário (diurno, noturno), entre outros.

Uma das aplicações tradicionais da intervisibilidade na área das Ciências Geodésicas refere-se aos levantamentos topográficos, onde a NBR 13133 recomenda, no seu item 5.10, que em áreas superiores a 1 km² ou faixas com mais de 5 km de comprimento, seja realizado um planejamento antes do levantamento sobre os dados dos marcos plani-altimétricos e de referências de nível, seja analisado a conexão com o apoio geodésico, e verificado se existe intervisibilidade dos marcos planimétricos a serem implantados e suas distâncias ao centro da área ou faixa a ser levantada no desenvolvimento das poligonais e nivelamentos de implantação do apoio básico.

O princípio de funcionamento de um Medidor Eletrônico de Distâncias (MED) baseia-se na emissão e recepção de sinais que atingem um alvo instalado. Esta distância entre o observador e alvo é calculada através do tempo, comprimento de onda, frequência e velocidade da propagação do sinal. Se este sinal emitido for atingido por objetos que estão entre o alvo e o observador, acarretará em medidas de distâncias errôneas, ou seja, para medição de distâncias deve-se levar em consideração a intervisibilidade observador e alvo.

No levantamento de detalhes, a materialização dos pontos de apoio deve situar-se no interior da área de levantamento e, caso não seja usado o GNSS na ligação à rede geodésica, estes devem permitir a intervisibilidade com os vértices da rede geodésica.

Em geral, quando se está utilizando um sistema GNSS para o posicionamento relativo não é necessária a intervisibilidade entre os pontos no terreno, porém tem-se a desvantagem de que o sinal dos satélites que nem sempre é operacional ou eficiente em áreas urbanas e/ou com vegetação de grande porte. Este fato torna a instrumentação e as técnicas clássicas do levantamento topográfico imprescindível e complementar ao GNSS.

A combinação de pontos intervisíveis com um MDS pode gerar mapas tridimensionais da região ou setores de intervisibilidade ou regiões de sombra ou de oclusão e o mapeamento temático de intervisibilidade permite determinar os pontos e regiões aptas ou adequadas em situações específicas.

A maioria dos algoritmos existentes calculam mapas de visibilidade binários, cujo valor 0 indica invisibilidade e 1 a visibilidade, e os mapas difusos, os quais a visibilidade é indicada no intervalo $[0;1]$, onde o valor 0 indica falta de visibilidade, 1 total visibilidade, e os outros valores visibilidade parcial. Isso é suficiente apenas para responder a questões básicas, a saber, se um alvo pode ser visto por um observador, mas isso nem sempre pode ser suficiente para tomada de decisão que exigem critérios de precisão específicos.

Na literatura encontram-se vários algoritmos e aplicações relativas à intervisibilidade, porém uma grande parte destes estudos está voltada a técnicas e conceitos quase que estritamente computacionais, dificultando sua reprodução por um pesquisador sem grande domínio de computação.

Para contornar este problema, foi desenvolvida nesta dissertação, uma abordagem da intervisibilidade geométrica utilizando os conceitos de Geometria Analítica e Álgebra Linear, tratando casos tridimensionais lineares, cujas visadas são segmentos de reta, e não lineares, a saber, o cone e o lançamento de projéteis.

As equações desenvolvidas permitem responder a questões relevantes, por exemplo, área visível por um observador, quanto se deve elevar um observador e

alvo, ou ainda os locais para modificação do terreno de modo que haja intervisibilidade.

1.1. Objetivo geral

Equacionar o problema da intervisibilidade que permita a análise da visada linear e tridimensional a partir dos conceitos da Geometria Analítica e da Álgebra Linear supondo modelos vetoriais através da parametrização de faces triangulares.

1.2. Objetivos específicos

- Desenvolver proposições para determinação da interseção da linha de visada com uma face triangular;
- Analisar os problemas de intervisibilidade supondo a parametrização de faces triangulares;
- Programar exemplos de intervisibilidade tridimensional com base nos objetivos específicos anteriores.

2. EMBASAMENTO TEÓRICO

Como foi apresentada na introdução deste trabalho, a intervisibilidade é uma condição importante em diversas áreas do conhecimento inclusive nas Ciências Geodésicas.

Os tópicos a seguir explicam sobre as modelagens existentes do MDS, o problema da intervisibilidade, suas aplicações e algoritmos, e alguns softwares conhecidos que trabalham com intervisibilidade.

2.1. Estruturas de Dados do Modelo Digital de Superfície

Um Modelo Digital de Superfície (MDS) é uma representação de qualquer superfície tridimensional situado num determinado sistema de coordenadas. Quando o modelo se refere às estruturas artificiais e vegetação acima da superfície, chama-se de Modelo Digital de Elevação (MDE). Já o Modelo Digital de Terreno (MDT) é obtido retirando todas as características acima da superfície do solo, restando apenas o formato do terreno.

Um modelo digital de elevação pode ser representado na forma vetorial ou matricial. A estrutura matricial pode ser adquirida através da utilização de radares de abertura sintética, em plataformas aéreas ou espaciais. Já a estrutura vetorial é obtida por levantamentos topográficos e geodésicos, digitalização de cartas analógicas, LIDAR (Light Detection and Ranging), ou ainda por Fotogrametria.

A estrutura matricial é definida por uma grade regular com retângulos igualmente espaçados e de mesmo tamanho, onde cada um deles é chamado de células ou pixels em analogia a imagens digitais.

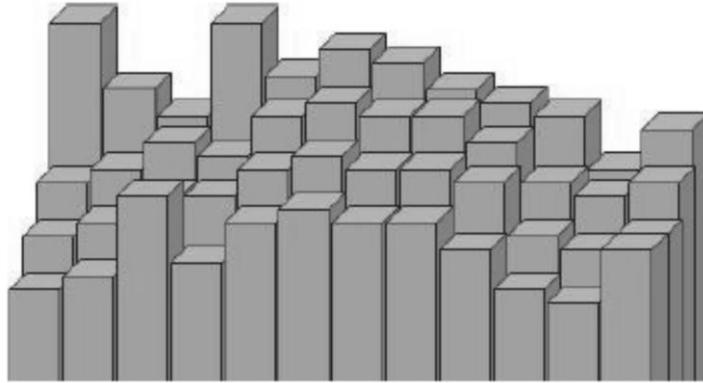


Figura 1. Esquema de um MDS representado matricialmente.

Fonte: MILLER (2011).

A estrutura vetorial é obtida através de uma grade irregular onde cada face é formada por poliedros. O mais conhecido é o TIN (Triangular Irregular Network), que é definido por uma triangulação cujos vértices são os pontos da malha irregular.

A triangulação mais utilizada é a de Delaunay, um procedimento que utiliza o critério da maximização dos ângulos mínimos de cada triângulo para evitar a criação de triângulos finos ou com ângulos internos muito agudos, de modo que a superfície contenha o máximo de triângulos mais próximos de serem equiláteros (MAGALHÃES, 2009).

Floriani e Magillo (2005) explicam que o TIN mostra boas capacidades para modelar as feições do terreno, uma vez que eles podem lidar com as irregularidades do terreno e pode incluir pontos e linhas específicas da superfície.

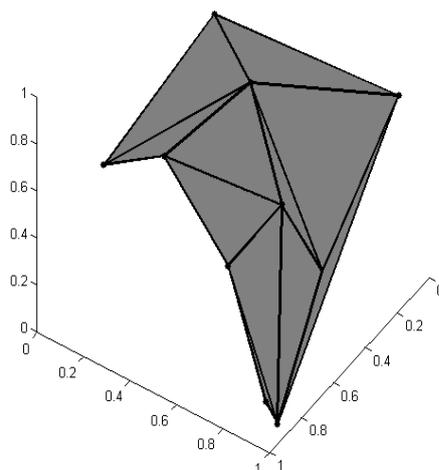


Figura 2. Esquema de um MDS representado por uma TIN.
Solução obtida no MATLAB 7.10.

2.2. O problema da intervisibilidade

Segundo Nagy (1994), a visibilidade geométrica é baseada somente na intersecção com o terreno das linhas de visada provenientes de cada ponto de vista, utilizando somente o Modelo Digital de Terreno (MDT), tal que os atributos da superfície como vegetação, difração atmosférica e intensidade da luz são negligenciados. Explica ainda que é possível obter a visibilidade de ponto-ponto e ponto-região, onde o primeiro significa saber quais pontos de vista específico são intervisíveis e o último qual a região visível por um ponto de observação. A intervisibilidade é caracterizada no caso em que dois pontos são mutuamente visíveis. A Figura 3 mostra uma representação da visibilidade ponto-ponto e ponto-região.

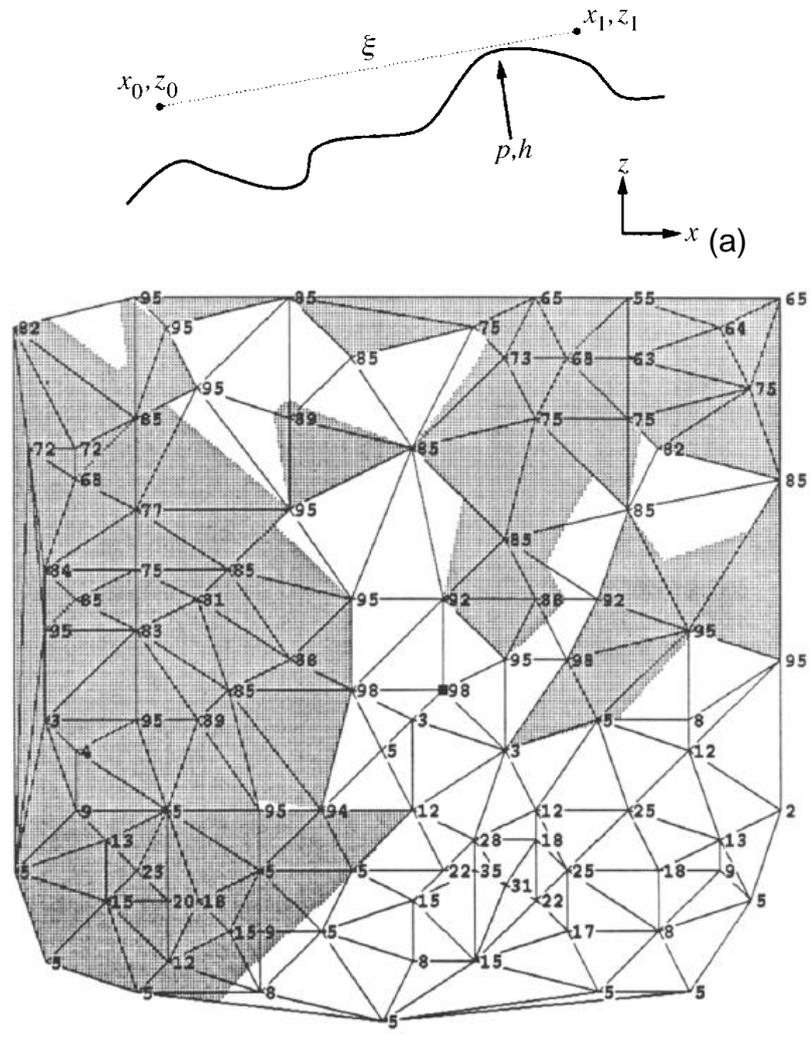


Figura 3. Esquemas de visibilidade ponto-ponto e ponto-região. (a) Visibilidade ponto-ponto. Fonte: PENNEY (1998). (b) Visibilidade ponto-região do ponto 98, onde as partes mais escuras são os locais não visíveis. Fonte: NAGY (1994).

Em Magalhães (2009) é visto de forma bastante objetiva que uma estrutura de visibilidade é formada pelo conjunto de pontos de um terreno visíveis por um observador. Na literatura internacional este conjunto de pontos é conhecido como *viewshed* e em muitas aplicações este conjunto é restrito, considerando apenas os pontos do terreno que tem uma distância pré-estabelecida do observador. No presente trabalho este conjunto será chamado de *mapa de visibilidade*.

Esta estrutura pode ser caracterizada como sendo binária, recebendo o valor 0 para local não visível e 1 para o local visível (Figura 3b), ou um conjunto difuso, em

que recebe valores no intervalo $[0;1]$, conforme visto nos trabalhos de Fisher (1992), Sansoni (1996), Magoč, Kassin e Romero (2010).

Nagy (1994) explica como se dá a intervisibilidade ponto-ponto e ponto-região, as duas mais utilizadas para se obter informação de visibilidade. A visibilidade ponto-ponto pode ser representada por uma matriz booleana, chamada de matriz de visibilidade cujos índices fornecem informação útil e relativamente compacta sobre o terreno, porém, como ressaltado anteriormente, esta matriz pode também conter valores no intervalo $[0;1]$, se a abordagem for feita utilizando-se conjuntos difusos. A visibilidade ponto-região pode ser representada por um conjunto de mapas de visibilidades bidimensionais mostrando a projeção vertical no *datum* horizontal das partes visíveis e invisíveis do terreno. Neste último caso, cada observador necessita de um mapa distinto.

As estruturas de visibilidade para vários pontos distribuídos no terreno podem ser definidas pela combinação os mapas de visibilidade criados segundo algum operador, ou combinação deles, tais como, sobreposição, operadores booleanos (intersecção, união) e operadores de contagem (FLORIANI e MAGILLO, 2005).

Fisher (1996) resalta o fato de que as funções para cálculo de mapas de visibilidade disponíveis nos softwares SIG devem também responder perguntas relevantes à solução dos problemas de intervisibilidade, ou seja, retornar resultados flexíveis, como por exemplo, os locais de deslocamento entre o terreno e a linha de visada.

Existem também propriedades relevantes, como por exemplo, um observador pode ver a base de um alvo, mas o alvo pode não enxergar a base do observador, como mostra a Figura 4, o que torna a relação de intervisibilidade não recíproca.



Figura 4. O observador B enxerga o solo do observador A, mas a recíproca não é verdadeira. Adaptado de FISHER (1996).

A análise de intervisibilidade sobre um MDS pode ser realizada tanto nas suas representações matricial e vetorial e qualquer função de visibilidade pode ser representada por um grafo de visibilidade com arcos que ligam os nós correspondentes às entidades intervisíveis (NAGY, 1994). Ela pode ser realizada em uma estrutura contínua ou discreta.

Na Figura 5, Floriani e Magillo (2005) mostram que na estrutura contínua, cada elemento é dividido em partes visíveis e invisíveis. Esta estrutura é principalmente utilizada em um TIN. Já na estrutura discreta, principalmente utilizada em modelos matriciais, cada célula ou vértice é marcado como visível ou invisível.

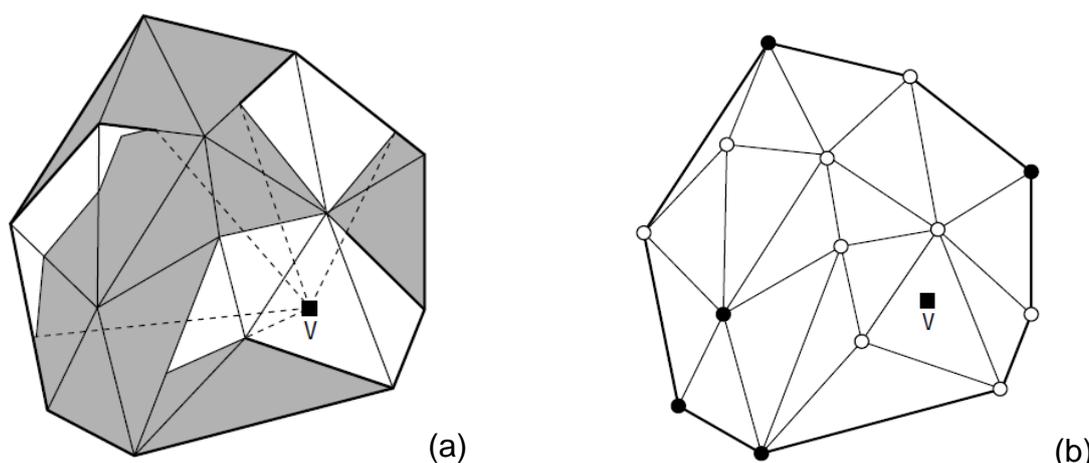


Figura 5. Estruturas de visibilidade. (a) Contínua: as áreas mais escuras são as áreas não visíveis pelo ponto V. (b) Discreta: apenas os vértices são ditos visíveis ou não visíveis (mais escuros). Adaptado de Floriani e Magillo (2005).

2.2.1. Aplicações da Intervisibilidade

O cálculo da intervisibilidade sobre um terreno é essencial para várias aplicações atuais. Esta informação, obtida por um algoritmo de linha de visada, tem suas aplicações no mundo real no posicionamento de torres de guarda, posicionamento de torres de transmissão e recepção, posição de torres de incêndio, localização de oleodutos, projeto de estradas, planejamento urbano, topografia, arqueologia ou ciências militares.

Fisher (1996) mostra um exemplo da aplicação do mapa de visibilidade em torres de monitoramento de incêndios florestais para explicar o problema de somente calcular as áreas visíveis num MDE, sem considerar outras respostas para solucionar este problema, ou somente mapas de visibilidade binários.

Na Figura 6a, a área visível não é limitada para a área que está diretamente dentro da linha de visada a partir da torre, mas o observador pode efetivamente ver o incêndio onde o solo está além do horizonte, ou seja, a diferença vertical entre o solo e a linha de visada para o horizonte é menos do que suficiente para a fumaça ser dispersa pelo vento. Ainda em Fisher (1996), uma segunda aplicação é mostrada na Figura 6b em relação ao impacto visual, em que para se determiná-la para uma nova estrutura no terreno, é necessário identificar se ela está acima do horizonte ou permanece abaixo.

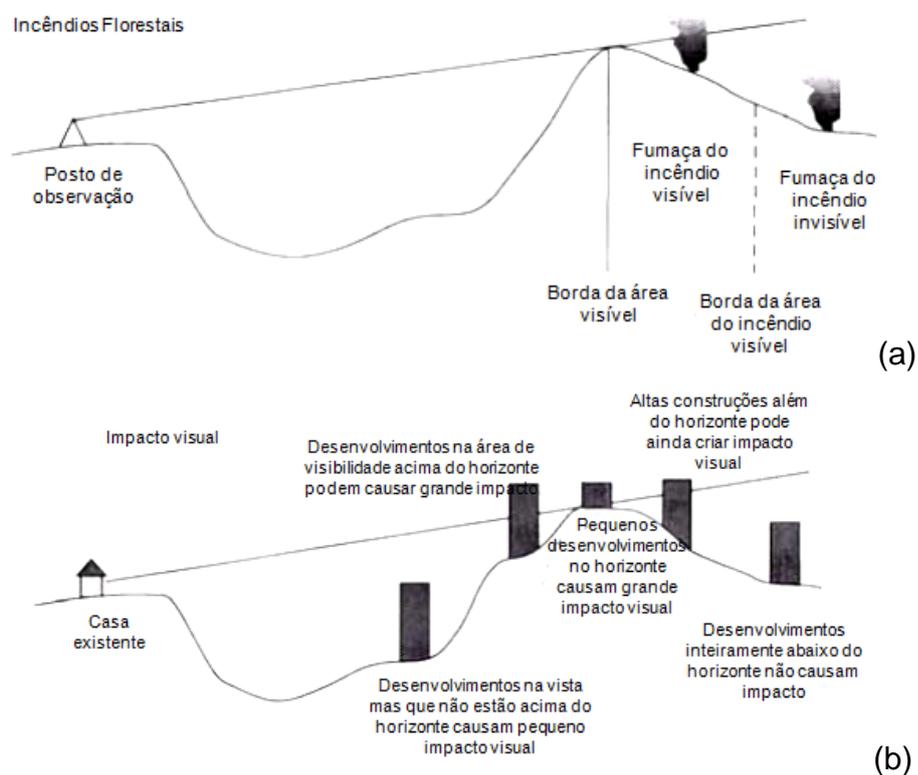


Figura 6. Aplicações da intervisibilidade em torres de incêndio (a) e impacto visual de edificações (b). Adaptado de FISHER (1996).

No planejamento urbano, segundo Landovsky (2011), uma área de visibilidade é de especial valor, cênico ou histórico, e deve ser preservada, pois é neste espaço

que estão localizados estradas e parques entre outros. Magoč, Kassin e Romero (2010) também enfatizam que um projetista urbano pode utilizar esta análise para identificar o melhor arranjo de edifícios para um determinado projeto urbano.

Um arqueólogo poderia compreender a significância e a funcionalidade de uma ruína antiga (MAGOČ; KASSIN; ROMERO, 2010). O propósito da análise visual em uma paisagem arqueológica é explorar a organização visual ao longo da paisagem, uma vez que ela permite identificar como a sociedade humana se relacionava e interpretava a paisagem no passado, além de responder a perguntas sobre o porquê de certas feições estarem em determinados locais (ALBLAS, 2012), como é o caso do estudo de Rua, Gonçalves e Figueiredo (2013) onde apresentam um estudo de caso em que aplicaram a análise de visibilidade em um complexo de fortificações em Linhas de Torres Vedras, Portugal, ativado na primeira década do século 19 com o objetivo de parar a armada francesa de Napoleão na Guerra Peninsular.

A análise de intervisibilidade é largamente aplicada em ciências militares, como pode ser vista nos trabalhos de Penney (1998), Ormaux (2007) e Rua, Gonçalves e Figueiredo (2013). Em Penney (1998), a obtenção de informações à distância sobre o ambiente, através da exploração da propagação de sinais de objetos nestes ambientes, desempenha um importante papel no comportamento humano, por isso a capacidade de simular as variações em visibilidade ou audibilidade causada por veículos que se movem ao redor de terrenos ondulados parece ser uma necessidade essencial para qualquer simulação crível do comportamento destes veículos e como características físicas e geométricas do ambiente influenciam os estímulos que incidem em seus sensores.

Ormaux (2007) enfatiza o fato da intervisibilidade e suas relações com o estabelecimento de territórios podem constituir um autêntico problema de inteligência territorial, uma vez que a paisagem significa uma porção que oferece uma observação visual. Isso significa que a paisagem pode ser um objeto submetido à gravação visual e isso constitui um essencial estágio de informação, bem como um posicionamento estratégico no âmbito do governo territorial e mediações. A visão conduz a detecção de pistas primárias, tais como intensidade da luz, orientações, contornos, texturas, para a associação de outras pistas. Deste modo, a proposição

“este ponto do espaço é visível ou invisível deste outro ponto do espaço” constitui-se uma afirmação estritamente geométrica.

Rua, Gonçalves e Figueiredo (2013) exibem o fato de que a cobertura visual ao redor da paisagem era importante fator de decisão para locação das estruturas defensivas, como é visto em uma série de casos que os sistemas defensivos têm, desde os tempos antigos, explorado sua relação com o terreno nas proximidades.

A intervisibilidade também é aplicada em computação gráfica. Duas principais aplicações para algoritmos de visibilidade em renderização gráfica são o recorte geométrico e a iluminação (TIMONEN, 2012). O recorte geométrico é utilizado para acelerar a renderização determinando qual geometria não deveria ser enviada para o *pipeline*, ou seja, que geometria é invisível do observador. O algoritmo de iluminação necessita trabalhar a visibilidade das fontes luminosas originados de cada ponto iluminado. Como geralmente toda geometria da cena atua como fontes luminosas, algoritmos de iluminação global precisam determinar a visibilidade do conjunto de cada ponto (Figura 7).

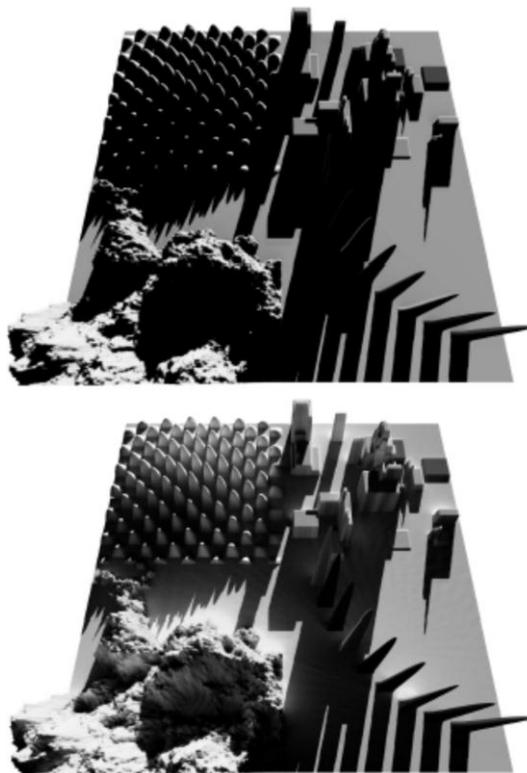


Figura 7. Aplicação da intervisibilidade em computação gráfica

Fonte: TIMONEN (2012).

A intervisibilidade, aplicada a partir de uma nuvem de pontos LIDAR oferece várias vantagens comparados com os MDS matriciais, segundo Guth (2012). Explica que mesmo em MDS de alta resolução espacial, a nuvem de pontos oferece melhor representação gráfica da linha de visada, além da nuvem de pontos evitar problemas de interpolação que frequentemente resultam em problemas na captura da copa de florestas.

Nos trabalhos de Tavares Junior e Candeias (2003) e Tavares Junior (2003) tem-se uma análise sobre a intervisibilidade aplicada ao radio enlace e um editor para auxiliar no problema. Neste editor criado são inseridos o MDS e também os objetos locados no terreno, como edificações, árvores, e torres de radio enlace, onde posteriormente é observado se existe a intervisibilidade. Ainda em Tavares Junior e Candeias (2003), além de Sansoni (1996), é ressaltado o fato de que a curvatura terrestre e a refração atmosférica influenciam na intervisibilidade.

A configuração geométrica de uma rede geodésica é bastante importante para obtenção da precisão desejada. Klein et. al. (2012), explica que “o trabalho do planejamento ótimo de uma rede geodésica é compreendido como a construção de uma configuração geométrica ótima e/ou planos de observações cujas realizações satisfaçam critérios de qualidade pré-definidos”. Quando o critério não é atendido, parte-se para a solução analítica da matriz de covariâncias dos parâmetros estimados, ou método heurístico, conhecido como tentativa e erro, para se obter a precisão desejada da rede. Klein et. al. (2012), também salienta que no método de tentativa e erro, o geodesta corre “o risco de não atingir os objetivos que foram pré-estabelecidos se os seus critérios forem discrepantes da realidade”, deste modo, a análise de intervisibilidade do ambiente entre marcos geodésicos (caso se utilize equipamentos óticos) ou o marco geodésico e o satélite (caso se utilize a técnica de GNSS) poderia permitir a obtenção de uma geometria que atenda aos critérios de precisão pré-estabelecidos.

2.2.2. Trabalhos relacionados a algoritmos de intervisibilidade

No estudo de Sharir (1988), é proposto um algoritmo para calcular a menor altura de uma torre de guarda, e problemas relacionados, em terreno poliédrico (modelo vetorial), concentrando-se em obter algoritmo com base em sua complexidade. Nele é mostrado como pode ser obtido o menor comprimento de um segmento vertical, cuja base localiza-se em um determinado ponto, seja ele um vértice de um terreno representado por poliedros ou um ponto de uma linha deste, tal que o topo deste segmento pode observar inteiramente o terreno. Explica que a região dos pontos que veem inteiramente o terreno pertence às intersecções dos espaços superiores aos planos formados pelas faces dos poliedros. O objetivo é alcançado utilizando-se de conceitos de geometria analítica, árvores, busca binária e parametrizações. Zhu (1997) resolve os problemas abertos descritos por Sharir (1988) aperfeiçoando o problema da determinação desta menor altura por meio de uma complexidade menor do algoritmo.

Cole e Sharir (1989) estudam vários problemas a respeito de visibilidade em terreno poliédrico de um ponto sobre este. Tal como o trabalho mencionado anteriormente, concentra-se no desenvolvimento do algoritmo com base em sua complexidade. Para um ponto fixo no terreno, o objetivo é pré-processá-lo eficientemente para produzir estrutura que suporte rápidas consultas de quais raios que emanam de um ponto a outro em determinada direção interceptam as faces poliédricas. Propõe-se um algoritmo variando este ponto ao longo de estruturas verticais e não verticais. Ainda considera o problema de colocação para calcular o menor número de pontos no terreno que pode coletivamente ver toda a superfície. Em todos os problemas mencionados no estudo, tratam o terreno poliédrico como sendo um grafo de uma função poliédrica definida sobre um plano horizontal e os raios são expressos em coordenadas esféricas, realizando buscas em estruturas de árvores binárias.

Dois pontos em uma superfície são ditos mutuamente visíveis se o segmento que os une não passa pela superfície. A intervisibilidade de um par de pontos é na maioria das vezes obtida através de uma representação booleana, porém Fisher (1992) ressalta que, se erros forem adicionados às elevações de um MDE, pode

resultar em mapas de visibilidades alternativos. Em seu estudo, realizou 20 simulações de mapas de visibilidade binários com ruídos introduzidos no MDE, em estrutura matricial, os quais foram obtidos por um algoritmo por meio do qual foi possível gerar ruído elaborado de uma distribuição normal com um específico desvio padrão e a média zero, e gerar uma autocorrelação espacial em qualquer nível desejado. Este conjunto de 20 mapas de visibilidade resultou em um conjunto difuso cujo mapa de visibilidade final, obtido pela soma entre células de mesma localização dividido pela quantidade de simulações, resultou em valores variando no intervalo $[0; 1]$, sendo o valor “0” indicando que a célula é muito improvável que seja visível para um observador e o valor “1” que certamente é visível, e os outros valores indicando o grau em que as células são visíveis.

Em Mills, Fox e Heimbach (1992), é tratado o problema da intervisibilidade em um sistema de computação paralela, ou seja, computação em que vários cálculos são realizados simultaneamente. A análise de intervisibilidade com simulação de erro em um modelo digital de elevação é utilizada para ilustrar uma abordagem para desenvolvimento de modelos paralelos e demonstrar alguns benefícios da computação de alto desempenho. A análise de intervisibilidade foi realizada em uma estrutura matricial contendo 86 x 72 pontos de elevação espaçados igualmente de 30 metros por meio de 6192 linhas independentes, onde cada linha necessitou em média de 150 operações para testar a visibilidade entre um ponto e uma célula alvo. Os resultados deste estudo mostram que a intervisibilidade pode ser superestimada quando os erros de um MDE são ignorados.

Franklin, Ray e Mehta (1994) estudaram os aspectos geométricos do problema de visibilidade na localização das baterias de mísseis de defesa aérea. A análise teórica do problema produziu novos e algoritmos eficientes, desenvolvidos e testados em muitos dados. Na análise teórica foi desenvolvido um estudo sobre as características do terreno; a definição formal do problema de localização de Hawk; e a formalização do melhor posicionamento de observadores; onde se considerada a elevação mínima de um avião voando sobre diversos tipos de terreno. Eles estudaram três algoritmos para encontrar o mapa de visibilidade em torno de um observador particular: o algoritmo R3, lento, mas preciso, o R2, muito mais rápido,

mas quase tão preciso quanto o anterior, e o Xdraw, que calcula um mapa de visibilidade aproximado com limites de erro.

No estudo de Wang, Robinson e White (1996), apresentam um novo algoritmo para geração de mapas de visibilidade baseado em MDE de estrutura matricial, por meio de uma combinação entre análise de linha de visada e os relacionamentos entre os locais da superfície nos pontos de origem e de destino. Dependendo da natureza da superfície que representa o terreno, é realizada uma redução no tempo computacional, pois boa parte dos pontos de destino pode ser determinada como invisíveis sem a necessidade das linhas de visada. Neste trabalho tem-se ainda que os algoritmos anteriores dependem das linhas de visada para computar o mapa de visibilidade, cujos procedimentos são computacionalmente custosos e conseqüentemente consomem mais tempo de processamento. Outro problema é que estes podem superestimar os resultados, pois ignoram a forma da superfície entre dois pontos do MDE, que também pode bloquear a linha de visada. A partir dos problemas apresentados, Wang, Robinson e White (1996) desenvolveram um algoritmo que segue cinco etapas e cuja abordagem básica é a de divisão e conquista. Testes simples são aplicados para determinar a visibilidade, ou não, dos pontos do MDE antes de recorrer a análise de linha de visada. Matematicamente, neste trabalho foi utilizada a equação do plano em sua forma implícita.

Sansoni (1996) desenvolve novos métodos de análise de intervisibilidade baseados em técnicas probabilísticas, considerando nos cálculos a presença de outros objetos além do terreno, como casas e árvores, além de correções de erros de refração e curvatura terrestre. Neste estudo é mostrado o conceito de índice de intrusão visual, que significa o peso de objetos observados no campo de visão do observador, a qual depende da distância entre ambos, cuja dimensão aparente do objeto é reduzida quando a distância entre o observador e o objeto é aumentada. Ainda, para obter resultados mais fidedignos e hábeis para ser trabalhada em grandes áreas territoriais, sua metodologia não se utiliza do MDE, em sua representação matricial ou vetorial, mas de suas curvas de nível, como listas de vértices, linhas e elevação relativa. A área de interesse é dividida em Unidades Territoriais Quadradas, cujo tamanho destes são determinadas de acordo com o tipo da análise necessária. O objetivo do modelo é construir dois índices para cada

unidade territorial: uma relacionada ao grau total de visibilidade e outra relativa à intrusão visual. A partir de sua metodologia seria possível utilizar três tipos de modelos: ponto, discreto e contínuo. Estende a técnica para modelos volumétricos e ressalta que a metodologia utilizada não retorna mapas de visibilidade binários, mas a partir de uma amplitude de valores variando no intervalo $[0; 1]$.

Penney (1998) mostra como o gradiente de intervisibilidade pode ser diretamente calculado, e argumenta que isso fornece uma valiosa indicação da direção do próximo ponto visível. Além disso, explica ainda que métodos diretos de avaliação como gradientes sejam também relevantes para algumas classes de modelos comportamentais para veículos que se movem sobre um terreno. A disponibilidade de terrenos produzidos de modo aleatório fornece um poderoso teste de adaptabilidade de qualquer algoritmo dependente do terreno e é parte integrante da validação de sua análise. Para terrenos razoavelmente suaves, seus resultados mostram a facilidade e eficiência para indicar o ponto mais próximo onde a visibilidade do alvo muda, sem a necessidade de informação de qualquer outra linha que liga o alvo ao ponto original do observador e que este método parece ser uma valiosa base para métodos eficientes de identificação de locais escondidos ou pontos de vista, que são tratados por métodos computacionalmente caros.

Izraelevitz (2003) produz um algoritmo que é uma generalização da abordagem do mesmo problema desenvolvido por Franklin, Ray e Mehta (1994). Ele descreve em detalhes o caso da intervisibilidade em MDE representados por modelos matriciais cujo resultado de seu algoritmo é muito próximo dos métodos tradicionais com um custo computacional pequeno. Também explica que os algoritmos R2 e Xdraw necessitam de computações proporcionais ao número de elementos da representação matricial resultando em economia computacional, cuja propriedade é compartilhada por sua abordagem. Uma de suas contribuições é mostrar incrementalmente o ajuste da acurácia destes métodos aproximados no decorrer da computação, enquanto o R2 e Xdraw fixam um erro de aproximação que é dependente da suavidade dos dados de elevação.

Magalhães (2009) apresenta um algoritmo eficiente para calcular mapa de visibilidade em terrenos armazenados em memória externa e faz uma análise de sua complexidade. Nele desenvolve o algoritmo EMVS (*External Memory Viewshed*) uma

adaptação do método de Franklin e Ray e a principal contribuição de seu trabalho para uso em MDE representando por modelo matricial.

Magoč, Kassin e Romero (2010) propõem um novo algoritmo de linha de visada que leva em consideração todas as condições do ambiente, como elevação, condições climáticas, hora do dia, posição do sol e vegetação, a fim de proporcionar análise de intervisibilidade acurada e precisa. Eles utilizam um algoritmo de linha de visada com integração de conjuntos difusos para agregar todas as variáveis ambientais com o propósito de determinar a visibilidade de alvos de um observador. Explica ainda que combinando critérios ambientais utilizando medidas difusas permite considerar não somente a importância de cada critério de visibilidade, mas também de dependências entre os critérios para desenvolver uma análise de intervisibilidade precisa, adequada para aplicações em situações que se alteram dinamicamente. O interesse do seu estudo está na computação da visibilidade ponto-ponto considerando as dependências entre os critérios e a importância em que cada um deles traz para a análise. A saída do programa é a probabilidade de dois pontos serem intervisíveis.

Miller (2011) utilizou um algoritmo para calcular a visibilidade entre observador e os locais de destino, utilizando MDS produzidos por fotogrametria e por nuvem de pontos LIDAR de diferentes resoluções. Além disso, uma série de previsões de visibilidade foi feita utilizando métodos de Monte Carlo para adicionar erro aleatório para a elevação do terreno para estimar a probabilidade de um alvo de ser visível. Finalmente, os MDS LIDAR foram usados para determinar a distância linear do terreno ao longo das linhas de visada entre o observador e os objetivos que foram obscurecidos por árvores e arbustos. Uma análise de regressão logística foi realizada para determinar a extensão em que uma grande porção de vegetação ao longo da linha de visada impactou a visibilidade do alvo.

Timonen (2012) apresenta um algoritmo novo para determinar a intervisibilidade de todos os pontos em *campos dinâmicos de elevação*, como os horizontes de visibilidade em direções azimutais discretas e a acurácia da visibilidade ao longo de cada direção azimutal. Para atingir este objetivo, usa uma estrutura de visibilidade que chama de *convex hull tree*. O elemento chave de seu algoritmo é a habilidade de atravessar somente a geometria visível através de uma eficaz escolha de

geometrias não visíveis. Para cada ponto receptor é determinada uma lista de horizontes locais visíveis onde dois horizontes consecutivos sempre incluem todos os pontos adjacentes visíveis.

Segundo Tabik, Zapata e Romero (2012) existem vários algoritmos na literatura para construção de mapas de visibilidade que permitem somente este cálculo para um ponto simples ou no máximo para um pequeno número de observadores, devido a alta complexidade computacional e pelo fato de que os algoritmos não serem eficientemente dimensionados para todos os pontos. Ainda naquele trabalho, mostra-se um novo algoritmo baseado em árvores binárias e árvores convexas. Este algoritmo é rápido e capaz para computar um mapa completo de visibilidade de um terreno representado por modelo matricial. Ele engloba um algoritmo que divide o terreno em setores e calcula o fim de todos os setores visíveis e outro que procura o início destes setores visíveis utilizando para isto um baixo custo computacional.

3. METODOLOGIA

A metodologia desta dissertação consiste em: desenvolver matematicamente a intervisibilidade geométrica; descrever problemas e métodos utilizados em suas soluções; e aplicar os métodos desenvolvidos em exemplos de situações reais.

3.1. Parametrização

A trajetória de um objeto descreve uma curva que pode ser representada por uma equação cartesiana na tripla (x, y, z) . No entanto, uma equação deste tipo na maioria dos casos não permite a descrição completa do movimento do objeto, uma vez que não fornece valores como velocidade e aceleração desenvolvidas por ele, por exemplo. Uma alternativa é utilizar-se da parametrização para obter informações mais completas acerca de trajetórias.

Seja uma circunferência de raio r e centrada em $P_0(x_0, y_0)$. Ela tem sua equação na forma implícita dada por $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ a qual pode ser parametrizada pela equação vetorial $\vec{v} = (x, y) = P_0 + (r \cos t, r \sin t)$, que descreve a rotação no

plano de um vetor de norma r , no ponto $P_0(x_0, y_0)$, pelo ângulo t . Variando este ângulo de 0 a 2π , escreve-se a circunferência.

A equação da reta pode ser obtida através da condição de colinearidade entre três pontos. Por exemplo, deseja-se saber a equação da reta que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Um ponto $P(x, y, z)$, entre os outros dois pontos,

torna os pontos P_1 , P_2 e P colineares se $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{vmatrix} = 0$. Assim encontra-se a

equação na forma implícita, calculada através do cálculo de um determinante.

Por outro lado, as equações paramétricas desta reta são inteiramente análogas, pois derivam da mesma equação matricial: dado um vetor \vec{v} que pertence à reta, um ponto P pode ser encontrado pelo parâmetro s na equação vetorial $P = P_0 + s\vec{v}$. Quando $s = 0$, o ponto $P = P_0$, deste modo, pode-se convencionar P_0 como origem do sistema unidimensional s .

Na equação paramétrica da reta, com $s \in [0;1]$, encontra-se um ponto que pertence ao segmento formado pelo vetor diretor \vec{v} . Então, os pontos que não pertencem a este segmento podem ser encontrados simplesmente para $s \in [-\infty, 0)$ e $s \in (1, \infty]$.

O conjunto dos pontos P que formam um plano pode ser definido por dois vetores \vec{v} e \vec{w} , de modo que $P = P_0 + s\vec{v} + t\vec{w}$, análoga à equação vetorial da reta, onde P_0 é comum aos dois vetores. Percebe-se, que para $s = 0$ e $t = 0$, o ponto $P = P_0$, então se pode convencionar P_0 como origem do sistema bidimensional st .

Na Figura 8, percebe-se que o ponto P pode ser expresso em função das coordenadas da tripla (x, y, z) ou da dupla (s, t) , mostrando que a equação vetorial do plano é um mapeamento $P: R^2 \rightarrow R^3$ ou $P: (s, t) \mapsto (x, y, z)$. Ainda, com $s \in [0;1]$ e $t \in [0;1]$, encontra-se um ponto pertencente ao paralelogramo definido pelos dois vetores diretores do plano. Portanto, a parametrização é uma forma mais simples de ser programada em uma linguagem computacional.

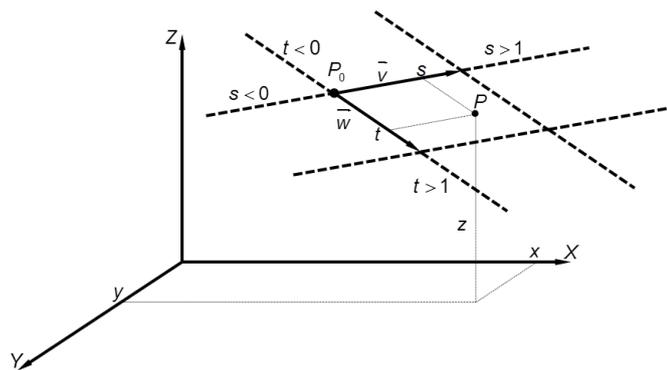


Figura 8. O ponto P pode ser obtido diretamente através das coordenadas (x, y, z) ou pelo par (s, t) .

Este raciocínio apresentado é de suma importância, pois utiliza-se a parametrização como base para representação das equações de intervisibilidade desenvolvidas nos tópicos a seguir.

3.2. Desenvolvimento matemático da intervisibilidade

Neste tópico é desenvolvido um processo para cálculo da intervisibilidade sobre uma superfície aproximada por poliedros de faces triangulares não sobrepostas (TIN), por meio da parametrização das faces triangulares e das visadas. As abordagens são primeiramente realizadas em linha de visada linear, estendendo o mesmo raciocínio ao cone de intervisibilidade e a aplicação dos mesmos raciocínios em lançamento de projéteis sobre um MDS. Erros inerentes à aquisição do MDS, bem como a curvatura terrestre, não são levados em consideração.

Neste trabalho, as análises são realizadas em um único triângulo devendo o raciocínio apresentado ser estendido para toda a TIN.

3.2.1. Linha de visada linear

Dada uma rede triangular, supõe-se que o par de pontos $\{A, B\}$, cujas coordenadas valem $A = [x_A \ y_A \ z_A]^t$ e $B = [x_B \ y_B \ z_B]^t$, forma uma linha de visada que corta uma face triangular Ω desta rede, constituída pelos pontos

$P_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1]^t$, $P_2 = [x_2 \ y_2 \ z_2]^t$ e $P_3 = [x_3 \ y_3 \ z_3]^t$, como mostra a Figura 9. A região Ω é interceptada no ponto $P = [x \ y \ z]^t$.

Define-se $\vec{v} = [a \ b \ c]^t$, o vetor diretor da linha de visada e $\vec{w}_k = [a_k \ b_k \ c_k]^t$, onde para $\{k \in N \mid 1 \leq k \leq 3\}$. Estes vetores constituem as bordas de Ω :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= B - A, \\ \vec{w}_1 &= P_2 - P_1, \\ \vec{w}_2 &= P_3 - P_2, \\ \vec{w}_3 &= P_1 - P_3. \end{aligned} \tag{1}$$

É oportuno dizer que o ponto P_2 é convencionalizado como sendo o ponto mais elevado em altura, seguido de P_1 e P_3 , tornando a borda $\overline{P_1P_2}$ da região Ω a mais elevada em altura, ou seja, $z_3 < z_1 < z_2$, como mostra a Figura 9.

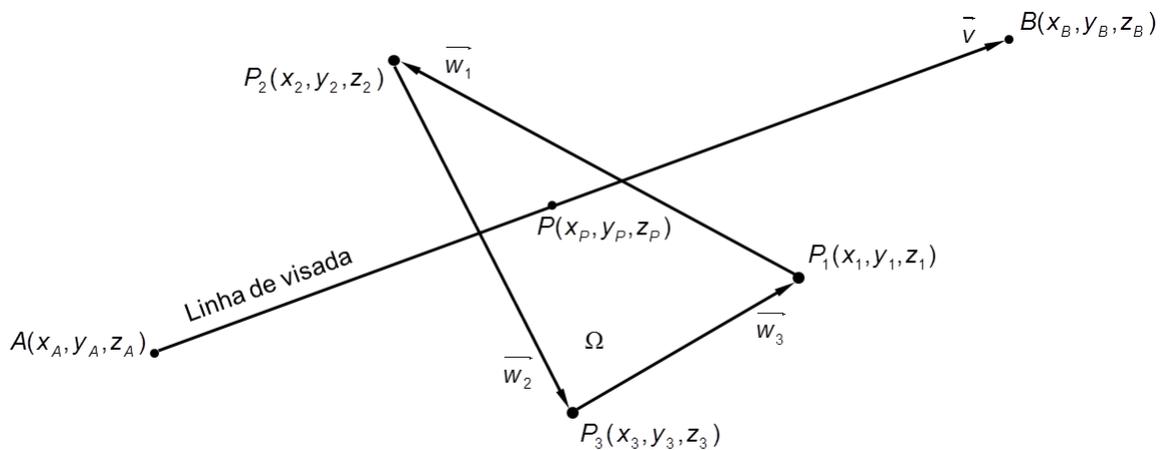


Figura 9. Esquema da visada \overline{AB} que corta Ω .

O ponto P é ao mesmo tempo um ponto da linha de visada e dos planos $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ ou $\{\vec{w}_1, -\vec{w}_3\}$. Este ponto pode ser calculado por três equações:

a) Equação da linha de visada \overline{AB} , modelada por

$$P = A + r\vec{v}; \quad (2)$$

b) Pela equação do plano $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$

$$P = P_1 + s_t \vec{w}_1 + t \vec{w}_2; \quad (3)$$

c) Ou pela equação do plano $\{\vec{w}_1, -\vec{w}_3\}$

$$P = P_1 + s_u \vec{w}_1 - u \vec{w}_3; \quad (4)$$

através dos parâmetros r , s_t , s_u , t e u apropriados. O termo negativo na equação (4) torna o parâmetro u positivo.

Os parâmetros r , s_t e t são calculados igualando as equações (2) e (3), para obter:

$$A + r\vec{v} = P_1 + s_t \vec{w}_1 + t \vec{w}_2. \quad (5)$$

O vetor dos parâmetros é calculado através de:

$$\begin{bmatrix} r \\ s_t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{v} & \vec{w}_1 & \vec{w}_2 \end{bmatrix}^{-1} (A - P_1). \quad (6)$$

3.2.1.1. Equação da face triangular

Nesta seção, são apresentadas cinco proposições com as respectivas provas para a equação da face triangular. As figuras 10, 11, 12 e 13 auxiliam na visualização das proposições.

Proposição 1. Um ponto pertence à visada \overline{AB} e à Ω se os valores dos parâmetros das equações (2), (3) e (4) estiverem contidos no intervalo $[0; 1]$.

Prova. A linha de visada é modelada pela reta da equação (2). Neste caso A é o ponto inicial, r é o parâmetro e \vec{v} o vetor diretor da reta. Para $r=0$, reduz-se $P=A$. Para $r=1$, a equação reduz-se para $P=A+\vec{v}=B$, então $0 \leq r \leq 1$ retornará um ponto entre A e B que pertence à visada limitada por este segmento. Já a face Ω é o espaço formado pela intersecção dos paralelogramos formados por $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ e $\{\vec{w}_1, -\vec{w}_3\}$. Usando o raciocínio análogo à da linha de visada, fica óbvio que este paralelogramo é obtido para os valores dos parâmetros variando de 0 a 1. Um exemplo está apresentado na Figura 10, onde o ponto P pertence à visada \overline{AB} , porém não pertence à Ω já que parâmetro $s_u \notin [0; 1]$.

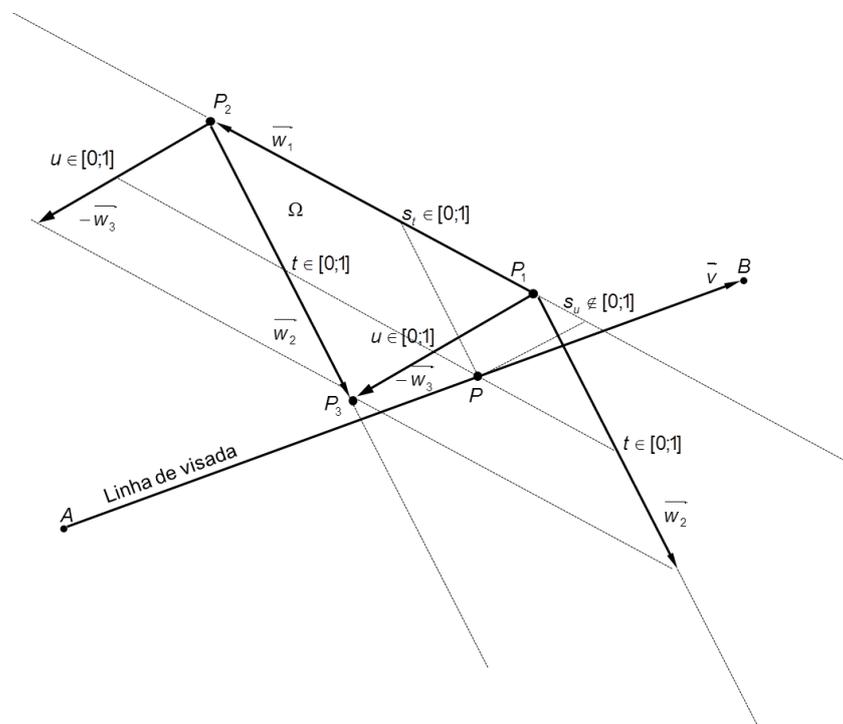


Figura 10. Intersecção dos dois paralelogramos. Situação em que a visada intercepta o plano de Ω , mas não pertence a Ω .

Proposição 2. Se a relação $(r, s_u, u) = (r, s_t - t, t)$ satisfazer a Proposição 1, o ponto de intersecção pertence à visada \overline{AB} e à Ω .

Prova. A solução da equação (6) deve respeitar a Proposição 1. A relação entre os parâmetros das equações (3) e (4) é obtida igualando-as, com isso o parâmetro r é anulado, resultando em:

$$(s_t - s_u)\vec{w}_1 = -\begin{bmatrix} \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Uma vez que $\vec{w}_1 = -\vec{w}_2 - \vec{w}_3$ implica em $a_1 = -a_2 - a_3$, a equação:

$$(s_t - s_u)a_1 = -\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix} \quad (8)$$

permite encontrar a relação:

$$\begin{cases} s_u = s_t - t \\ t = u \end{cases} \quad (9)$$

A relação (9) mostra que não existe a necessidade de se realizar um novo cálculo semelhante à equação (6) para identificar os parâmetros s_u e u , reduzindo assim complexidade do problema. Com isso, a partir da Proposição 1, pode ser verificado se o ponto de intersecção entre a visada e o plano interceptador pertence ou não à face Ω e determinar a *equação da face triangular*, dada por:

$$\begin{aligned} \Omega(s_t, t) &= P_1 + s_t \vec{w}_1 + t \vec{w}_2, \\ t &\leq s_t \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

Proposição 3. Um ponto pertence à reta formada pelo segmento $\overline{P_1 P_2}$ se $s_t = s_u$.

Prova. Se $s_t = s_u$, a partir da Proposição 2, tem-se que $t = u = 0$. Substituindo o parâmetro $t = 0$ na equação (3) $P = P_1 + s_t \vec{w}_1 + 0\vec{w}_2 = P_1 + s_t \vec{w}_1$ obtém-se a equação da reta formada pelo segmento $\overline{P_1 P_2}$ (Figura 11).

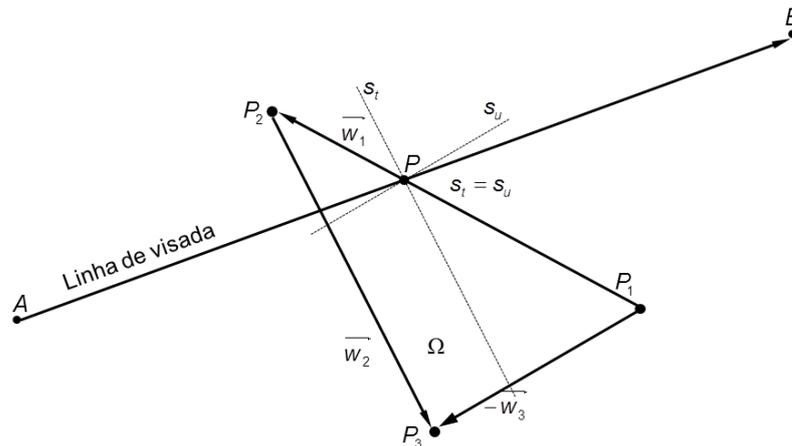


Figura 11. O parâmetro $s_t = s_u$.

Proposição 4. Um ponto pertence à reta formada pelo segmento $\overline{P_2 P_3}$ se $s_t = 1$.

Prova. Substituindo $s_t = 1$ na equação (3), a torna $P = (P_1 + \vec{w}_1) + t\vec{w}_2 = P_2 + t\vec{w}_2$ que é a equação da reta formada pelo vetor diretor \vec{w}_2 (Figura 12).

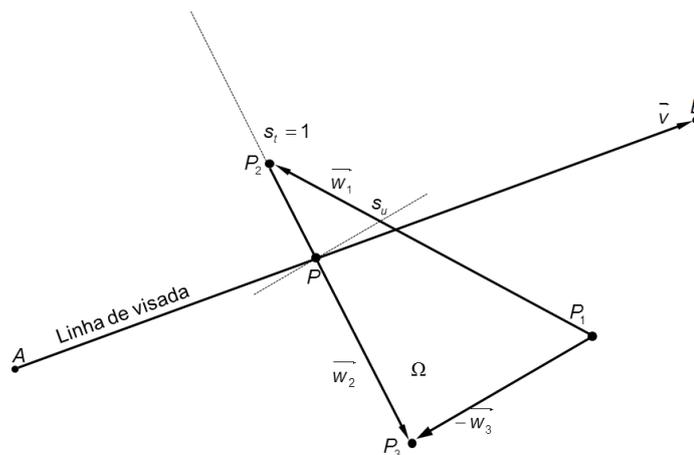


Figura 12. O parâmetro $s_t > 1$.

Proposição 5. Um ponto pertence à reta formada pelo segmento $\overline{P_1P_3}$ se $s_u = 0$.

Prova. Pela Proposição 2, se $s_u = 0$ então $s_t = t$. Substituindo na equação (3), a torna $P = P_1 + t\vec{w}_1 + t\vec{w}_2 = P_1 + t(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$, mas $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = -\vec{w}_3$, logo $P = P_1 - t\vec{w}_3$ que é a equação da reta formada pelo segmento $\overline{P_1P_3}$ (Figura 13).

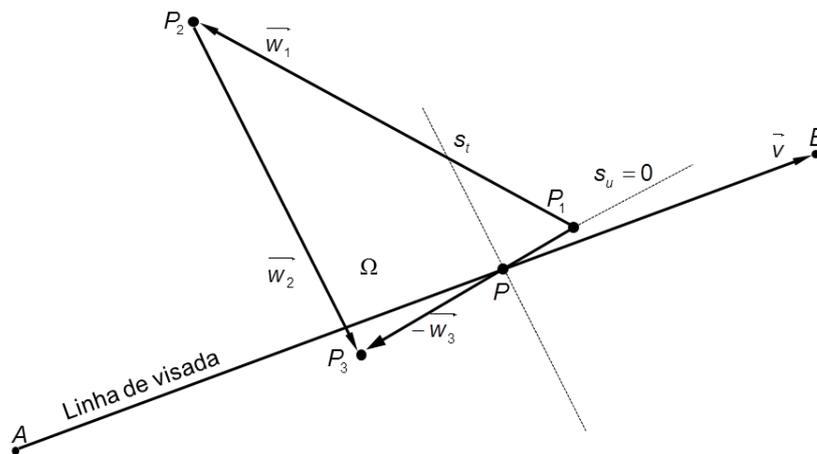


Figura 13. O parâmetro $s_u < 0$.

3.2.1.2. Problemas de intervisibilidade em visadas lineares

Uma vez determinado se Ω intercepta ou não a visada \overline{AB} , tem-se 9 problemas com as respectivas soluções a serem analisadas para intervisibilidade em visadas lineares. A seguir apresentam-se estes problemas, soluções e a representação esquemática (Figura 14 à Figura 22).

Problema 1. Determinar os pontos de intersecção entre Ω e o plano vertical à visada \overline{AB} .

Solução. A Figura 14 mostra o plano vertical à visada cortando Ω em dois locais. Este plano vertical é formado pelos vetores $\{\vec{e}_z, \vec{v}\}$, onde $\vec{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^t$. Equacionam-se as bordas de Ω , com base nos seus vetores diretores \vec{w}_k :

$$U_k = P_k + s_k \vec{w}_k, \quad (11)$$

onde $\{k \in N | 1 \leq k \leq 3\}$, e o plano vertical:

$$U = A + p\vec{e}_z + r\vec{v}. \quad (12)$$

Os parâmetros são s_k , p e r são obtidos pela igualdade entre cada equação da borda com a equação do plano vertical. Tem-se que:

$$\begin{bmatrix} r \\ s_k \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v} & -\vec{w}_k & \vec{e}_z \end{bmatrix}^{-1} (P_k - A) \quad (13)$$

Substitui-se cada parâmetro s_k na equação (11) para encontrar o ponto específico cujo plano vertical corta Ω .

Ainda na Figura 14, tem-se que o ponto mais elevado é chamado de T e o mais baixo de T'' .

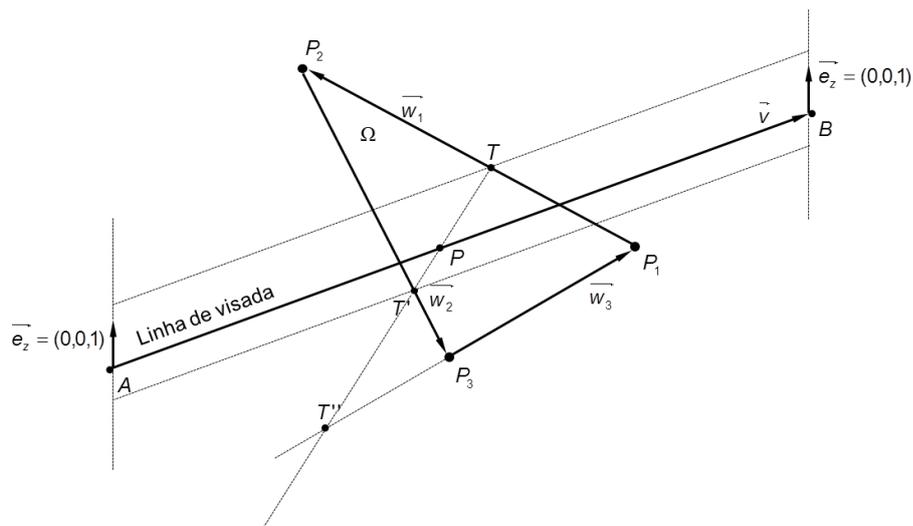


Figura 14. Pontos T , T' e T'' obtidos pelo corte do plano vertical em Ω .

Problema 2. Encontrar os locais visíveis e invisíveis pelo ponto A, a partir do perfil calculado no Problema 1.

Solução. Os segmentos $\overline{TT'}$ formados pelo corte do plano vertical da visada ao longo dos triângulos forma um perfil do MDS. Deseja-se agora, determinar os locais intervisíveis deste perfil ao observador localizado no ponto A não situado em um dos vértices da rede triangular.

A solução proposta para este problema se baseia em linhas de visada que emanam do ponto A à cada vértice do perfil obtido, de modo que, se a linha em estudo é interceptada em mais de 1 ponto do perfil, o primeiro ponto é visível e os demais são invisíveis, como mostra a Figura 15.

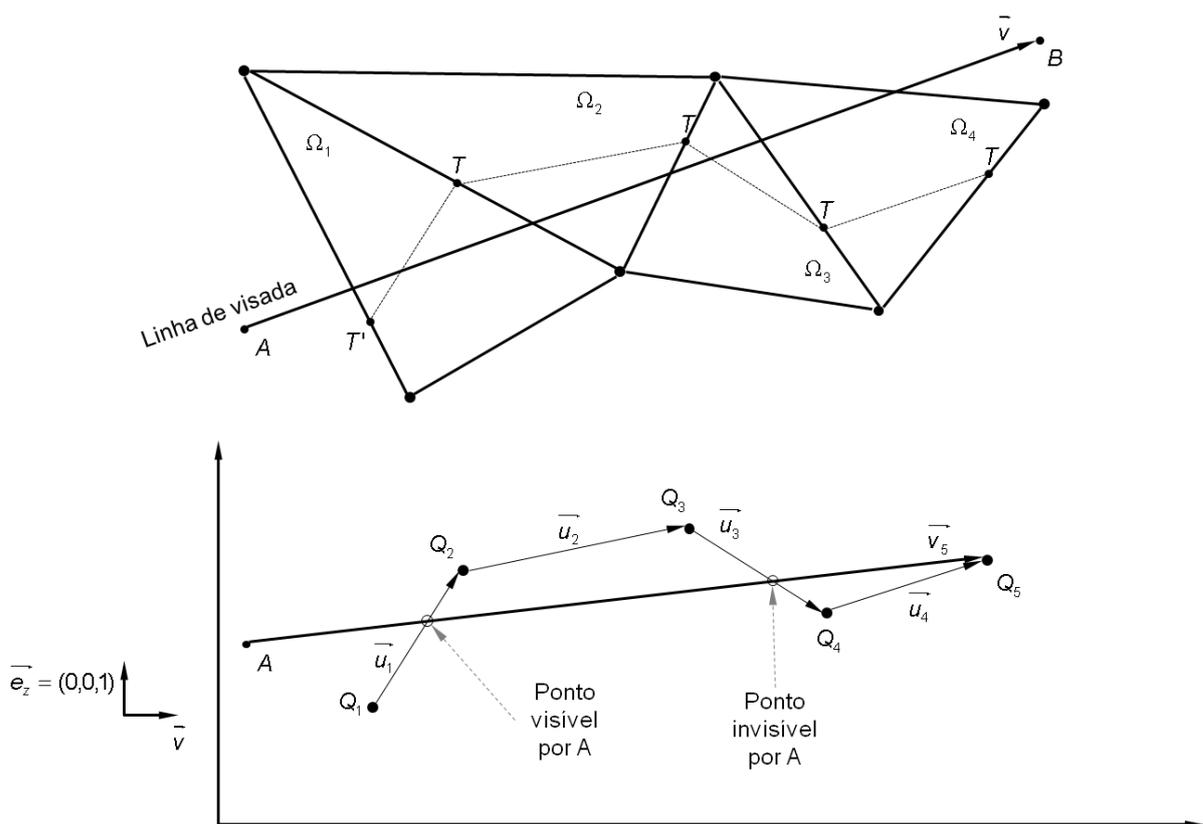


Figura 15. Esquema do cálculo da intervisibilidade do ponto A com o perfil obtido no Problema 1.

Seja Q_i , $\vec{v}_i = Q_i - A$ e $\vec{u}_j = Q_{j+1} - Q_j$ os i -ésimo ponto do perfil, i -ésimo vetor diretor da linha de visada que parte do ponto A e o j -ésimo vetor diretor dos segmentos do perfil, respectivamente. A notação com índice “b”, a partir de agora, representará as coordenadas planas dos respectivos pontos ou vetores. Dado que o perfil tem n vértices, a i -ésima linha de visada corta o perfil, se pelo menos um parâmetro s_j calculado por

$$\begin{bmatrix} r_j \\ s_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{v}_{ib} & \vec{u}_{jb} \end{bmatrix}^{-1} (A_b - Q_{ib}), \quad (14)$$

está no intervalo $[0;1]$, onde $\{(i, j) \in N \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1\}$. Na equação (14), r e s_j são os parâmetros das retas paramétricas $U = A + r_j \vec{v}_i$ e $U = Q_j + s_j \vec{u}_j$, respectivamente.

Problema 3. Determinar os pontos de intersecção entre Ω e o plano inclinado ao plano horizontal a qual pertence à visada \overline{AB} .

Solução. A Figura 17 mostra este plano inclinado corta Ω em dois locais. Este plano é formado da rotação pelo ângulo φ em torno do eixo X de uma circunferência centrada em A cujo raio vale $\|\vec{v}\|$, onde o operador $\|\ \|\$ representa a norma do vetor.

O conjunto de pontos $B'_{\varphi\theta}$ desta circunferência é determinado por:

$$B'_{\varphi\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ 0 & \text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\vec{v}\| \cos\theta \\ \|\vec{v}\| \text{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} + A \quad (15)$$

Onde θ é o ângulo que o vetor $\left[\|\vec{v}\| \cos \theta \quad \|\vec{v}\| \sin \theta \quad 0 \right]^T$ é rotacionado sobre o plano da circunferência. O ângulo φ é o ângulo entre os vetores $\vec{v}_1 = (0, b, c)$ e $\vec{v}_2 = (0, b, 0)$ (Figura 16):

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\|\vec{v}_1\|}{\|\vec{v}_2\|} \right) \quad (16)$$

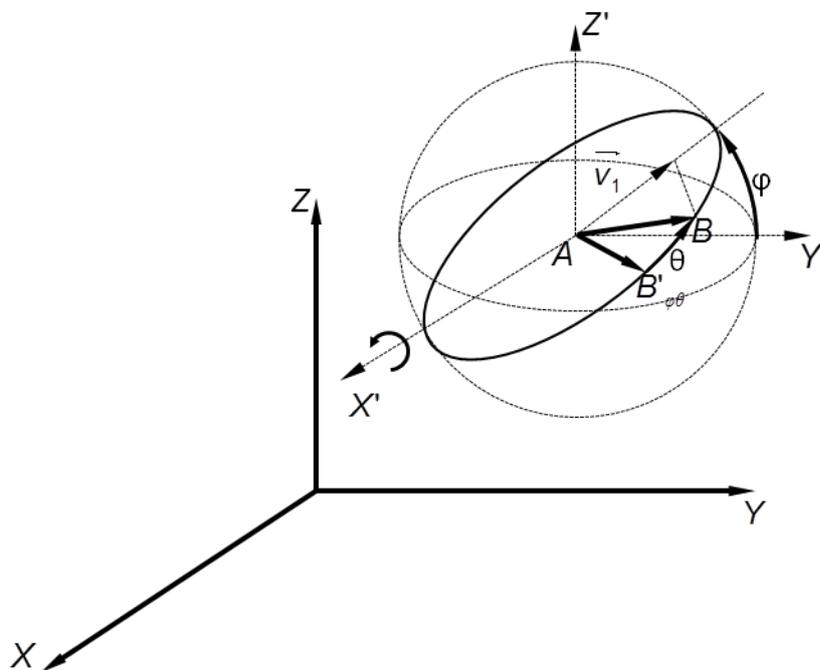


Figura 16. Esquema da circunferência inclinada em relação ao plano horizontal.

Dois vetores determinam um plano, deste modo, quaisquer dois vetores que pertencem à circunferência rotacionada formam o plano que a contém. Faz-se $\theta = 0$, para obter o ponto $B'_{\varphi 0}$, tal que,

$$B'_{\varphi 0} = \begin{bmatrix} \|\vec{v}\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + A \quad (17)$$

e vetor $\vec{v}_{\varphi 0} = B'_{\varphi 0} - A$. A equação do plano $\{\vec{v}_{\varphi 0}, \vec{v}\}$ é dada por:

$$U = A + r\vec{v} + q\vec{v}_{\varphi 0} \quad (18)$$

Uma vez obtida esta equação, raciocina-se de forma análoga ao Problema 1 para obter os parâmetros r , s_k e q :

$$\begin{bmatrix} r \\ s_k \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v} & -\vec{w}_k & \vec{v}_{\varphi 0} \end{bmatrix}^{-1} (P_k - A) \quad (19)$$

e substituem-se os parâmetros s_k em (11) para obter os pontos que interceptam Ω . Na Figura 17, estes pontos estão representados por P' , P'' e P''' , onde o primeiro é o ponto mais elevado e o último o mais abaixo.

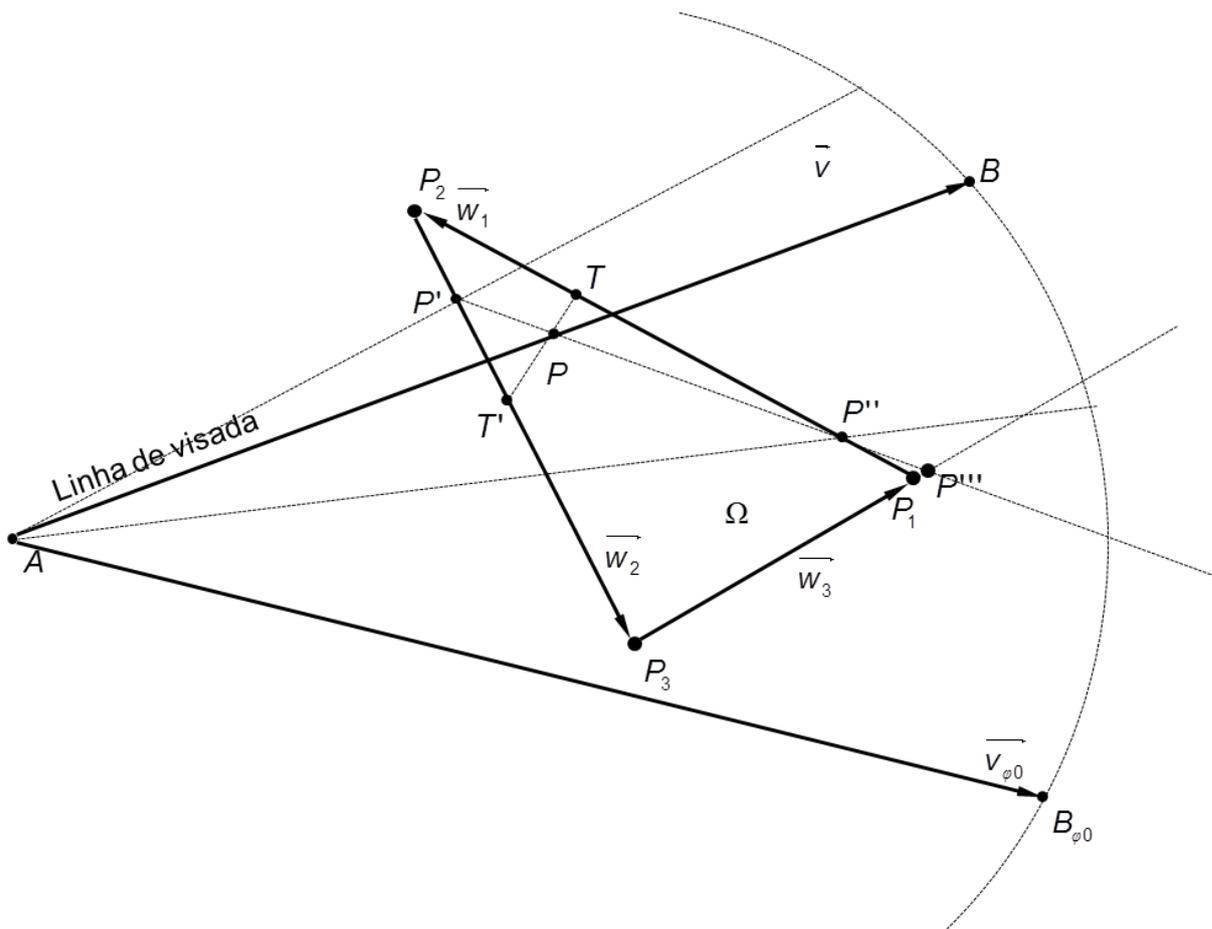


Figura 17. Pontos P', P'' e P''' obtidos do corte de Ω pelo plano que contém a circunferência inclinada ao plano horizontal.

Problema 4. Elevar o ponto A, fixo o ponto B e reciprocamente.

Solução. O esquema deste problema é visto na Figura 18. Este problema é resolvido obtendo-se conjunto de pontos acima do plano $\{\vec{w}_1, \vec{w}_4\}$, onde \vec{w}_4 é um vetor que parte de um dos pontos A e B ao ponto $T \in \Omega$, mais elevado, obtido no Problema 1. Seja $\vec{w}_4 = T - B$, a equação do plano $\{\vec{w}_1, \vec{w}_4\}$ é dada por:

$$U = T + m\vec{w}_4 + n\vec{w}_1 \quad (20)$$

Quer-se somente elevar o ponto A, ou seja, não alterar suas coordenadas planas.

Fazendo $A_b = [x_A \ y_A]^t$, $T_b = [x_T \ y_T]^t$ e $\vec{w}_{kb} = [a_k \ b_k]^t$ reescreve-se a equação (4):

$$A_b = T_b + m\overrightarrow{w_{4b}} + n\overrightarrow{w_{1b}}. \quad (21)$$

O par $[m \ n]^t$ é obtido pela equação

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = Q^{-1}(A_b - T_b), \quad (22)$$

onde $Q = [\overrightarrow{w_{4b}} \ \overrightarrow{w_{1b}}]$. Uma vez encontrado os parâmetros m e n , resta agora substituí-los na equação (20) para obter o novo ponto $U = A' = [x_A \ y_A \ z'_A]^t$ com elevação mínima para ter-se intervisibilidade com B. Logo, a altura mínima para que haja intervisibilidade entre o ponto A, fixo o ponto B é:

$$h_{0_1} = z'_A - z_A \quad (23)$$

Logo, para $h > h_{0_1}$ não haverá mais a falta de visibilidade entre B e A. No caso em que se quer elevar B, fixo A, deve-se fazer o vetor $\overrightarrow{w_4} = T - A$ e substituir A_b por B_b nas equações (21) e (22):

$$B_b = T_b + m\overrightarrow{w_{4b}} + n\overrightarrow{w_{1b}} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = Q^{-1}(B_b - T_b) \quad (25)$$

Basta substituir este novo par de parâmetros m e n na equação (20) para encontrar o novo ponto $U = B' = [x_B \ y_B \ z'_B]^t$. A altura mínima encontrada será dada por:

$$h_{0_2} = z'_B - z_B \quad (26)$$

Problema 5. Ângulo vertical necessário para visualizar A, fixo B e reciprocamente.

Solução. Uma vez calculada as alturas mínimas h_{0_j} , como visto na Figura 18, duas novas visadas são obtidas com dois novos vetores diretores $\vec{v}_{e_1} = B - A'$ e $\vec{v}_{e_2} = B' - A$. Os ângulos verticais mínimos (Figura 18), em graus, para que o ponto B vise A' e B' vise A são os ângulos entre os vetores \vec{v} e \vec{v}_{e_j} , dados por:

$$\alpha_{0_j} = \arccos \left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_{e_j} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{v}_{e_j}\|} \right) \left(\frac{180}{\pi} \right), \quad (27)$$

onde o operador $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno e $\{j \in N | 1 \leq j \leq 2\}$.

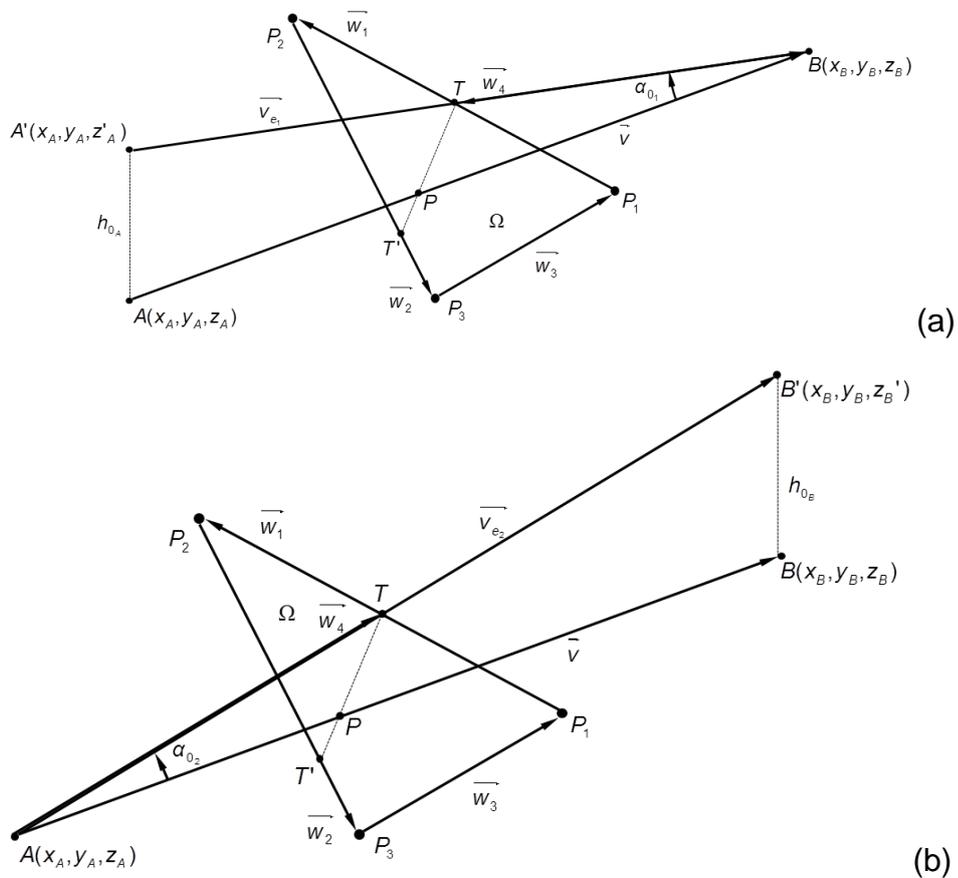


Figura 18. (a) Elevação do ponto A, fixo B. (b) Elevação do ponto B, fixo A. Os pontos T e T' nas duas figuras são os mesmos.

Problema 6. Elevar os pontos A e B para que a linha de visada seja paralela ao plano horizontal.

Solução. Na solução do Problema 1, fica claro que z_T é a cota mínima para que a visada \overline{AB} seja paralela ao plano horizontal mantendo as coordenadas planas, logo os novos pontos são $A'' = [x_A \ y_A \ z_T]^t$ e $B'' = [x_B \ y_B \ z_T]^t$. Na Figura 19 tem-se a representação das alturas mínimas h_A e h_B em que os pontos A e B foram elevados. Estas alturas são facilmente calculadas por:

$$\begin{aligned} h_A &= z_T - z_A \\ h_B &= z_T - z_B \end{aligned} \quad (28)$$

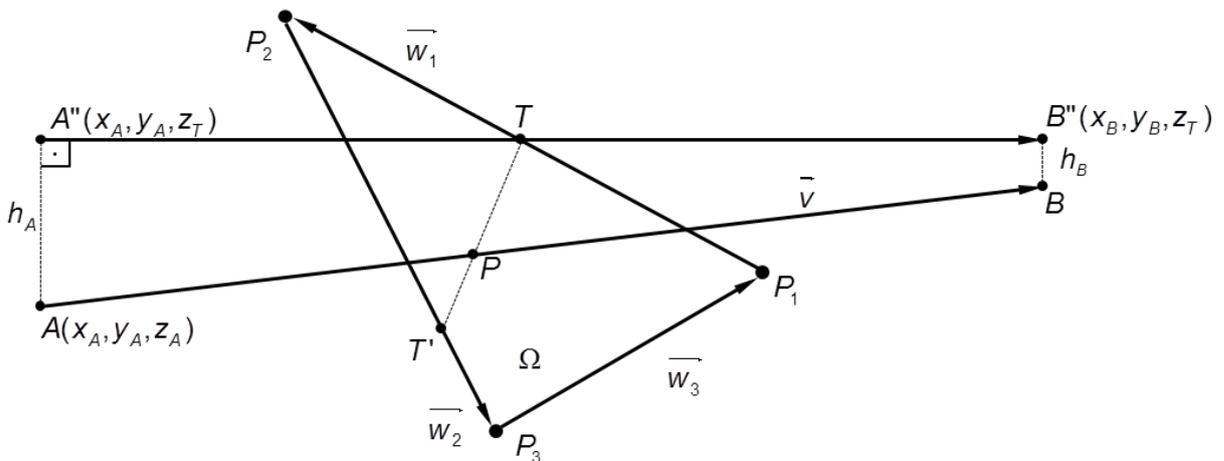


Figura 19. Esquema da nova visada paralela ao plano horizontal.

Problema 7. Reduzir os pontos mais elevados no terreno P1 ou P2, tornando fixo um deles. Neste problema o ponto P3 sempre permanece fixo. Este problema depende das proposição 3, 4 e 5 e da solução do Problema 1.

Solução a. Se o ponto T corta a reta do segmento $\overline{P_1P_2}$, calcula-se estes novos pontos com base na Proposição 3, neste caso os dois pontos P1 e P2 podem ser reduzidos no terreno. Na Figura 20a deseja-se reduzir o ponto P1 para o ponto P1', para isso procedem-se os cálculos para o parâmetro $t = 0$. Este ponto P1' pertence à visada \overline{AB} e aos dois novos planos $\{\overline{w_1'}, \overline{w_2'}\}$ e $\{\overline{w_1'}, \overline{w_3'}\}$, onde os vetores $\overline{w_1'}$ e $\overline{w_3'}$ são os novos vetores diretores. O ponto de intersecção P' entre a visada \overline{AB} e a aresta $\overline{P_1'P_2}$ pode ser obtido através de qualquer uma das equações (2), (3) e (4) por meio dos parâmetros adequados. Substituindo P1 por P1' e $\overline{w_1}$ por $\overline{w_1'}$ na equação (5), obtém-se a igualdade:

$$A + r\vec{v} = P_1' + s_t\overline{w_1'} + t\overline{w_2'}, \quad (29)$$

mas $\overline{w_1'} = P_2 - P_1'$ e $t = 0$, logo:

$$A + r\vec{v} = P_1' + s_t(P_2 - P_1'). \quad (30)$$

Fazendo-se as manipulações adequadas, calcula-se o ponto P_1' através da equação:

$$P_1' = \frac{1}{(1-s_t)}(A + r\vec{v} - s_t P_2), \quad (31)$$

definida para $s_t \neq 1$. Sabe-se que as coordenadas planas de P_1' são iguais as de P_1 então, reescreve-se a equação (30) para encontrar os parâmetros s_t e r :

$$\begin{bmatrix} s_t \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_{2b} - P_{1b}) & -\vec{v}_b \end{bmatrix}^{-1} [A_b - P_{1b}]. \quad (32)$$

Pela equação (31) encontra-se a coordenada z_1' do ponto P_1' . Logo, a elevação mínima h_{P_1} do ponto P_1 , para que haja intervisibilidade entre A e B é dada por:

$$h_{P_1} = z_1' - z_1. \quad (33)$$

No caso de reduzir P_2 , supondo que sejam fixos P_1 e P_3 , o raciocínio é o mesmo. O novo ponto P_2' pertence à visada \overline{AB} e a dois novos planos $\{\vec{w}_1', \vec{w}_2'\}$ e $\{\vec{w}_1', \vec{w}_3'\}$. Percebe-se agora o vetor \vec{w}_3 permanece inalterado. Substituindo P_2 por P_2' e \vec{w}_2 por \vec{w}_2' na equação (4), obtém-se a igualdade:

$$A + r\vec{v} = P_1 + s_u \vec{w}_2' - u\vec{w}_3 \quad (34)$$

mas $\vec{w}_2' = P_2' - P_1$ e $u = 0$, logo:

$$A + r\vec{v} = P_1 + s_u (P_2' - P_1), \quad (35)$$

resultando nas duas equações abaixo:

$$P_2' = \frac{1}{s_u} (A + r\vec{v}), \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} s_u \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{2b}' & -\vec{v}_b \end{bmatrix}^{-1} A_b, \quad (37)$$

com $s_u \neq 0$. Pela equação (36) encontra-se a coordenada z_2' do ponto P_2' . Logo, a elevação mínima h_{P_2} do ponto P_2 , para que haja intervisibilidade entre A e B é dada por:

$$h_{P_2} = z_2' - z_2. \quad (38)$$

$$A + r\vec{v} = P_1 + s_t\vec{w}_1' + t\vec{w}_2' \quad (39)$$

mas $\vec{w}_1' = P_2' - P_1$, $\vec{w}_2' = P_3 - P_2'$ e $s_t = 1$, logo:

$$A + r\vec{v} = P_1 + (s_t - t)P_2' - s_t P_1 + tP_3 \quad (40)$$

e o ponto P_2' é obtido por:

$$P_2' = \frac{1}{(s_t - t)}(A - P_1 + r\vec{v} + s_t P_1 + tP_3), \quad (41)$$

onde $s_t \neq t$. Os parâmetros r , s_t e t são calculados por:

$$\begin{bmatrix} r \\ s_t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{v}_b & (P_{2b} - P_{1b}) & (P_{3b} - P_{2b}) \end{bmatrix}^{-1} [A_b - P_{1b}]. \quad (42)$$

Basta então substituí-los na equação (41) para obter a nova coordenada z_2' de P_2' . Calcula-se a elevação mínima h_{p_2} do ponto P_2 , para que haja intervisibilidade entre A e B pela equação (38).

Solução c. O ponto T corta a reta do segmento $\overline{P_1 P_3}$. Neste caso, os cálculos são baseados na Proposição 5 e o ponto P_1 deverá ser elevado. O parâmetro $s_u = 0$ significa $s_t = t$. Seguindo o mesmo caminho das soluções anteriores tem-se $\vec{w}_1' = P_2 - P_1'$, logo, a partir da equação (29):

$$A + r\vec{v} = P_1' + t(2P_2 - P_1' - P_1), \quad (43)$$

e o ponto P_1' é obtido por:

$$P_1' = \frac{1}{(1-t)} (A + r\vec{v} - 2P_2 + P_1), \quad (44)$$

tal que, $t \neq 1$. Os parâmetros r e t são facilmente obtidos na solução de:

$$\begin{bmatrix} r \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{v}_b & 2(P_{2b} - P_{1b}) \end{bmatrix}^{-1} (A_b - P_{1b}). \quad (45)$$

Uma vez encontrados os parâmetros, substituí-los na equação (44). Calcula-se a elevação mínima h_{P_1} do ponto P_1 , para que haja intervisibilidade entre A e B pela equação (33).

Problema 8. Reduzir os pontos P_1 e P_2 tal que $\overline{P_1P_2}$ seja paralelo ao plano horizontal.

Solução. Este problema está ilustrado na Figura 21. É necessário primeiro elevar o ponto P_1 ao ponto P_2 e reduzir a nova aresta de modo que ela intersecte a visada \overline{AB} . Este problema depende da Proposição 3.

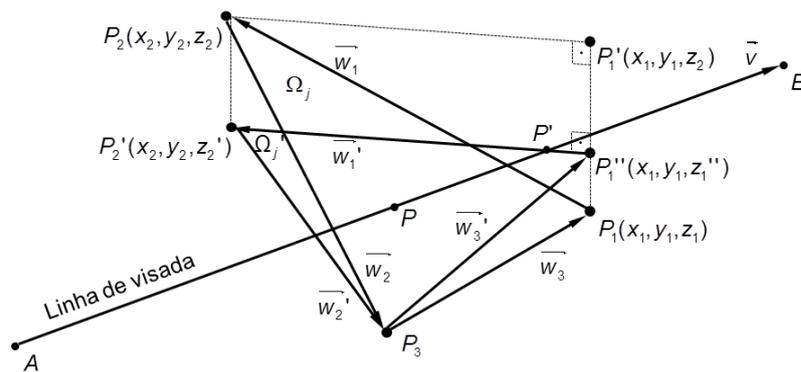


Figura 21. Esquema do Problema 8.

Conhece-se o ponto $P_1' = [x_1 \ y_1 \ z_2]^t$, logo o vetor \vec{w}_1' é paralelo ao plano horizontal. O ponto de intersecção P' é calculado da mesma maneira do Problema 7, desta vez, com os vetores \vec{w}_1' , \vec{w}_2' :

$$A + r\vec{v} = P_1'' + s_t \vec{w}_1' + t \vec{w}_2' \quad (46)$$

mas $\vec{w}_1' = P_2' - P_1'' = P_2 - P_1'$ e $t = 0$, logo:

$$A + r\vec{v} = P_1'' + s_t(P_2 - P_1') \quad (47)$$

resolve-se s_t e r identicamente pela equação (32), uma vez que as coordenadas bidimensionais de P_1'' , P_1' e P_1 são idênticas, e os substitui na equação (47) para obter a coordenada z_1'' . Decorre do propósito deste problema que a coordenada $z_2' = z_1''$.

Problema 9. Uma vez resolvido o Problema 8, elevar P_3 para que pertença ao plano formado pelos segmentos $\{\overline{P_1''P_2'}, \overline{AB}\}$.

Solução. O novo ponto P_3' é calculado através da equação do plano:

$$P_3' = P_1'' + r\vec{v} + s\vec{w}_1' \quad (48)$$

onde $\vec{w}_1' = P_2'' - P_1'$. Os parâmetros r e s são calculados com base nas coordenadas bidimensionais de cada elemento, deste modo:

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_b & \vec{w}_{1b}' \end{bmatrix} (P_{3b}' - P_{1b}'') \quad (49)$$

Substituindo r e s da equação (49) em (48), encontra-se o ponto P_3' que difere do ponto P_3 somente em sua coordenada z (Figura 22).

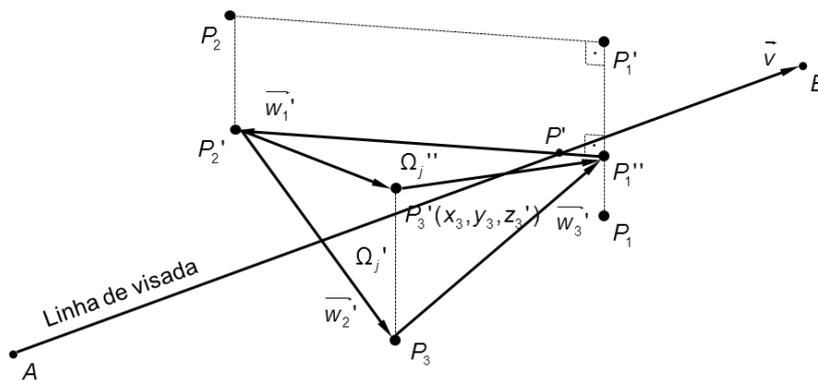


Figura 22. Elevação do ponto P3.

É possível estender o problema da visada linear para o cone. Isto será visto no tópico a seguir.

3.2.2. Cone de intervisibilidade

Os casos descritos no tópico anterior remetem-se às descrições e soluções de casos em que as visadas são segmentos de reta, portanto, um problema clássico de intervisibilidade, porém pode-se aplicar a mesma teoria em regiões descritas por volumes geométricos parametrizados, como por exemplo, o cone.

Este tipo de análise pode ser visto como sendo uma revolução da visada linear em torno de um eixo, neste caso, a linha de visada torna-se a geratriz do cone. Na Figura 23, tem-se o vetor \vec{q} , sob uma determinada orientação, sendo rotacionado em torno do eixo Y' , formando o cone.

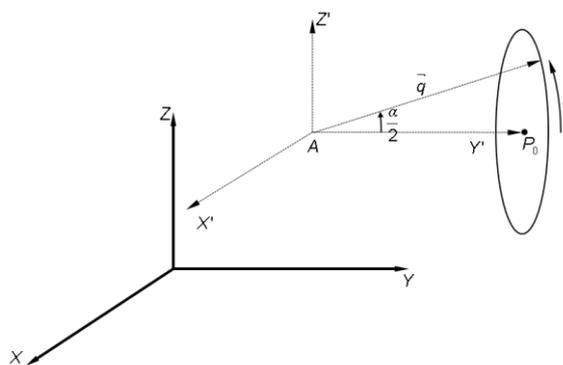


Figura 23. Vetor \vec{q} rotacionado em torno do eixo Y' , criando um cone.

Esta análise é útil, por exemplo, na determinação de obstáculos em torno de uma determinada linha de visada, agora representada pelo eixo do cone. Por exemplo, na determinação de um melhor ângulo de elevação para rastreamento de satélites GNSS. Sendo ν o ângulo de elevação, o ângulo de abertura do cone torna-se $\alpha = \pi - 2\nu$.

A Figura 24 mostra um esquema do uso do cone de intervisibilidade para determinação do ângulo de elevação e uma simulação da representação tridimensional do cone de intervisibilidade de um marco geodésico (EPS6).

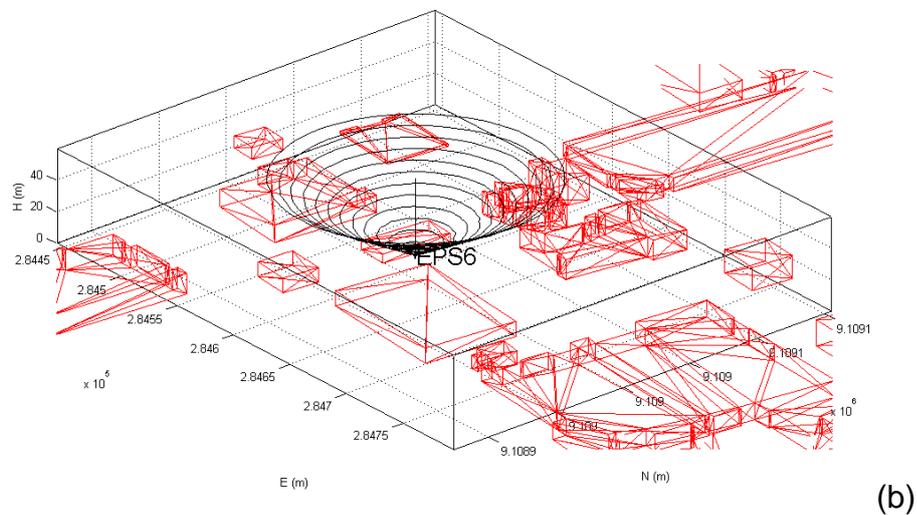
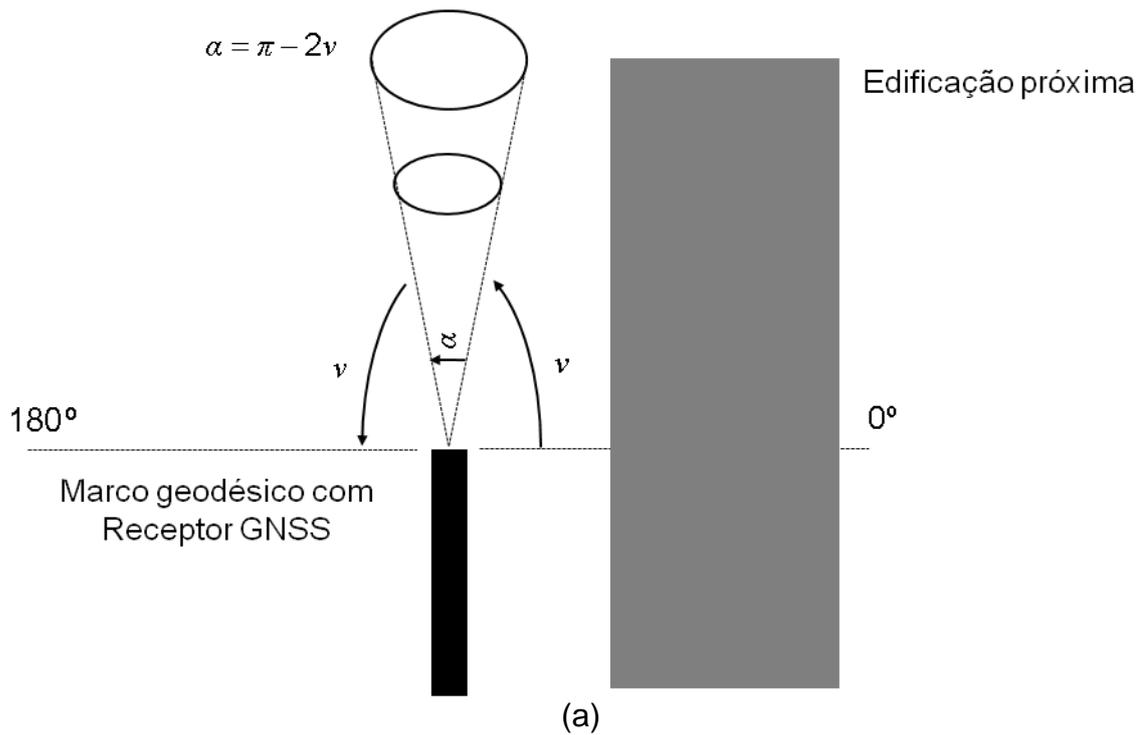


Figura 24. (a) Esquema do uso do cone de intervisibilidade para determinação do ângulo de elevação. (b) Simulação da representação tridimensional do cone de intervisibilidade de um marco geodésico (EPS6), próximo a edifícios representados digitalmente através de redes triangulares. Solução obtida no MATLAB 7.10.

Na Figura 24 tem-se a representação do ângulo de elevação de um marco geodésico, para avaliação do impedimento das visadas entre o rastreamento de satélites GNSS.

Esta é apenas uma aplicação do cone de intervisibilidade, cujo desenvolvimento matemático será exposto no tópico a seguir.

3.2.2.1. Equação Paramétrica do Cone

A Figura 25 mostra o esquema para a equação paramétrica do cone. Seja um cone partindo do ponto A, distando deste ponto à sua base de h. Inicialmente, faz-se o vetor $\vec{d} = [0 \ h \ 0]^t$ o eixo inicial e α o ângulo de abertura deste cone. A equação da base é uma circunferência, cuja equação paramétrica, nesta configuração, é dada por

$$c(\beta) = P_0 + \vec{p}(\beta) \quad (50)$$

onde β é o parâmetro que permite escrever a circunferência e varia no intervalo $[0; 2\pi]$, $\vec{p}(\beta) = h \tan \frac{\alpha}{2} [\cos \beta \ 0 \ \sin \beta]^t$, P_0 é o centro da circunferência e $h \tan \frac{\alpha}{2}$ o raio desta.

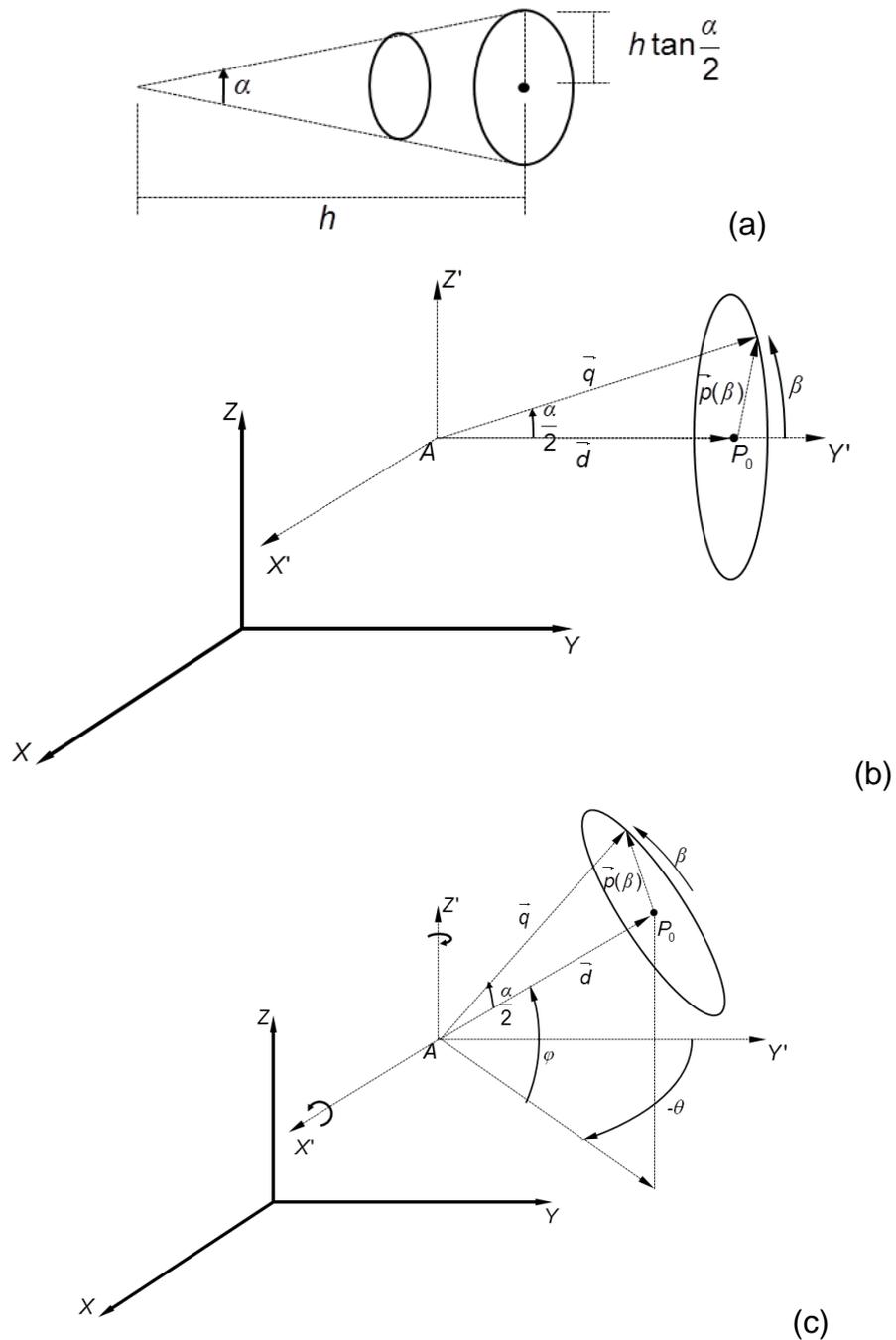


Figura 25. (a) Esquema geral de um cone. (b) Configuração inicial.
(c) Cone rotacionado.

Sabe-se, pela configuração inicial (Figura 25b), que o ponto $P_0 = A + \vec{d}$, deste modo, rotacionando-se o termo $\vec{d} + \vec{p}(\beta)$ verticalmente pelo ângulo φ e horizontalmente pelo ângulo θ , ou seja, uma rotação de φ em torno do eixo X, representado pela matriz de rotação R_x , e θ em torno do eixo Z, através da matriz de

rotação R_z , permite-se encontrar a equação paramétrica do cone. Sabendo-se que o ponto A é apenas um fator de translação e não participa das rotações, esta equação é definida por:

$$C = A + R_z(\theta)R_x(\varphi)(\vec{d} + \vec{p}(\beta)) \quad (51)$$

$$\text{Com } R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ 0 & \text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Fazendo o vetor $\vec{e}_y = [0 \ 1 \ 0]$, A soma $\vec{d} + \vec{p}(\beta)$ é simplificada em função do termo h, resultando em

$$\vec{d} + \vec{p}(\beta) = h \left(\vec{e}_y + \tan\frac{\alpha}{2} [\cos\beta \ 0 \ \text{sen}\beta]^t \right) = h \left[\tan\frac{\alpha}{2} \cos\beta \ 1 \ \tan\frac{\alpha}{2} \text{sen}\beta \right]^t \quad (52)$$

fazendo $\vec{p}'(\beta) = \left[\tan\frac{\alpha}{2} \cos\beta \ 1 \ \tan\frac{\alpha}{2} \text{sen}\beta \right]^t$, a equação (51) é reescrita para

$$C = A + hR_z(\theta)R_x(\varphi)\vec{p}'(\beta), \quad (53)$$

onde o termo $hR_z(\theta)R_x(\varphi)\vec{p}'(\beta)$ é o vetor \vec{q} , mostrado nas Figura 25b e Figura 25c, cuja expansão é dada por

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} h \tan\frac{\alpha}{2} \cos\beta \cos\theta - h \cos\varphi \text{sen}\theta + h \tan\frac{\alpha}{2} \text{sen}\beta \text{sen}\varphi \text{sen}\theta \\ h \cos\varphi \cos\theta + h \tan\frac{\alpha}{2} \cos\beta \text{sen}\varphi - h \tan\frac{\alpha}{2} \text{sen}\beta \text{sen}\varphi \cos\theta \\ h \text{sen}\varphi + h \tan\frac{\alpha}{2} \text{sen}\beta \cos\varphi \end{bmatrix}. \quad (54)$$

A partir da equação (53), conhecendo-se os termos α , θ , φ e fazendo $0 \leq \beta \leq 2\pi$, a variação de h permite escrever várias circunferências, que são cortes longitudinais de um cone, como mostra a Figura 26.

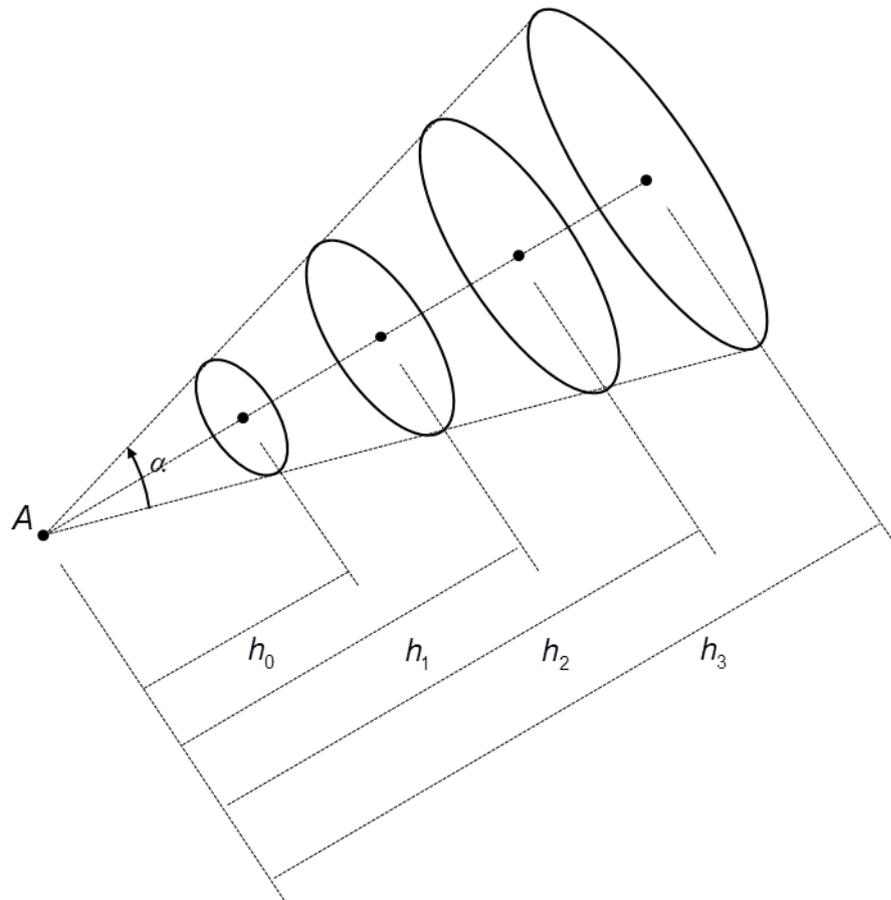


Figura 26. Sabendo-se os parâmetros as circunferências são escritas.

Fazendo-se $\alpha = 0$, a equação (54) é reduzida a $\vec{q}_0 = [-h \cos \varphi \sin \theta \quad h \cos \varphi \cos \theta \quad h \sin \varphi]^t$, cuja substituição de \vec{q} por \vec{q}_0 na equação (53), resulta numa de linha de visada linear em coordenadas esféricas, em que se conhece a distância ao alvo e os ângulos horizontais e verticais. Isso também significa que a intervisibilidade por meio de linha visada linear é um caso particular do cone de intervisibilidade.

3.2.2.2. Problemas de intervisibilidade em cones

Uma vez determinada a equação paramétrica do cone, deseja-se resolver os seguintes problemas, que de certa forma são análogos aos problemas descritos utilizando-se visadas em linhas retas. Para exemplificar são apresentados os problemas 10, 11 e 12 e suas respectivas soluções. Além disso, as figuras 27 à 33 mostram uma representação da geometria destes problemas.

Problema 10. Determinar a distância entre um ponto A e Ω ao longo do eixo de um cone de parâmetros conhecidos.

Solução. A Figura 27 exemplifica o problema proposto. O ponto central P_0 da circunferência da base do corte longitudinal do cone também deve pertencer ao plano de Ω , ou seja,

$$P_0 = A + hR_z(\theta)R_x(\varphi)\vec{e}_y = P_1 + s_t\vec{w}_1 + t\vec{w}_2 \quad (55)$$

Logo, esta distância é obtida igualmente com os parâmetros de Ω , que deve satisfazer a Proposição 2, procedendo-se da mesma maneira da equação (6):

$$\begin{bmatrix} h \\ s_t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_z(\theta)R_x(\varphi)\vec{e}_y & \vec{w}_1 & \vec{w}_2 \end{bmatrix} (A - P_1) \quad (56)$$

Uma vez encontrado estes parâmetros, sabe-se qual circunferência do cone intercepta o plano de Ω .

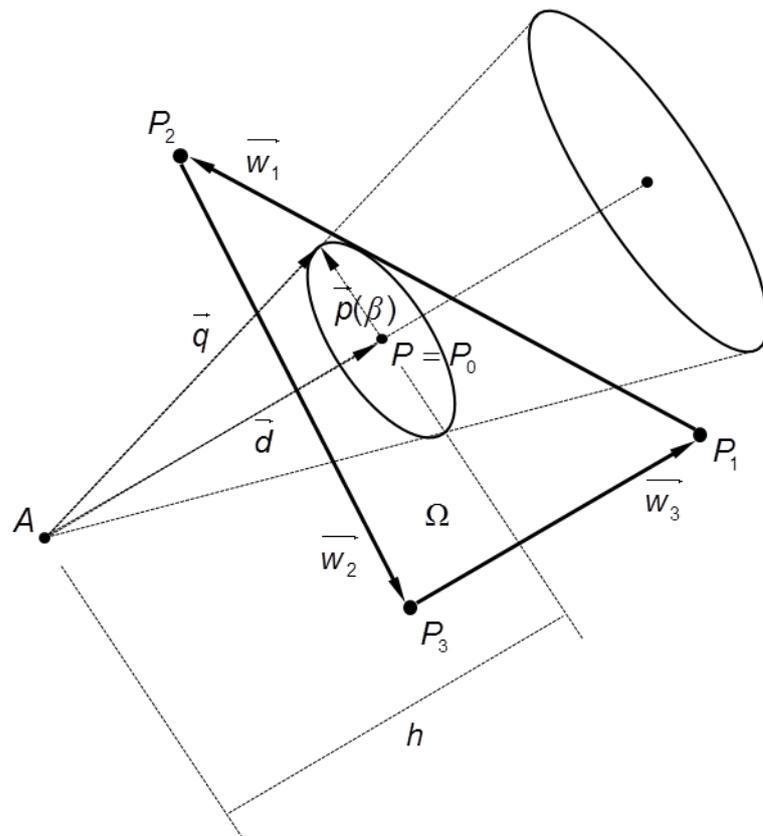


Figura 27. Cone interceptando o plano da face Ω .

Problema 11. Determinar a região visível por um cone de parâmetros conhecidos no plano da face Ω .

Solução. Uma vez solucionado o Problema 10, este novo problema consiste em determinar a região Ψ , que é delimitada pela intersecção do vetor \vec{q} com Ω , como visto na Figura 28.

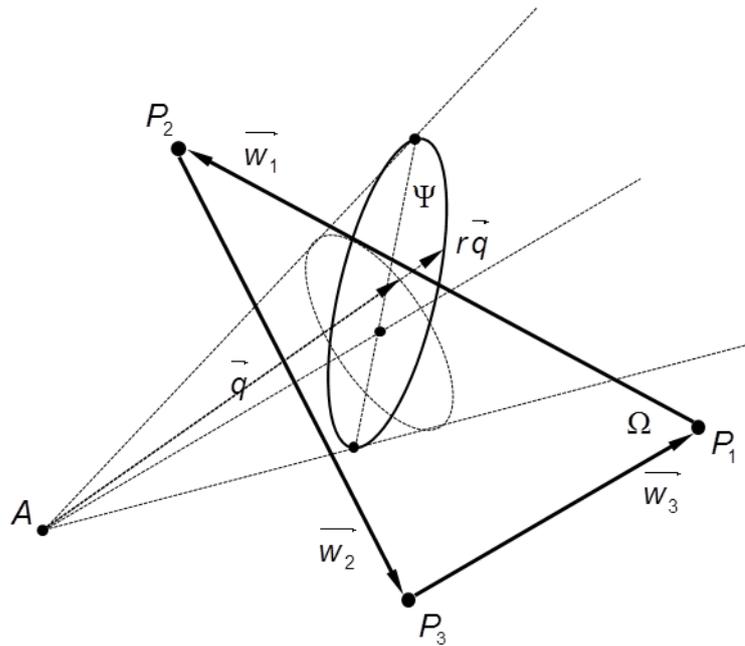


Figura 28. Região Ψ : porção do plano que contém Ω , visível pelo cone resolvido no Problema 10.

O corte de um cone pode gerar as figuras geométricas, circunferência, elipse, parábola ou hipérbole e irão depender da posição do cone em relação à Ω . Não será imposto limite para o comprimento do cone, então as únicas figuras geométricas resultantes poderão ser a circunferência, elipse e a hipérbole.

Tem-se que, para $h=0$, calculado na equação (56), Ψ colapsa em um ponto. Sempre que $h>0$, Ψ será uma circunferência ou elipse formada posterior ao observador (Figura 29a). Caso $h<0$, o plano da face Ω intercepta o cone de intervisibilidade posterior e anterior, ou somente anterior ao observador localizado no ponto A. Neste último caso, não irá interessar a parte que está anterior ao observador e Ψ pode ser definida a partir do conjunto solução obtido nas equações (71), (75) e (77), no Problema 12, e poderá ser uma hipérbole (Figura 29b), uma circunferência ou uma elipse (Figura 29c).

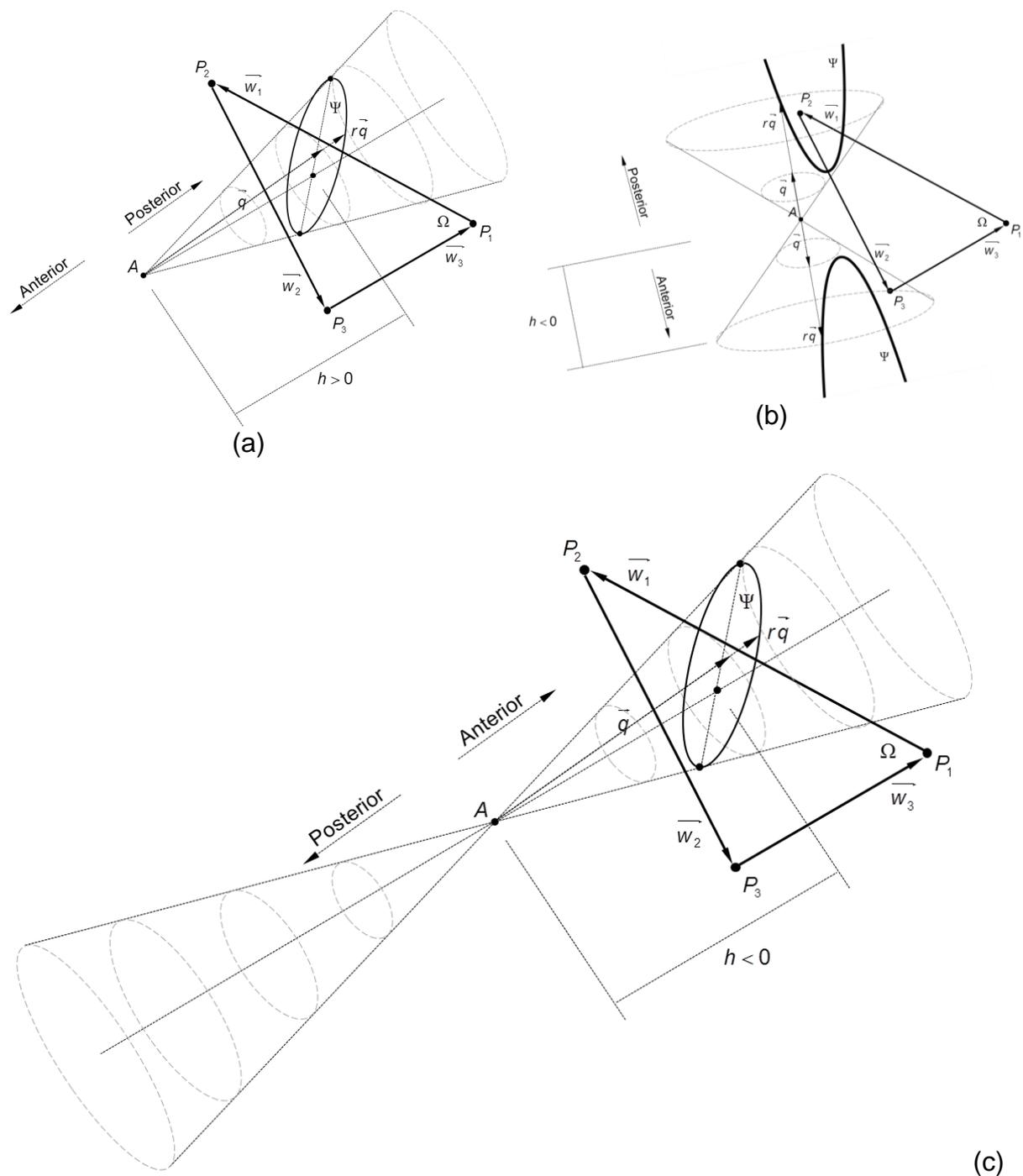


Figura 29. Corte do cone de invisibilidade pelo plano da face Ω . (a) Plano visto posteriormente ao observador. (b) O plano é visto posteriormente, porém ele também corta o cone anteriormente ao observador. (c) O plano está totalmente anterior ao observador.

A determinação dos parâmetros de Ω é realizada por meio do mesmo raciocínio do problema da intervisibilidade mostrado nos tópicos anteriores, cujo vetor da linha de visada, visto na equação (54), agora é o vetor \vec{q} :

$$A + r\vec{q} = P_1 + s_t\vec{w}_1 + t\vec{w}_2. \quad (57)$$

A partir da equação (57), omitindo o resultado para o parâmetro r , um extenso desenvolvimento permite encontrar os parâmetros s_t e t em função do ângulo β , dados por:

$$s_t(\beta) = -\frac{\lambda_{12} \cos \beta + \lambda_{22} \text{sen} \beta + \lambda_{32}}{\varepsilon_{12} \cos \beta + \varepsilon_{22} \text{sen} \beta + \varepsilon_{32}} \quad (58)$$

$$t(\beta) = \frac{\lambda_{11} \cos \beta + \lambda_{21} \text{sen} \beta + \lambda_{31}}{\varepsilon_{12} \cos \beta + \varepsilon_{22} \text{sen} \beta + \varepsilon_{32}} \quad (59)$$

Onde

$$\lambda_{1k} = \tan \frac{\alpha}{2} \{ \cos \theta [c_k \delta_2 - b_k \delta_3] - \text{sen} \theta [c_k \delta_1 - a_k \delta_3] \} \quad (60)$$

$$\lambda_{2k} = \tan \frac{\alpha}{2} \{ \cos \varphi [b_k \delta_1 - a_k \delta_2] + \cos \theta \text{sen} \varphi [c_k \delta_1 - a_k \delta_3] + \text{sen} \theta \text{sen} \varphi [c_k \delta_2 - b_k \delta_3] \} \quad (61)$$

$$\lambda_{3k} = \text{sen} \varphi [b_k \delta_1 - a_k \delta_2] - \cos \theta \cos \varphi [c_k \delta_1 - a_k \delta_3] - \text{sen} \theta \cos \varphi [c_k \delta_2 - b_k \delta_3] \quad (62)$$

$$\varepsilon_{1j} = \tan \frac{\alpha}{2} [\cos \theta (b_j c_j - a_j c_1) - \text{sen} \theta (a_j c_j - a_j c_1)] \quad (63)$$

$$\varepsilon_{2j} = \tan \frac{\alpha}{2} [\cos \varphi (a_j b_j - a_j b_1) + \cos \theta \text{sen} \varphi (a_j c_j - a_j c_1) + \text{sen} \theta \text{sen} \varphi (b_j c_j - b_j c_1)] \quad (64)$$

$$\varepsilon_{3j} = \text{sen} \varphi (a_j b_j - a_j b_1) - \cos \theta \cos \varphi (a_j c_j - a_j c_1) - \text{sen} \theta \cos \varphi (b_j c_j - b_j c_1) \quad (65)$$

$$\delta_1 = x_1 - x_A, \quad \delta_2 = y_1 - y_A, \quad \delta_3 = z_1 - z_A \quad (66)$$

onde $\{k \in N \mid 1 \leq k \leq 3\}$ e $\{j \in N \mid 2 \leq j \leq 3\}$. Com base nas equações anteriores, a borda de Ψ é dada pelo conjunto de pontos $[x_\psi \quad y_\psi \quad z_\psi]^t$, tal que,

$$\begin{bmatrix} x_\Psi \\ y_\Psi \\ z_\Psi \end{bmatrix} = P_1 + s_t(\beta)\vec{w}_1 + t(\beta)\vec{w}_2 \quad (67)$$

com $0 \leq \beta \leq 2\pi$.

A presença de $s_u(\beta)$ também é exigida, a fim de cumprir o papel da Proposição 5, que será necessário para identificar a região visível de Ψ no Problema 12. Este termo é obtido através da equação abaixo, cujo termo após a igualdade é a equação (4):

$$A + r\vec{q} = P_1 + s_u\vec{w}_1 - u\vec{w}_3 \quad (68)$$

O desenvolvimento da equação anterior permite encontrar:

$$s_u(\beta) = -\frac{\lambda_{13} \cos \beta + \lambda_{23} \operatorname{sen} \beta + \lambda_{33}}{\varepsilon_{13} \cos \beta + \varepsilon_{23} \operatorname{sen} \beta + \varepsilon_{33}} \quad (69)$$

onde os coeficientes já foram definidos pelas equações (60) à (66).

Problema 12. Determinar a região de Ψ visível na face Ω .

Solução. A região Ψ já foi calculada no Problema 11. Primeiro deve-se determinar os pontos que intersectam as bordas de Ω para posteriormente combinar os elementos encontrados para criar a região de Ψ visível em Ω , ou seja, determinar o *polígono de intervisibilidade* Γ , ilustrado na Figura 30b, que, em outras palavras, é a região de intersecção entre Ψ e Ω .

Embora o intervalo $0 \leq \beta \leq 2\pi$, para as equações de $s_t(\beta)$ e $t(\beta)$, permita escrever a borda de Ψ , não interessam as partes que se estendem para fora de Ω , sendo assim, as Proposição 1 à Proposição 5 são de grande importância para determinar Γ .

De acordo com a Proposição 3. Um ponto pertence à reta formada pelo segmento \overline{su} se a igualdade $s_t = s_u$ implica em $t=0$, concordando com a Proposição 2 e já vista uma aplicação no Problema 7, deste modo, igualando a equação (59) a zero, ou seja,

$$t(\beta) = \frac{\lambda_{11} \cos \beta + \lambda_{21} \operatorname{sen} \beta + \lambda_{31}}{\varepsilon_{12} \cos \beta + \varepsilon_{22} \operatorname{sen} \beta + \varepsilon_{32}} = 0 \quad (70)$$

obtém-se a equação

$$\lambda_{11} \cos \beta + \lambda_{21} \operatorname{sen} \beta = -\lambda_{31}. \quad (71)$$

Substituindo os termos λ_{11} , λ_{21} e $-\lambda_{31}$ por κ , ρ e σ , respectivamente, tem-se

$$\kappa \cos \beta + \rho \operatorname{sen} \beta = \sigma. \quad (72)$$

Aplicando a substituição dos semi-ângulos, conforme visto em Zelator (2008), na equação (72), é obtida a equação

$$(\kappa + \sigma) \tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 2\rho \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + (\sigma - \kappa) = 0. \quad (73)$$

Com base nas equações (72) e (73), baseando-se ainda em Zelator (2008), o seguinte formulário permite encontrar o conjunto solução S da equação (72):

- Se $\kappa + \sigma = 0$
 - Se $\kappa = \rho = \sigma = 0$
 - $S = R$, onde R é o conjunto dos números reais;
 - Se $\rho = 0$ e $\kappa \neq 0$
 - $S = S_1$;
 - Se $\kappa \neq 0$

$$\bullet S = S_1 \cup S_2;$$

onde $S_1 = \{\beta \in R \mid \beta = 2i\pi + \pi, i \in Z\}$, $S_2 = \{\beta \in R \mid \beta = 2i\pi + 2\gamma, i \in Z\}$, $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ e

$$\gamma = \arctg\left(-\frac{\kappa}{\rho}\right).$$

• Se $\kappa + \sigma \neq 0$

○ Se $\rho^2 + \kappa^2 < \sigma^2$

▪ S é composto por duas raízes complexas;

○ Se $\rho^2 + \kappa^2 = \sigma^2$

▪ $S = \{\beta \in R \mid \beta = 2i\pi + 2\omega, i \in Z\}$, onde $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ e

$$\omega = \arctg\left(\frac{\rho}{\kappa + \sigma}\right);$$

○ Se $\rho^2 + \kappa^2 > \sigma^2$

▪ $S = T_1 \cup T_2$, onde $T_j = \{\beta \in R \mid \beta = 2i\pi + 2\omega_j, i \in Z, j \in Z, 1 \leq j \leq 2\}$,

$$-\frac{\pi}{2} < \omega_j < \frac{\pi}{2} \text{ e } \omega_j = \arctg\left(\frac{\rho + (-1)^{j+1} \sqrt{\rho^2 + \kappa^2 - \sigma^2}}{\kappa + \sigma}\right).$$

Para encontrar os pontos de Ψ que cortam a borda $\overline{P_2 P_3}$, se deve levar em consideração a Proposição 4, ou seja, faz-se $s_i = 1$ para obter

$$s_i(\beta) = -\frac{\lambda_{12} \cos \beta + \lambda_{22} \text{sen} \beta + \lambda_{32}}{\varepsilon_{12} \cos \beta + \varepsilon_{22} \text{sen} \beta + \varepsilon_{32}} = 1. \quad (74)$$

Manipulando a equação (74) encontra-se

$$(\varepsilon_{12} + \lambda_{12}) \cos \beta + (\varepsilon_{22} + \lambda_{22}) \text{sen} \beta = -(\varepsilon_{32} + \lambda_{32}), \quad (75)$$

cujo conjunto solução S é obtido pelo formulário para solução da equação (72), para $\kappa = (\varepsilon_{12} + \lambda_{12})$, $\rho = (\varepsilon_{22} + \lambda_{22})$ e $\sigma = -(\varepsilon_{32} + \lambda_{32})$.

Para a Proposição 5, tem-se que um ponto pertence à $\overline{P_1P_3}$ se $s_u = 0$, ou seja,

$$s_u(\beta) = -\frac{\lambda_{13} \cos \beta + \lambda_{23} \operatorname{sen} \beta + \lambda_{33}}{\varepsilon_{13} \cos \beta + \varepsilon_{23} \operatorname{sen} \beta + \varepsilon_{33}} = 0 \quad (76)$$

que resulta em

$$-\lambda_{13} \cos \beta - \lambda_{23} \operatorname{sen} \beta = \lambda_{33}, \quad (77)$$

de forma que se $\kappa = -\lambda_{13}$, $\rho = -\lambda_{23}$ e $\sigma = \lambda_{33}$, obtém-se o conjunto solução da mesma maneira que nas situações anteriores.

Caso conheça-se o valor dos parâmetros s_t , t ou s_u a obtenção do ângulo β segue-se os mesmos raciocínios anteriores, cujos coeficientes κ , ρ e σ , da equação (72), são mostrados na tabela a seguir para cada um dos parâmetros.

Tabela 1. Valores dos coeficientes para cada um dos parâmetros da face Ω .

Parâmetro	κ	ρ	σ
s_t	$(\varepsilon_{12} s_t + \lambda_{12})$	$(\varepsilon_{22} s_t + \lambda_{22})$	$-(\varepsilon_{32} s_t + \lambda_{32})$
T	$(\lambda_{11} - \varepsilon_{12} t)$	$(\lambda_{21} - \varepsilon_{22} t)$	$-(\lambda_{31} - \varepsilon_{32} t)$
s_u	$(\varepsilon_{13} s_u + \lambda_{13})$	$(\varepsilon_{23} s_u + \lambda_{23})$	$-(\varepsilon_{33} s_u + \lambda_{33})$

Para encontrar Γ , definem-se dois conjuntos de curvas parciais Γ_1 e Γ_2 . O conjunto Γ_1 é definido de acordo com a equação (10), na Proposição 2, onde um ponto pertence à Ω , se $t \leq s_t \leq 1$ e $0 \leq t \leq 1$, logo, faz-se a separação dos pontos de Ψ que satisfaçam esta definição para encontrá-lo. Já o conjunto Γ_2 é obtido pela combinação dos pontos de Ψ que intersectam Ω , por meio de segmentos nas bordas de Ω . Com base nestes dois conjuntos, define-se $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde a área interna de Γ é a região visível de Ψ na face Ω , como mostra a Figura 30.

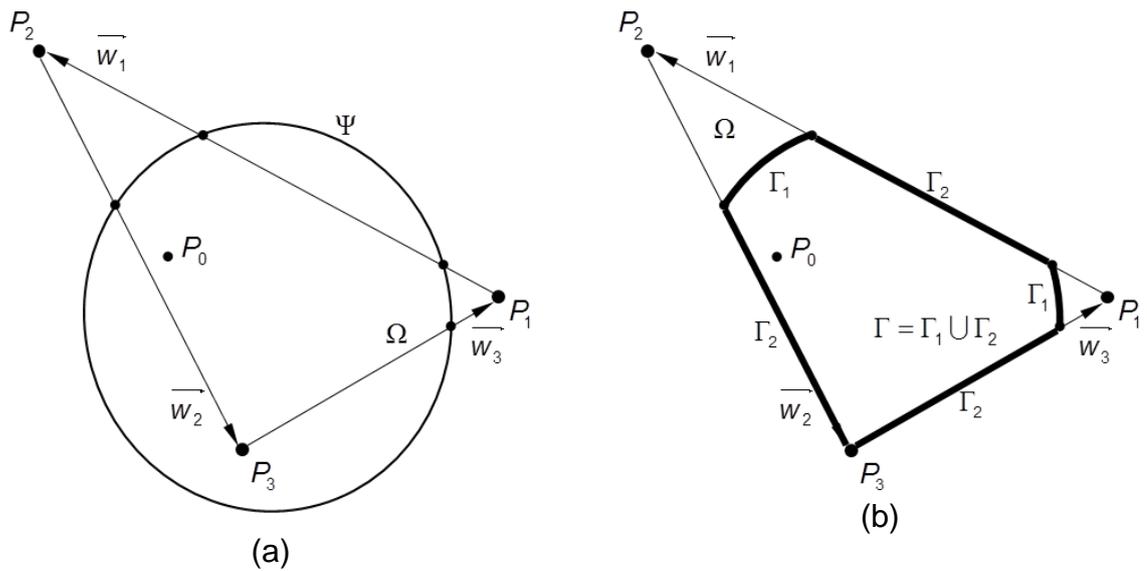


Figura 30. (a) Região Ψ . (b) Parte visível de Ψ em Ω .

São três as situações para o conjunto solução S em cada borda de Ω : duas soluções complexas, duas soluções reais iguais e duas soluções reais distintas. A situação em que envolve duas soluções complexas indica que a região Ψ não corta a respectiva borda em análise de Ω . Se houverem duas raízes reais distintas, então Ψ corta a borda em estudo de Ω em dois pontos, e por último, duas raízes iguais indica corte um único ponto, conforme mostra a Figura 31.

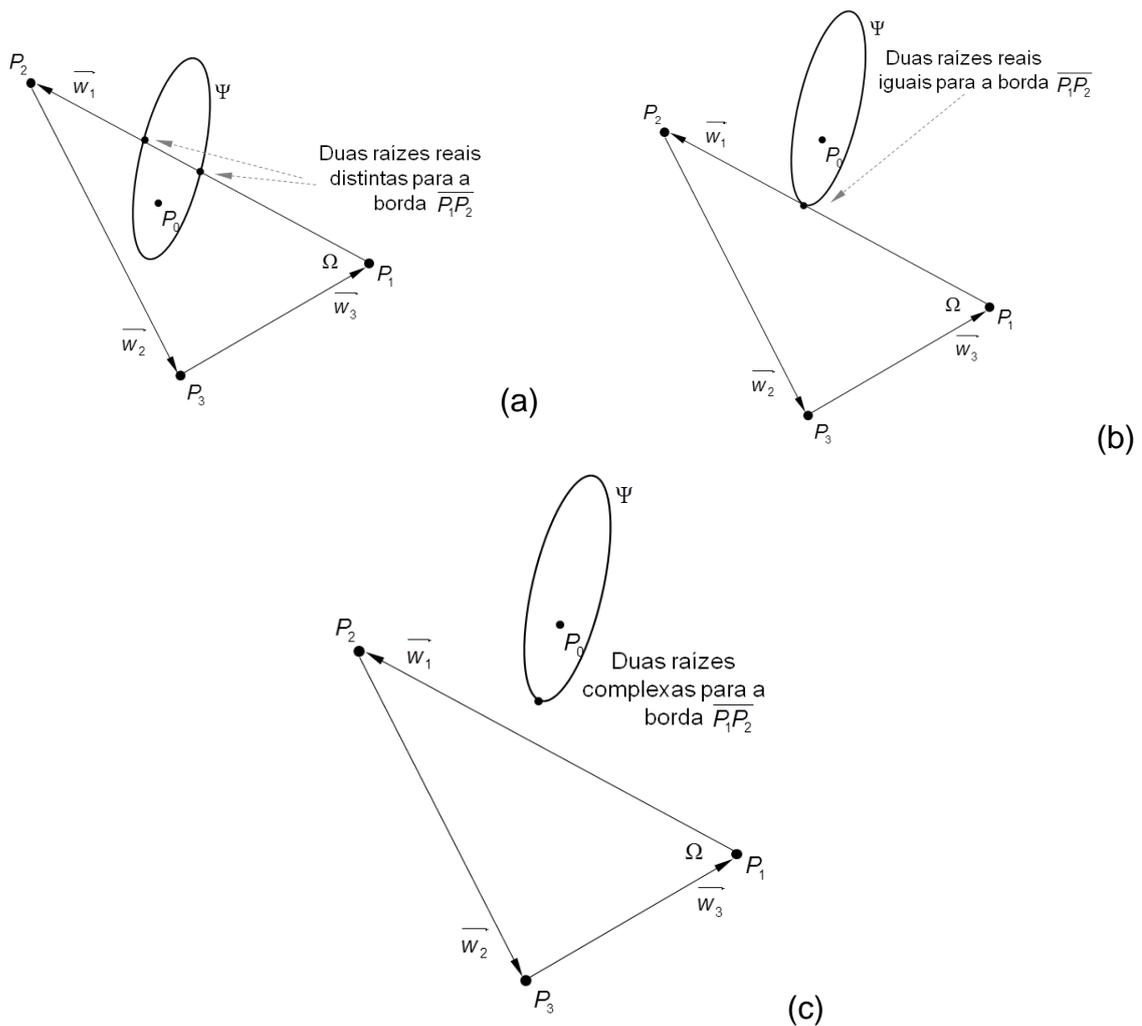


Figura 31. Representação geométrica das raízes da equação (72) para a borda $\overline{P_1P_2}$. (a) Corte de Ψ em dois pontos. (b) Corte de Ψ em apenas um ponto. (c) A região Ψ não corta $\overline{P_1P_2}$.

Duas raízes complexas calculadas em cada borda de Ω indica que Ψ não corta Ω . Neste caso Ψ pode estar totalmente contida em Ω (totalmente visível) ou totalmente fora de Ω (totalmente invisível). A decisão pode ser tomada de duas formas: a primeira delas com base no ponto P_0 (Figura 32) já obtido na equação (55), de modo que se $P_0 \in \Omega$, então $\Psi \subset \Omega$, caso contrário, se $P_0 \notin \Omega$, logo se conclui que $\Psi \not\subset \Omega$ e a segunda forma é apenas verificar se todos os pontos de Ψ respeitam a Proposição 2.

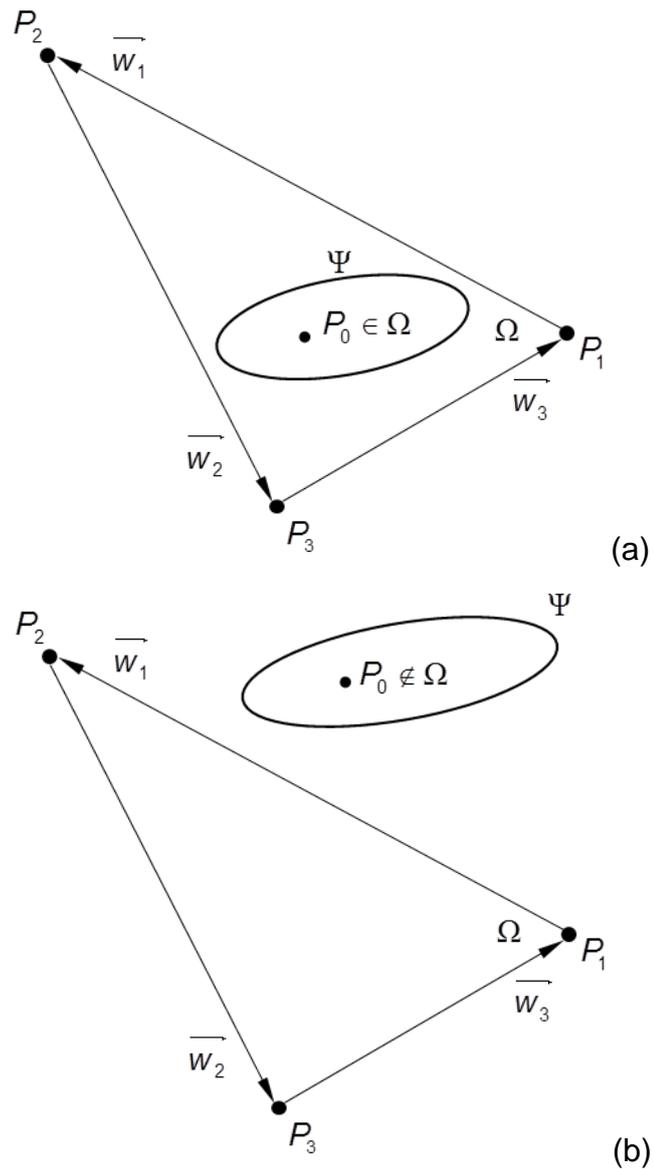


Figura 32. Representação geométrica para duas raízes complexas da equação (72) em todas as bordas de Ω .

Outra situação especial é aquela que onde foram calculadas duas raízes complexas para duas bordas e duas raízes reais iguais na borda restante de Ω . A interpretação dessa situação é Ψ intersectando Ω em apenas um ponto. Neste caso a região visível poderá ser colapsada em um ponto ou Ψ é totalmente visível, se $P_0 \notin \Omega$ ou $P_0 \in \Omega$, respectivamente, como mostra a Figura 33. Outra forma de identificar Γ é se utilizar da Proposição 2 para os pontos de Ψ .

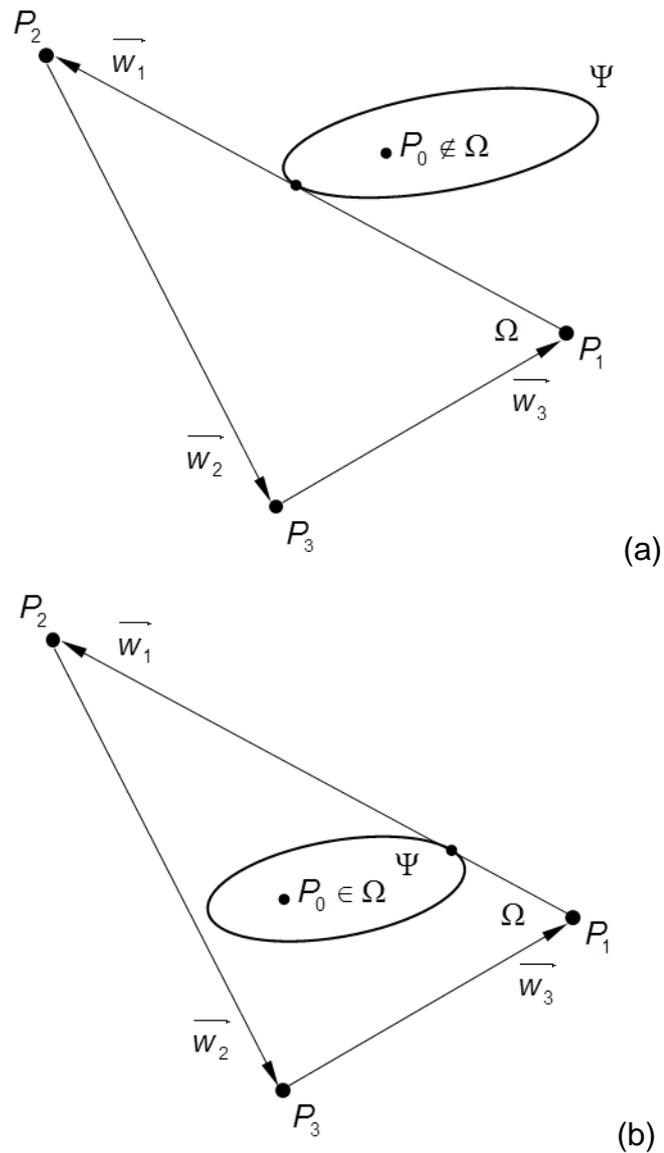


Figura 33. Casos especiais em que se tem apenas um ponto de intersecção em uma única borda de Ω .

3.3. Caso geral da Intervisibilidade

Nesta seção é analisado o caso geral da intervisibilidade e apresentado a equação geral.

Seja $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, uma curva paramétrica sendo interceptada pela face triangular Ω , como mostra a Figura 34. O ponto de intersecção P entre Ω e $f(t)$ é obtido por:

$$f(t) = P_1 + s_t \vec{w}_1 + t \vec{w}_2 \quad (78)$$

A equação (78) é definida como a *equação geral da intervisibilidade*, que consiste em determinar pontos de intersecção entre curvas ou superfícies.

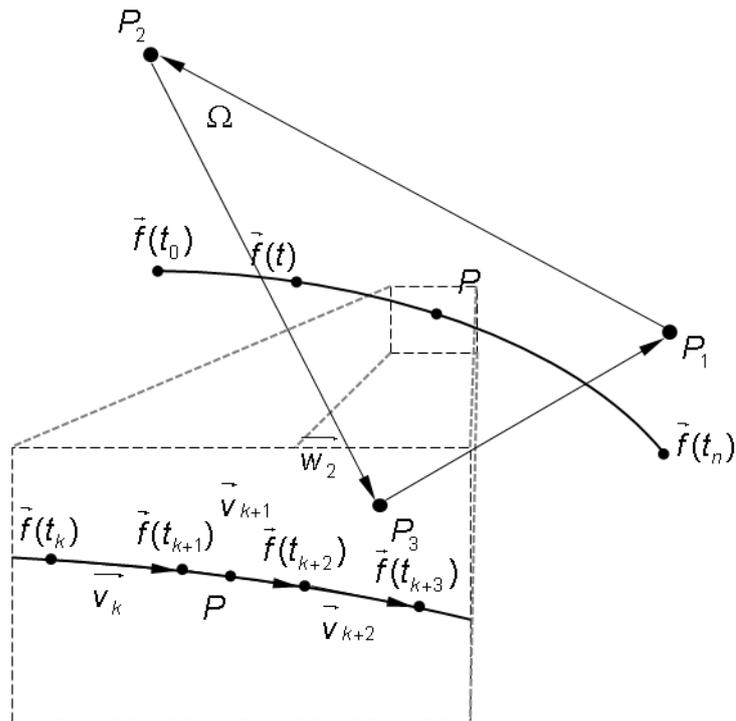


Figura 34. Infinitas linhas de visada compõem a curva $f(t)$.

A partir da Figura 34, pode-se observar que $f(t)$ é composta por infinitas linhas de visada sendo descritas ao longo da curva. Sob este ponto de vista, pode-se concluir que dois extremos de uma curva são intervisíveis ao longo da curva, se nenhum segmento desta curva é interceptado pela face triangular.

A abordagem proposta pode ser utilizada em várias aplicações. Citam-se aqui os exemplos na determinação de melhores locais para a locação de torres de linhas de transmissão ou o lançamento de projéteis sobre um MDS.

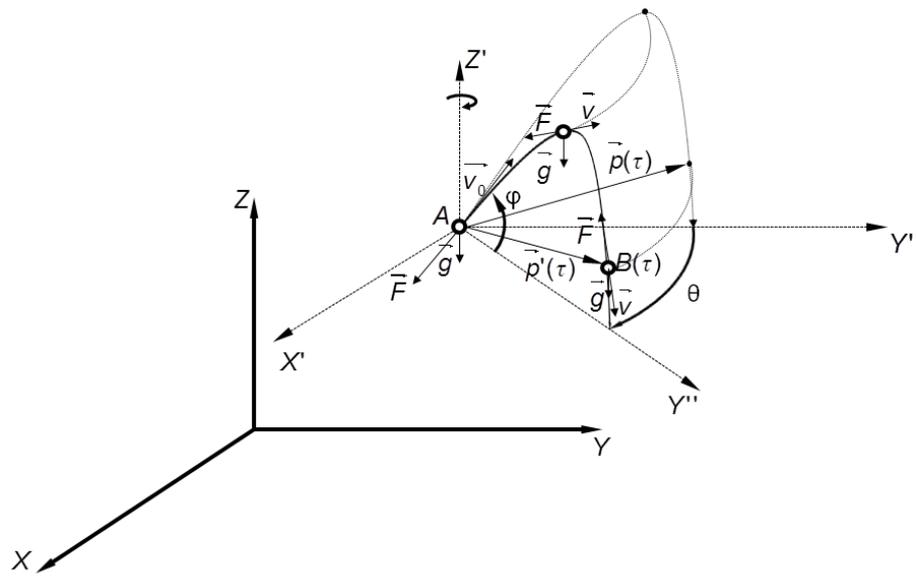
Na seção a seguir detalha-se o caso do lançamento de projéteis sobre um MDS vetorial. Neste caso, serão necessárias as proposições 1 e 2 na parametrização do problema.

3.3.1. Lançamento de projéteis sobre um MDS

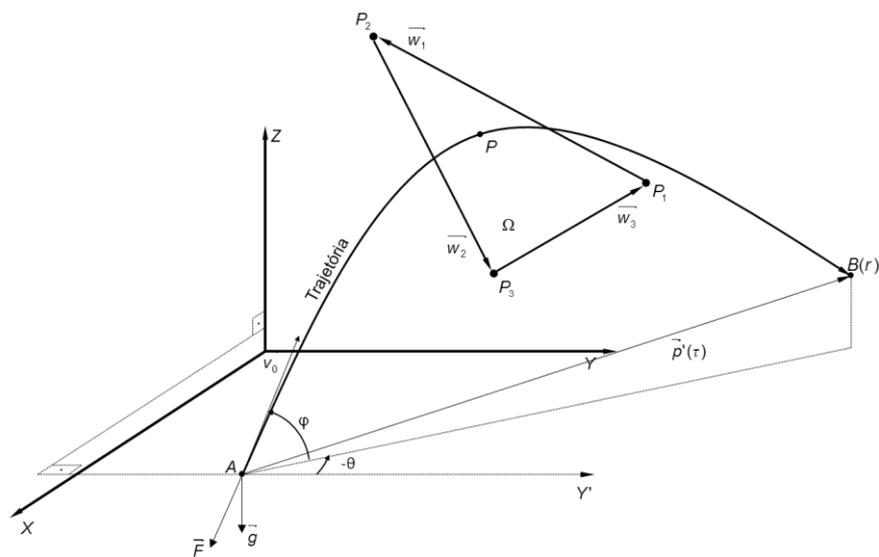
O problema é descrito da seguinte forma: um objeto de massa m constante lançado de um ponto $A = [x_A \ y_A \ z_A]^t$ com velocidade inicial \vec{v}_0 , de norma v_0 , sob o ângulo vertical φ e ângulo horizontal θ , em relação a um sistema de origem conhecida, intercepta uma face Ω de uma rede triangular no tempo τ , conforme mostra a Figura 35. Este objeto está sob a ação da gravidade \vec{g} e sujeito à resistência do ar na direção do vetor velocidade, dado por $\vec{F} = -b\vec{v}$. Ora, como a massa é constante, tem-se que $\vec{F} = m\vec{a} = -b\vec{v}$, portanto:

$$\vec{a} = -\frac{b}{m}\vec{v} \quad (79)$$

Onde \vec{a} é o vetor aceleração e \vec{v} agora é o vetor velocidade.



(a)



(b)

Figura 35. (a) Esquema do movimento de um objeto no espaço tridimensional sujeito à resistência do ar e à gravidade. (b) Esquema da trajetória de um objeto que intercepta uma face triangular Ω .

A configuração do problema indica que só existe movimento no plano formado pelo par de vetores $\{\vec{g}, \vec{v}\}$, então primeiramente parte-se do princípio de que estes vetores pertencem ao plano YZ.

Seja $\vec{p}(\tau) = [0 \quad y(\tau) \quad z(\tau)]^t$ o vetor posição do objeto no tempo τ , os quais $y(\tau)$ e $z(\tau)$ são calculados após adaptações nas fórmulas mostradas em Bruno e Matos (2002):

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{b}{m} \frac{dy}{d\tau} \quad (80)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{b}{m} \frac{dz}{d\tau} - g \quad (81)$$

Onde g é a norma do vetor gravidade. As equações (80) e (81) são as acelerações nos eixos Y e Z, respectivamente. Resolvendo estas equações encontram-se as velocidades em cada eixo

$$\frac{dy}{d\tau} = v_0 \cos \varphi e^{-\frac{b}{m}\tau} \quad (82)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \left(v_0 \sin \varphi + \frac{gm}{b} \right) e^{-\frac{b}{m}\tau} \quad (83)$$

Cujas soluções são:

$$y(\tau) = \frac{b v_0 \cos \varphi}{m} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}\tau} \right) \quad (84)$$

$$z(\tau) = \frac{m}{b} \left(v_0 \sin \varphi + \frac{gm}{b} \right) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}\tau} \right) - \frac{gm}{b} \tau \quad (85)$$

Faz-se a rotação do vetor $\vec{p}(\tau)$ em torno do eixo Z pelo ângulo θ , para encontrar o vetor $\vec{p}'(\tau)$:

$$\vec{p}' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{p} \quad (86)$$

O desenvolvimento completo o vetor $\vec{p}'(\tau)$ é dado por:

$$\vec{p}'(\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{mv_0 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}\tau}\right) \\ \frac{mv_0 \cos\theta \cos\varphi}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}\tau}\right) \\ \frac{m}{b} \left(v_0 \operatorname{sen}\varphi + \frac{gm}{b}\right) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}\tau}\right) - \frac{gm}{b}\tau \end{bmatrix} \quad (87)$$

Logo, a equação da trajetória no tempo τ é dado por:

$$B(\tau) = A + \vec{p}'(\tau) \quad (88)$$

A identificação da intersecção entre Ω e a trajetória é obtida pela equação (78), portanto igualando-a a equação (88) tem-se:

$$B(\tau) = A + \vec{p}'(\tau) = P_1 + s_t \vec{w}_1 + t \vec{w}_2 \quad (89)$$

A solução da equação (89) permite encontrar os termos $s_t(\tau)$ e $t(\tau)$ definidos através das equações abaixo:

$$s_t(\tau) = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\eta_2}{b} \left(e^{-\frac{b\tau}{m}} - 1 \right) - (b_2\delta_1 - a_2\delta_2) \right] \quad (90)$$

$$t(\tau) = \frac{1}{b\omega} \left[b(b_1\delta_1 - a_1\delta_2) - \eta_1 \left(e^{-\frac{b\tau}{m}} - 1 \right) \right] \quad (91)$$

Onde $\omega = a_1b_2 - a_2b_1$ e $\eta_j = mv_0 \cos\varphi (a_j \cos\theta + b_j \operatorname{sen}\theta)$, com $\{j \in N \mid 1 \leq j \leq 2\}$.

A partir das equações anteriores, encontra-se $[x_\tau \ y_\tau \ z_\tau]^t$, que é o ponto da projeção da trajetória do objeto no plano de Ω , no tempo τ , obtido de maneira semelhante à equação (67):

$$\begin{bmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{bmatrix} = P_1 + s_i(\tau)\overrightarrow{w}_1 + t(\tau)\overrightarrow{w}_2 \quad (92)$$

O tempo necessário para que o objeto intercepte o plano da face Ω , é obtido na solução da equação (89) para τ :

$$\gamma_1\tau + \gamma_2 e^{-\frac{b\tau}{m}} + \gamma_3 = 0 \quad (93)$$

Onde γ_1 , γ_2 e γ_3 são obtidos através das equações:

$$\chi = \frac{m(gm + bv_0 \text{sen}\varphi)}{b^2} \quad (94)$$

$$\gamma_1 = \frac{gm}{b} \quad (95)$$

$$\gamma_2 = \chi + \frac{-c_2\eta_1 + c_1\eta_2}{b\omega} \quad (96)$$

$$\gamma_3 = (\delta_3 - \chi) + \frac{1}{\omega} \left\{ -c_1(b_2\delta_1 - a_2\delta_2) + \frac{c_2[b(b_1\delta_1 - a_1\delta_2) + \eta_1] - c_1\eta_2}{b} \right\} \quad (97)$$

A partir da equação (93), obtém-se

$$\ln(-\gamma_3 - \gamma_1\tau) + \frac{b\tau}{m} = \ln\gamma_2, \quad (98)$$

cuja solução geral é dada por:

$$\tau = \frac{m}{b} W_n(\mu) - \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \quad (99)$$

Onde n representa o ramo da função W de Lambert e $\mu = -\frac{b\gamma_2}{m\gamma_1} e^{\frac{b\gamma_3}{m\gamma_1}}$.

A Figura 36 mostra o gráfico da função $W_n(\mu)$. Detalhes sobre a função W de Lambert podem ser vistos em Corless, Jeffrey e Knuth (1997) e Chapeau-Blondeau e Monir (2002).

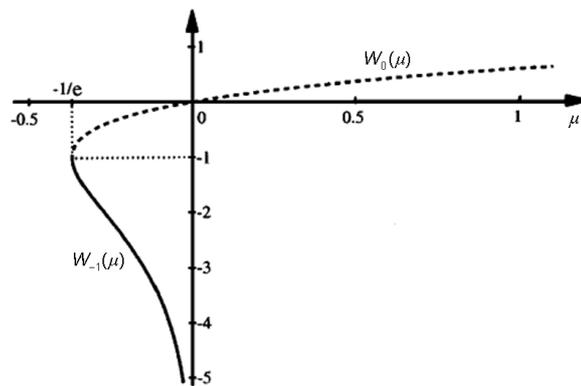


Figura 36. Gráfico da função $W_n(\mu)$ e seus dois ramos. Adaptado de Chapeau-Blondeau e Monir (2002).

Tem-se os seguintes casos para μ :

- Se $\mu \leq -\frac{1}{e}$, tem-se que $n = -1$ e $W_{-1}(\mu)$ é um número complexo, desta forma, considera-se que não há interceptação da trajetória no plano de Ω ;
- Se $\mu > 0$, tem-se que $n = 0$ e $W_0(\mu)$ é um número real, portanto, a trajetória intercepta o plano de Ω em um ponto;
- Caso $\mu \in \left[-\frac{1}{e}; 0\right]$, ter-se-ão duas raízes reais para (99), então há duas interceptações no plano de Ω .

Uma vez esclarecidos estes intervalos, o tempo necessário para que o objeto intercepte o plano que contém Ω , é dado por:

$$\tau = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \mu \leq -\frac{1}{e} \\ \begin{cases} \frac{m}{b} W_0(\mu) - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}, \\ \frac{m}{b} W_{-1}(\mu) - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}, \end{cases} & \text{se } -\frac{1}{e} \leq \mu \leq 0 \\ \frac{m}{b} W_0(\mu) - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}, & \text{se } \mu > 0 \end{cases} \quad (100)$$

Onde resultados válidos serão para $\tau \geq 0$. Substituindo o valor de τ encontrado em (100) na equação (92), permite-se encontrar o(s) ponto(s) de intersecção da trajetória com Ω , bastando observar os limites para s_t e t definidos na Proposição 2.

4. RESULTADOS

Neste tópicos serão mostrados exemplos como resultados da aplicação do desenvolvimento matemático da intervisibilidade apresentados anteriormente neste trabalho. A programação foi desenvolvida na plataforma MATLAB 7.10.

4.1. Linhas de visada lineares

a) Visada Linear em dois pontos:

O primeiro exemplo constitui um teste aplicado em dados sintéticos. Supõe-se um modelo virtual com 226 edifícios construídos no AutoCAD com diversas formas e alturas. Um modelo de estrada foi criado dividindo os edifícios nas quadras, rotuladas da letra P à letra X, conforme mostra a Figura 37. Cada objeto foi separadamente registrado com uma única identificação com base nestas quadras, deste modo é possível identificar quais planos dos objetos foram interceptados pela visada. Considerou-se a origem do sistema do modelo virtual nas coordenadas, no Sistema Geodésico SIRGAS 2000 nas coordenadas $UTM(E, N, h, Zona) = (280000m, 9000000m, 0m, 25S)$.

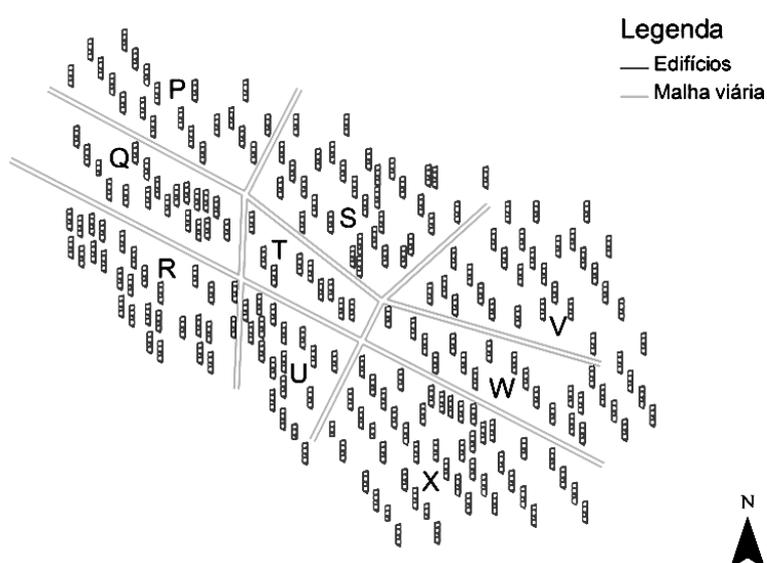


Figura 37. Representação bidimensional do modelo virtual criado.

Dois pontos (A e B) situados em duas torres necessitam ser intervisíveis (Figura 38). As coordenadas do topo dessas torres são:

$A(E, N, h, Lat) = (279985.7473, 8999928.4244, 41.6282, 25S)$ e

$B(E, N, h, Lat) = (280982.0935, 8999399.0753, 26.5953, 25S)$

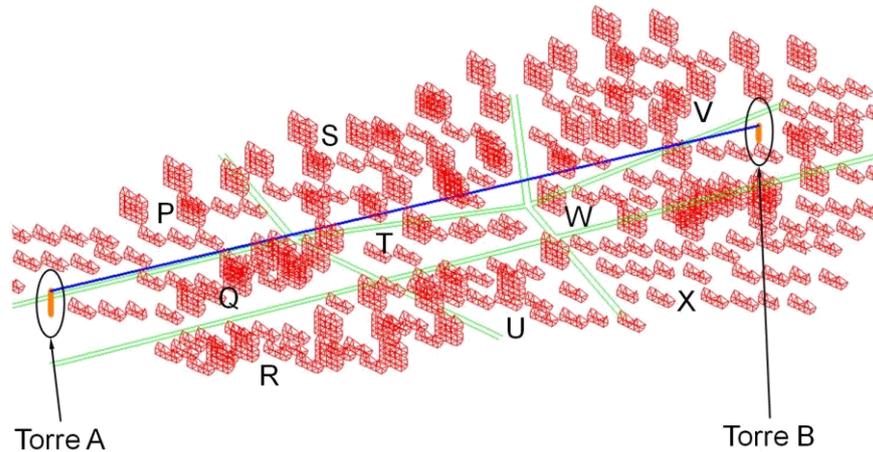


Figura 38. Vista do modelo 3D de 226 edifícios criados para simulação da intersecção da visada AB.

Com base nas equações desenvolvidas na seção 3.2, é possível identificar quais os edifícios estão interceptando a visada AB.

Desconsiderando a curvatura da Terra, o protótipo do programa detectou 4 objetos interceptando a visada AB: objeto Q19 em 3 faces; objeto Q17 em 3 faces; objeto T01 em 2 faces; e objeto W08 em 4 faces, como mostra a Figura 39.

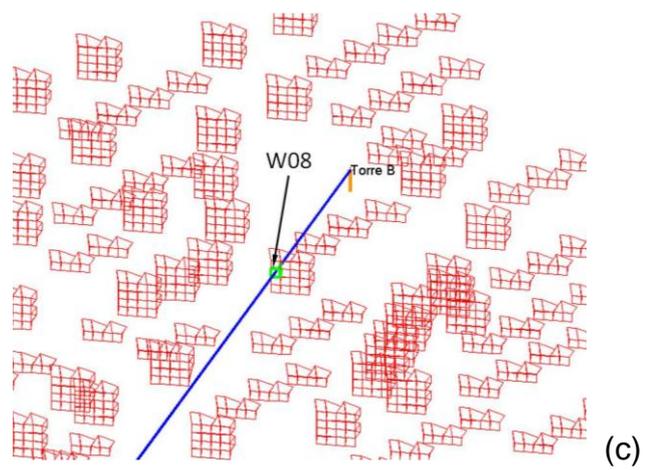
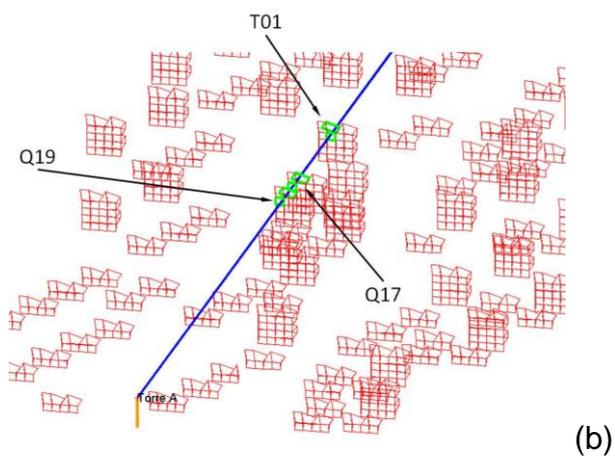
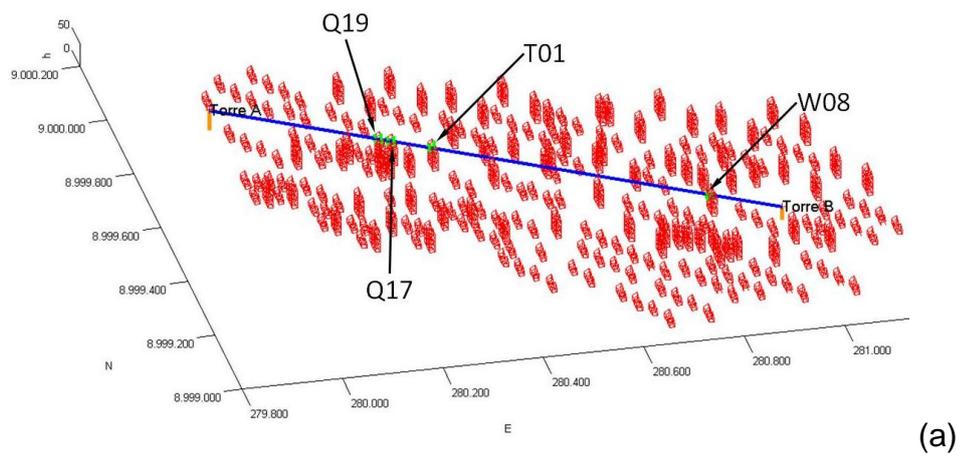


Figura 39. Vista do modelo 3D de 226 edifícios criados (em vermelho) para simulação da intersecção da visada AB (em azul) e os objetos e seus planos interceptados (em verde). (a) Vista completa da cena. (b) Objetos interceptados mais próximos do ponto A. (c) Objetos Interceptados mais próximos do ponto B.

b) Visada linear para múltiplos pontos:

Os próximos exemplos consideram um trecho de um MDS matricial SRTM de tamanho 100x100, referenciado do Sistema Geodésico WGS84 e triangulado no MATLAB 7.10 para obter um modelo vetorial (Figura 40), cujas representações estão com exagero vertical, a fim de melhor visualização das ondulações no terreno.

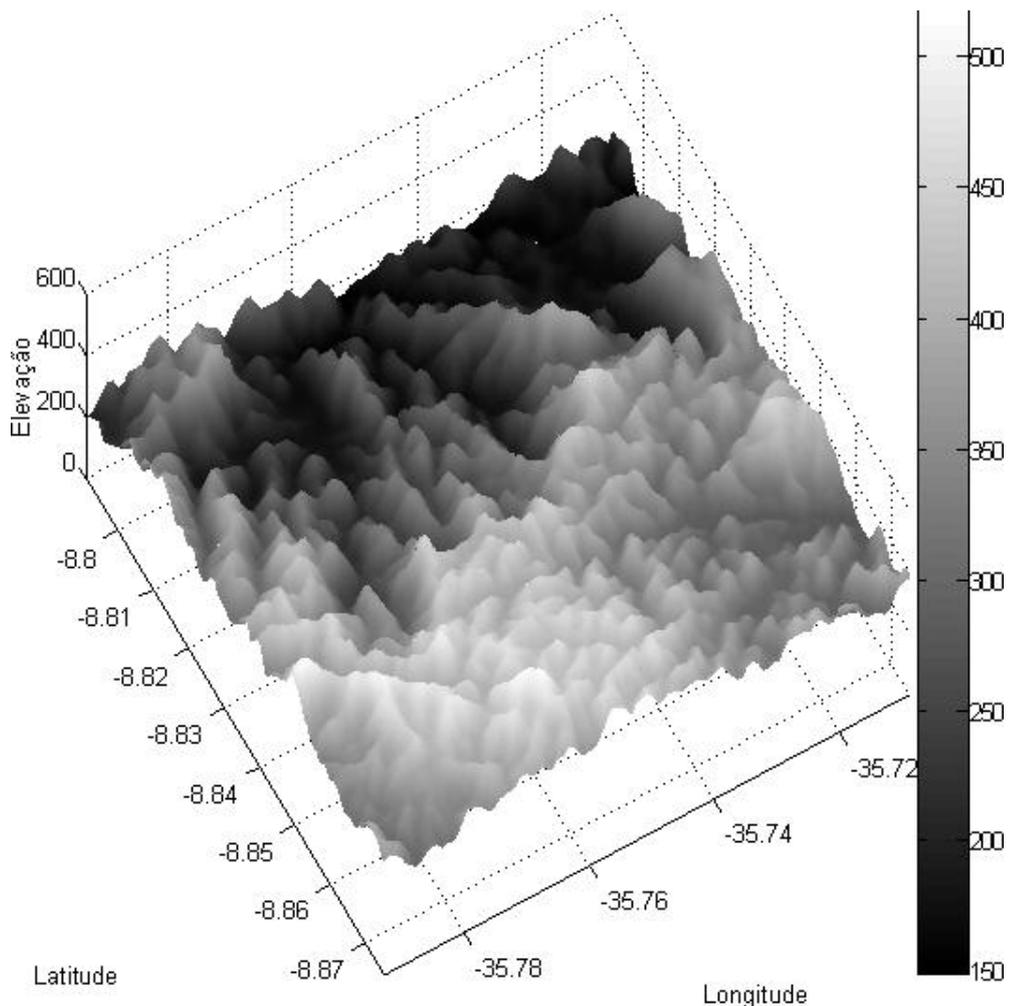
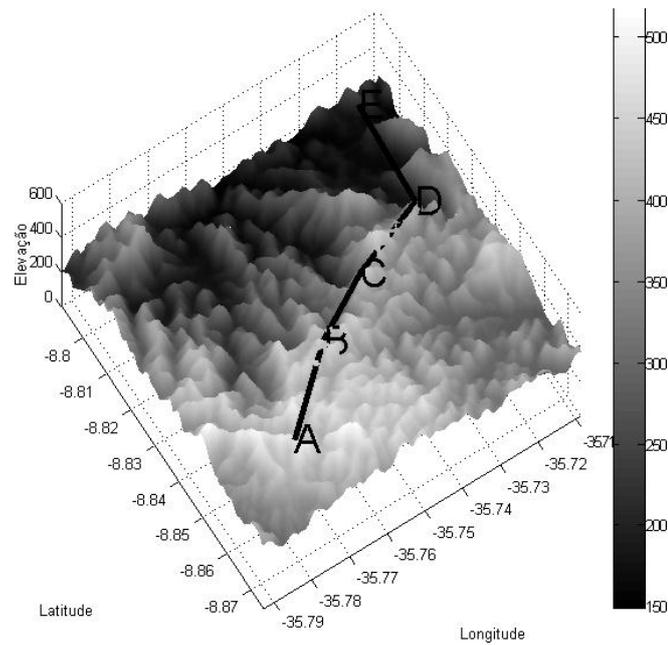


Figura 40. MDS vetorial utilizado nos próximos exemplos.

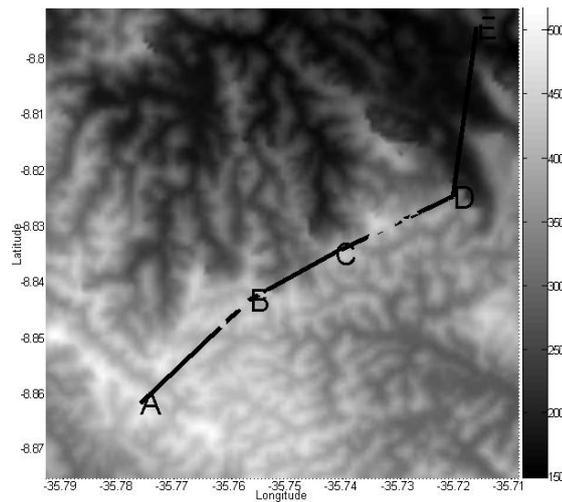
A partir de 5 pontos no formato $U = [\lambda_U \ \varphi_U \ z_U]^t$, exibidos na Tabela 2, em que λ_U , φ_U e z_U são as longitude, latitude e elevação do ponto U , respectivamente, são mostrados os resultados para dos Problema 1 a Problema 6. Deve ser observado que as visadas são interceptadas pelo terreno, devido às descontinuidades vistas na Figura 41.

Tabela 2. Coordenadas dos 5 pontos utilizados nos próximos resultados.

Ponto	λ ($^{\circ}$)	φ ($^{\circ}$)	Z _{Elevação} (m)
A	-35.776082	-8.861949	489.000
B	-35.756724	-8.843433	419.000
C	-35.741574	-8.835016	433.000
D	-35.720532	-8.824916	356.000
E	-35.716324	-8.794616	215.000



(a) Vista tridimensional.



(b) Vista plana.

Figura 41. Visadas interceptadas sobre o terreno.

A partir da solução do Problema 1 podem-se encontrar as linhas abaixo (em cinza) e acima da visada (em preto). Este resultado é apresentado na Figura 42.

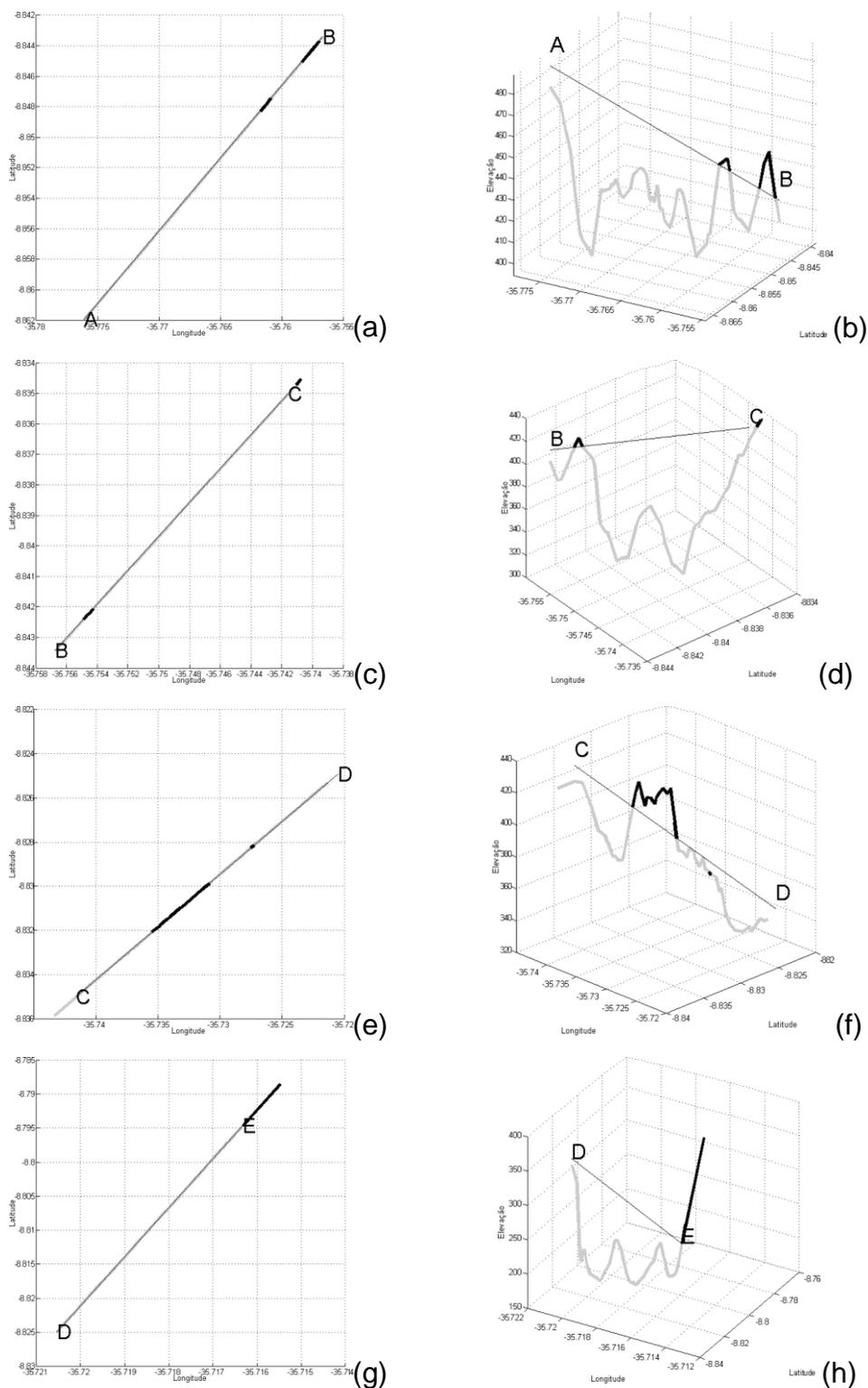


Figura 42. Solução do Problema 1 para cada trecho em que as partes abaixo da visada estão em cinza e as acima estão em preto.

O Problema 2 permite identificar pontos do perfil visíveis e invisíveis ao observador, mostrados na Figura 43.

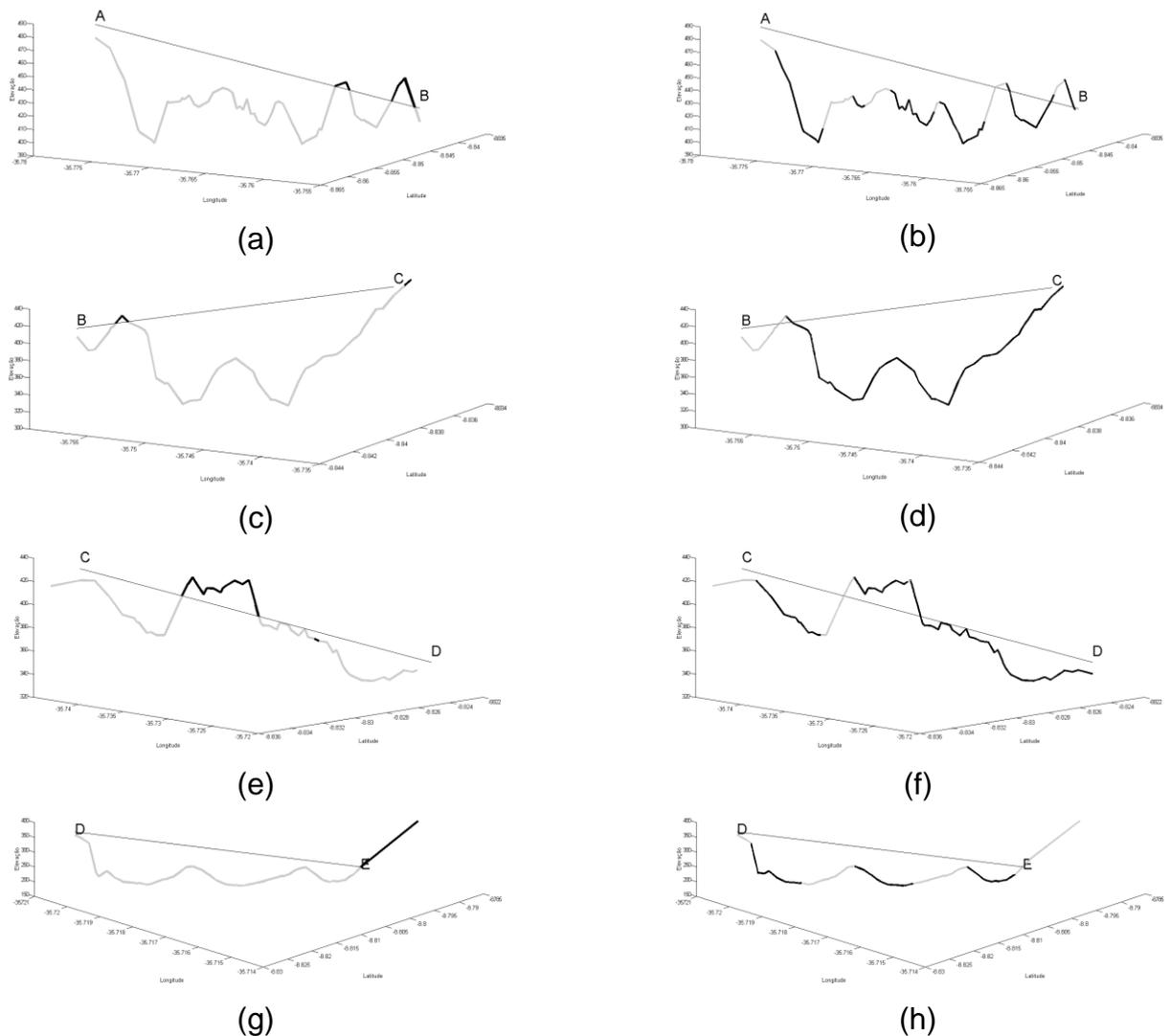
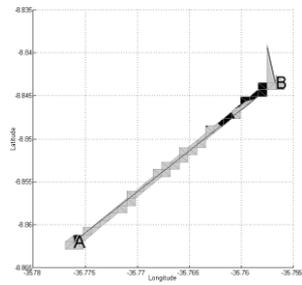
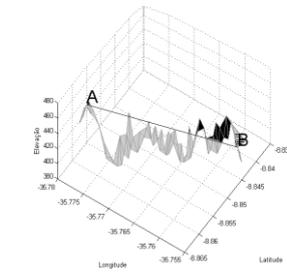


Figura 43. Solução obtida a partir do Problema 2. As imagens (a), (c), (e) e (g) são os locais dos perfis abaixo (preto) e acima da visada (cinza). Já as imagens (b), (d), (f) e (h) são os locais visíveis (cinza) e invisíveis (preto) pelos pontos iniciais nos perfis.

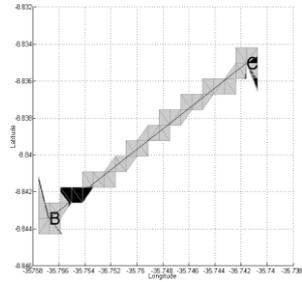
O Problema 3 nos permite identificar quais áreas estão abaixo da visada e quais estão acima, permitindo realizar esta distinção e determinar se os pontos extremos da visada são ou não intervisíveis, como mostrado na Figura 44.



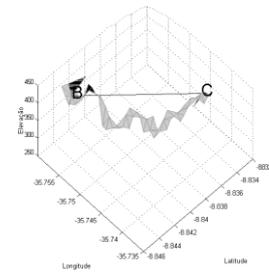
(a) Vista bidimensional 1



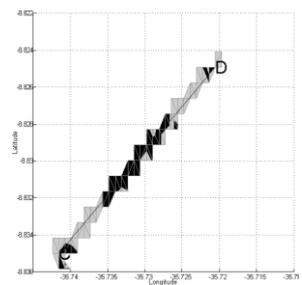
(c) Vista tridimensional 1



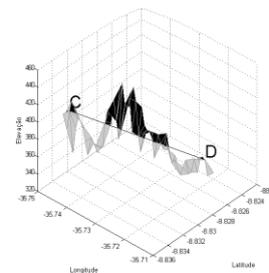
(d) Vista bidimensional 2



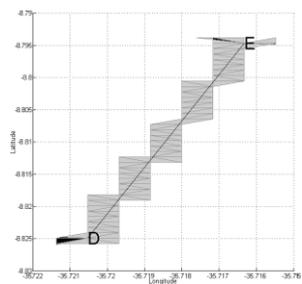
(e) Vista tridimensional 2



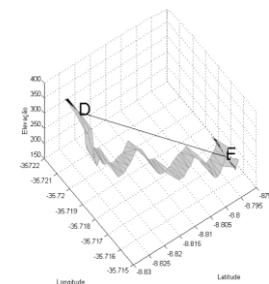
(e) Vista bidimensional 3



(f) Vista tridimensional 3



(g) Vista bidimensional 4



(h) Vista tridimensional 4

Figura 44. Solução para o Problema 3 e suas vistas tridimensional e bidimensional. Abaixo da visada em cinza e as acima em preto.

c) Corte/aterro e nível da lâmina d'água:

Outras situações onde o problema da intervisibilidade é aplicado se encontram em determinar as porções do terreno que serão cortadas e aterradas, ou na determinação do nível da água em alguma enchente.

Na Figura 45, as áreas escuras seriam as que estão acima do plano da visada $\{A, E\}$ descrito no Problema 3.

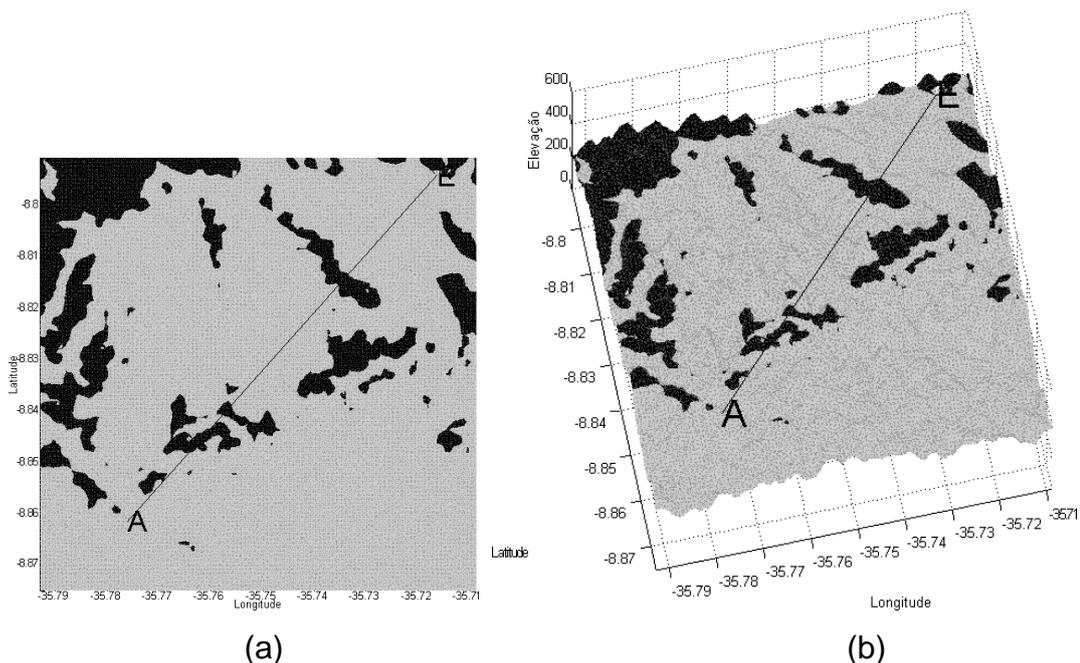


Figura 45. Solução obtida a partir do Problema 3 em suas vistas bidimensional (a) e tridimensional (b) para as faces triangulares, em que as partes abaixo da visada estão em cinza e as acima estão em preto.

Uma aplicação para o Problema 3, seria desejar saber quais áreas que serão afetadas em um nível de água na altura de 265.000 m.

Para calcular estas áreas, basta simplesmente estender uma visada cujos extremos tem elevações iguais, por exemplo:

$$A' = [-35.7760822662591^\circ \quad -8.8619492917118^\circ \quad 265.000m]^t \quad e$$

$$B' = [-35.7163239314787^\circ \quad -8.79461595674818^\circ \quad 265.000m]^t .$$

Neste tipo de análise, percebe-se que se devem ter as coordenadas altimétricas dos dois pontos, iguais, conforme pode ser visto nos pontos A' e B'. Pode-se identificar na Figura 46 que as partes em cinza seriam as afetadas pela enchente, uma vez que são as partes que estão abaixo da visada $\{A', B'\}$.

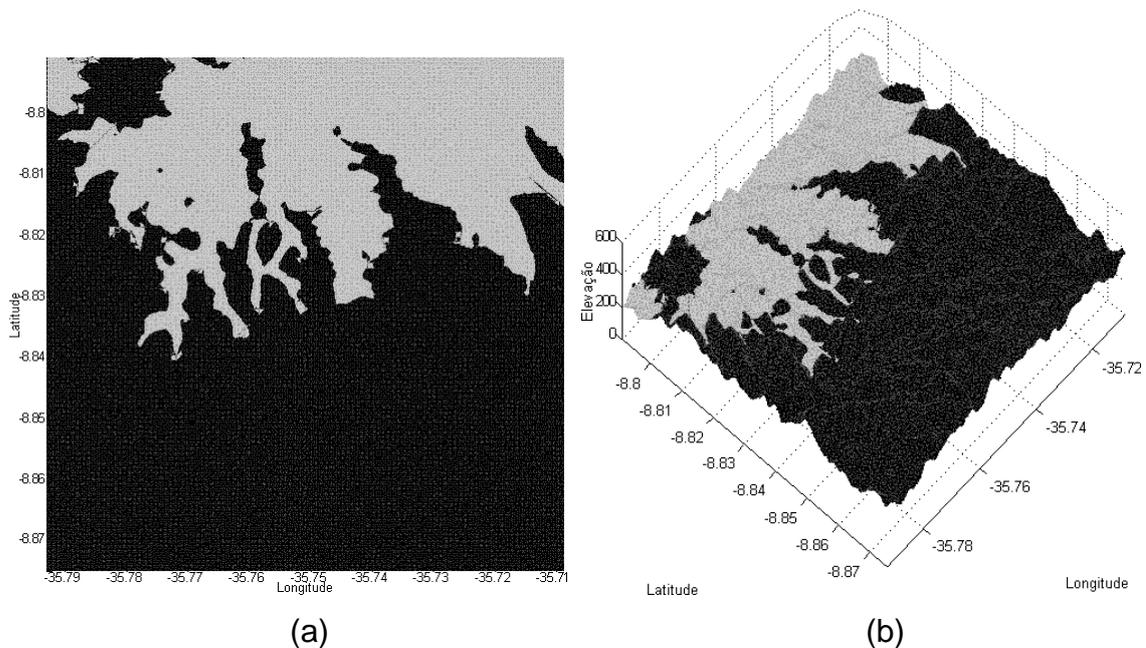


Figura 46. Solução obtida a partir do Problema 3 a respeito da visualização do nível da água em uma determinada enchente, em suas vistas bidimensional (a) e tridimensional (b). As partes em preto são as áreas não atingidas pela enchente.

d) Conjunto de elevações mínimas dos pontos para ser estabelecida mútua visibilidade:

Os resultados do Problema 4 e Problema 6 podem ser vistos na Figura 47, onde foi determinado o conjunto de elevações mínimas dos pontos para ser estabelecida mútua visibilidade. Através do cálculo das três visadas, pode ser realizado um estudo para determinar qual a melhor altura para que eles sejam mutuamente visíveis. O Problema 5 é uma extensão do Problema 4, deste modo, o conjunto obtido pode ser os ângulos mínimos, ao invés de alturas mínimas.

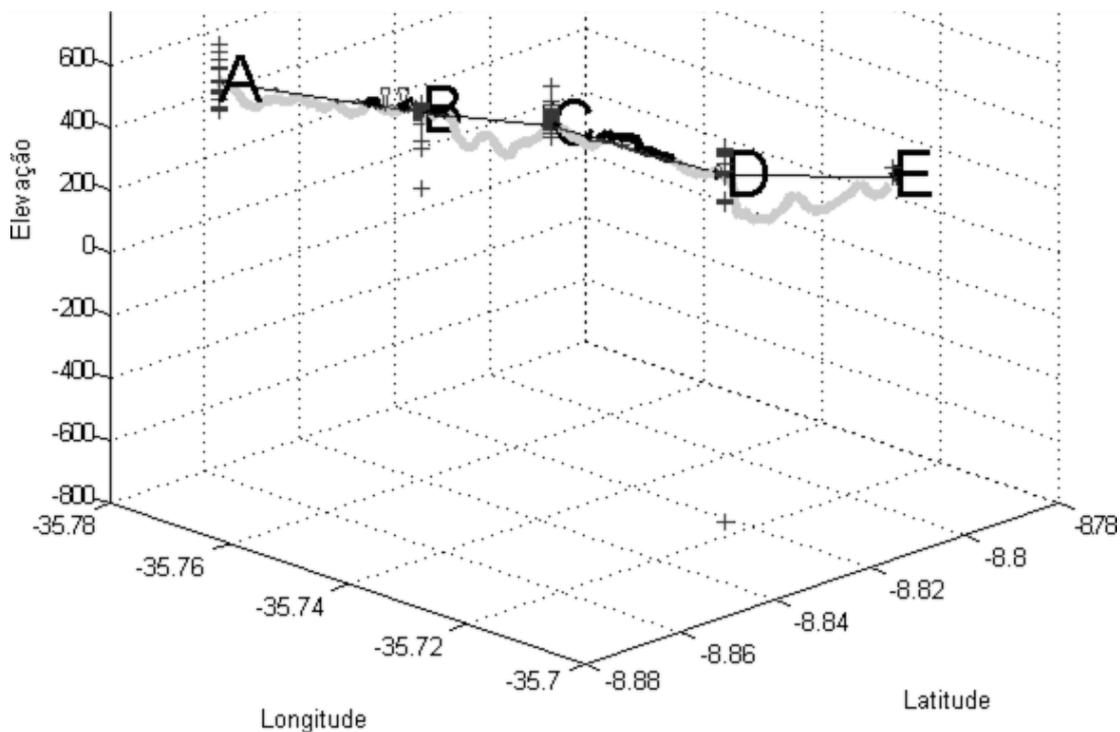
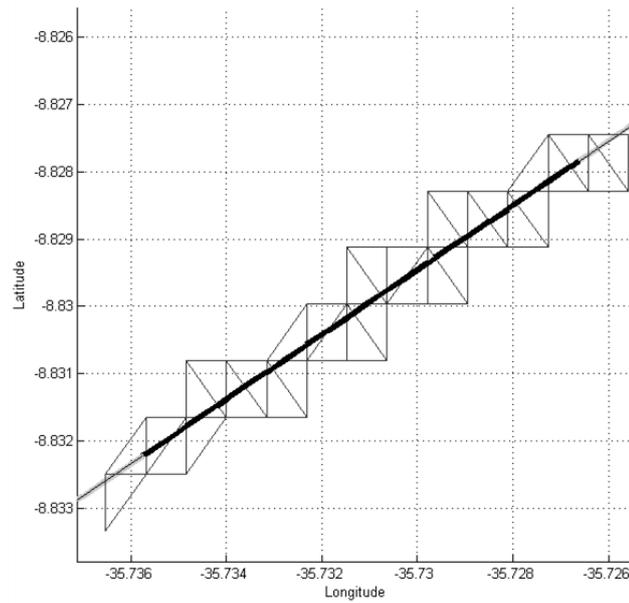


Figura 47. As cruzes representam as elevações calculadas para haver intervisibilidade entre os pontos.

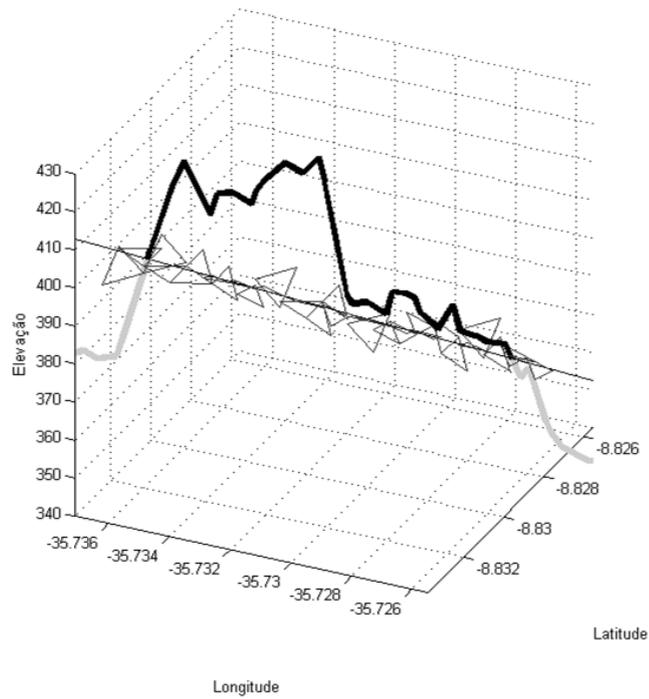
- e) Problema a ser resolvido de desconexão entre os vértices dos triângulos vizinhos:

A partir dos testes realizados em triângulos individuais dos Problema 7, Problema 8 e Problema 9, pensava-se serem eficazes em aplicações de modificação do terreno para corte e aterro, porém alguns resultados revelaram que as soluções desenvolvidas para estes problemas não funcionam para tal propósito.

Na Figura 48 são mostrados os novos triângulos calculados na região do perfil que está acima da linha de visada para um trecho entre os vértices C e D da Tabela 2, porém a Figura 48b mostra inúmeros locais onde não há conexão de vértices entre triângulos vizinhos.



(a)



(b)

Figura 48. Novos triângulos calculados. (a) Vista bidimensional. (b) Vista tridimensional onde se percebe a desconexão entre os vértices dos triângulos vizinhos.

Na seção a seguir têm-se os resultados do desenvolvimento do cone de intervisibilidade.

4.2. Cone de intervisibilidade

O cone de intervisibilidade tem por parâmetro importante a abertura. Este valor, por ser dado em medidas angulares, compromete a interpretação correta se o sistema de coordenadas da origem do cone for dado também em medidas angulares, deste modo, é ideal que o sistema de coordenadas seja não angular.

A área de estudo encontra-se em um local de baixa latitude, assim, as deformações são mínimas na Projeção de Mercator, que por sua vez tem seus cálculos de transformação de coordenadas bastante simples. Devido a este fato e contornar o conflito abertura do cone e sistema de coordenadas angulares, as coordenadas planimétricas do MDS serão transformadas para a Projeção de Mercator.

É visto em Krakiwsky (1973) que para o elipsóide, a transformação das coordenadas geodésicas para métricas, na Projeção de Mercator, é dada pelas fórmulas

$$x = a\lambda \quad (101)$$

$$y = aQ \quad (102)$$

$$Q = \ln \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \operatorname{sen}(\varphi)}{1 + e \operatorname{sen}(\varphi)} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \quad (103)$$

onde a é o semi-eixo maior do elipsóide, φ é a latitude geodésica, λ é a longitude geodésica, Q é a latitude isométrica, $e = \sqrt{2f - f^2}$ é a excentricidade do elipsóide e f é o achatamento. Para o elipsóide GRS80, $a = 6378137m$ e $\frac{1}{f} = 298.257222101$.

Um observador situado no ponto $A_{geo} = [\lambda_A \ \varphi_A \ z_A] = [-35.731473^\circ \ -8.854374^\circ \ 2000.000m]^T$, observa o solo através de um ângulo de abertura de $\alpha = 100^\circ$, orientado com $\theta = 49^\circ 10' 49.18033''$

e $\varphi = -66^{\circ}10'35.29412''$. Na Projeção de Mercator, este mesmo observador situa-se em $A_{merc} = [-3977609.483 \quad -983038.769 \quad 2000.000]^t m$. A região observável de A_{merc} no MDS é mostrada na Figura 49, cujas circunferências são escritas se incrementando o valor de h em 50m. Deve-se ressaltar que esta região não é a região visível por A_{merc} , uma vez que este método apenas calcula a intersecção do cone com as faces triangulares.

O eixo do cone representa a direção Zênite-Nadir, importante na fotogrametria para determinação do ponto principal das fotografias.

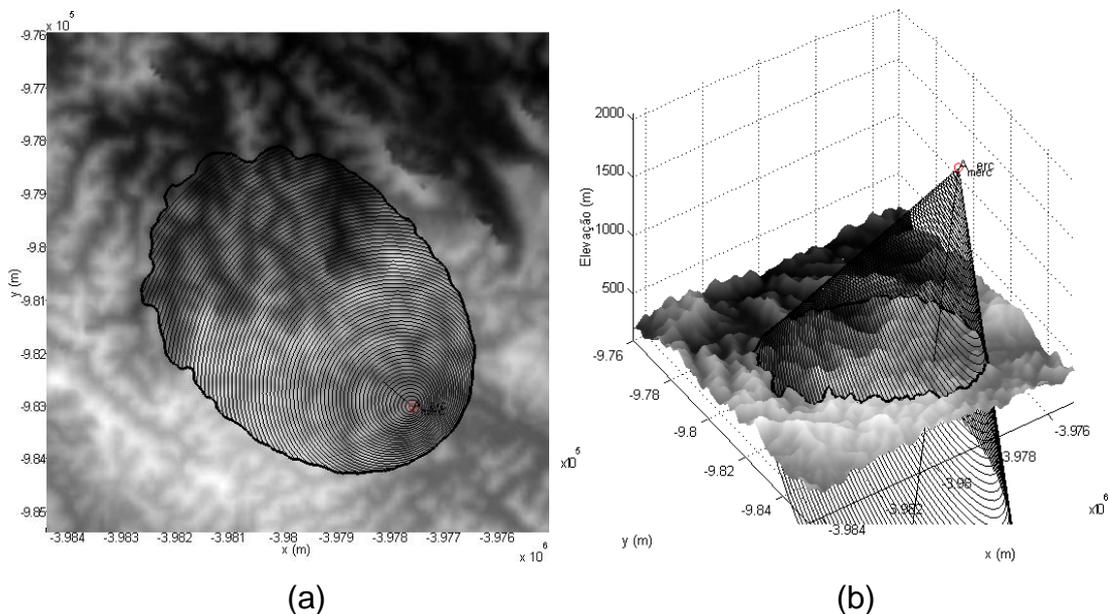


Figura 49. Região observável do observador situado no ponto A_{merc} em suas vistas (a) bidimensional e (b) tridimensional.

A Figura 50 mostra um próximo exemplo considerando o observador agora situado no ponto $B_{geo} = [-35.757566^{\circ} \quad -8.840066^{\circ} \quad 900.000m]^t$ com ângulo de abertura de $\alpha = 36^{\circ}$, orientado com $\theta = -48^{\circ}7'42.032086''$ e $\varphi = 342^{\circ}12'19.163498''$. Na Projeção de Mercator, este mesmo observador situa-se em $B_{merc} = [-3980513.995 \quad -981437.331 \quad 900.000]^t m$. As circunferências foram obtidas incrementando h em 100m.

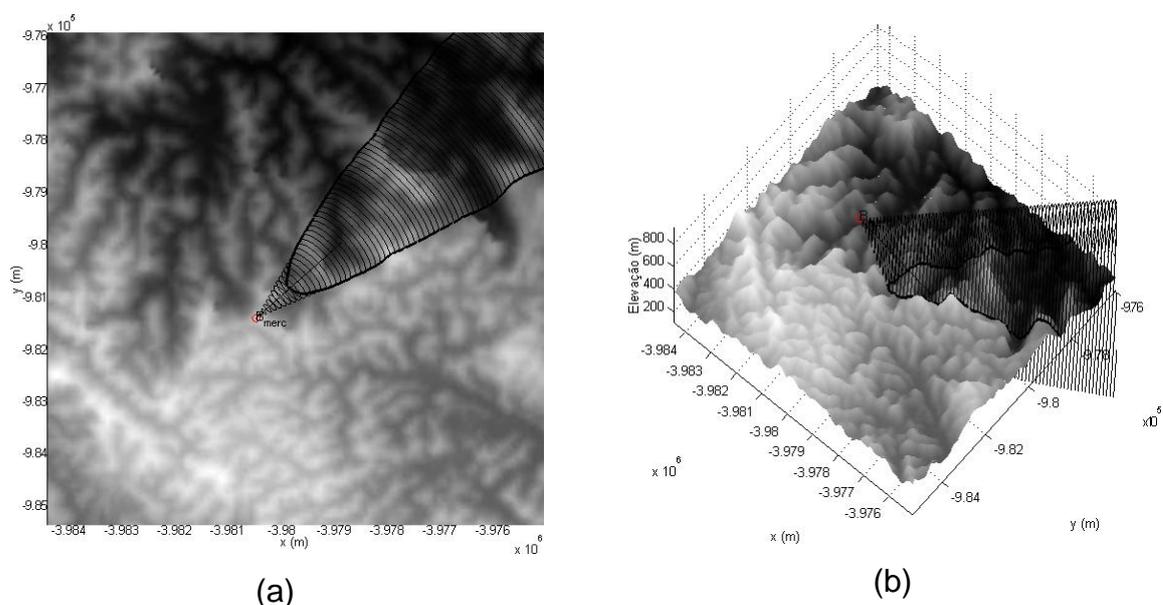


Figura 50. Região observável do observador situado no ponto B_{merc} em suas vistas (a) bidimensional e (b) tridimensional.

4.3. Lançamento de projéteis

Os resultados do lançamento de projéteis sobre o MDS são exibidos a seguir, considerando a aceleração da gravidade de $9.81m/s^2$, $b=1.3$ e $m=40kg$. Será convencionado o mesmo sistema de projeção do tópico anterior.

O primeiro exemplo considera um projétil lançado do ponto $C_{merc} = [-3983324.812 \quad -983415.587 \quad 900.000]^t m$, com velocidade inicial $v_0 = 150m/s$, orientado sob os ângulos $\theta = -52^\circ 56' 28.23529''$ e $\varphi = -346^\circ 9' 13.84615''$. Deseja-se saber os locais em que a trajetória intercepta o MDS e os tempos necessários para isso. A Figura 51 mostra o resultado deste problema. Tendo em vista que este problema deve obedecer à Proposição 2, foram encontrados 2 locais de intersecção da trajetória com o MDS, porém apenas 1 deles é de interesse, como mostra a Tabela 3, uma vez os resultados válidos são os que tem $\tau \geq 0$.

Pela Tabela 3, conclui-se que são necessários 15.039 segundos para que o objeto toque o solo após o lançamento.

Tabela 3. Locais de intersecção entre a trajetória do objeto e o MDS.

Ponto	x_{τ} (m)	y_{τ} (m)	z_{τ} (m)	τ (s)
1	-3984258.471	-984120.654	341.250	-7.138
2	-3981942.190	-982371.479	378.279	15.039

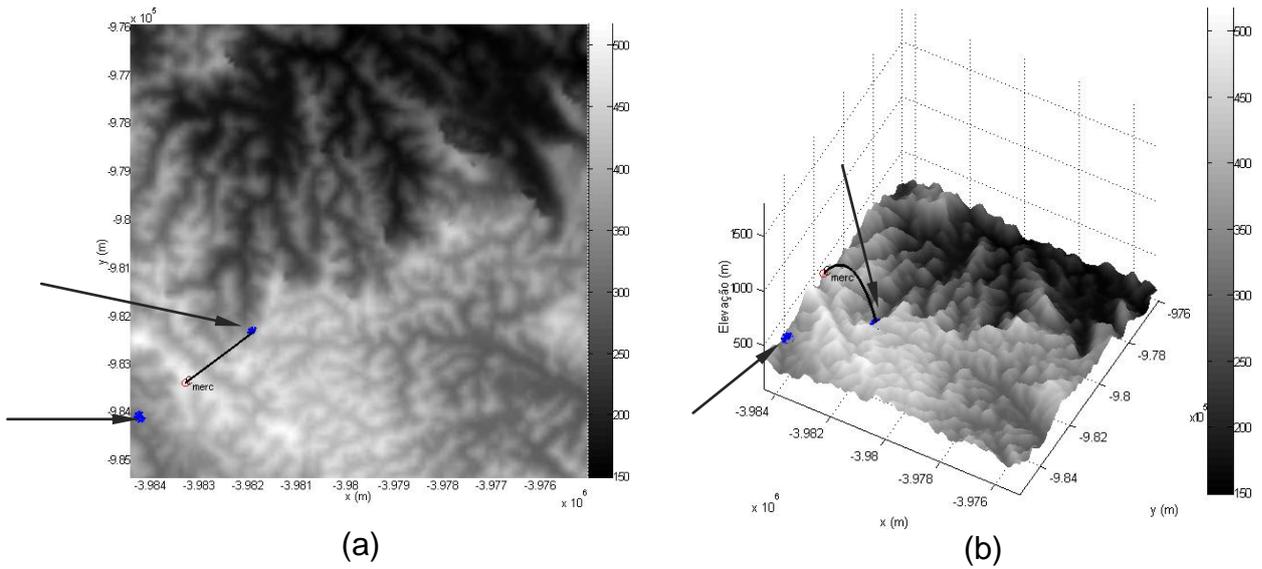


Figura 51. Trajetória do objeto e os locais da queda calculados, em suas vistas (a) bidimensional e (b) tridimensional.

O segundo exemplo é dado pelo objeto sendo lançado de uma aeronave em movimento retilíneo uniforme, com velocidade constante de 200m/s, ao atingir o ponto $D_{merc} = [-3977796.871 \quad -980306.941 \quad 1200.000]^T m$. Deseja-se saber o tempo necessário para o objeto tocar o solo e o local da queda sabendo que a aeronave segue na direção $\theta = -28^\circ 39' 44.71338''$ (Figura 52). A Tabela 4 mostra o resultado deste problema, onde foram encontrados 2 pontos de intersecção com o MDS.

Tabela 4. Locais de intersecção entre a trajetória do objeto e o MDS.

Ponto	x_{τ} (m)	y_{τ} (m)	z_{τ} (m)	τ (s)
1	-3981478.402	-984169.815	460.815	-11.511
2	-3978973.972	-979588.249	202.707	15.451

Logo, pela tabela anterior, são necessários 15.451 segundos para o objeto tocar o solo.

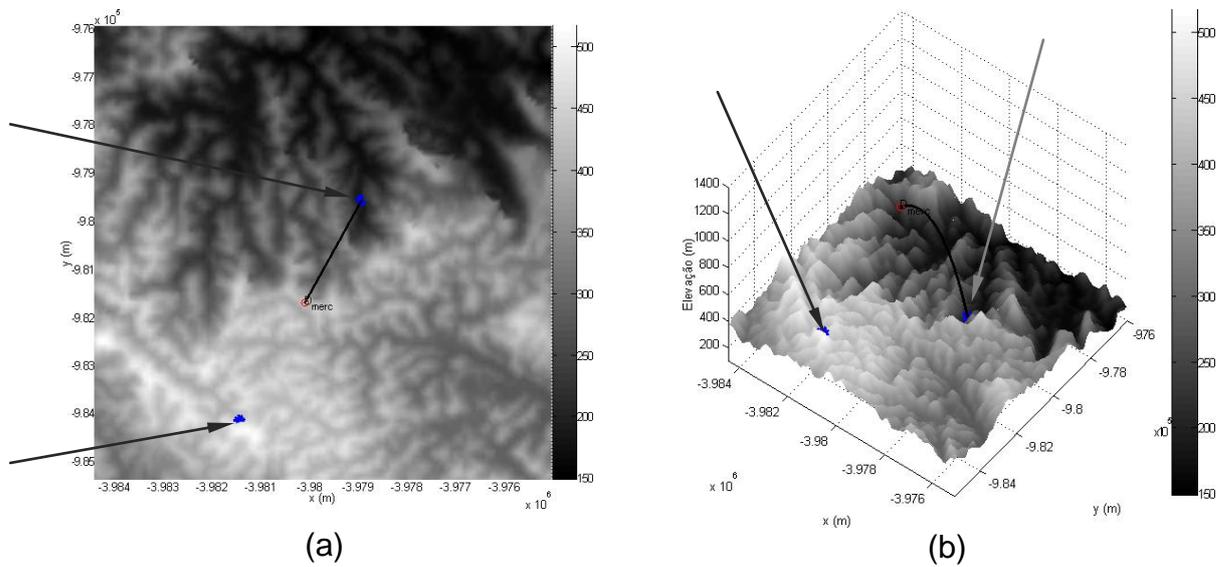


Figura 52. Trajetória do objeto lançado da aeronave e os locais da queda calculados, em suas vistas (a) bidimensional e (b) tridimensional.

O último exemplo considera $b = 6 \cdot 10^{-4}$ e $m = 8g$. Situado agora no ponto $E_{merc} = [-3981450.934 \ 984357.648 \ 511.000]^t m$, um projétil é disparado com velocidade inicial $v_0 = 330 m/s$, orientado sob os ângulos $\theta = -30^\circ 6' 1.20401''$ e $\varphi = 15^\circ$. Foram encontrados 4 locais, porém apenas 1 é válido, como mostra a Tabela 5.

Tabela 5. Locais de intersecção entre a trajetória do objeto e o MDS.

Ponto	x_τ (m)	y_τ (m)	z_τ (m)	τ (s)
1	-3981450.934	-984357.648	511	0
2	-3981450.934	-984357.648	511	3.553×10^{-15}
3	-3981478.402	-984169.815	511	0
4	-3978973.972	-979588.249	422.257	16.158

Com base nestes valores, conclui-se que o projétil tocou o solo após 16.158 segundos (Figura 53).

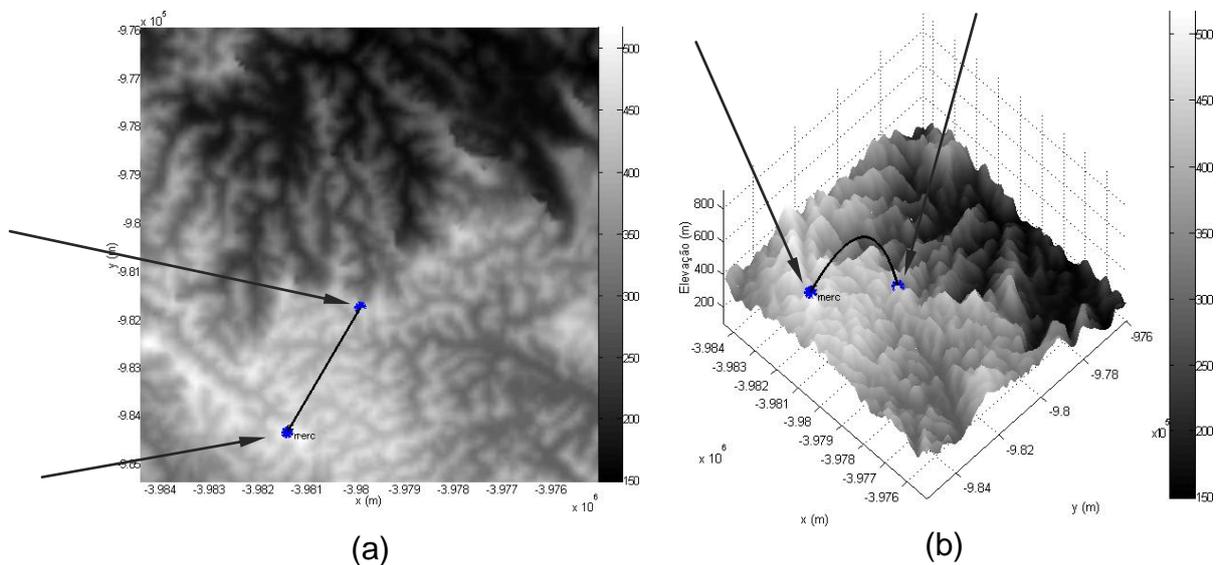


Figura 53. Trajetória do projétil disparado e os locais da queda calculados, em suas vistas (a) bidimensional e (b) tridimensional.

4.4. Estudo de intervisibilidade entre marcos geodésicos e edifícios no Campus Joaquim Amazonas da UFPE

a) Intervisibilidade entre marcos geodésicos

Este resultado obtido é interessante para o planejamento de intervisibilidade entre marcos geodésicos, alvo do próximo exemplo.

Utilizando a mesma metodologia do exemplo descrito no tópico 4.1, será aplicado o problema da visada linear entre os marcos da rede geodésica cadastral do Campus Joaquim Amazonas da UFPE.

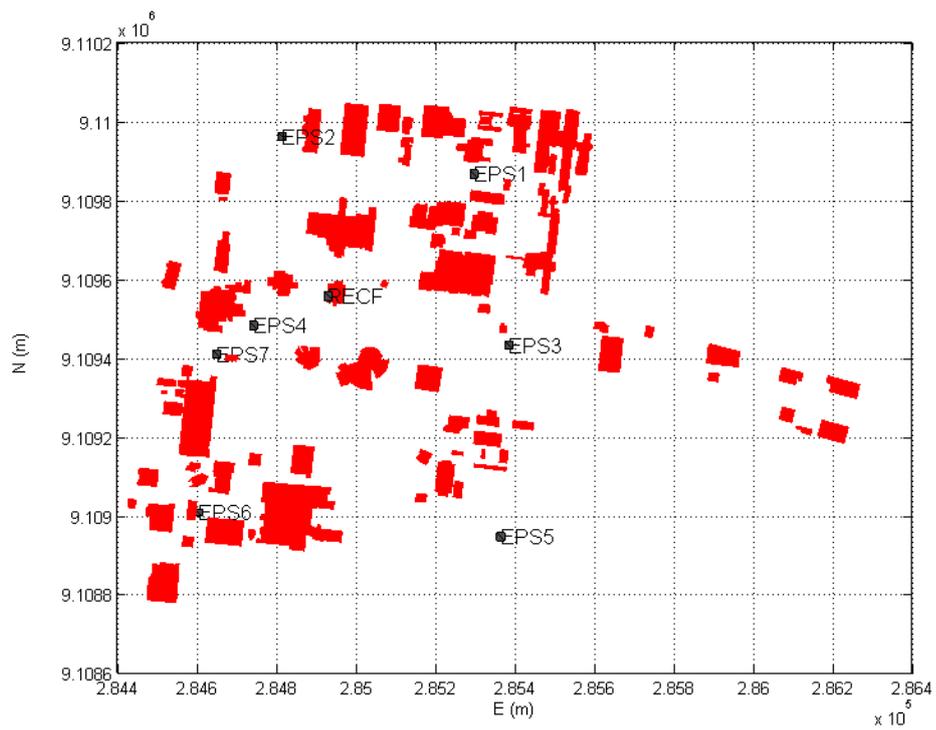
Sendo a coordenada altimétrica dos pilares da UFPE originalmente geométricas (Vila Flor, 2008), é necessário ter-se as ondulações geoidais, obtidas através do software online GeoidEval, que interpola valores com base numa grade regular de 15', para calcular as altitudes ortométricas. Todas as coordenadas dos marcos da rede foram transformadas para a Projeção UTM, Zona 25, latitude Sul, como mostra

a Tabela 6. As coordenadas planimétricas estão referenciadas ao datum SIRGAS2000, e a coordenada altimétrica ao datum EGM96.

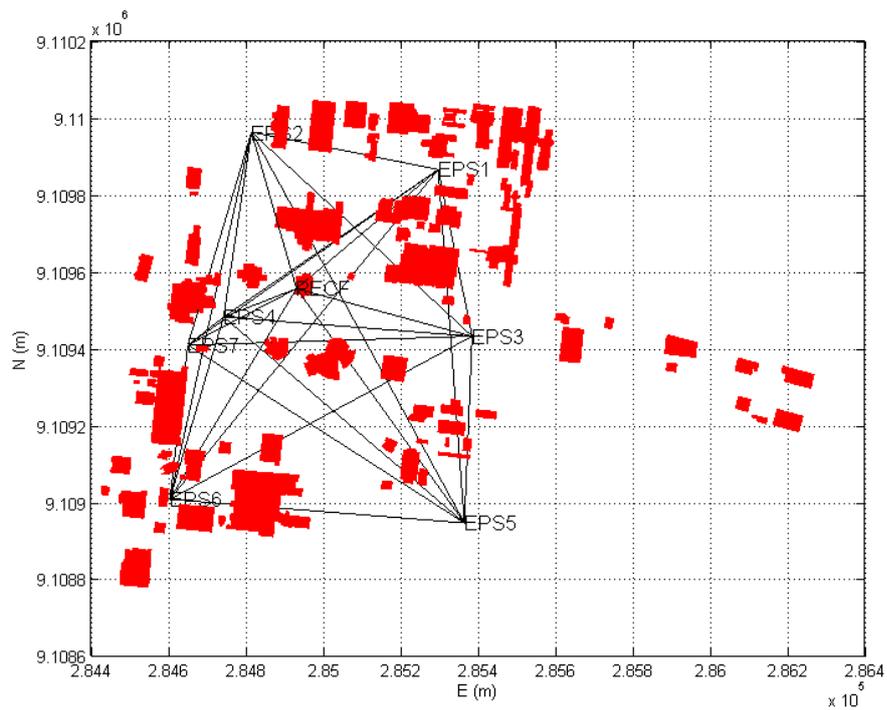
Tabela 6. Coordenadas dos marcos da rede geodésica cadastral do Campus Joaquim Amazonas da UFPE.

Estação	Geográficas		UTM 25 S		Altitude geométrica (m)	Altitude ortométrica (m)
	Longitude (° ' ")	Latitude (° ' ")	E (m)	N (m)		
RECF	34° 57' 5.4591" W	8° 3' 3.4697" S	284931.043	9109554.895	20.180	25.605
EPS1	34° 56' 53.45504" W	8° 2' 53.44031" S	285297.190	9109864.811	2.787	8.210
EPS2	34° 57' 9.19544" W	8° 2' 50.24854" S	284814.681	9109960.583	4.332	9.749
EPS3	34° 56' 50.66166" W	8° 3' 7.57601" S	285384.804	9109430.884	5.200	10.632
EPS4	34° 57' 11.62465" W	8° 3' 5.84148" S	284742.576	9109481.118	4.892	10.316
EPS5	34° 56' 51.38975" W	8° 3' 23.36084" S	285364.818	9108945.773	3.083	8.523
EPS6	34° 57' 16.2398" W	8° 3' 21.26425" S	284603.506	9109006.560	4.586	10.017
EPS7	34° 57' 14.65599" W	8° 3' 8.21201" S	284650.092	9109407.837	4.637	10.062

A partir da base cartográfica planimétrica deste campus, na Projeção UTM, Zona 25, latitude Sul, e Sistema Geodésico SIRGAS2000, foram obtidas as coordenadas dos edifícios cadastrados, identificados unicamente com base em sua sigla e numerados em função da quantidade total de edifícios, em ordem crescente. O ANEXO 2 mostra a lista contendo as identificações de cada edifício cadastrado e suas altitudes ortométricas estimadas com base nas elevações da imagem ASTER GDEM, de nomenclatura ASTGTM2_S09W035, cujo datum altimétrico é o EGM96. A Figura 54 mostra a disposição dos edifícios e os marcos em estudo no campus. Os rótulos dos edifícios foram omitidos para não sobrecarregar a representação.



(a)



(b)

Figura 54. (a) Visão geral dos marcos e edifícios. (b) Linhas de visada em estudo.

Foi calculada a quantidade total de edifícios que interceptam cada uma das 28 linhas de visada, além da identificação de cada interceptação, como mostram as Tabela 7 e Figura 55.

Tabela 7. Visadas interceptadas pelos edifícios (ver ANEXO 2).

Visada	Comprimento (m)	Prédios Interceptados	Quantidade
RECF-EPS1	480.0149	BCA99, CCS458, CCS459	3
RECF-EPS2	422.3439		0
RECF-EPS3	470.6402	BCA99	1
RECF-EPS4	202.9696	BCA99	1
RECF-EPS5	747.9856	CENTRAL_INFORMACOESD81, NECTARP79, NEFDQ35	3
RECF-EPS6	638.9012	CTG912	1
RECF-EPS7	317.4922	BCA99	1
EPS1-EPS2	491.9244	CCS465, CTG923, CTG924	3
EPS1-EPS3	442.6903	CCB285, CCS456, CCS461, CEERMA791	4
EPS1-EPS4	674.4045	CCS458, CCS459, CCSA5102	3
EPS1-EPS5	921.5229	CCB285, NAE0116, NEFDQ42	3
EPS1-EPS6	1103.5377	CCS452, CCS459, CTG912	3
EPS1-EPS7	792.1897	CCS458, CCS459, CCSA5102	3
EPS2-EPS3	778.2172	CCB285, CCSA5102	2
EPS2-EPS4	484.8568		0
EPS2-EPS5	1154.3360	CCSA5102, NEFDQ37, NEFDQ45	3
EPS2-EPS6	977.1156	CAC196, CTG910, CTG922	3
EPS2-EPS7	576.7302	CAC196	1
EPS3-EPS4	644.1897		0
EPS3-EPS5	485.5271	NEFDQ40	1
EPS3-EPS6	889.0882	CTG913, NEFDQ45	2
EPS3-EPS7	735.0736	CENTRAL_INFORMACOESD81, COLEGIO_DE_APLICACAOC106	2
EPS4-EPS5	820.8426	NECTARP79, NEFDQ35	2
EPS4-EPS6	494.5158		0
EPS4-EPS7	117.9977		0
EPS5-EPS6	763.7364	CCEN333	1
EPS5-EPS7	851.0809	CTG922	1
EPS6-EPS7	403.9721	CTG910, CTG921	2

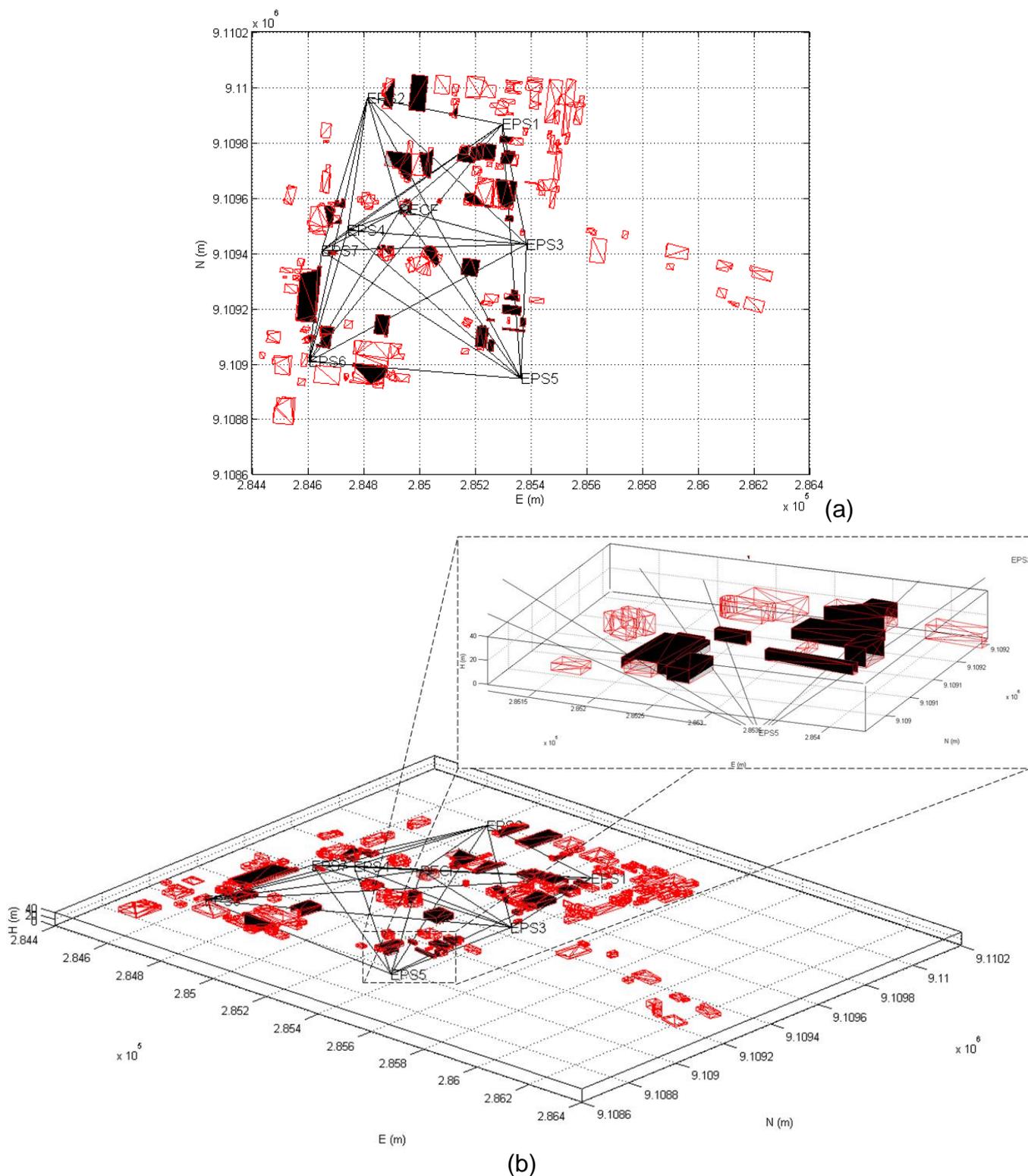


Figura 55. a) Visão geral das interceptações. b) Visão tridimensional dos edifícios interceptados e aumento próximo ao vértice EPS5. As regiões em preto estão acima das visadas em estudo.

Observando-se a figura anterior, tem-se que apenas nas visadas RECF-EPS2, EPS2-EPS4, EPS3-EPS4, EPS4-EPS6 e EPS4-EPS7 não foram detectadas intersecções com os edifícios.

b) Determinação de ângulos de elevação eficientes para rastreamento de satélites GNSS:

O cone de intervisibilidade pode ser aplicado para determinação de ângulos de elevação eficientes para rastreamento de satélites GNSS. A seguir será realizado um estudo considerando três ângulos de elevação, a saber, $\nu = 5^\circ$, $\nu = 15^\circ$ e $\nu = 30^\circ$, juntamente com uma avaliação dos edifícios interceptados pelos cones. A Tabela 8 mostra as aberturas de cada cone com base nos ângulos de elevação.

Tabela 8. Ângulo de abertura para cada ângulo de elevação.

Ângulo de elevação ν ($^\circ$)	Ângulo de abertura $\alpha = 180^\circ - 2\nu$ ($^\circ$)
5	170
15	150
30	120

Para este tipo de estudo, tem-se que o cone deve ter seu eixo paralelo à direção Zênite-Nadir, conforme a mostra a Figura 56. Isto significa que a orientação do cone é dada pelos ângulos $\theta = 0^\circ$ e $\varphi = 90^\circ$ para cada marco em estudo.

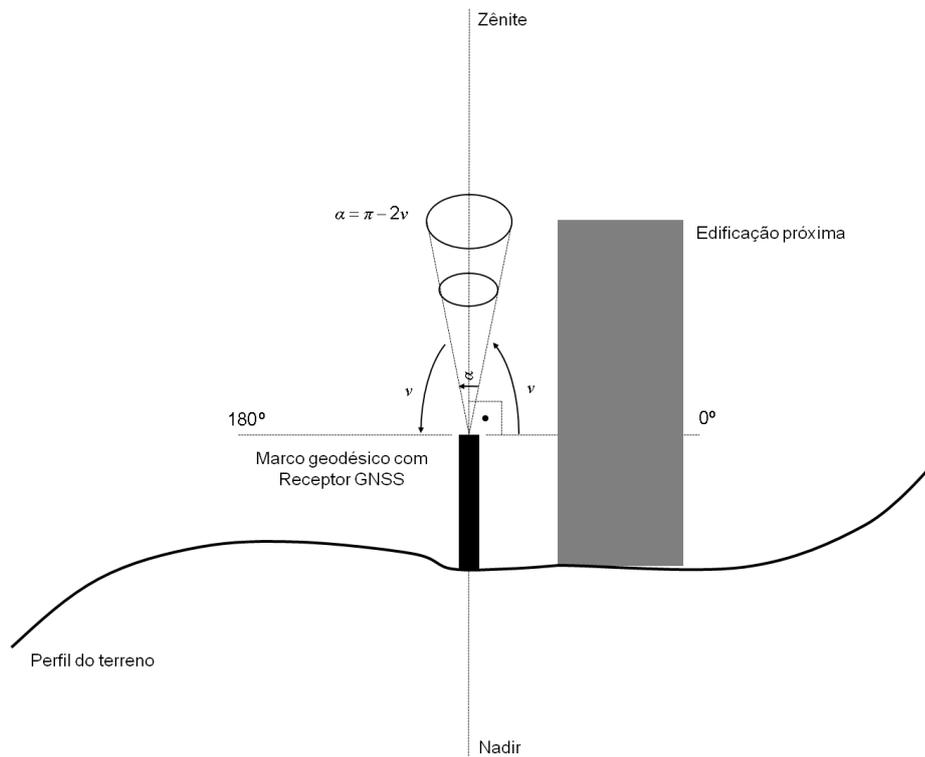
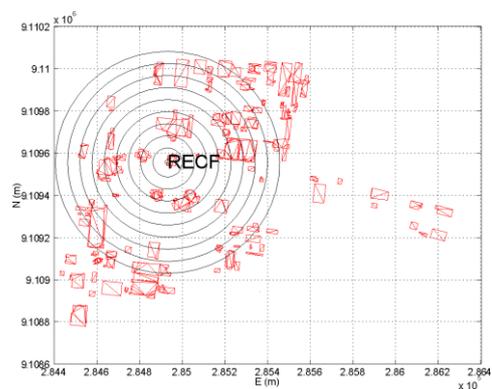
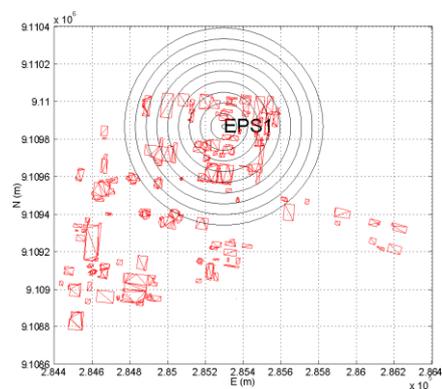


Figura 56. Esquema do uso do cone de intervisibilidade para escolha do melhor ângulo de elevação no rastreamento de satélites GNSS. Na imagem, v é o ângulo de elevação e α a abertura do cone.

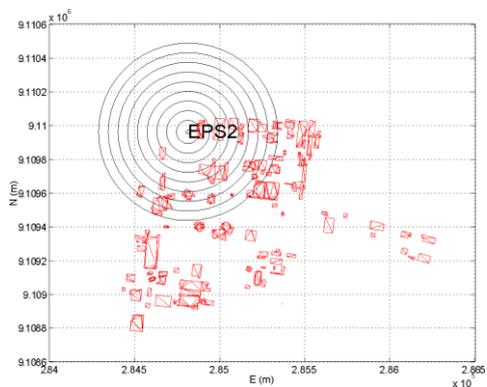
Utilizando o valor de $h = 30m$ e incrementando de $\frac{h}{10}m$ para desenho das circunferências, as figuras 57, 58 e 59 mostram os cones para cada marco geodésico e suas áreas de abrangência, para cada ângulo de elevação da Tabela 8. As figuras 60, 61 e 62 mostram os resultados das intersecções entre os cones e os edifícios da UFPE.



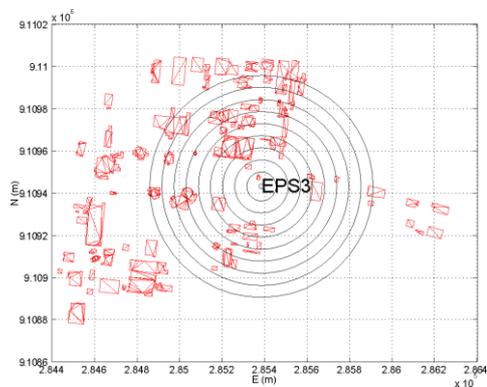
(a)



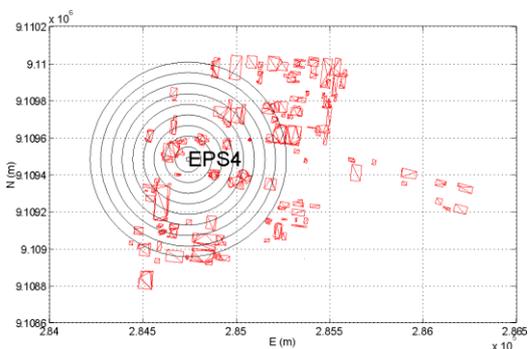
(b)



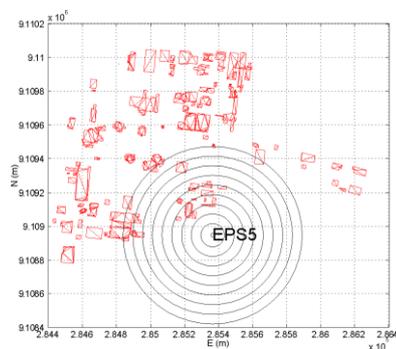
(c)



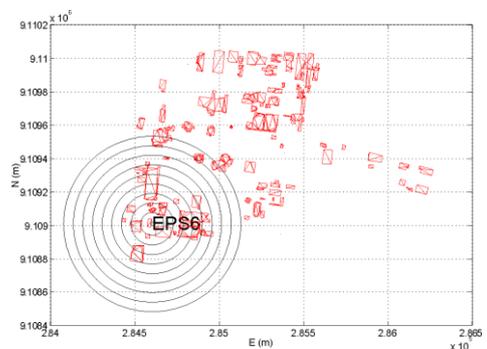
(d)



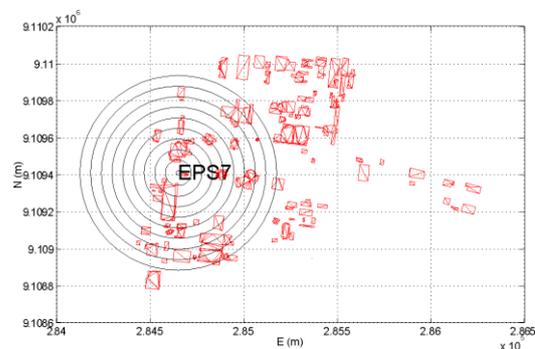
(e)



(f)

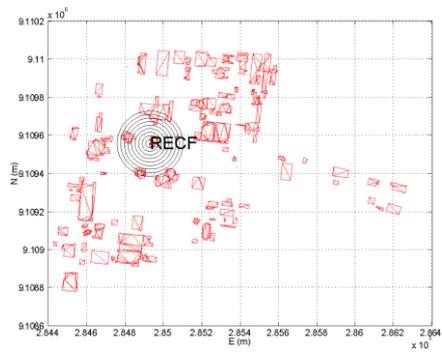


(g)

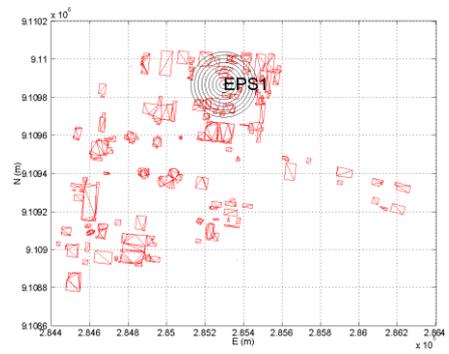


(h)

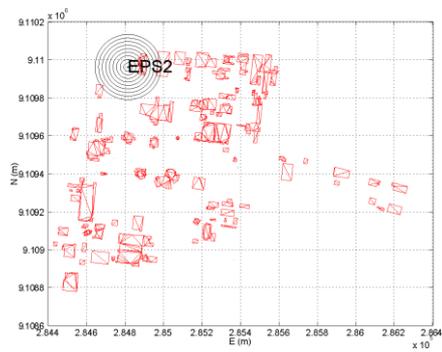
Figura 57. Abrangência dos cones em cada marco geodésico com ângulo de elevação de 5° (abertura de 170°).



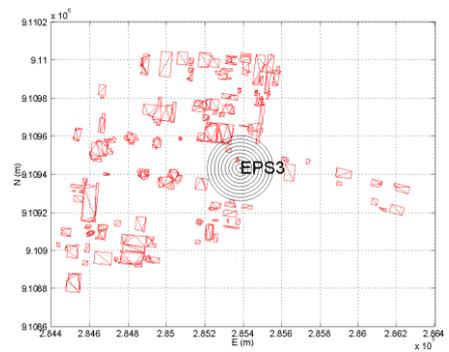
(a)



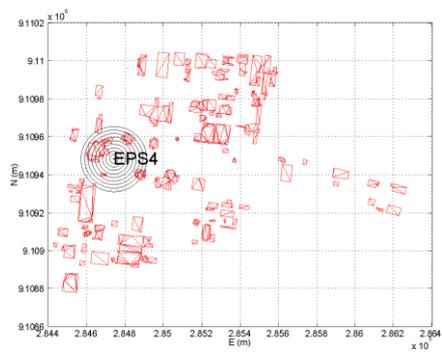
(b)



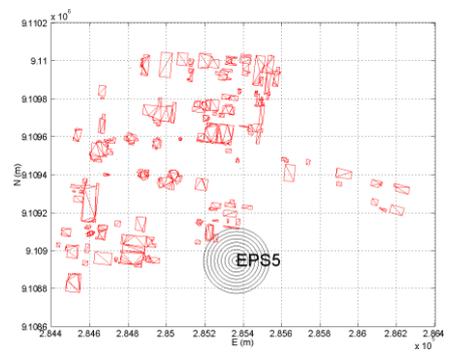
(c)



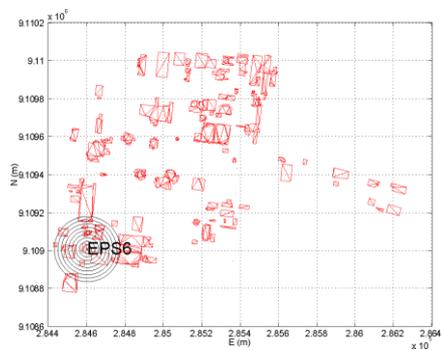
(d)



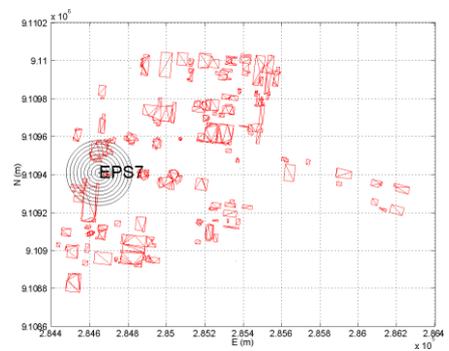
(e)



(f)

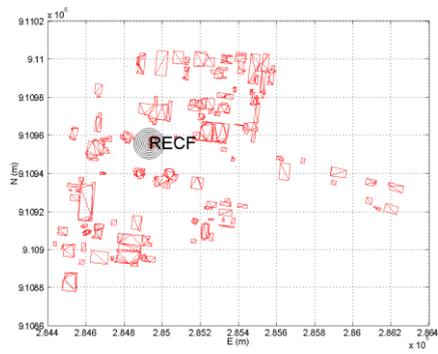


(g)

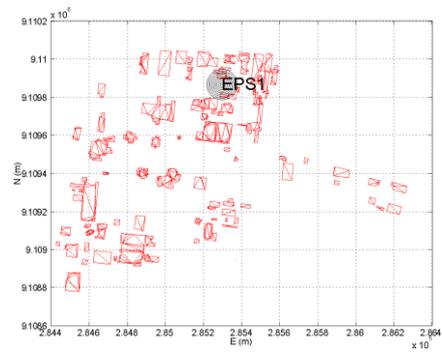


(h)

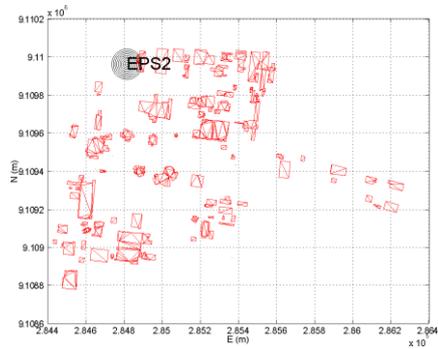
Figura 58. Abrangência dos cones em cada marco geodésico para um ângulo de elevação de 15° (abertura de 150°).



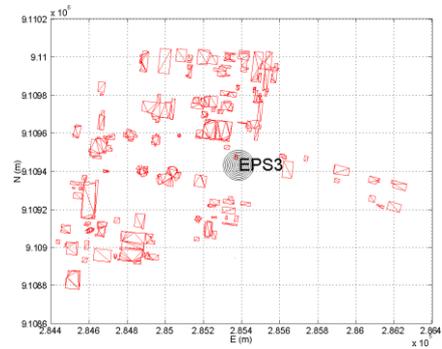
(a)



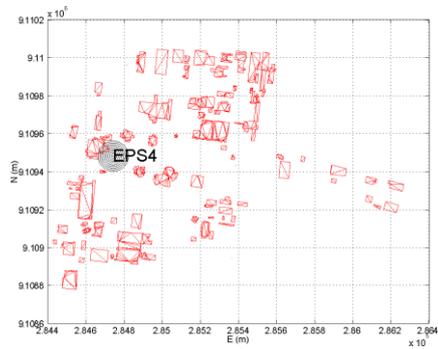
(b)



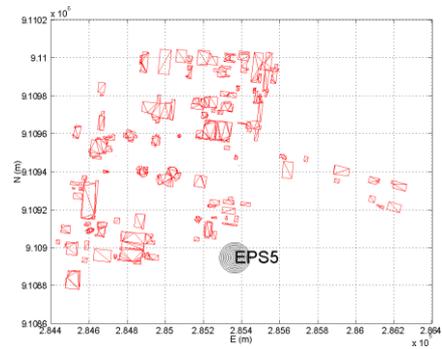
(c)



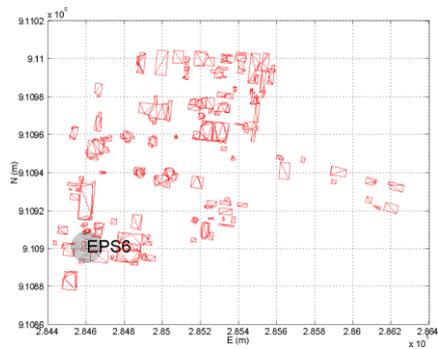
(d)



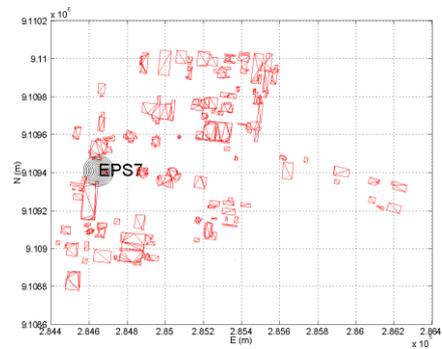
(e)



(f)

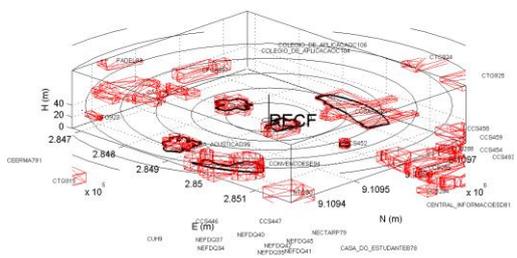


(g)

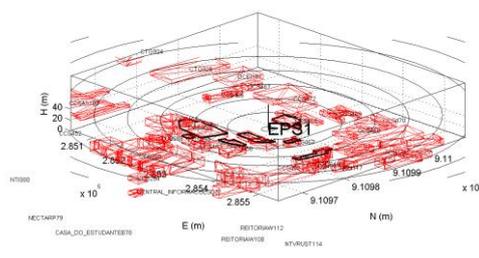


(h)

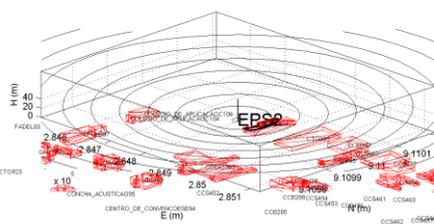
Figura 59. Abrangência dos cones em cada marco geodésico para um ângulo de elevação de 30° (abertura de 120°).



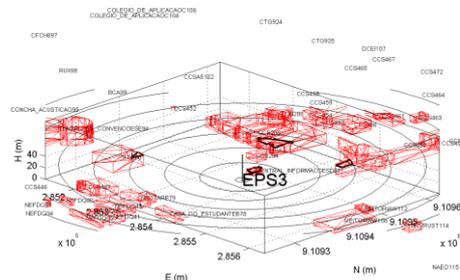
(a)



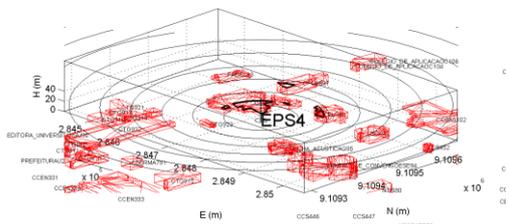
(b)



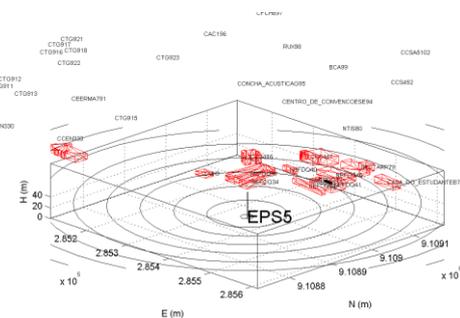
(c)



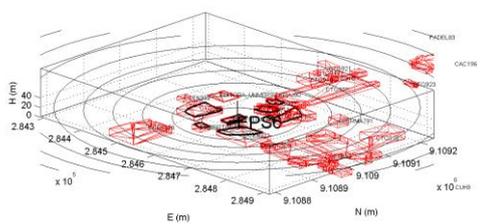
(d)



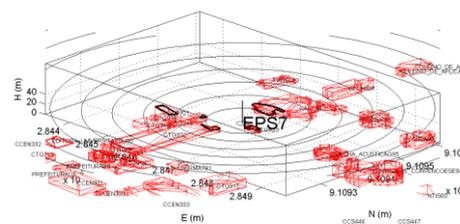
(e)



(f)

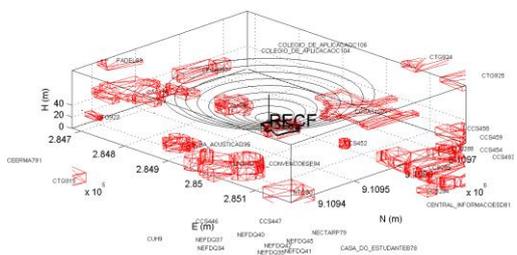


(g)

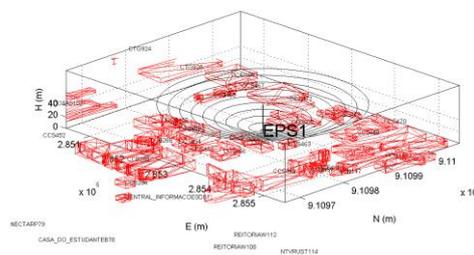


(h)

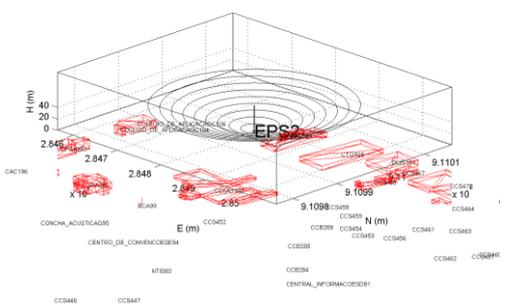
Figura 60. Resultado das intersecções entre os cones e as edificações considerando o ângulo de elevação de 5° (abertura de 170°).



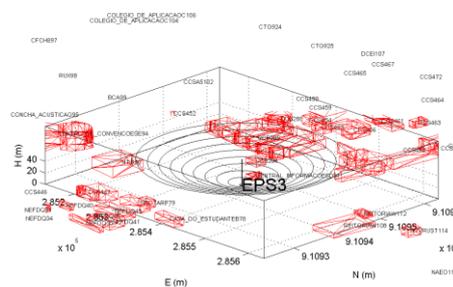
(a)



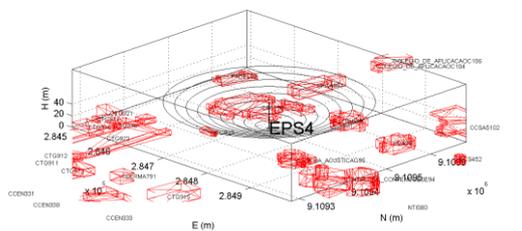
(b)



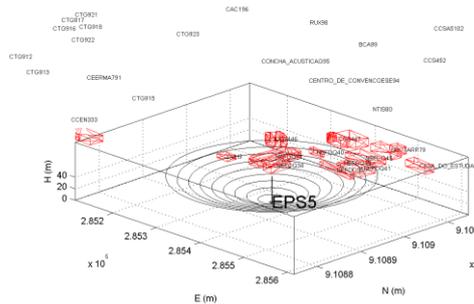
(c)



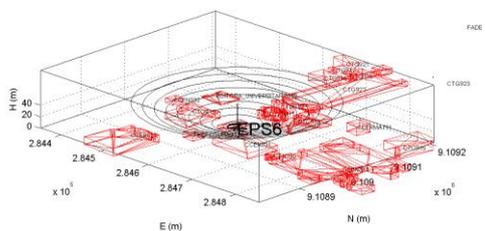
(d)



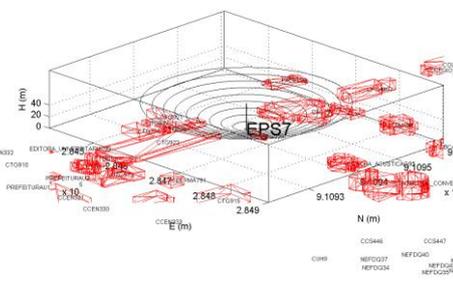
(e)



(f)

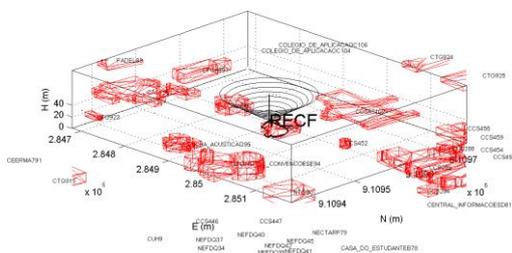


(g)

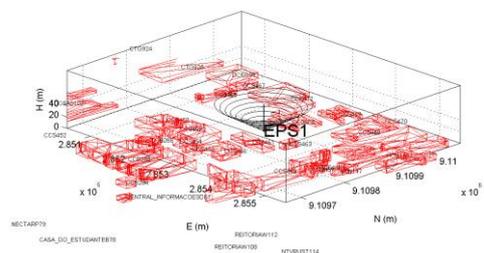


(h)

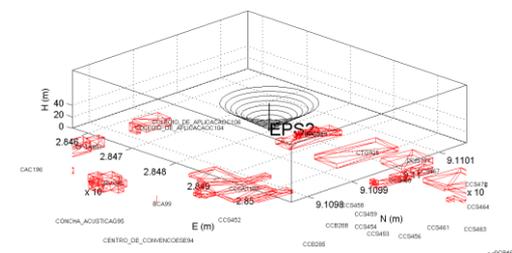
Figura 61. Resultado das intersecções entre os cones e as edificações considerando o ângulo de elevação de 15° (abertura de 150°).



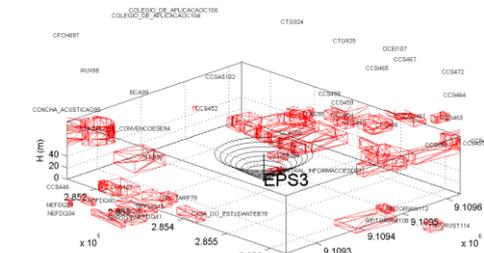
(a)



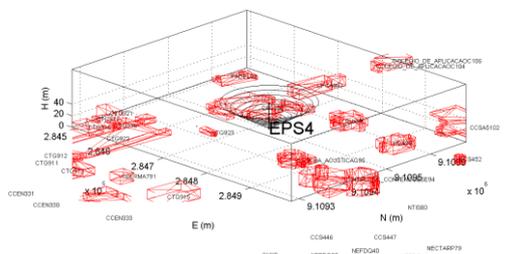
(b)



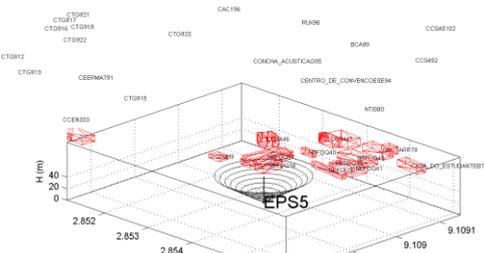
(c)



(d)



(e)



A Tabela 9 mostra o resultado geral dos cones de intervisibilidade das estações em estudo.

Tabela 9. Resultado geral dos cones de intervisibilidade.

Estação	Ângulo de Elevação					
	5°		15°		30°	
	Quantidade de prédios interceptados	Identificação	Quantidade de prédios interceptados	Identificação	Quantidade de prédios interceptados	Identificação
RECF	0	-	0	-	0	-
EPS1	7	CCS459, CCS454, CCS456, CCS461, CCS463, CCS462, CCS464	0	-	0	-
EPS2	1	CTG924	0	-	0	-
EPS3	4	NTIS8D, CINFD81, CCS462, CCB285	0	-	0	-
EPS4	3	CAC196, RUX98, CFCH897	0	-	0	-
EPS5	1	NEFDQ41	0	-	0	-
EPS6	7	CTG910, PREFEITURAU1, PREFEITURAU2, CCEN331, CTG911, CTG912, CTG913	2	PREFEITURAU2, CCEN331	1	PREFEITURAU2
EPS7	4	CTG921, CTG922, CTG923, CAC196	0	-	0	-

Percebe-se que em todos os ângulos de elevação testados, houve intersecções entre o cone da estação RECF e as edificações. Isto acontece devido esta estação situar-se acima de muitas edificações, causando o efeito da hipérbole, como mostrado na Figura 29b, deste modo, a estação RECF, nos três ângulos de elevação, não foi interceptada pelas edificações.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma nova abordagem do problema da intervisibilidade em MDS formado por uma rede triangular irregular, através da parametrização das faces triangulares, das linhas de visada e extensão dos métodos desenvolvidos para cones e trajetórias de objetos.

As equações desenvolvidas têm por objetivo a parametrização da intervisibilidade. Com elas é também possível identificar os locais que impedem a visibilidade entre os extremos de uma linha de visada.

Conclui-se a partir do exposto no tópico 3.3, que o problema da intervisibilidade consiste em determinar a intersecção entre regiões, bastando conhecer as equações paramétricas das mesmas, deste modo, amplia-se o uso deste conhecimento na solução de problemas que, aparentemente não estão ligados à intervisibilidade, como o lançamento de projéteis.

O uso desta metodologia abre um leque de possibilidades para aplicações práticas na criação de sistemas de baixo custo, uma vez que, os objetivos da intervisibilidade descritos neste trabalho são alcançados na aplicação direta das fórmulas desenvolvidas.

Os resultados mostraram a eficácia dos métodos desenvolvidos, ou seja, respondem às questões que foram propostas com exceção dos problemas 7, 8 e 9, que necessitam de mais estudos para serem aplicados na modificação do terreno.

Os exemplos considerados permitem a identificação precisa de edifícios que interceptam as linhas de visada. Neste caso, é necessária a interdisciplinaridade com o Cadastro Técnico Multifinalitário, onde se tem que as edificações sejam fielmente identificadas, seja nas informações descritivas como, por exemplo, a identificação inequívoca de cada edificação, quanto nas informações geométricas, cujas coordenadas tridimensionais de cada prédio necessitariam ser levantadas.

Foi mostrado que pode ser realizada uma avaliação dos melhores locais para rastreamento de satélites GNSS em áreas urbanas, através das equações do cone de intervisibilidade, que mostraram sua utilidade na escolha do melhor ângulo de elevação para este fim.

A determinação das linhas de visada entre os marcos geodésicos do Campus Joaquim Amazonas da UFPE mostrou que há fortes impedimentos de visibilidade entre os pilares da rede geodésica cadastral. Em contrapartida, a localização de tais pilares parecem ter sido estrategicamente bem colocados para fins de levantamento com receptores GNSS, uma vez que para uma máscara de elevação de 15° , quase nenhum edifício impede o rastreamento de satélites.

Foi mostrada nesta dissertação uma revisão de trabalhos relacionados à intervisibilidade, aplicações e algoritmos, mostrando várias décadas de estudo sobre este tema. Percebe-se que a maioria deles encontra-se em língua inglesa, portanto este trabalho também contribui para a abordagem deste tema em língua portuguesa.

5.1. Recomendações

As equações desenvolvidas para o cone de intervisibilidade resolvem apenas as intersecções deste com as faces triangulares. Deve ser realizado um estudo mais aprofundado sobre este tema, para obter as regiões completas de visibilidade sobre o MDS limitadas pela região observável do cone.

Podem ser adicionadas às equações desenvolvidas, as correções devido à curvatura terrestre e refração atmosférica, além de outros aspectos físicos, como intensidade da luz no ambiente.

Também se recomenda realizar estudos adicionando elementos físicos, como por exemplo, a densidade do material que compõe o MDS para avaliação de perfuração de projéteis sobre o mesmo, que também é um problema de intervisibilidade.

Recomenda-se a partir das equações desenvolvidas neste trabalho, a geração de um editor de intervisibilidade.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT. **Execução de levantamento topográfico**. NBR 13133. 1994.

AGOSTINHO, J. C. P.; COSTA, D. C.; FRANÇOSO, M. T.; TRABANCO J. L. A. Base Cartográfica Digital para um Sistema de Informações Geográficas Cadastral Municipal. **Pluris 2010: The Challenges of Planning in a Web Wide World**. Portugal, 2010.

ALBLAS, L. **Archeological Visibility Analysis with GIS**. The Council of European Geodetic Surveyors. Student Contests, 2012.

BRUNO, A. D. S.; MATOS, J. M. O. O Comprimento da Trajetória de um Projétil. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. Vol. 24, Nº 1, pp. 30-36, Março 2002.

CHAPEAU-BLONDEAU, F.; MONIR, A. Numerical Evaluation of the Lambert W Function and Application to Generation of Generalized Gaussian Noise With Exponent 1/2. **IEEE Transactions on Signal Processing**. Vol. 50, No. 9, pp. 2160-2165, SI, 2002.

COLE, R.; SHARIR, M. Visibility Problems for Polyhedral Terrains. **Journal of Symbolic Computation**. Academic Press Limited. Vol. 7, Nº 1 pp. 11-30, January 1989.

CORLESS, M. ROBERT; JEFFREY, J. DAVID; KNUTH, DONALD E. **A Sequence of Series for The Lambert W Function**. Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. Association for Computation Machinery. pp 197-204, New York, NY, 1997.

ESRI. An overview of the Visibility toolset. **ArcGIS help 10.1**. Redlands, 11 Aug. 2012. Disponível em:

<http://resources.arcgis.com/en/help/main/10.1/index.html#/An_overview_of_the_Visibility_toolset/00q9000000n0000000/>. Acesso em: 20 Dez. 2013.

_____. How Line Of Sight works. **ArcGIS help 10.1**. Redlands, 11 Aug. 2012.

Disponível em:

<<http://resources.arcgis.com/en/help/main/10.1/index.html#/00q90000008v000000/>>.

Acesso em: 20 Dez. 2013.

_____. How Skyline Barrier works. **ArcGIS help 10.1**. Redlands, 11 Aug. 2012.

Disponível em:

<<http://resources.arcgis.com/en/help/main/10.1/index.html#/00q900000014000000/>>.

Acesso em: 20 Dez. 2013.

_____. How Skyline works. **ArcGIS help 10.1**. Redlands, 11 Aug. 2012. Disponível em:

<<http://resources.arcgis.com/en/help/main/10.1/index.html#/00q90000008t000000/>>.

Acesso em: 20 Dez. 2013.

_____. Observer Points (3D Analyst). **ArcGIS help 10.1**. Redlands, 11 Aug. 2012.

Disponível em:

<<http://resources.arcgis.com/en/help/main/10.1/index.html#/00q90000000p000000/>>.

Acesso em: 20 Dez. 2013.

FISHER, P. F. First Experiments in Viewshed Uncertainty: Simulating Fuzzy Viewsheds. **Photogrammetric Engineering & Remote Sensing**. American Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Vol. 58, Nº 3, pp. 345-352, March, 1992.

_____. Extending the Applicability of Viewsheds in Landscape Planning. **Photogrammetric Engineering & Remote Sensing**. American Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Vol. 62, Nº 11, pp. 1297-1302, November, 1996.

FLORIANI, L. DE; MAGILLO, P. Intervisibility on Terrains. In: CONGLEY, P. A.; GOODCHILD, M. F.; MAGUIRE, D. J.; RHIND, D. W. (Ed.). **Geographic Information System: Principles, Techniques, Management and Applications**. pp. 543-556, Wiley, 2005.

FRANKLIN, W. R.; RAY, C. K.; MEHTA, S. **Geometric Algorithms for Siting of Air Defense Missile Batteries**. Technical report DAAL03-86-D-0001, Battelle, Columbus Division, Columbus, Ohio, March, 1994. 129p.

GUTH, P. L. **Probabilistic Line-of-Sight with LIDAR Point Clouds**. ASPRS Annual Conference. Sacramento, California, March 19-23, 2012.

GRASS. r.cva. **GRASS GIS Manual**. Disponível em: <http://www.ucl.ac.uk/~tcrnmar/GIS/r.cva_v5x_man.html>. Acesso em 20 Dez. 2013.

_____. r.los. **GRASS GIS Manual**. Disponível em: <<http://grass.osgeo.org/grass65/manuals/r.los.html>>. Acesso em 20 Dez. 2013.

_____. r.viewshed. **GRASS GIS Manual**. Disponível em: <<http://grass.osgeo.org/grass70/manuals/r.viewshed.html>>. Acesso em 20 Dez. 2013.

IZRAELEVITZ, D. A Fast Algorithm for Approximate Viewshed Computation. **Photogrammetric Engineering & Remote Sensing**. American Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Vol. 69, Nº 7, pp. 767-774, July, 2003.

KLEIN, I.; MATSUOKA, M. T.; SOUZA, S. F.; COLLISCHONN, C. Planejamento de Redes Geodésicas Resistentes a Múltiplos Outliers. **Boletim de Ciências Geodésicas**. Sec. Artigos, Curitiba, v. 18, nº 1, pp 480-507, jul-set, 2012.

KRAKIWSKY, E. J. **Conformal Map Projections in Geodesy**. Technical report 02, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick. Fredericton, New Brunswick, Canada, September, 1973. 153p.

LANDOVSKY, G. S. Análise de Intervisibilidade um Caso de Estudo em Valença, Portugal. **Revista Engenharia Civil**. [S. I.], No. 40, pp 27-38, Portugal, Maio 2011.

MENDONÇA, F. J. B.; GARNÉS, S. J. dos A.; PEREIRA, C. M.; NETO, J. A. B.; MELO, W. D. A. **Análise do Ajustamento por Mínimos Quadrados de uma Trilateração Topográfica com Injunções nos Planos UTM e Topocêntrico**. III Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife - PE, 27-30 de Julho de 2010.

MILLS, K.; FOX, G.; HEIMBACH, R. Implementing an Intervisibility Analysis Model on a Parallel Computing System. **Computers & Geosciences**. Pergamon Press Vol. 18, No. 8, pp. 1047-1054, Great Britain, 1992.

MAGALHÃES, M. A. DE. **Algoritmo Eficiente para Cálculo de Mapas de Visibilidade em Terrenos Armazenados em Memória Externa**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Viçosa, Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação, Viçosa, Minas Gerais, 2009.

MAGOČ, T.; KASSIN, A.; ROMERO, R. A Line of Sight Algorithm using Fuzzy Measures. **Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)**. 2010 Annual Meeting of the North American. pp. 1-6, 12-14 July 2010.

MATHWORKS. viewshed. **Documentation Center**. Natick, Massachusetts, 2013. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/help/map/ref/viewshed.html>>. Acesso em: 16 set. 2013.

_____. Determining and Visualizing Visibility Across Terrain. **Documentation Center**. Natick, Massachusetts, 2013. Disponível em:

<<http://www.mathworks.com/help/map/determining-and-visualizing-visibility-across-terrain.html>>. Acesso em: 15 Set. 2013.

MILLER, M. L. **Analysis of Viewshed Accuracy with Variable Resolution LIDAR Digital Surface Models and Photogrammetrically-Derived Digital Elevation Models**. Dissertação de Mestrado. Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, October 28, 2011.

MILLS, K.; FOX, G.; HEIMBACH, R. Implementing an Intervisibility Analysis Model on a Parallel Computing System. **Computer & Geosciences**. Pergamon Press Ltd. Vol. 18, Nº 8 pp. 1047-1054, 1992.

MOET, E.; KREVELD, M. VAN; OOSTRUM, R. VAN. Region Intervisibility in Terrains. **International Journal of Computational Geometry & Applications**. World Scientific Publishing Company, Vol. 17, No. 4, pp 331-347, [S. I.], 2007.

NAGY, G. Terrain Visibility. **Computers & Graphics**. Elsevier Science Ltd. Vol. 18, No. 6, pp. 763-773, Great Britain, 1994.

OLIVEIRA, R. M.; FORMIGA, K. T.; BOGGIONE, G. de A. Base Cartográfica Digital como Instrumento de Gestão no Sistema de Abastecimento de Água. **XIV Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto**. Natal, RN, 25 a 30 de Abril de 2009.

ORMAUX, S. **Inter-visibility a Concept at the Service of Territorial Intelligence, a Tool at the Service of Governance**. International Conference of Territorial Intelligence. Huelva, 2003.

PENNEY, R. W. Analytic Determination of Gradients of Intervisibility over Continuous Randomly-Generated Topography. **IMA Journal of Applied Mathematics**. British Crown. Vol. 61, pp. 291-303, 1998.7

PINTO F. S.; CENTENO, J. A. S. A Realidade Aumentada em Smartphones na Exploração de Informações Estatísticas e Cartográficas. **Boletim de Ciências Geodésicas**. Sec. Artigos, Curitiba, v. 18, nº 2, p. 282-301, abr-jun, 2012.

RUA, H.; GONÇALVES, A. B.; FIGUEIREDO, R. Assessment of the Lines of Torres Vedras Defensive System with Visibility Analysis. **Journal of Archeological Science**. Elsevier Science. Vol. 40, pp. 2113-2123, 2013.

SANSONI, C. Visual Analysis: a New Probabilistic Technique to Determine Landscape Visibility. **Computer-Aided Design**. Elsevier Science Ltd. Vol. 28, Nº 4, pp. 289-299, Great Britain, 1996.

SHARIR, M. The shortest watchtower and related problems for Polyhedral Terrains. **Information Processing Letters**. Vol. 29, pp. 265-270, North-Holland, 1988.

SILVEIRA, T. A.; CARNEIRO, A. F. T.; PORTUGAL, J. L. Estruturação De Bases Cartográficas Para Sistemas De Informação Geográfica (SIG). **II Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação**. Recife, 2008.

TABIK, S.; ZAPATA, E. L.; ROMERO, L. F. Simultaneous Computation of Total Viewshed on Large High Resolution Grids. **International Journal of Geographical Information Science**. Taylor & Francis Group. Vol. 27, Nº 4, pp. 804-814, 2012.

TAVARES JUNIOR, J. R. **Modelagem em Realidade Virtual de Rádio Enlace**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, Recife, 2003.

_____; CANDEIAS, A. L. B. **Realidade Virtual na Modelagem do Rádio Enlace**. Anais XI Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto. INPE, pp 1019-1026, Belo Horizonte, Brasil, 05 - 10 abril 2003.

TIMONEN, V. Low-Complexity Intervisibility in Height Fields. **Computer Graphics**. Vol. 31, Nº 8, pp. 2348-2361, 2012.

VIECILI, F. L.; POMPÊO, C. A. Elaboração de bases cartográficas em meio digital para o manejo de áreas de proteção ambiental. **Gobierno de Chile; Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura. Agua, Vida y Desarrollo**. Santiago de Chile, IICA, oct. 2001. p.1-10, Ilus.

VILA FLOR, C. D. R. **Rede geodésica cadastral do campus Recife da UFPE: Fase I – planejamento e implantação da rede principal**. Trabalho final de graduação. Departamento de Engenharia Cartográfica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008.

WANG, J.; ROBINSON, J.; WHITE, K. A Fast Solution to Local Viewshed Computation Using Grid-Based Digital Elevation Models. **Photogrammetric Engineering & Remote Sensing**. American Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Vol. 62, Nº 10, pp. 1157-1164, October, 1996.

ZELATOR, KONSTANTINE. The equation $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ and a family of cyclic Heron quadrilaterals. **Cornell University Library**. University of Toledo, USA, 2008.

ZHU, B. Computing the shortest watchtower of a Polyhedral Terrain in $O(n \log n)$ time. **Computation Geometry**. Elsevier Science B. V. Vol. 8, pp. 181-193, North-Holland, 1997.

ANEXO 1. Alguns softwares que calculam a intervisibilidade

Aqui são listados quatro softwares que trabalham com a intervisibilidade: MATLAB 7.10, ArcGIS 10, GRASS e QuantumGIS. Os softwares MATLAB 7.10, GRASS e QuantumGIS tem funções definidas que utilizam somente MDS matricial. O MATLAB 7.10 possui duas funções para cálculo do mapa de visibilidade, *los2* e *viewshed*, que calculam a intervisibilidade entre dois pontos e o mapa de visibilidade, respectivamente. O GRASS possui as funções *r.viewshed*, *r.los* e *r.cva* que calculam o mapa de visibilidade de um ponto, análise de linha de visada e mapa de visibilidade cumulativo, respectivamente, sobre um MDS de modelo vetorial. O QuantumGIS possui o plugin *Visibility Analysis 0.1.0* que somente calcula mapas de visibilidade simples. Já o ArcGIS, possui um conjunto de ferramentas mais completo para cálculo da intervisibilidade e não se limita apenas ao modelo matricial do MDS.

i. MATLAB 7.10

A função *los2*, do MATLAB 7.10, cria um gráfico bidimensional mostrando o perfil do MDS matricial e os pontos visíveis e invisíveis a partir de uma linha de visada, com correção da curvatura da terra e refração atmosférica, conforme mostra a Figura 63 (MATHWORKS, 2013).

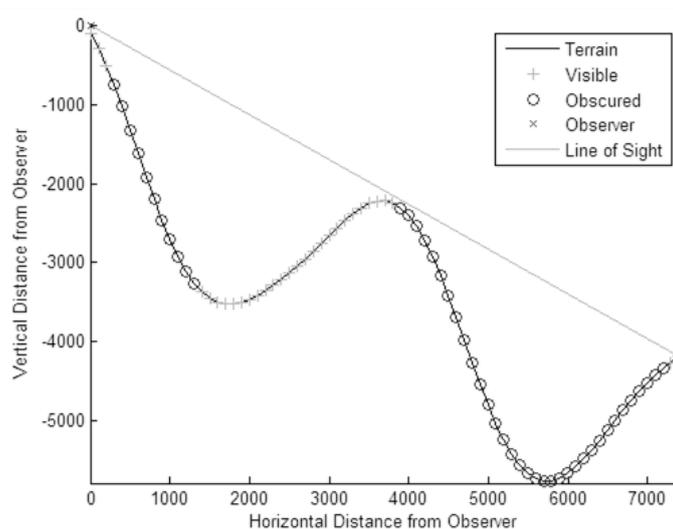


Figura 63. Resultado da função *los2* do MATLAB 7.10 (MATHWORKS, 2013).

A função *viewshed*, também do MATLAB 7.10, utiliza-se do MDS matricial para áreas visíveis e invisíveis a partir de um observador situado sobre o terreno, também corrigindo a curvatura da terra e refração atmosférica (Figura 64).

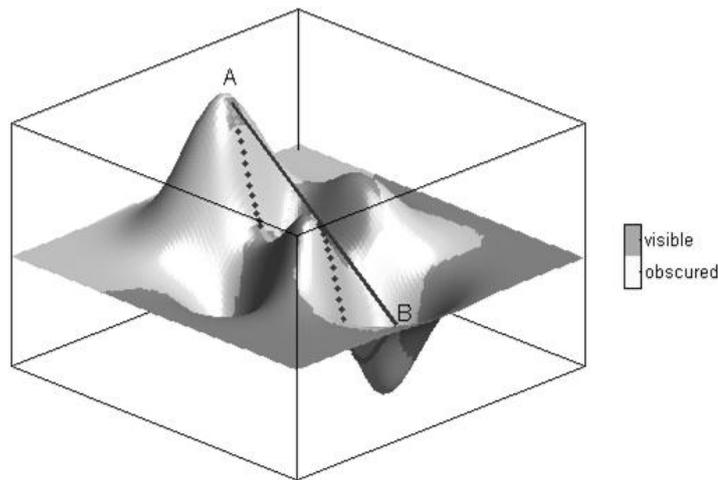


Figura 64. Resultado da função *viewshed* do MATLAB 7.10 mostrando os locais visíveis e invisíveis por um observador situado no ponto A. Observe que a função *los2* também foi utilizada neste exemplo. Adaptado de Mathworks (2013).

ii. ArcGIS 10

O ArcGIS 10 possui o *Visibility toolset*, que é um conjunto de ferramentas para cálculos de diversos problemas de intervisibilidade. Ele possui as seguintes ferramentas (ESRI, 2012): *Construct Sight Lines*, *Line Of Sight*, *Observer Points*, *Skyline*, *Skyline Barrier*, *Skyline Graph*, *Sun Shadow Volume* e *Viewshed*. A seguir tem-se um resumo das funcionalidades destas ferramentas que podem ser vistas em ESRI (2012).

A ferramenta *Construct Sight Lines* cria feições de linha que representam linhas de visada a partir de um ou mais pontos de observação de características em uma classe alvo. Já *Line Of Sight* determina a visibilidade das linhas de visada sobre uma superfície definida por um *multipatch*, dado matricial, TIN, terreno, ou conjunto de dados LAS. Nesta última ferramenta, a visibilidade é determinada ao longo da linha

de visão entre dois pontos, representando o observador e alvo, ignorando quaisquer vértices intermediários em linhas com mais do que dois vértices. Além disso, permite também adicionar deslocamentos de elevação nos pontos dos observador e alvo e aplicar correção da refração atmosférica e curvatura terrestre, com base numa Terra esférica de diâmetro 12740 km.

A ferramenta *Observer Points* identifica quais os pontos de observação são visíveis a partir de cada local da superfície matricial. Este é um processo de custo computacional elevado onde o tempo de processamento depende da resolução espacial do dado matricial. A visibilidade de cada centro de células é determinada por comparação do ângulo de altitude para o centro da célula com o ângulo de altitude para o horizonte local. Este é calculado considerando o terreno interveniente entre o ponto de observação e o centro da célula corrente. Se o ponto está acima do horizonte local, considera-se visível. Uma opção de saída é o AGL (Above Ground Level) que registra a altura mínima que tem de ser adicionado à célula para que seja visível por pelo menos um observador. Quando as feições de entrada contêm vários observadores, o valor de saída é o mínimo dos valores AGL de todos os observadores individuais.

A ferramenta *Skyline* gera uma representação poligonal tridimensional da linha que separa o céu a partir da superfície e as características em torno de cada ponto de observação. A ferramenta pode também gerar silhuetas, que podem ser utilizados pela ferramenta *Skyline Barrier* para gerar os volumes de sombra. Quando apenas os pontos de observação são fornecidos, o horizonte resultante é referido como uma linha do horizonte ou linha de cume. A linha do horizonte é gerada com base no azimute da linha de visada do observador e cada linha de visada é verificada após cada incremento deste azimute. Um incremento menor produz uma maior amostragem, levando a uma representação mais precisa das cristas. A linha de cume é gerada como uma linha tridimensional, onde cada vértice é o ponto mais distante visível ao longo de cada amostragem de linha de visada. Se o observador pode ver todo o caminho do perfil da superfície em um determinado sentido, então o vértice é gerado no ponto onde a linha de visão atinge o perfil da superfície.

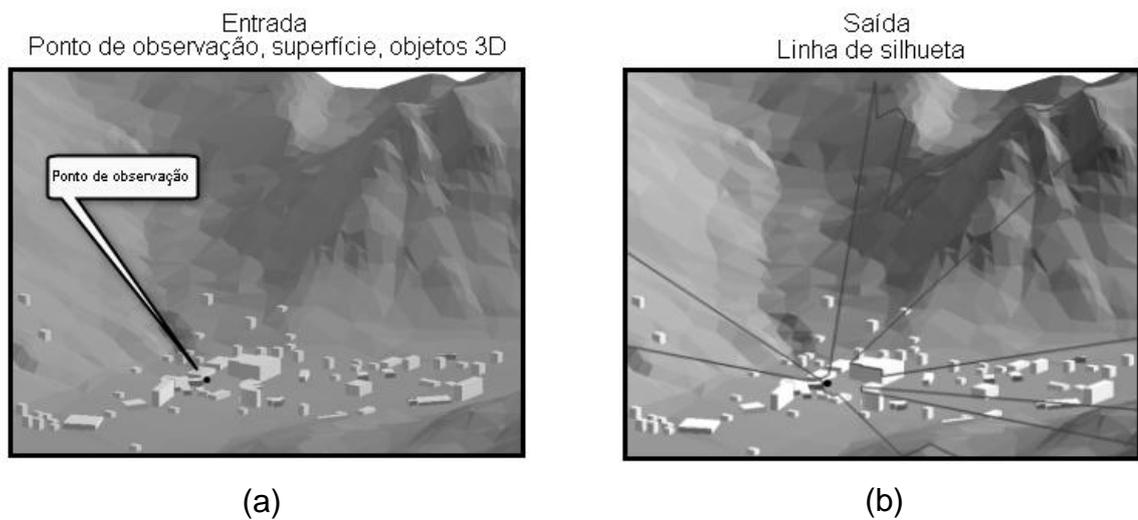


Figura 65. (a) Entrada da ferramenta *Skyline* do ArcGIS 10. (b) Resultado mostrando a linha de silhueta no terreno. Adaptado de ESRI (2012).

A ferramenta *Skyline Barrier*, gera uma classe *multipatch* representando uma barreira do horizonte ou volume de sombra. São criadas superfícies de controle de altura das linhas de silhueta. Elas são definidas entre os pontos de observação e as linhas de silhuetas associados a esses pontos. Os obstáculos são úteis para cenários de planejamento urbano, pois eles podem ser usados para identificar se um projeto de construção terá impacto sobre a linha do horizonte. Eles também podem ser usados para testar a proximidade de feições para o horizonte. A ferramenta pode também gerar um volume de sombra, o que por sua vez pode ser usado para determinar se as feições são sombreadas ou escondidas pela feição usada para gerar o horizonte da qual a barreira foi criada. A ferramenta *Skyline Graph* calcula a linha silhueta e gera uma tabela opcional e gráfico em coordenadas polares.

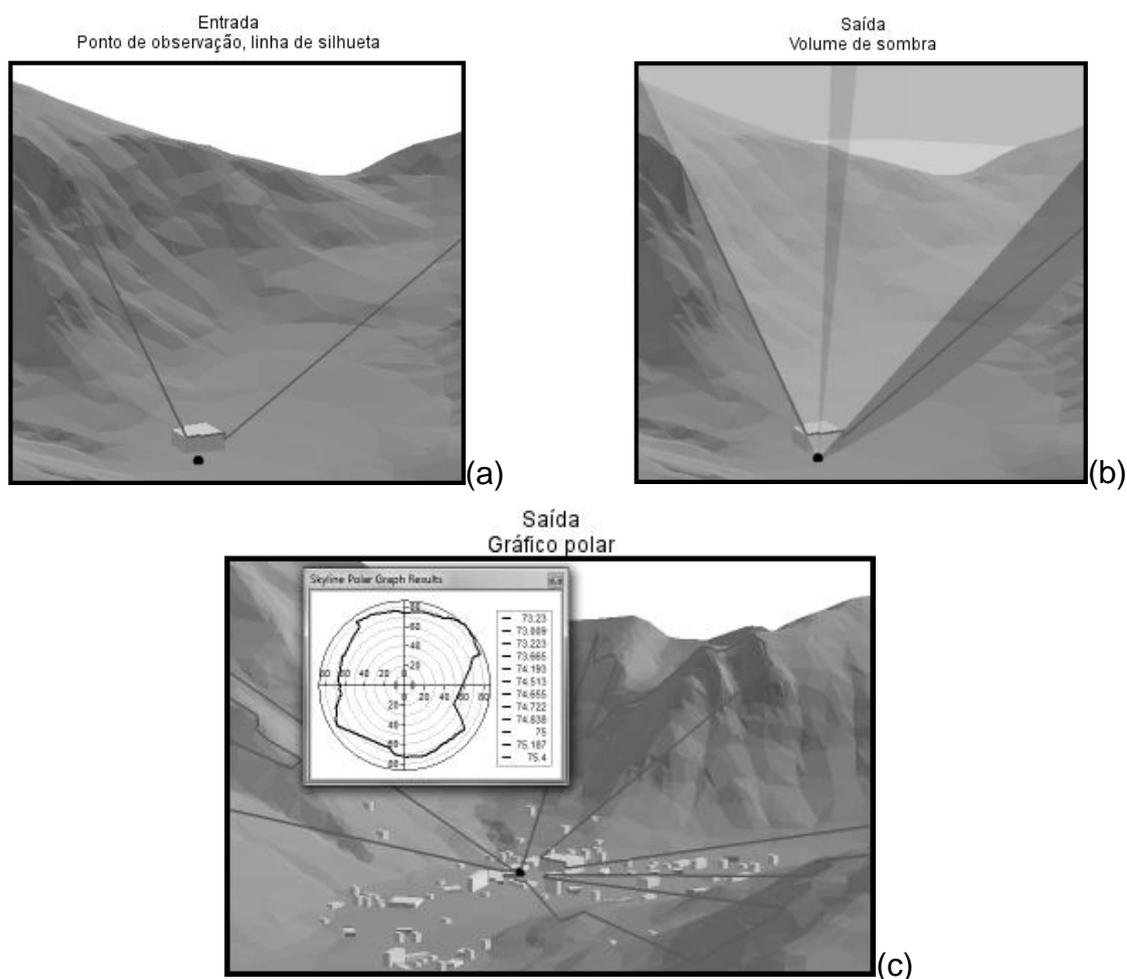


Figura 66. (a) Linha de silhueta calculada pela ferramenta *Skyline*. (b) Volume de sombra calculado por *Skyline Barrier*. (c) Gráfico polar obtido por *Skyline Graph*.

Adaptado de ESRI (2012).

A ferramenta *Sun Shadow Volume* cria volumes fechados que modela sombras lançadas de cada feição de entrada usando a luz solar para uma determinada data e hora. Finalmente, o *Viewshed* determina os locais da superfície visíveis a um conjunto de observadores, a partir de MDS de modelo matricial. Esta ferramenta também permite encontrar a quantidade mínima de objetos com determinada altura para que se enxergue todo o terreno, como visto nos algoritmos de Sharir (1988) e Cole e Sharir (1989).

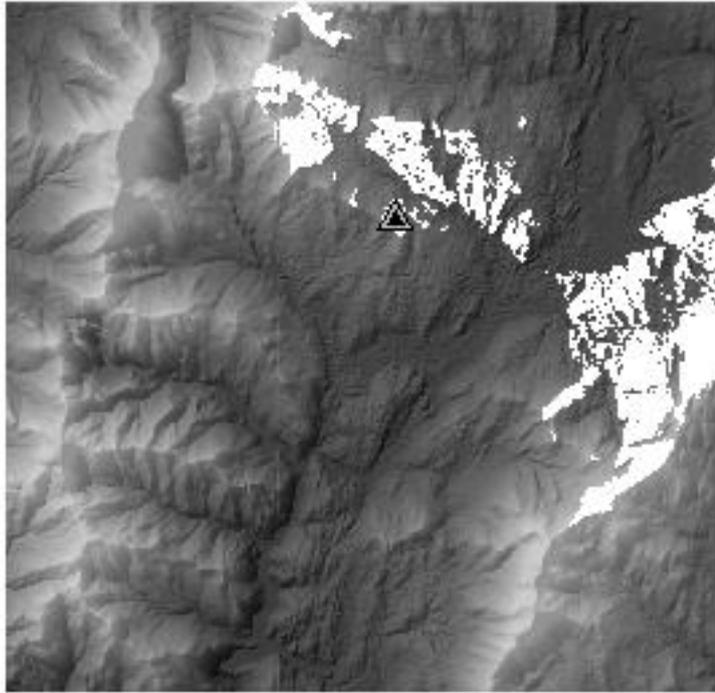


Figura 67. Resultado da ferramenta *Viewshed* do ArcGIS mostrando em branco os locais visíveis por um observador situado no triângulo da imagem. Adaptado de ESRI (2012).

ANEXO 2. Lista de edifícios cadastrados do Campus Joaquim Amazonas da UFPE

Identificação	Descrição	Altura ortométrica (m)
BCA99	Biblioteca Central	20.20
CAC196	Centro de Artes e Comunicação	18.00
CASA_DO_ESTUDANTEB78	Casa do Estudante Universitário	20.00
CCB284	Centro de Ciências Biológicas	17.00
CCB285	Centro de Ciências Biológicas	25.00
CCB288	Centro de Ciências Biológicas	20.75
CCEN328	Centro de Ciências Exatas e da Natureza	21.50
CCEN330	Centro de Ciências Exatas e da Natureza	17.00
CCEN331	Centro de Ciências Exatas e da Natureza	18.00
CCEN332	Centro de Ciências Exatas e da Natureza	16.00
CCEN333	Centro de Ciências Exatas e da Natureza	19.07
CCS446	Centro de Ciências da Saúde	24.43
CCS447	Centro de Ciências da Saúde	22.67
CCS452	Centro de Ciências da Saúde	21.00
CCS453	Centro de Ciências da Saúde	19.00
CCS454	Centro de Ciências da Saúde	22.75
CCS456	Centro de Ciências da Saúde	18.50
CCS457	Centro de Ciências da Saúde	26.57
CCS458	Centro de Ciências da Saúde	20.00
CCS459	Centro de Ciências da Saúde	21.50
CCS460	Centro de Ciências da Saúde	20.50
CCS461	Centro de Ciências da Saúde	15.50
CCS462	Centro de Ciências da Saúde	26.53
CCS463	Centro de Ciências da Saúde	19.33
CCS464	Centro de Ciências da Saúde	13.75
CCS465	Centro de Ciências da Saúde	15.00
CCS467	Centro de Ciências da Saúde	17.00
CCS468	Centro de Ciências da Saúde	15.00
CCS469	Centro de Ciências da Saúde	16.00
CCS470	Centro de Ciências da Saúde	18.33
CCS472	Centro de Ciências da Saúde	16.33
CCSA5102	Centro de Ciências Sociais Aplicadas	13.00
CE_COLEGIO_DE_APLICACAO6_C103	Centro de Educação / Colégio de Aplicação	20.50
CEERMA791	CEERMA	23.00
CENTRAL_INFORMACOESD81	Central de Informações	16.00
CENTRO_DE_CONVENCIOESE94	Centro de Convenções	29.50
CFCH897	Centro de Filosofia e Ciências Humanas	25.00
CLUBE_SUDENEF73	Clube da SUDENE	29.50
CLUBE_SUDENEF74	Clube da SUDENE	14.00

CLUBE_SUDENEF75	Clube da SUDENE	27.00
CLUBE_SUDENEF76	Clube da SUDENE	20.00
CLUBE_SUDENEF77	Clube da SUDENE	14.33
COLEGIO_DE_APLICACAO104	Colégio de Aplicação	23.00
COLEGIO_DE_APLICACAO106	Colégio de Aplicação	21.00
CONCHA_ACUSTICAG95	Concha Acústica	18.00
CTG910	Centro de Tecnologia e Geociências	19.50
CTG911	Centro de Tecnologia e Geociências	23.00
CTG912	Centro de Tecnologia e Geociências	25.00
CTG913	Centro de Tecnologia e Geociências	21.00
CTG915	Centro de Tecnologia e Geociências	25.00
CTG916	Centro de Tecnologia e Geociências	20.40
CTG917	Centro de Tecnologia e Geociências	16.20
CTG918	Centro de Tecnologia e Geociências	17.57
CTG921	Centro de Tecnologia e Geociências	26.00
CTG922	Centro de Tecnologia e Geociências	17.00
CTG923	Centro de Tecnologia e Geociências	15.00
CTG924	Centro de Tecnologia e Geociências	17.00
CTG925	Centro de Tecnologia e Geociências	16.00
CUH9	Centro Universitário	14.50
DCEI107	Diretório Central dos Estudantes	18.00
EDITORA_UNIVERSITARIAJ90	Editora Universitária	10.00
FADEL83	Fundação de Apoio ao Desenvolvimento	14.33
HCN117	Hospital das Clínicas	18.00
HCN118	Hospital das Clínicas	19.00
NAEO115	NAE	17.00
NAEO116	NAE	17.00
NECTARP79	NECTAR	21.00
NEFDQ34	Núcleo de Educação Física e Desportos	20.00
NEFDQ35	Núcleo de Educação Física e Desportos	17.00
NEFDQ37	Núcleo de Educação Física e Desportos	17.28
NEFDQ40	Núcleo de Educação Física e Desportos	18.00
NEFDQ41	Núcleo de Educação Física e Desportos	25.33
NEFDQ42	Núcleo de Educação Física e Desportos	14.00
NEFDQ45	Núcleo de Educação Física e Desportos	17.00
NTIS80	Núcleo de Tecnologia da Informação	27.25
NTVRUST114	TVU	20.50
PREFEITURAU1	Prefeitura Universitária	17.64
PREFEITURAU2	Prefeitura Universitária	14.17
REITORIAW108	Reitoria	17.00
REITORIAW112	Reitoria	11.50
RUX98	Restaurante Universitário	20.50