



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Configurações Centrais do Problema Planar de $1 + n$ Corpos

*Tese apresentada ao Departamento de Matemática  
da Universidade Federal de Pernambuco como parte  
dos requisitos para obtenção do título de Doutor em  
Matemática.*

ALLYSON DOS SANTOS OLIVEIRA

Sob orientação do professor Dr. Hildeberto Cabral

Recife, 2011.

**Catálogo na fonte**  
**Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571**

**Oliveira, Allyson dos Santos**  
**Configurações centrais do problema planar de  $1+n$  corpos /**  
**Allyson dos Santos Oliveira - Recife: O Autor, 2011.**  
**74 folhas : il., fig., tab.**

**Orientador: Hildeberto Cabral.**  
**Tese (doutorado) Universidade Federal de Pernambuco.**  
**CCEN. Matemática, 2011.**

**Inclui bibliografia e apêndice.**


**1. Matemática. 2. Mecânica celeste. 3. Configurações centrais. I. Cabral, Hildeberto (orientador). II. Título.**

**510**


**CDD (22. ed.)**

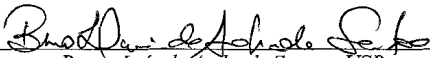
**MEI2011 – 039**

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

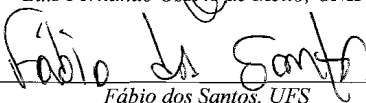
Aprovado:   
Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE

**Orientador**

  
César Augusto Rodrigues Castilho, UFPE

  
Bruno Luís de Andrade Santos, USP

  
Luís Fernando Osório de Mello, UNIFEI

  
Fábio dos Santos, UFS

### **CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DO PROBLEMA**

#### **PLANAR DE 1+N CORPOS**

Por

*Allyson dos Santos Oliveira*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410  
RECIFE – BRASIL  
Fevereiro – 2011

*À minha família*

## AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos nesse trabalho vão para:

Todos meus familiares, em especial a meus pais Anísio e Conceição e minhas irmãs Jô e Rosse pelo carinho, apoio, confiança e por tudo que sou;

Hildeberto Cabral pela orientação, amizade e sobretudo, pelo exemplo;

Os professores César Castilho, Fábio dos Santos, Bruno de Andrade, Éder Mateus, Luís Mello e Ramon Mendoza pela participação na banca;

Os professores da pós-graduação do Dmat-UFPE com quem tive oportunidade de aprender muitas coisas;

Os participantes do grupo de Mecânica Celeste do Dmat-UFPE;

Todos funcionários do Dmat-UFPE, em especial a Tânia, Cláudia e Seu Antônio;

Os amigos do Dmat, em especial a Joilson, Marcelo Fernandes, Bruno e Zaqueu pela parceria em todas as horas (presente até mesmo na banca de doutorado);

Giovana pelo amor, carinho e por tudo;

Todos que moraram no apartamento 303, bloco 04 do INOCOOP: Éder, Fábio, André Vinícius, Júlio, Zaqueu, Marcelo, André Ventura, Gersonilo, Fábio Badaró e Clessius;

Aos amigos do INOCOOP, em especial à Wilson por ter matado minha sede algumas vezes, a turma do futebol pelos mais de 1000 gols e a do vôlei pelos mais de 50000 pontos;

A Capes pelo apoio financeiro;

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desse trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho estamos interessados nas configurações centrais do problema planar de  $1 + n$  corpos. Este é um caso restrito do problema planar de  $N$  corpos no qual temos um corpo de massa grande e os  $n$  demais possuem massas infinitesimais. Apresentamos os principais resultados sobre tal problema e também contribuições novas sobre a simetria das configurações centrais no caso  $n = 5$  e a classificação completa das configurações centrais empilhadas com a adição de um ou dois novos satélites.

Palavras-chave: problema planar de  $1 + n$  corpos, configurações centrais, simetria.

# ABSTRACT

In this work we are interested in the central configuration of the planar  $1 + n$  body problem. This is a restricted case of the planar  $N$  body problem in which we have a body with big mass and the remaining  $n$  have infinitesimal masses. We present the main results on this problem and also new contributions on the symmetry of the central configurations in the case  $n = 5$  and the complete classification of stacked central configurations with the addition of one or two new satellites.

Keywords: planar  $1 + n$  body problem, central configurations, symmetry.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>10</b>
1.1 O problema planar de $N$ corpos . . . . .	10
1.1.1 Configurações centrais . . . . .	12
1.1.2 Propriedades da função $f$ . . . . .	16
1.1.3 Histórico de resultados . . . . .	20
<b>2 Sobre a simetria das configurações centrais planares de 1+5 corpos</b>	<b>29</b>
2.1 Existência de um ângulo grande . . . . .	30
2.2 Condições necessárias e suficientes para simetria . . . . .	33
<b>3 Configurações Centrais Empilhadas</b>	<b>45</b>
3.1 Adição de um satélite . . . . .	46
3.2 Adição de dois satélites . . . . .	49
<b>A Polinômios da Proposição 3.2</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>74</b>



# Introdução

O problema de  $N$  corpos na Mecânica Celeste tem como objetivo estudar a dinâmica dos corpos com base em duas leis de Newton, a segunda lei da Mecânica e a lei da Gravitação Universal. Tal estudo possui boas aplicações práticas à Astronomia e motiva muitos pesquisadores a resolverem os inúmeros desafios que constam nesses problemas.

Entretanto, a dificuldade da abordagem analítica das equações, por se tratar de um sistema não integrável se  $N > 2$ , faz-se surgir o interesse em buscar casos particulares de soluções, bem como considerações simplificadoras sobre as massas dos corpos. Os problemas restritos são exemplos dessas hipóteses simplificadoras, onde considera-se a existência de um ou mais corpos cujas massas são arbitrariamente pequenas de modo a não interferirem na dinâmica dos demais. Este tipo de abordagem pode aproximar em primeira ordem certos sistemas reais, como a dinâmica entre a Terra, a Lua e um satélite.

O problema planar de  $1 + n$  corpos foi estudado inicialmente por Maxwell [9] numa tentativa de modelagem dos anéis de Saturno. Neste caso considera-se um corpo de massa grande e  $n$  outros de massas pequenas dispostos num plano.

No problema de  $N$  corpos se tentarmos obter a existência de uma solução homográfica, isto é, uma órbita tal que a figura formada pelos corpos é preservada a menos de homotetias ou rotações, recairemos numa equação não-trivial envolvendo as posições dos corpos. Uma configuração central é uma solução de tal equação e são, portanto, as posições iniciais que resultam em movimentos homográficos. Além disso, mostra-se que as soluções do problema de  $N$  corpos que começam ou terminam numa colisão total são assintóticas a um movimento homográfico, ou seja, a configuração formada pelos corpos tendem para uma configuração central.

Neste trabalho estaremos interessados nas configurações centrais do problema planar de  $1 + n$  corpos, com um corpo de massa 1 e  $n$  com massas infinitesimais, os chamados satélites. Como trataremos do problema planar as configurações centrais também são

chamadas de equilíbrios relativos.

Considerando que as massas dos satélites são iguais, Hall [7], mostrou que se  $n > e^{27000}$  existe apenas uma configuração central do problema planar de  $1 + n$  corpos, os satélites posicionados nos vértices de um polígono regular. Casasayas, Llibre e Nunes [3] mostraram o mesmo resultado assumindo que  $n > e^{73}$ . Entretanto, esta cota parece estar muito longe do ideal, pois resultados numéricos, como vistos em [5], sugerem que exista uma única configuração central desse problema se  $n > 8$ .

No problema planar de  $1 + n$  corpos com satélites de massas iguais são conhecidas todas as configurações centrais para  $n = 2, 3$  e  $4$  ([7], [1], [5]). Além disso, conjectura-se que todos os demais equilíbrios relativos existentes neste problema são simétricos com respeito a uma linha reta. Para  $n > 4$  o sistema se torna muito complicado e não se tem nenhum resultado, além da unicidade para  $n > e^{73}$ . Quando as massas dos satélites não são necessariamente iguais existem poucos trabalhos também, como o de Sicardy e Renner [12] e o recente de Corbera, Cors e Llibre [4].

No Capítulo 1 definimos o problema e apresentamos as equações e resultados conhecidos sobre esse problema, servindo como um ponto de partida para os leitores interessados na pesquisa nesta área.

No Capítulo 2 consideramos o problema planar de  $1 + 5$  corpos e obtemos resultados sobre a simetria das suas configurações centrais. Primeiramente, quando se tem um ângulo grande separando dois satélites e na sequência apresentamos resultados de equivalência que garantem a simetria da configuração a partir de simetrias parciais.

Em seguida, no Capítulo 3, analisamos a construção de configurações centrais empilhadas (*stacked*) para o problema planar de  $1 + n$  corpos. Tal terminologia foi introduzida por Hampton em [6] e esta construção se tornou objeto de estudo de muitos trabalhos recentes em Mecânica Celeste. A idéia é tentarmos construir novas configurações centrais a partir de outras conhecidas adicionando novos corpos.

Determinamos analiticamente todas as configurações centrais planares de  $1 + n$  corpos que podem ser formadas a partir de uma outra configuração central com um ou dois satélites a menos. No caso da adição de um único satélite nosso resultado é mais geral, pois não considera que as massas dos corpos pequenos sejam necessariamente iguais. Se adicionarmos dois satélites, podemos mostrar que não existe nenhuma nova configuração central se  $n \geq 5$  e os novos satélites possuem a mesma massa.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo descreveremos o problema planar de  $N$  corpos no caso particular  $N = 1 + n$ , no qual um corpo possui massa grande e os  $n$  demais, chamados satélites, possuem massas infinitesimais. As massas dos satélites não interferem na dinâmica do corpo maciço, onde naturalmente estará posicionado o centro de massa do sistema. Além disso, descreveremos as equações do sistema para as configurações centrais deste problema, o qual será o principal objeto de estudo desse texto. Em seguida mostraremos alguns resultados conhecidos sobre este problema.

### 1.1 O problema planar de $N$ corpos

O problema planar de  $N$  corpos consiste em estudar a dinâmica de  $N$  corpos pontuais de massas  $m_1, \dots, m_N$  em  $\mathbb{R}^2$  sujeitos à força gravitacional Newtoniana. A segunda lei de Newton afirma que o produto da massa pela aceleração de uma partícula é igual à soma das forças agindo sobre a partícula. A lei da gravitação Newtoniana diz que a magnitude da força sobre o corpo  $i$  devido a presença do corpo  $j$  é proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. A direção dessa força é dada ao longo de um vetor unitário partindo do corpo  $i$  para o corpo  $j$ . Juntando esses fatos e tomando unidades apropriadas de modo que a constante de proporcionalidade gravitacional seja igual a 1, as equações de movimento são

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_i m_j \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^3}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

onde  $q_i$  é o vetor posição do  $i$ -ésimo corpo com relação a um referencial inercial.

Sejam  $M = \text{diag}(m_1, m_1, \dots, m_N, m_N)$  a matriz de massas,  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{2N}$  e  $V$  o potencial Newtoniano

$$V(q_1, \dots, q_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

Desta forma, as equações de movimento se reduzem a

$$M\ddot{q} = V_q,$$

onde  $V_q = \left( \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_N} \right)$ .

Podemos também dar uma formulação Hamiltoniana ao sistema definindo  $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{2N}$  por  $p = M\dot{q}$ . Assim  $p_i = m_i \dot{q}_i$  é o momento da  $i$ -ésima partícula. As equações de movimento serão dadas por

$$\dot{q}_i = p_i/m_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^3} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

onde o Hamiltoniano é

$$H = T - V$$

e  $T$  é a energia cinética

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{q}_i\|^2.$$

Seja  $L = p_1 + \dots + p_N$  o momento linear total e

$$C = \frac{m_1 q_1 + \dots + m_N q_N}{m_1 + \dots + m_N}$$

o centro de massa do sistema. É fácil ver que  $\dot{L} = 0$  e daí,  $\ddot{C} = 0$ . Assim, o momento linear total é constante e o centro de massa descreve um movimento retilíneo uniforme. Em geral, é conveniente considerar que o centro de massa está posicionado na origem do sistema de coordenadas.

Excluindo as singularidades e assumindo que o centro de massa está localizado na origem, o espaço de configuração do problema planar de  $N$  corpos associado à matriz de

massa  $M = \text{diag}(m_1, m_1, \dots, m_N, m_N)$  é

$$\mathcal{M}(m_1, \dots, m_N) = \left\{ q \in \mathbb{R}^{2N} : \sum_{i=1}^N m_i q_i = 0, q_i \neq q_j \text{ para } i \neq j \right\}.$$

### 1.1.1 Configurações centrais

As soluções de (1.1) são conhecidas completamente apenas para  $N = 2$ . De fato, se  $N \geq 3$  o sistema é não integrável e as únicas soluções explícitas que se têm são órbitas homográficas, isto é, uma solução do problema de  $N$  corpos no qual a forma da configuração em qualquer instante é semelhante a do instante inicial, ou seja, a figura formada é a mesma a menos de homotetias ou rotações. Existe grande interesse em determinar as posições iniciais que resultem em soluções homográficas. Essas posições são chamadas *configurações centrais*. Mais precisamente, temos:

**Definição 1.1** *Dada uma matriz de massas  $M$ , dizemos que  $q \in \mathcal{M}$  representa uma configuração central do problema planar de  $N$  corpos associado se existe uma constante positiva  $\lambda$  tal que*

$$M^{-1}V_q = \lambda q,$$

*ou seja, se o vetor aceleração de cada corpo está direcionado ao centro de massa com módulo proporcional a distância do corpo ao centro de massa e a constante de proporcionalidade é a mesma para todos os corpos.*

Denotaremos por  $\mathcal{C}$  o conjunto das configurações centrais do problema planar associado a matriz  $M$  e  $\tilde{\mathcal{C}}$  o conjunto das classes de  $\mathcal{C}$  módulo rotações planares ou homotetias.

Dados  $q_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ , sejam  $r_{ij} = \|q_i - q_j\|$  e

$$(i, j, k) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

A proposição a seguir fornece uma boa caracterização de  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Sua demonstração pode ser encontrada em [8].

**Proposição 1.1** *Seja  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathcal{M}(m_1, \dots, m_N)$  não-colinear. Então  $q \in \mathcal{C}$  se, e somente se,*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^N m_k(i, j, k) \left( \frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \right) = 0, \quad 1 \leq i < j \leq N. \quad (1.2)$$

Seja  $q(\epsilon) = (q_0(\epsilon), q_1(\epsilon), \dots, q_n(\epsilon)) \in \tilde{\mathcal{C}}, N = 1 + n$ , uma configuração central do problema planar de  $N$  corpos associada às massas  $m_0 = 1, m_i = \mu_i \epsilon, i = 1, \dots, n$  que depende continuamente de  $\epsilon$  quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

**Definição 1.2** *Diremos que  $q = (q_0, q_1, \dots, q_n)$  é uma configuração central do problema planar de  $1 + n$  corpos se existe o limite  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(\epsilon)$  e este é igual a  $q$ .*

Ao longo deste texto iremos nos referir aos corpos de massas infinitesimais como satélites ou corpos de massa nula.

**Proposição 1.2** *Em qualquer configuração central do problema planar de  $1 + n$  corpos os satélites estão sobre um círculo centrado em  $q_0 = 0$ , ou seja, com centro no corpo de massa grande.*

**Demonstração:**  $q(\epsilon)$  satisfaz

$$\lambda_{q_0}(\epsilon) = \epsilon \sum_{j=1}^n \mu_j \frac{q_0(\epsilon) - q_j(\epsilon)}{\|q_0(\epsilon) - q_j(\epsilon)\|^3},$$

$$\lambda_{q_i}(\epsilon) = \frac{q_i(\epsilon) - q_0(\epsilon)}{\|q_i(\epsilon) - q_0(\epsilon)\|^3} + \epsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \frac{q_i(\epsilon) - q_j(\epsilon)}{\|q_i(\epsilon) - q_j(\epsilon)\|^3}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos  $q_0 = 0$  na primeira equação e substituindo na segunda temos  $\|q_i\| = \lambda^{-1/3}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

■

Em vista da proposição anterior trataremos de escrever o sistema para as configurações centrais em termos dos ângulos determinados pelos satélites.

**Proposição 1.3** *Seja  $q = (q_0, q_1, \dots, q_n)$  uma configuração central do problema planar de  $1 + n$  corpos que não é uma colisão. Denote por  $\alpha_i$  o ângulo definido pela posição de  $q_i$  em relação ao eixo das abscissas. Temos que*

$$0 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \text{sen}(\alpha_j - \alpha_i) \left( 1 - \frac{1}{8|\text{sen}^3((\alpha_j - \alpha_i)/2)|} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

**Demonstração:** Por definição  $q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(\epsilon)$  e, pela Proposição 1.1, temos

$$0 = \epsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mu_k(0, j, k) \left( \frac{1}{r_{0k}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \right), \quad j = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

e

$$0 = (i, j, 0) \left( \frac{1}{r_{i0}^3} - \frac{1}{r_{j0}^3} \right) + \epsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n \mu_k(i, j, k) \left( \frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \right), \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (1.5)$$

Podemos cancelar  $\epsilon$  na primeira equação e, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  na segunda, obtemos

$$0 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mu_k(0, j, k) \left( \frac{1}{r_{0k}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \right), \quad j = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

$$0 = (i, j, 0) \left( \frac{1}{r_{i0}^3} - \frac{1}{r_{j0}^3} \right), \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (1.7)$$

A equação (1.7) é redundante pela proposição anterior e a equação (1.6) escrita em coordenadas angulares corresponde à equação (1.3).

■

Estamos interessados apenas nas classes de configurações centrais módulo rotações ou homotetias. Deste modo, consideraremos que  $\alpha_1 = 0$  e o círculo tem raio igual a 1. Assumiremos, sem perda de generalidade, que  $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 2\pi$  e consideraremos os ângulos entre satélites consecutivos dados por

$$\theta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

e

$$\theta_n = 2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i.$$

O espaço de configurações nestas coordenadas é dado pelo simplex

$$\Delta = \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n); \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi, \theta_i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \text{sen}(x) \left( 1 - \frac{1}{8|\text{sen}^3(x/2)|} \right).$$

As equações (1.3) são expressas em termos de  $f$  e os ângulos  $\theta_i$  como o sistema

$$\begin{aligned} \mu_2 f(\theta_1) + \mu_3 f(\theta_1 + \theta_2) + \dots + \mu_n f(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1}) &= 0, \\ \mu_3 f(\theta_2) + \mu_4 f(\theta_2 + \theta_3) + \dots + \mu_1 f(\theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) &= 0, \\ \mu_4 f(\theta_3) + \mu_5 f(\theta_3 + \theta_4) + \dots + \mu_2 f(\theta_3 + \theta_4 + \dots + \theta_n + \theta_1) &= 0, \\ \dots & \\ \mu_n f(\theta_{n-1}) + \mu_1 f(\theta_{n-1} + \theta_n) + \dots + \mu_{n-2} f(\theta_{n-1} + \theta_n + \theta_1 + \dots + \theta_{n-3}) &= 0, \\ \mu_1 f(\theta_n) + \mu_2 f(\theta_n + \theta_1) + \dots + \mu_{n-1} f(\theta_n + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-2}) &= 0, \\ \theta_1 + \dots + \theta_n &= 2\pi. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Uma solução  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  do sistema (1.8) será referida como uma *configuração central para o problema planar de  $1 + n$  corpos relativos aos parâmetros de massas  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$* . No caso de massas iguais a última expressão será omitida. Podemos nos referir a uma solução  $\theta$  de (1.8) por *configuração central* apenas, visto que todo o texto trata do problema planar de  $1 + n$  corpos.



### 1.1.2 Propriedades da função $f$

A fim de estudarmos as soluções do sistema (1.8) listaremos a seguir algumas das principais propriedades da função  $f$ . Esta desempenha papel fundamental neste problema e no seu comportamento estão fundamentadas basicamente todos os resultados sobre as configurações centrais planares com uma massa dominante e  $n$  satélites.

**Lema 1.1** *A função*

$$f(x) = \text{sen}(x) \left( 1 - \frac{1}{8|\text{sen}^3(x/2)|} \right), \quad x \in (0, 2\pi)$$

*goza das seguintes propriedades:*

- i)  $f(\pi - x) = -f(\pi + x), \forall x \in (0, \pi)$ ;*
- ii)  $f'(x) = \cos(x) + \frac{3 + \cos(x)}{16|\text{sen}^3(x/2)|} \geq f'(\pi) = -7/8$ , para todo  $x \in (0, 2\pi)$ ;*
- iii)  $f'''(x) > 0$ , para todo  $x \in (0, 2\pi)$ ;*
- iv) Em  $(0, \pi)$  existe um único ponto  $\theta_c$  tal que  $f'(\theta_c) = 0$ , satisfazendo  $\theta_c > 3\pi/5$ . Em  $(0, \theta_c)$ ,  $f'(\theta) > 0$ . Em  $(\theta_c, \pi)$ ,  $f'(\theta) < 0$ ;*
- v) Considerar a função  $g : (-\infty, f(\theta_c)) \rightarrow (0, \theta_c)$  tal que  $g(f(\theta)) = \theta$ . Temos que  $g''' > 0$ .*

**Demonstração:** A prova que se segue pode ser encontrada em [1]. Escrevemos

$$f(x) = \text{sen}x(1 - (2s)^{-3}), \quad \text{onde } s = \text{sen}\frac{x}{2}, x \in (0, 2\pi).$$

Assim temos,

$$f'(x) = \frac{1}{4s^3} - \frac{1}{8s} + 1 - 2s^2,$$

$$f''(x) = \text{sen}x \left( -\frac{3}{16s^5} + \frac{1}{32s^3} - 1 \right)$$

e

$$f'''(x) = \frac{3}{4s^5} - \frac{5}{8s^3} + \frac{1}{32s} - 1 + 2s^2.$$

Tomando a substituição racional

$$s = \frac{y}{1+y}$$

temos

$$32(1+y)^2 y^5 f''' = 37y^7 + 7y^6 + 275y^5 + 641y^4 + 740y^3 + 484y^2 + 168y + 24.$$

Portanto,  $f''' > 0$  para todo  $y \in (0, \infty)$ , ou seja para  $s \in (0, 1)$ . Isso prova *iii*). A propriedade *i*) é consequência direta da expressão de  $f$  e *ii*) é devido ao fato de  $f''$  ser crescente e  $f''(\pi) = 0$ .

Provemos agora (*v*). Derivando duas vezes a relação  $g(f(\theta)) = \theta$ , substituindo  $g'(f(\theta))$ , derivando novamente e substituindo  $g''(f(\theta))$ , teremos

$$f'^5(\theta)g'''(f(\theta)) = -f'(\theta)f'''(\theta) + 3f''^2(\theta).$$

Tomando  $s = \frac{y}{1+y}$  obtemos

$$256y^8(1+y)^4 f'^5(\theta)g'''(f(\theta)) = 259y^{12} + 7412y^{11} + 16934y^{10} + 32960y^9 + \\ + 42564y^8 + 39236y^7 + 35306y^6 + 32904y^5 + 24389y^4 + 12208y^3 + 3880y^2 + 720y + 60.$$

Isso mostra que  $g'''(f(\theta))$  é positiva se  $\theta \in (0, \theta_c)$ .

■

A função  $f$  possui dois pontos críticos em  $(0, 2\pi)$  que serão denotados por  $\theta_c$  e  $\theta'_c$ , onde  $\theta_c < \pi < \theta'_c = 2\pi - \theta_c$ . Verifica-se que  $f'(3\pi/5) > 0$ , então

$$\theta_c > 3\pi/5.$$

De fato,  $\theta_c \approx 108,351$  e  $f(\theta_c) = 0,726\dots$

A seguir mostraremos outras propriedades da função  $f$  encontradas também na referência [1]. Podemos ver que tais propriedade devem-se ao fato de  $f''' > 0$  em  $(0, 2\pi)$ .

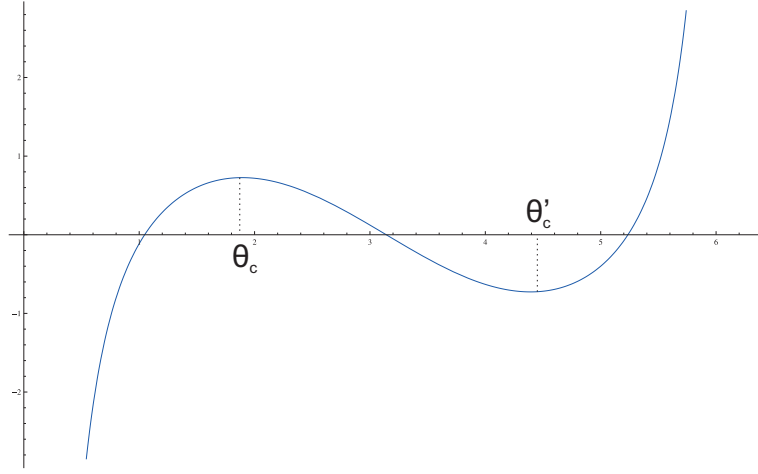


Figura 1.1: Gráfico da função  $f$

**Lema 1.2** Se uma função  $\phi$  satisfaz  $\phi''' > 0$  no intervalo  $(a, b)$  então, para quaisquer  $t_1, t_2, t_3, t_4, a \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \leq b$ , temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ \phi(t_1) & \phi(t_2) & \phi(t_3) & \phi(t_4) \end{vmatrix} > 0.$$

**Demonstração:** Esse é um caso particular do problema 5-99 proposto e demonstrado em [11].

■

**Lema 1.3** Considere quatro pontos  $t_1^L, t_1^R, t_2^L, t_2^R$  de forma que  $0 < t_1^L < t_2^L < \theta_c < t_2^R < t_1^R < 2\pi, f(t_1^L) = f(t_1^R) = f_1$  e  $f(t_2^L) = f(t_2^R) = f_2$ . Então  $t_2^L + t_2^R < t_1^L + t_1^R$ .

**Demonstração:** A função  $f$  satisfaz as hipóteses do Lema anterior pelo item (iii) do Lema 1.1. Daí teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1^L & t_2^L & t_2^R & t_1^R \\ (t_1^L)^2 & (t_2^L)^2 & (t_2^R)^2 & (t_1^R)^2 \\ f_1 & f_2 & f_2 & f_1 \end{vmatrix} > 0.$$

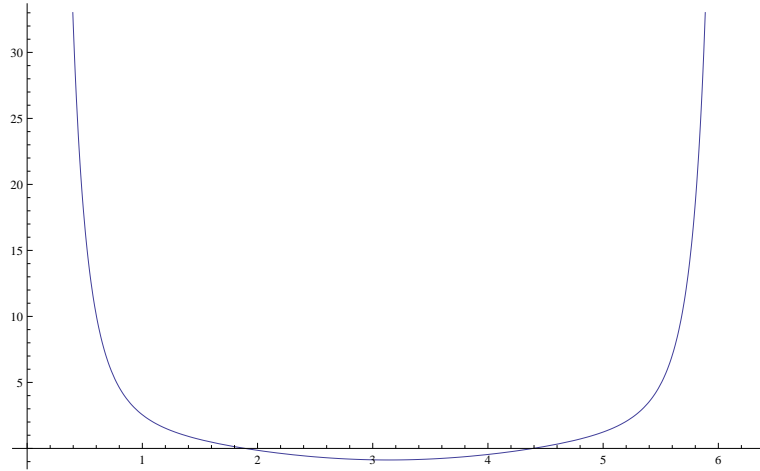


Figura 1.2: Gráfico da função  $f'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f_2 - f_1)(t_1^R - t_1^L)(t_2^R - t_2^L)(t_1^L + t_1^R - t_2^L - t_2^R) &> 0 \\ \Rightarrow t_1^L + t_1^R - t_2^L - t_2^R &> 0. \end{aligned}$$

■

**Corolário 1.1** *Sejam  $0 < t_1 < \theta_c < t_2 < 2\pi$ . Se  $f(t_1) \geq f(t_2)$  então  $t_1 + t_2 > 2\theta_c > 6\pi/5$ .*

**Demonstração:** Se  $f(t_1) = f(t_2)$ , esse é o lema anterior no caso onde os pontos tendem para  $\theta_c$ . Se  $f(t_1) > f(t_2)$  basta considerar o ponto  $\theta_c < t_1^R < t_2$  tal que  $f(t_1) = f(t_1^R)$ .

■

**Lema 1.4** *Sejam  $t_1, t_2, t_3, t_4$  tais que  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \theta_c$  satisfazendo  $f(t_1) + f(t_4) = f(t_2) + f(t_3)$ . Então*

$$\frac{f(t_4) - f(t_1)}{t_4 - t_1} < \frac{f(t_3) - f(t_2)}{t_3 - t_2}.$$

**Demonstração:** Pelo item  $v$ ) do Lema 1.1 podemos utilizar o Lema 1.2 com a função  $g$ . Teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ f(t_1) & f(t_2) & f(t_3) & f(t_4) \\ (f(t_1))^2 & (f(t_2))^2 & (f(t_3))^2 & (f(t_4))^2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} > 0.$$

Utilizando a relação  $f(t_1) + f(t_4) = f(t_2) + f(t_3)$  o determinante se fatora como

$$(f(t_4) - f(t_3))(f(t_3) - f(t_1))((t_4 - t_1)(f(t_3) - f(t_2)) - (t_3 - t_2)(f(t_4) - f(t_1))).$$

Assim temos

$$(t_4 - t_1)(f(t_3) - f(t_2)) - (t_3 - t_2)(f(t_4) - f(t_1)) > 0.$$

■

### 1.1.3 Histórico de resultados

Apresentaremos, com certos detalhes, alguns dos principais resultados da literatura sobre configurações centrais do problema planar de  $1 + n$  corpos no intuito de fornecer ao leitor uma visão geral da pesquisa nesta área, o que pode servir também como ponto de partida para futuros trabalhos.

Consideremos o caso onde as massas dos satélites são pequenas e iguais. Desta forma elas se cancelam e o sistema (1.8) se torna

$$\begin{aligned} f(\theta_1) + f(\theta_1 + \theta_2) + \dots + f(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1}) &= 0, \\ f(\theta_2) + f(\theta_2 + \theta_3) + \dots + f(\theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) &= 0, \\ f(\theta_3) + f(\theta_3 + \theta_4) + \dots + f(\theta_3 + \theta_4 + \dots + \theta_n + \theta_1) &= 0, \\ \dots & \\ f(\theta_{n-1}) + f(\theta_{n-1} + \theta_n) + \dots + f(\theta_{n-1} + \theta_n + \theta_1 + \dots + \theta_{n-3}) &= 0, \\ f(\theta_n) + f(\theta_n + \theta_1) + \dots + f(\theta_n + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-2}) &= 0, \\ \theta_1 + \dots + \theta_n &= 2\pi. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Note que, devido ao fato que  $f(2\pi - \theta) = -f(\theta)$ , qualquer equação entre as  $n$  primeiras de (1.9) pode ser obtida somando-se as  $n - 1$  restantes.

Observe também que se  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \frac{2\pi}{n}$  então as  $n$  primeiras equações de (1.9) se tornam

$$f\left(\frac{2\pi}{n}\right) + f\left(2\frac{2\pi}{n}\right) + f\left(3\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + f\left((n-2)\frac{2\pi}{n}\right) + f\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right) = 0.$$

Note que, pela propriedade *i*) do Lema 1.1, temos  $f\left((n-k)\frac{2\pi}{n}\right) = f\left(2\pi - k\frac{2\pi}{n}\right) = -f\left(k\frac{2\pi}{n}\right)$ . Assim, se  $n$  é ímpar os termos da equação acima se cancelam simetricamente e se  $n$  é par todos eles se cancelam, exceto o termo central  $f\left(\left(\frac{n}{2}\right)\frac{2\pi}{n}\right) = f(\pi) = 0$ . Isso mostra o seguinte resultado:

**Proposição 1.4** *Os satélites posicionados nos vértices de um polígono regular sempre formam uma configuração central do problema planar de  $1 + n$  corpos, com  $n$  satélites de massas infinitesimais e iguais.*

Referiremo-nos a essa configuração como a do *polígono regular* ou *configuração trivial*. É de muita naturalidade a existência de tal configuração pela sua simetria, entretanto é de se pensar a respeito da existência de outras configurações centrais para os diversos valores de  $n$ . Vejamos os casos  $n = 2$  e  $n = 3$ .

**Proposição 1.5** *O problema planar de  $1 + 2$  corpos com massas dos satélites iguais tem exatamente duas configurações centrais.*

**Demonstração:** Para  $n = 2$  o sistema (1.9) é simplesmente  $f(\theta_1) = 0, \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$ . Logo temos  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$  que é uma configuração colinear, ou  $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$  e  $\theta_2 = \frac{5\pi}{3}$ , ou  $\theta_1 = \frac{5\pi}{3}$  e  $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ , essas duas últimas determinam a mesma configuração, os dois satélites formam com o corpo grande um triângulo equilátero.

■

**Proposição 1.6** *O problema planar de  $1 + 3$  corpos com massas dos satélites iguais tem exatamente três configurações centrais.*

**Demonstração:** O sistema (1.9) neste caso se torna

$$f(\theta_1) + f(\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad (1.10)$$

$$f(\theta_2) + f(\theta_2 + \theta_3) = 0 \quad (1.11)$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi. \quad (1.12)$$

Devido à propriedade de  $f$  que  $f(2\pi - x) = -f(x)$ , as equações acima podem ser escritas como

$$f(\theta_1) = f(\theta_2) = f(\theta_3).$$

É fácil ver a partir do gráfico de  $f$  que essas equações implicam que pelo menos dois dos ângulos são iguais, pois se supormos os três diferentes teremos a soma deles ultrapassando  $2\pi$ .

Suponha, então, que  $\theta_1 = \theta_2 = \theta \in (0, \pi)$ . Devemos resolver a equação

$$f(\theta) + f(2\theta) = 0.$$

Segue do Lema 1.1 que

$$\frac{d^3}{d\theta^3}(f(\theta) + f(2\theta)) > 0.$$

Claramente  $f(\theta) + f(2\theta)$  tende para  $-\infty$  quando  $\theta$  vai para 0 e tende para  $+\infty$  quando  $\theta$  vai para  $\pi$ . Assim,  $f(\theta) + f(2\theta)$  deve ter no máximo 3 zeros em  $(0, \pi)$ . Com um simples cálculo verificamos que

$$f(2\pi/3) + f(4\pi/3) = 0,$$

$$f'(2\pi/3) + f'(4\pi/3) < 0.$$

Assim,  $f(\theta) + f(2\theta)$  deve ter mais dois zeros, um em  $(0, 2\pi/3)$  e outro em  $(2\pi/3, \pi)$  ambos com derivada positiva. Como  $f(\theta_c/2) + f(\theta_c) > 0$  o menor desses três zeros está em  $(0, \theta_c/2)$ .

■

Essas três configurações correspondem a um triângulo equilátero, um triângulo isósceles com o corpo grande no baricentro e uma configuração convexa com a massa grande em um dos vértices. Ver Fig. 1.3.

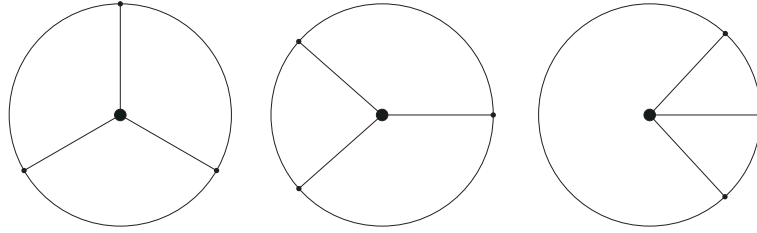


Figura 1.3: Configurações centrais planares de 1 + 3 corpos.

Em um trabalho não publicado de 1988, Hall [7] mostrou todos esses resultados acima. Além disso, ele mostrou também que a configuração do polígono regular é a única configuração central planar de 1 +  $n$  corpos com as massas dos satélites iguais se  $n$  é suficientemente grande. Vejamos a idéia da prova deste fato.

Uma solução  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  de (1.9) pode ser vista como um ponto crítico sobre o simplex  $S = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) : \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi, \theta_i > 0\}$  da função

$$U(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{i < j} F(\theta_i + \dots + \theta_{j-1}),$$

onde  $F(x) = \frac{1}{2|\sin(x/2)|} + 2\text{sen}^2(\frac{x}{2})$  é uma primitiva de  $f$  e estamos considerando  $\theta_{n+i} = \theta_i$ .

A idéia utilizada por Hall é mostrar que a função  $U$  acima é convexa quando  $n$  é suficientemente grande. Para estabelecer este fato ele considera uma reta em  $S$  ligando o centro  $(\frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi}{n})$  a um outro ponto qualquer de  $S$  e mostra que  $U$  restrita a essa reta tem segunda derivada positiva quando  $n$  é grande. Como o centro é sempre um ponto crítico de  $U$ , então isso garante que  $U$  não pode ter outro ponto crítico em  $S$ .

Contudo, a prova de Hall fornece uma cota muito alta para o  $n_0$  tal que tenhamos unicidade se  $n > n_0$ . De fato, sua prova mostra que o polígono regular é a única configuração central planar de 1 +  $n$  corpos se  $n > e^{27000}$ . No intuito de diminuir este valor, Casasayas, Llibre e Nunes [3] refazem a prova de Hall tomando como ponto final para a reta saindo do centro do simplex um ponto da fronteira de  $S$ . Com isso eles mostraram que para  $n > n_0 \approx e^{73}$  a restrição de  $U$  a tal reta tem segunda derivada positiva. Ou seja, a mesma idéia da prova de Hall, porém com cálculos mais sofisticados, além de uma maneira mais econômica de escrever a função  $U$ .

Até o presente momento esta é a melhor cota que se tem analiticamente para o  $n_0$ . Todavia, resultados numéricos sugerem que o valor  $e^{73}$  está muito longe do esperado. De fato, Cors e outros em [5] obtiveram numericamente as configurações centrais planares de 1 +  $n$  corpos para diversos valores de  $n$  e apenas para  $n \leq 8$  tem-se a existência de outras



configurações diferentes da trivial. Para efeito ilustrativo vejamos quais são elas:

$n = 2$		
$\theta_1$	60	
$\theta_2$	300	

$n = 3$		
$\theta_1$	47,36	82,47
$\theta_2$	47,36	138,76
$\theta_3$	265,28	138,76

$n = 4$		
$\theta_1$	60	239,65
$\theta_2$	60	41,49
$\theta_3$	120	37,35
$\theta_4$	120	41,49

$n = 5$		
$\theta_1$	46,09	32,66
$\theta_2$	51,33	32,66
$\theta_3$	105,62	38,20
$\theta_4$	105,62	218,28
$\theta_5$	51,33	38,20

$n = 6$		
$\theta_1$	47,52	30,01
$\theta_2$	40,52	28,53
$\theta_3$	40,52	30,01
$\theta_4$	47,52	36,31
$\theta_5$	91,96	198,82
$\theta_6$	91,96	36,31

$n = 7$				
$\theta_1$	49,28	28,53	48,78	51,64
$\theta_2$	41,59	26,28	45,40	45,90
$\theta_3$	39,58	26,28	45,40	44,13
$\theta_4$	41,59	28,53	48,78	45,90
$\theta_5$	49,28	35,46	55,55	51,64
$\theta_6$	69,33	179,45	60,55	60,39
$\theta_7$	69,33	35,46	55,55	60,39

$n = 8$		
$\theta_1$	28,11	49,49
$\theta_2$	25,25	36,68
$\theta_3$	24,46	32,18
$\theta_4$	25,25	30,97
$\theta_5$	28,11	32,18
$\theta_6$	35,90	36,68
$\theta_7$	157,01	49,49
$\theta_8$	35,90	92,30

É importante notar as consequências destes resultados numéricos. Além do fato já mencionado sobre a unicidade das configurações centrais quando  $n$  é maior que certo  $n_0$  temos também um certo padrão de simetria em todas as configurações. Observe que cada uma das configurações encontradas possui algum eixo de simetria. No caso onde  $n$  é ímpar esse eixo contém necessariamente um dos satélites. Se  $n$  é par, o eixo de simetria pode passar por dois dos satélites ou pode também não passar por nenhum. Estes fatos fornecem evidências para as seguintes conjecturas:

**Conjectura 1.1** *Para  $n \geq 9$  existe uma única configuração central do problema planar de  $1 + n$  corpos com massas iguais dos satélites, os satélites nos vértices de um polígono regular.*

**Conjectura 1.2** *Todas as configurações centrais do problema planar de  $1 + n$  corpos com massas iguais dos satélites são simétricas com respeito a uma linha reta.*

## Simetria no caso $n = 4$

A Conjectura 1.2 para  $n = 2, 3$  já havia sido estabelecida desde o trabalho de Hall [7]. Em [5] é mostrado que existem exatamente três configurações centrais simétricas de  $1 + 4$  corpos, a partir de cálculos com polinômios de graus muito altos. Para se fechar completamente este caso restava então a prova da Conjectura 1.2 para  $n = 4$ . Este foi justamente o trabalho feito por Alain Albouy e Yanning Fu em [1]. As três proposições seguintes estão neste trabalho e mostram a simetria das configurações centrais planares de  $1 + 4$  corpos.

**Proposição 1.7** *Seja  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2\pi$  uma configuração central planar de  $1 + 4$  corpos com massas dos satélites iguais. Então pelo menos uma das seguintes situações ocorre:  $\theta_1 + \theta_2 = \pi$  ou  $\theta_2 + \theta_3 = \pi$  ou dois ângulos entre  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  e  $\theta_4$  são iguais.*

**Demonstração:** As equações neste caso são

$$f_{34} = f_2 - f_3 = f_1 - f_4, \quad f_{23} = f_1 - f_2 = f_4 - f_3, \quad (1.13)$$

onde  $f_{ij} = f(\theta_i + \theta_j)$  e  $f_i = f(\theta_i)$ .

Assuma que a conclusão não é satisfeita. Sem perda de generalidade, considere  $\theta_4 < \theta_2 < \theta_1$  e  $\theta_3 < \theta_1$ . Isto implica  $\theta_3 + \theta_4 < \theta_1 + \theta_2$  e por sua vez  $\theta_1 + \theta_2 > \pi$ . Assuma também que  $\theta_2 + \theta_3 \neq \pi$ .

*Primeiro caso.* Aqui  $\theta_1 < \theta_1 + \theta_4 < \pi$ . Como  $\theta_1$  é o maior ângulo,  $\pi/2 < \theta_1$ , daí  $f_1 > 0$  e  $f_{14} > 0$ . Da última inequação e de (1.13), temos  $f_3 > f_4$  e  $f_2 > f_1$  o que, junto com  $\theta_2 < \theta_1$ , implica  $\theta_c < \theta_1$ .

Pela relação  $f_{34} - f_{14} = f_1 - f_3$ , a expressão  $A(\theta) = f(\theta_1 + \theta) - f(\theta_3 + \theta)$  é tal que  $A(\theta_4) = -A(0)$ . Temos, para  $\theta \in [0, \theta_4]$ ,  $A'(\theta) = f'(\theta_1 + \theta) - f'(\theta_3 + \theta) < 0$ . Assim  $A(0) > 0$ , ou seja  $f_1 > f_3$ .

Desde que  $\theta_1 > \theta_3$  e  $f_1 > f_3$  temos  $\theta_3 < \theta_c$  e daí  $\theta_3 > \theta_2$  pois  $f_2 > f_3$ . Nossa hipótese  $\theta_1 + \theta_4 < \theta_2 + \theta_3$  então fornecerá a ordem

$$\theta_4 < \theta_3 < \theta_2 < \theta_1.$$

Sabemos que  $f_2 > f_1 > 0$  e  $\theta_c < \theta_1$ . Seja  $\theta_1^L < \theta_c$  o único ângulo satisfazendo esta desigualdade e  $f(\theta_1^L) = f_1$ . Sejam  $\theta_2^L$  e  $\theta_2^R, \theta_2^L < \theta_c < \theta_2^R$  tais que  $f(\theta_2^L) = f(\theta_2^R) = f_2$ .

Então  $\theta_2 = \theta_2^L$  ou  $\theta_2^R$ . Temos que

$$0 < \frac{f_2 - f_1}{\theta_2^L - \theta_1^L} < \frac{f_3 - f_4}{\theta_3 - \theta_4} < \frac{f_2 - f_1}{\theta_1 - \theta_2} \leq \frac{f_2 - f_1}{\theta_1 - \theta_2^R} \quad (1.14)$$

Os numeradores são todos os mesmos  $f_2 - f_1 = f_3 - f_4 > 0$ . A segunda desigualdade é devido à concavidade de  $f$ . A terceira é devido a nossa hipótese para este caso. A última é simplesmente  $\theta_2 \leq \theta_2^R < \theta_1$ . Estas desigualdades nos fornecem

$$\theta_1 - \theta_2^R < \theta_2^L - \theta_1^L \Rightarrow \theta_1^L + \theta_1 < \theta_2^L + \theta_2^R,$$

contradizendo o Lema 1.3.

*Segundo Caso:*  $\theta_2 + \theta_3 < \pi$ . Desde que  $f_{34} - f_{23} = f_2 - f_4$ , repetindo o argumento anterior, teremos  $f_2 > f_4$  e  $f_{34} > f_{23}$ . Como  $\theta_3 + \theta_4 < \theta_2 + \theta_3$ , então  $\theta_c < \theta_2 + \theta_3$ . Daí  $f_{23} > 0$  e assim,  $f_1 > f_2$  e  $f_4 > f_3$ . Juntando, temos a ordem  $f_1 > f_2 > f_4 > f_3$ . Desde que  $\theta_3 < \theta_1$  e  $\theta_4 < \theta_2 < \theta_1$ , teremos  $\theta_3 < \theta_c$  e  $\theta_4 < \theta_2 < \theta_c$ . Segue que  $\theta_3 < \theta_4$  e assim  $\theta_3 < \theta_4 < \theta_2 < \theta_1$ .

Seja  $\theta_1^L < \theta_c$  o único ângulo satisfazendo esta desigualdade tal que  $f(\theta_1^L) = f_1$ . Temos  $\theta_3 < \theta_4 < \theta_2 < \theta_1^L < \theta_c$ . De acordo com (1.13), podemos aplicar o Lema 1.4 obtendo  $(\theta_1^L - \theta_3)(f_2 - f_4) - (\theta_2 - \theta_4)(f_1 - f_3) > 0$  e esta desigualdade se mantém trocando  $\theta_1^L$  por  $\theta_1$ .

Como  $f_1 - f_3 = f_2 - f_4 + 2f_{23}$  teremos

$$\begin{aligned} (\theta_1 - \theta_3 - \theta_2 + \theta_4)(f_2 - f_4) - 2(\theta_2 - \theta_4)f_{23} > 0 \Rightarrow \\ \frac{f_{23}}{\pi - (\theta_2 + \theta_3)} < \frac{f_2 - f_4}{\theta_2 - \theta_4}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela concavidade de  $f$ ,

$$\frac{-f_{23}}{\pi - (\theta_2 + \theta_3)} = \frac{f(\pi) - f_{23}}{\pi - (\theta_2 + \theta_3)} < \frac{f_{23} - f_{34}}{(\theta_2 + \theta_3) - (\theta_3 + \theta_4)} = -\frac{f_2 - f_4}{\theta_2 - \theta_4}.$$

■

**Proposição 1.8** *Seja  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2\pi$ , uma configuração central planar de 1 + 4 corpos com massas dos satélites iguais. Se dois ângulos consecutivos são iguais, então os dois restantes são iguais e consequentemente a configuração é simétrica.*

**Demonstração:** Assumimos  $\theta_1 = \theta_2$  e  $\theta_4 > \theta_3$  e chegaremos numa contradição. Por (1.13) teremos

$$-f_{14} = f_{23} = f_4 - f_3 = 0.$$

Como as únicas raízes de  $f$  em  $(0, 2\pi)$  são  $\pi/3, \pi$  e  $5\pi/3$  e  $\theta_2 + \theta_3 = 2\pi - (\theta_1 + \theta_4)$  e  $\theta_4 > \theta_3$  a única possibilidade é

$$\theta_1 + \theta_4 = 5\pi/3 \text{ e } \theta_2 + \theta_3 = \pi/3.$$

Teremos três casos:  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/6$ ,  $\theta_3 < \pi/6 < \theta_1 = \theta_2 < \pi/3$  ou  $\theta_1 = \theta_2 < \pi/6 < \theta_3 < \pi/3$ . No primeiro caso obteremos  $\theta_4 = 3\pi/2$  e  $4(f_4 - f_3) = 3(2(\sqrt{2}-1) + \sqrt{6}) > 0$ , logo a configuração não é central. O segundo caso é impossível, pois  $f_2 > f_3$  e  $f_3 - f_2 = f_{12} = 0$ . Essas inequações são revertidas no terceiro caso e teremos uma contradição da mesma maneira. ■

**Proposição 1.9** *Seja  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ ,  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2\pi$ , uma configuração central planar de 1 + 4 corpos com massas dos satélites iguais. Se a soma de dois ângulos consecutivos é igual a  $\pi$ , então a configuração é simétrica.*

**Demonstração:** Suponha  $\theta_1 + \theta_4 = \theta_2 + \theta_3 = \pi$ . Por (1.13), temos

$$f_1 - f_2 = f_4 - f_3 = f_{23} = 0 \Rightarrow f_1 = f_2 \text{ e } f_3 = f_4.$$

Logo, se  $\theta_1 \neq \theta_2$ , então  $\theta_3 \neq \theta_4$  e pelo Corolário 1.1 teremos  $\theta_1 + \theta_2 > 2\theta_c > 6\pi/5$  e  $\theta_3 + \theta_4 > 2\theta_c > 6\pi/5$ .

Assim, temos a contradição  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 > 12\pi/5 > 2\pi$ . ■

Em [1] e [5] é mostrado que existem exatamente duas configurações centrais que satisfazem a hipótese da Proposição 1.8 e duas que satisfazem a hipótese da Proposição 1.9. Entre elas, a configuração trivial com os satélites nos vértices de um quadrado é a única que satisfaz as hipóteses de ambas proposições e daí, teremos exatamente três classes distintas de configurações centrais do problema planar de 1 + 4 corpos.

## Capítulo 2

# Sobre a simetria das configurações centrais planares de 1+5 corpos

Neste capítulo estaremos interessados nas configurações centrais do problema planar de 1+5 corpos no caso onde os 5 satélites possuem a mesma massa. Como vimos na Seção 1.1.3, conjectura-se que as configurações centrais deste problema são simétricas. Nosso objetivo aqui é dar informações sobre esta questão apresentando contribuições inéditas para a resolução deste problema.

As equações em função dos ângulos entre os satélites consecutivos, em vista do sistema (1.9) e das propriedades de simetria da função  $f$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} f(\theta_1) + f(\theta_1 + \theta_2) &= f(\theta_4 + \theta_5) + f(\theta_5), \\ f(\theta_2) + f(\theta_2 + \theta_3) &= f(\theta_1 + \theta_5) + f(\theta_1), \\ f(\theta_3) + f(\theta_3 + \theta_4) &= f(\theta_1 + \theta_2) + f(\theta_2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} f(\theta_4) + f(\theta_4 + \theta_5) &= f(\theta_2 + \theta_3) + f(\theta_3), \\ f(\theta_5) + f(\theta_5 + \theta_1) &= f(\theta_3 + \theta_4) + f(\theta_4), \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 &= 2\pi. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Em todo o texto utilizaremos a convenção

$$\theta_{5+k} = \theta_k, \text{ se } k \geq 1$$

e denotaremos

$$f_i = f(\theta_i) \text{ e } f_{ij} = f(\theta_i + \theta_j).$$

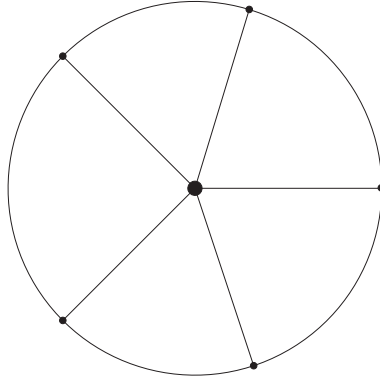


Figura 2.1: Configuração central planar simétrica de 1+5 corpos

**Definição 2.1** Diremos que uma configuração central  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$  é simétrica (Ver Fig. 2.1) se, módulo uma permutação cíclica dos ângulos, tivermos

$$\theta_1 = \theta_5 \text{ e } \theta_2 = \theta_4.$$

O resultado numérico em [5] afirma que existem apenas três classes de configurações centrais planares com 1 + 5 corpos, a trivial  $(2\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5)$  e duas outras, todas elas possuindo algum eixo de simetria. Com os valores aproximados dos ângulos as configurações não triviais escritas em graus são

$$(46, 51, 106, 106, 51) \text{ e } (33, 33, 38, 218, 38).$$

## 2.1 Existência de um ângulo grande

O caso onde um dos ângulos que separam os satélites é maior ou igual a  $4\pi/5 = 144^\circ$  é tratado no teorema seguinte. Mostramos que nesta condição uma configuração central de 1 + 5 corpos no plano é sempre simétrica. Nos resultados numéricos em [5] podemos observar que uma das duas configurações não triviais encontradas se enquadra neste caso. Além disso, a demonstração deste resultado é bem simples, o que o torna ainda mais interessante. A idéia chave da demonstração se encontra no resultado do lema seguinte o qual também será utilizado em outras situações.

**Lema 2.1** Se  $4\pi/5 \leq \eta < 2\pi$ , então é estritamente crescente a função  $\Phi_\eta : (0, 2\pi - \eta) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\Phi_\eta(x) := f(x) + f(x + \eta).$$

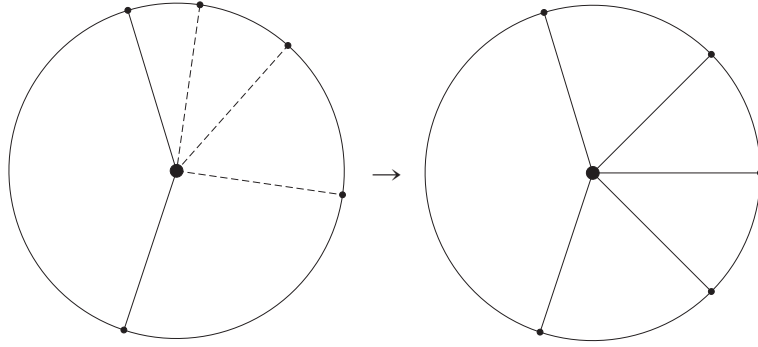


Figura 2.2: Se um ângulo é maior ou igual a  $\frac{4\pi}{5}$ , então a configuração central é simétrica.

**Demonstração:** Observe que  $\Phi''_{\eta}(x) = f'''(x) + f'''(x + \eta) > 0$ . Logo, a segunda derivada de  $\Phi_{\eta}$  é estritamente crescente e possui uma raiz em  $\pi - \eta/2$ , pois

$$\Phi''_{\eta}(\pi - \eta/2) = f''(\pi - \eta/2) + f''(\pi + \eta/2) = 0.$$

Assim  $\Phi'_{\eta}(x)$  possui valor mínimo dado por  $\Phi'_{\eta}(\pi - \eta/2) = f'(\pi - \eta/2) + f'(\pi + \eta/2) = 2f'(\pi - \eta/2)$ .

Este valor é positivo, pois  $\eta \geq 4\pi/5$  e daí  $\pi - \eta/2 \leq 3\pi/5 < \theta_c$ .

Assim  $\Phi'_{\eta}(x) > \Phi'_{\eta}(\pi - \eta/2) > 0$  e, por conseguinte,  $\Phi_{\eta}$  é estritamente crescente.

■

**Teorema 2.1** *Suponha que em uma configuração central planar de 1 + 5 corpos, dois satélites consecutivos estão separados por um ângulo maior ou igual a  $4\pi/5$ . Então a configuração é simétrica com eixo de simetria passando pela bissetriz de tal ângulo. Ver Figura 2.2.*

**Demonstração:**

Seja  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$  tal configuração e suponha, sem perda de generalidade,  $\theta_3 \geq 4\pi/5$ . Devemos mostrar que  $\theta_5 = \theta_1$  e  $\theta_2 = \theta_4$ .

São satisfeitas as equações



$$f_5 - f_1 = f_{12} - f_{45} = f_4 + f_{34} - f_2 - f_{23}. \quad (2.3)$$

Suponha primeiramente  $\theta_5 > \theta_1$ .

Se  $f_5 \leq f_1$ , então  $\theta_5 > \theta_c$  e pelo Corolário 1.1 tem-se  $\theta_1 + \theta_5 > 2\theta_c > 6\pi/5$ , implicando em  $\theta_1 + \theta_5 + \theta_3 > 6\pi/5 + 4\pi/5 = 2\pi$ . Logo,

$$f_5 > f_1.$$

Por (2.3) temos

$$f_{12} > f_{45}.$$

Isto implica em  $\theta_1 + \theta_2 > \theta_4 + \theta_5$ , pois, do contrário, teríamos  $\theta_4 + \theta_5 > \theta_c$  e aplicando novamente o Corolário 1.1, obteríamos  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 > 6\pi/5$  e a soma de todos os ângulos ultrapassaria  $2\pi$ .

De  $\theta_1 + \theta_2 > \theta_4 + \theta_5$  e  $\theta_5 > \theta_1$ , obtemos

$$\theta_2 > \theta_4. \quad (2.4)$$

Como  $\theta_3 \geq \frac{4\pi}{5}$ , pelo Lema 2.1, a função

$$\Phi_{\theta_3} := f(x) + f(x + \theta_3)$$

é estritamente crescente. Logo,

$$\Phi_{\theta_3}(\theta_2) > \Phi_{\theta_3}(\theta_4) \Rightarrow f_2 + f_{23} > f_4 + f_{34}.$$

Isto, juntamente com o fato de termos  $f_5 - f_1 > 0$ , contradiz (2.3).

Se supormos  $\theta_1 > \theta_5$  o processo acima se repete com desigualdades invertidas. Logo,  $\theta_1 = \theta_5$ .

De (2.3) obtemos  $\Phi_{\theta_3}(\theta_2) = \Phi_{\theta_3}(\theta_4)$ . Como  $\Phi_{\theta_3}$  é estritamente crescente concluímos que  $\theta_2 = \theta_4$  e finalizamos a demonstração. ■

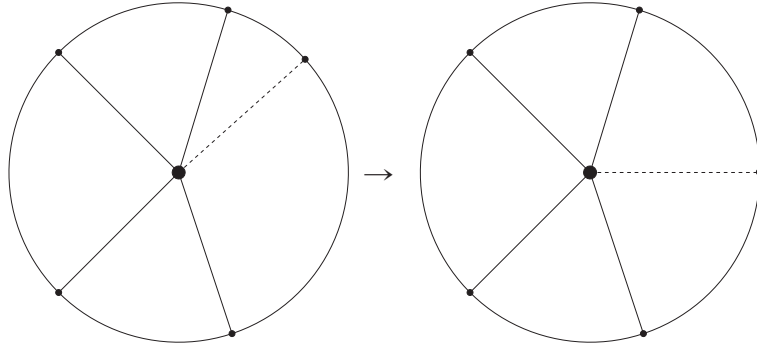


Figura 2.3: Se dois ângulos não consecutivos são iguais então a configuração central é simétrica.

## 2.2 Condições necessárias e suficientes para simetria

No caso geral estabelecemos outros resultados sobre a simetria das configurações centrais deste problema. De fato, as três proposições a seguir mostram que certas condições sobre as posições relativas dos satélites que são necessárias são também suficientes para garantir que uma configuração central do problema planar de  $1 + 5$  corpos seja simétrica. É interessante a comparação dos resultados seguintes com as proposições da Seção 1.1.3 referentes à simetria no problema com quatro satélites. É notável também o crescimento da ordem de dificuldade ao passar do caso  $n = 4$  para  $n = 5$ .

**Proposição 2.1** *Se em uma solução  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$  de (2.1), com  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi$ , dois ângulos não-consecutivos,  $\theta_{i-1}$  e  $\theta_{i+1}$ , são iguais, então a configuração é simétrica com respeito ao segmento que contém a bissetriz do ângulo intermediário  $\theta_i$ . Ver Fig. 2.3.*

### Demonstração:

Seja  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$  solução de (2.1). Sem perda de generalidade, suponha  $\theta_1 = \theta_4$ . Devemos mostrar que  $\theta_2 = \theta_3$ . Suponha então que  $\theta_2 \neq \theta_3$ , por exemplo  $\theta_3 > \theta_2$ . Temos que

$$f(\theta_1) + f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_5) + f(\theta_5), \quad (2.5)$$

$$f(\theta_2) + f(\theta_2 + \theta_3) = f(\theta_1 + \theta_5) + f(\theta_1), \quad (2.6)$$

$$f(\theta_3) + f(\theta_3 + \theta_1) = f(\theta_1 + \theta_2) + f(\theta_2), \quad (2.7)$$

$$f(\theta_1) + f(\theta_1 + \theta_5) = f(\theta_2 + \theta_3) + f(\theta_3), \quad (2.8)$$

$$f(\theta_5) + f(\theta_5 + \theta_1) = f(\theta_1 + \theta_3) + f(\theta_1). \quad (2.9)$$

A soma das equações (2.6) e (2.8) implica  $f(\theta_2) = f(\theta_3)$  e (2.5) junto com (2.9) resulta em  $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_3)$ . As igualdades desses valores devem acontecer em uma das duas situações não triviais:

- i)  $\pi/3 < \theta_2 < \theta_c < \theta_3 < \pi$ ;
- ii)  $0 < \theta_2 < \pi/3$  e  $\pi < \theta_3 < 5\pi/3$ .

*i)* Já que  $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_3)$ , seria necessário  $\pi < \theta_1 + \theta_2 < \theta'_c < \theta_1 + \theta_3 < 5\pi/3$ , ou  $\theta_1 + \theta_3 > 5\pi/3$  ou  $\pi/3 < \theta_1 + \theta_2 < \theta_c < \theta_1 + \theta_3 < \pi$ . Nos dois primeiros casos a soma dos ângulos ultrapassa  $2\pi$ . O terceiro caso é impossível, pois  $f$  é crescente em  $(0, \theta_c)$  e decrescente em  $(\theta_c, \theta'_c)$ .

*ii)* Já que  $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_3)$ , não podemos ter  $\theta_1 + \theta_3 \geq 5\pi/3$ , pois isto implicaria em  $\theta_1 + \theta_2 \geq \pi/3$  e  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 > 2\pi$ .

Se  $\theta_1 + \theta_3 < \theta'_c$  temos uma contradição por motivo análogo ao último caso de *i*).

Juntando estes fatos tem-se  $0 < \theta_2 + \theta_1 < \pi/3$  e  $\theta'_c < \theta_1 + \theta_3 < 5\pi/3$ . Mostraremos que todas as possibilidades  $\theta_1 < \theta_2$ ,  $\theta_1 = \theta_2$  e  $\theta_1 > \theta_2$  resultam em contradição.

Se  $\theta_1 < \theta_2$ , então  $f(\theta_1) < f(\theta_2)$ . Logo, pela equação (2.6), tem-se

$$f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_3) < f(\theta_2 + \theta_3) < f(\theta_1 + \theta_5). \quad (2.10)$$

A primeira desigualdade se deve ao crescimento de  $f$  em  $(\theta'_c, 2\pi)$ . Além disso, (2.10) só é possível se  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_5 < \theta_c$  e, conseqüentemente,  $f(\theta_1) < f(\theta_5)$ . Mas,

$$f(\theta_1) + f(\theta_1 + \theta_3) = f(\theta_1 + \theta_5) + f(\theta_5),$$

contradizendo (2.10).

O caso  $\theta_1 > \theta_2$  é análogo ao anterior com a inversão de algumas desigualdades.

Se  $\theta_1 = \theta_2$  então  $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_5)$  e  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = \theta_5$ . Como  $\theta_3 > \pi$  e  $f(\theta_2) = f(\theta_3)$  então  $f(\theta_2) \geq f(\theta'_c) > f(\pi/4)$ . Logo  $\theta_2 > \pi/4$  e novamente a soma dos ângulos ultrapassa  $2\pi$ .

■

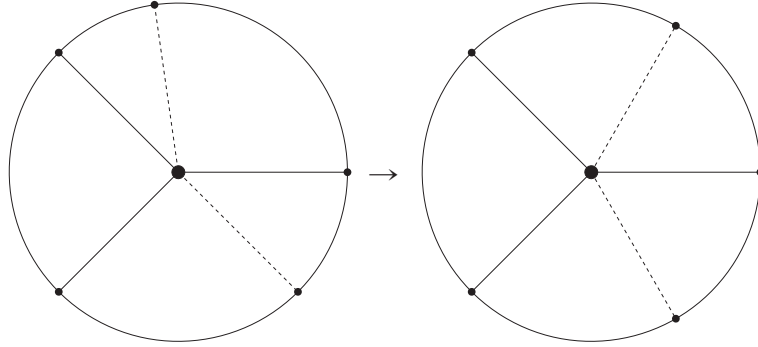


Figura 2.4: Ilustração da situação tratada na Proposição 2.2.

**Proposição 2.2** *Considere uma solução  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$  de (2.1) com  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi$ . Se quatro ângulos consecutivos,  $\theta_i, \theta_{i+1}, \theta_{i+2}, \theta_{i+3}$  são tais que  $\theta_i + \theta_{i+1} = \theta_{i+2} + \theta_{i+3}$ , então a configuração é simétrica com respeito à reta que contém a bissetriz do quinto ângulo. Ver Figura 2.4.*

**Demonstração:**

Pela simetria do sistema não perdemos generalidade em supor que  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_4 + \theta_5$ . Neste caso devemos mostrar que  $\theta_1 = \theta_5$  e  $\theta_2 = \theta_4$ . As equações serão dadas por

$$f(\theta_1) = f(\theta_5), \quad (2.11)$$

$$f(\theta_2) + f(\theta_2 + \theta_3) = f(\theta_1 + \theta_5) + f(\theta_1), \quad (2.12)$$

$$f(\theta_3) + f(\theta_3 + \theta_4) = f(\theta_1 + \theta_2) + f(\theta_2), \quad (2.13)$$

$$f(\theta_4) + f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_2 + \theta_3) + f(\theta_3), \quad (2.14)$$

$$f(\theta_5) + f(\theta_5 + \theta_1) = f(\theta_3 + \theta_4) + f(\theta_4). \quad (2.15)$$

Por (2.13) e (2.14) temos

$$f(\theta_4) + f(\theta_3 + \theta_4) = f(\theta_2 + \theta_3) + f(\theta_2). \quad (2.16)$$

Admitiremos que  $\theta_1 \neq \theta_5$  e mostraremos que isto resulta em uma contradição com as equações acima. Novamente pela simetria do sistema podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\theta_1 < \theta_5$  e  $\theta_2 > \theta_4$ . Neste caso, por (2.11), é necessário se ter

$$\pi/3 < \theta_1 < \theta_c < \theta_5 < \pi.$$

Pelo Lema 1.3,  $\theta_1 + \theta_5 > 2\theta_c > \pi$ . Por conseguinte,  $\theta_4 < \theta_c$ , senão teríamos  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 > \theta_1 + \theta_5 + 2\theta_4 > 4\theta_c > 2\pi$ .

Mostraremos que cada uma das três possibilidades,  $f(\theta_4) > f(\theta_2)$ ,  $f(\theta_4) = f(\theta_2)$  e  $f(\theta_4) < f(\theta_2)$ , reduz-se a uma contradição.

**1º caso:**  $f(\theta_4) = f(\theta_2)$ . Como  $\theta_4 < \theta_2 < \pi$ , tem-se que  $\pi/3 < \theta_4 < \theta_c < \theta_2 < \pi$  e, pelo Lema 1.3,  $\theta_2 + \theta_4 > \pi$  resultando na contradição  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 > 2\pi$ .

**2º caso:**  $f(\theta_4) > f(\theta_2)$ . Já que  $\theta_2 > \theta_4$  é necessário que se tenha  $\theta_2 > \theta_c$ . Se  $\theta_1 \geq \theta_4$ , então  $\theta_2 \leq \theta_5$  e  $f(\theta_2) \geq f(\theta_5) = f(\theta_1) \geq f(\theta_4)$ . Assim,  $\theta_1 < \theta_4$ ,  $\theta_2 > \theta_5$  e  $\theta_1 + \theta_2 > \theta_1 + \theta_5 > 2\theta_c > \pi$ .

**3º caso:**  $f(\theta_4) < f(\theta_2)$ . Por (2.16) sabemos que  $f(\theta_4 + \theta_3) > f(\theta_2 + \theta_3)$  e daí,  $\theta_2 + \theta_3 > \theta_c$ .

Afirmamos que  $f(\theta_2) < f(\theta_1)$ . De fato, se  $f(\theta_2) \geq f(\theta_1)$  a equação (2.12) implica  $f(\theta_2 + \theta_3) < f(\theta_1 + \theta_5)$ . Mas, pelo Lema 1.3,

$$2\theta_c < \theta_1 + \theta_5 < 4\pi/3$$

e para isso,  $\theta_2 + \theta_3 > 2\theta_c$ , acarretando em  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_5 > 4\theta_c > 2\pi$ .

Se  $\theta_2 \geq \theta_c$ , segue da desigualdade  $f(\theta_2) < f(\theta_1) = f(\theta_5)$  que  $\theta_2 > \theta_5$ . Temos também que  $\theta_4 < \theta_1$  pois  $f(\theta_4) < f(\theta_2) < f(\theta_1)$ . Estes dois fatos nos fornecem  $\theta_1 + \theta_2 > \theta_4 + \theta_5$ , contradizendo a hipótese inicial da proposição. Logo,  $\theta_2 < \theta_c$  e

$$\theta_4 < \theta_2 < \theta_1 < \theta_c < \theta_5.$$

Afirmção:  $\theta_2 \leq 4\pi/9$ .

De fato, caso tivéssemos  $\theta_2 > 4\pi/9$ , então  $\theta_4 + \theta_5 = \theta_1 + \theta_2 > 8\pi/9$  e daí,  $\theta_3 < 2\pi/9$ . Neste caso  $f(\theta_3) < f(2\pi/9) < -1$ . Como  $\theta_3 + \theta_4 < \pi$  tem-se  $f(\theta_3 + \theta_4) \leq f(\theta_c) < 0$ , 73. Portanto,

$$f(\theta_3) + f(\theta_3 + \theta_4) < 0 \Rightarrow f(\theta_1 + \theta_2) + f(\theta_2) < 0.$$

A passagem da primeira para segunda desigualdade deve-se a (2.13). Como assumimos  $\theta_2 > 4\pi/9$  as parcelas da segunda desigualdade acima são ambas positivas e esta contradição finaliza a prova da afirmação.

Pelo Teorema do Valor Médio existem  $\theta^- \in [\theta_4, \theta_2]$  e  $\theta^+ \in [\theta_4 + \theta_3, \theta_2 + \theta_3]$  tais que

$$\frac{f(\theta_2) - f(\theta_4)}{\theta_2 - \theta_4} = f'(\theta^-)$$

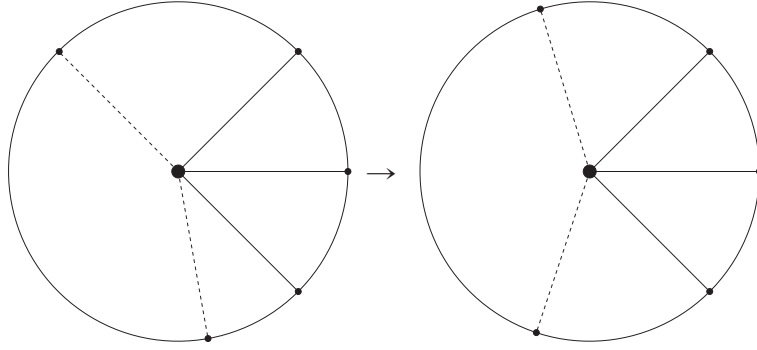


Figura 2.5: Ilustração da situação tratada na Proposição 2.3.

e

$$\frac{f(\theta_2 + \theta_3) - f(\theta_4 + \theta_3)}{\theta_2 - \theta_4} = f'(\theta^+).$$

Devido a (2.16) temos

$$f'(\theta^-) = -f'(\theta^+). \quad (2.17)$$

Como  $\theta^- < \theta_2 \leq 4\pi/9$  e  $f'$  é decrescente em  $(0, \pi)$ , então  $f'(\theta^-) \geq f'(4\pi/9) > 0,92 > |f'(\pi)| = 0,875$ . Desde que  $\pi$  é o ponto de mínimo de  $f'(x), x \in (0, 2\pi)$ , isso mostra ser impossível (2.17) e finaliza a demonstração do terceiro caso e da proposição.

■

**Proposição 2.3** *Considere uma solução  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$  de (2.1) com  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi$ . Se dois ângulos consecutivos,  $\theta_{i+1}$  e  $\theta_{i+2}$ , são iguais, então os ângulos imediatamente antes e imediatamente depois destes,  $\theta_i$  e  $\theta_{i+3}$ , também são iguais. Consequentemente a configuração é simétrica com respeito à reta que passa pelo centro e pelo satélite na posição  $q_{i+2}$ . Ver Figura 2.5.*

### Demonstração:

Seja  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$  uma solução de (2.1) com  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 2\pi$  e assumamos, sem perda de generalidade, que  $\theta_1 = \theta_5$ . Devemos mostrar que  $\theta_2 = \theta_4$ . As seguintes equações são satisfeitas:

$$f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_4), \quad (2.18)$$

$$f(\theta_2) + f(\theta_2 + \theta_3) = f(2\theta_1) + f(\theta_1), \quad (2.19)$$

$$f(\theta_3) + f(\theta_3 + \theta_4) = f(\theta_1 + \theta_2) + f(\theta_2), \quad (2.20)$$

$$f(\theta_4) + f(\theta_1 + \theta_4) = f(\theta_2 + \theta_3) + f(\theta_3), \quad (2.21)$$

$$f(\theta_4) + f(\theta_3 + \theta_4) = f(2\theta_1) + f(\theta_1), \quad (2.22)$$

$$f(\theta_4) + f(\theta_3 + \theta_4) = f(\theta_2) + f(\theta_2 + \theta_3), \quad (2.23)$$

$$f(\theta_3) + f(\theta_2 + \theta_3) + f(\theta_3 + \theta_4) = f(2\theta_1) + f(\theta_1 + \theta_2) + f(\theta_1), \quad (2.24)$$

$$f(\theta_4) + f(\theta_2) + f(\theta_1 + \theta_2) = f(2\theta_1) + f(\theta_3) + f(\theta_1). \quad (2.25)$$

As cinco primeiras equações acima são as de (2.1) no caso particular  $\theta_1 = \theta_5$ . (2.23) é devido à (2.22) e (2.19), (2.24) é a soma de (2.19) com (2.20) e (2.25) é consequência de (2.23) e (2.20).

Admitiremos  $\theta_4 < \theta_2$  e chegaremos numa contradição. A desigualdade contrária é análoga devido à simetria das equações.

Por (2.18), além dos casos triviais onde a soma dos ângulos ultrapassa  $2\pi$ , temos as seguintes possíveis situações:

- i)  $0 < \theta_1 + \theta_4 < \pi/3$  e  $\pi < \theta_1 + \theta_2 < \theta'_c$ ;
- ii)  $0 < \theta_1 + \theta_4 < \pi/3$  e  $\theta'_c < \theta_1 + \theta_2 < 5\pi/3$ ;
- iii)  $\pi/3 < \theta_1 + \theta_4 < \theta_c$  e  $\theta_c < \theta_1 + \theta_2 < \pi$ .

Caso *i*:  $0 < \theta_1 + \theta_4 < \pi/3$  e  $\pi < \theta_1 + \theta_2 < \theta'_c$ .

Suponha  $\theta_4 > \theta_1$ . Neste caso,  $f(\theta_4) > f(\theta_1)$  e

$$\theta_1 < \pi/6. \quad (2.26)$$

A equação (2.22) implica

$$f(\theta_3 + \theta_4) < f(2\theta_1).$$

Como  $2\theta_1 < \theta_1 + \theta_4 < \pi/3$ , então  $f(\theta_3 + \theta_4) < f(2\theta_1) < 0$ . Mas  $\theta_3 + \theta_4 < \pi$ , desde que  $\theta_1 + \theta_2 > \pi$ . Juntando estes fatos temos que

$$\theta_3 + \theta_4 < \pi/3$$

e

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 < \theta'_c + \pi/3 < 3\pi/2 + \pi/3 = 11\pi/6.$$

Esta desigualdade só é possível se  $\theta_1 = \theta_5 > 2\pi - 11\pi/6 = \pi/6$ , contradizendo (2.26).

Suponha agora  $\theta_4 < \theta_1$ . Neste caso,

$$\theta_4 < \pi/6$$

e

$$f(\theta_4) < f(\pi/6) < -3.$$

Desde que  $f(\theta_1 + \theta_4) < 0$ , a equação (2.21) implica

$$f(\theta_2 + \theta_3) + f(\theta_3) < -3.$$

Observe que  $\theta_2 > \pi/3$ , já que  $\theta_1 + \theta_2 > \pi$  e  $\theta_1 < \pi/3$ . Isso faz com que  $f(\theta_2 + \theta_3) \geq f(\theta'_c) > -1$  e, da desigualdade acima, segue que

$$f(\theta_3) < -2 < f(\pi/5) \Rightarrow \theta_3 < \pi/5.$$

Logo  $\theta_1 + \theta_4 + \theta_3 < \pi/3 + \pi/5 < \theta_c$ . Tem-se uma contradição, pois, por hipótese,  $\theta_5 + \theta_2 = \theta_1 + \theta_2 < \theta'_c$  e assim,  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 < \theta_c + \theta'_c = 2\pi$ .

Mostraremos que a igualdade  $\theta_1 = \theta_4$  também não pode acontecer. Neste caso, tem-se, pela equação (2.22),

$$f(\theta_1 + \theta_2) = f(2\theta_1) = f(\theta_1 + \theta_3).$$

Desde que  $\theta_1 + \theta_3 < \pi$ , então  $\theta_1 + \theta_3 = 2\theta_1$  e  $\theta_1 = \theta_3$ . De (2.19) segue que  $f(\theta_2) = f(\theta_1)$ , o que resulta em  $\theta_c < \theta_2 < \theta'_c$ , pois  $\theta_2 > \theta_4 = \theta_1$ . Como  $f$  é crescente em  $(0, \theta_c)$  e decrescente em  $(\theta_c, \theta'_c)$ , temos que

$$f(\theta_1) < f(2\theta_1) = f(\theta_1 + \theta_2) < f(\theta_2).$$

Esta contradição finaliza o caso *i*) da demonstração.

Caso *ii* :  $0 < \theta_1 + \theta_4 < \pi/3$  e  $\theta'_c < \theta_1 + \theta_2 < 5\pi/3$ .

Se  $\theta_1 = \theta_4$ , com o mesmo argumento do caso anterior teremos uma contradição.



Assuma  $\theta_1 < \theta_4$ . Como  $\theta_1 + \theta_4 < \pi/3$ , então  $\theta_1 < \pi/6$  e  $\pi < \theta_2 < 5\pi/3$ . Assim,

$$f(2\theta_1) < 0 \text{ e } f(\theta_1) < f(\pi/6) < -3.$$

Por (2.19) temos  $f(\theta_2) + f(\theta_2 + \theta_3) = f(2\theta_1) + f(\theta_1) < -3$ . Portanto,  $f(\theta_2 + \theta_3) < -2$ , contradizendo o fato de  $\theta_2 + \theta_3 > \theta_2 > \pi$ .

Suponha agora  $\theta_1 > \theta_4$ . Assim,  $f(\theta_1) > f(\theta_4)$  e, por (2.22), tem-se

$$f(\theta_3 + \theta_4) > f(2\theta_1). \quad (2.27)$$

Afirmamos que  $2\theta_1 < \theta_c$ . De fato, se  $\theta_1 \geq \theta_c/2 > \pi/4$ , então  $\theta_4 < \pi/12$  e  $f(\theta_4) < f(\pi/12) < -14$ . Além disso  $\theta_3 + \theta_4 < \theta_c$  nos fornece  $f(\theta_3 + \theta_4) < 1$ . Estas desigualdades junto com (2.22) implicam em

$$f(\theta_1) + f(2\theta_1) < -13,$$

o que é impossível com  $\theta_1 > \pi/4$ .

Portanto,  $2\theta_1 < \theta_c$  e, por (2.27) e já que  $\theta_3 + \theta_4 < \theta_c$ , temos  $\theta_4 + \theta_3 < 2\theta_1$  e  $\theta_3 > \theta_1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \theta_3 > \theta_1 &\Rightarrow f(\theta_3) > f(\theta_1), \\ \theta_2 + \theta_3 > \theta_2 + \theta_1 &\Rightarrow f(\theta_2 + \theta_3) > f(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Estas desigualdades junto com (2.27) contradizem (2.24) e concluem a impossibilidade do caso *ii*).

Caso *iii*)  $\pi/3 < \theta_1 + \theta_4 < \theta_c < \theta_1 + \theta_2 < \pi$ .

Pelo Lema 1.3 temos

$$2\theta_c \leq \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 \leq 4\pi/3 \Rightarrow 2\pi/3 \leq \theta_3 \leq 2\pi - 2\theta_c < \pi.$$

Mostraremos novamente que não é possível ter qualquer uma das situações  $\theta_1 = \theta_4$ ,  $\theta_1 < \theta_4$  e  $\theta_1 > \theta_4$ .

Se  $\theta_1 = \theta_4$ , pela Proposição 2.1, temos  $\theta_2 = \theta_3$ . Além disso,  $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_4) = f(2\theta_1)$  e por (2.19) teremos

$$f(\theta_2) + f(2\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2) + f(\theta_1).$$

Como  $\theta_2 = \theta_3 > 2\pi/3$  e  $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ , então  $f(\theta_2) > f(\theta_1 + \theta_2)$  e, daí,  $f(\theta_1) > f(2\theta_2)$ . Assim,  $\theta_1 > \pi/4$ , pois  $f(2\theta_2) > -1$ . Portanto  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 3\theta_1 + 2\theta_2 > 3\pi/4 + 4\pi/3 > 2\pi$ .

Suponha  $\theta_1 > \theta_4$ .

Neste caso  $f(\theta_1) > f(\theta_4)$  e (2.22) nos dá

$$f(2\theta_1) < f(\theta_3 + \theta_4). \quad (2.28)$$

Mostremos que  $\theta_1 > \theta_2$ . Se  $\theta_1 \leq \theta_2$ ,  $\theta_1 + \theta_4 < 2\theta_1 \leq \theta_1 + \theta_2$  e daí,  $f(\theta_3 + \theta_4) > f(2\theta_1) \geq f(\theta_1 + \theta_2)$ . Isto implica em

$$2\pi/3 < \theta_3 + \theta_4 < \theta_1 + \theta_2 < \pi.$$

Por (2.20), temos

$$f(\theta_2) > f(\theta_3) > f(\theta_3 + \theta_4).$$

Da última desigualdade segue de  $2\pi/3 < \theta_3 < \theta_3 + \theta_4 < \theta'_c$ . Por (2.23) tem-se  $f(\theta_4) > f(\theta_2 + \theta_3)$  e conseqüentemente  $\theta_4 > \pi/4$ . Assim

$$\theta_1 + \theta_2 > \theta_3 + \theta_4 > 2\pi/3 + \pi/4 = 11\pi/12 \Rightarrow$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 > 22\pi/12 \Rightarrow \theta_1 = \theta_5 < 2\pi - 22\pi/12 = \pi/6 \Rightarrow$$

$$\theta_1 + \theta_4 < 2\theta_1 < \pi/3.$$

Temos uma contradição proveniente da suposição  $\theta_1 \leq \theta_2$ . Logo,  $\theta_1 > \theta_2$ . Neste caso,

$$f(2\theta_1) < f(\theta_1 + \theta_2)$$

e por (2.28)

$$\theta_3 + \theta_4 < 2\theta_1.$$

Se  $\theta_3 + \theta_4 \leq \theta_1 + \theta_2$ , então  $f(\theta_3 + \theta_4) \geq f(\theta_1 + \theta_2)$  e (2.20) fornece  $f(\theta_1) \geq f(\theta_2) \geq f(\theta_3)$  e

$$f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_4) > f(\theta_1) \geq f(\theta_3) > f(\theta_3 + \theta_4) > f(\theta_1 + \theta_2).$$

Portanto,  $\theta_3 + \theta_4 > \theta_1 + \theta_2$ ,  $f(\theta_1 + \theta_2) > f(\theta_3 + \theta_4)$  e  $f(\theta_3) > f(\theta_2)$ , por (2.20).

Como  $f(\theta_1) > f(\theta_2)$ ,  $f(\theta_2 + \theta_3) > f(2\theta_1)$ , pela equação (2.19) e assim,  $\theta_2 + \theta_3 < 2\theta_1$ .

Se  $\theta_3 \leq \theta_1 + \theta_2$ , então  $f(\theta_3) \geq f(\theta_1 + \theta_2)$  e, por (2.21),  $f(\theta_4) \geq f(\theta_2 + \theta_3)$ . Portanto,  $\theta_4 > \pi/4$  e  $2\theta_1 > \theta_3 + \theta_4 > 2\pi/3 + \pi/4 = 11\pi/12$ . Daí

$$\theta_1 + \theta_4 > 11\pi/24 + \pi/4 = 17\pi/24 > \theta_c.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\theta_3 &> \theta_1 + \theta_2, \\ f(\theta_3) &< f(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

e por (2.20) tem-se

$$f(\theta_3 + \theta_4) > f(\theta_2).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 &< \theta_3 < \theta_3 + \theta_4 < \theta_3 + \theta_2 < 2\theta_1 \Rightarrow \\ 2\theta_1 - (\theta_1 + \theta_2) &> (\theta_3 + \theta_2) - \theta_3 \Rightarrow \theta_1 > 2\theta_2.\end{aligned}$$

$\theta_2 \leq \pi/4$ , pois se  $\theta_2 > \pi/4$  teríamos  $\theta_1 > \pi/2$ ,  $\theta_3 > \theta_1 + \theta_2 > 3\pi/4$  e

$$2\theta_1 + \theta_3 > \pi + 3\pi/4 \Rightarrow \theta_2 < \theta_2 + \theta_4 < \pi/4.$$

Como  $\theta_3 + \theta_4 < 2\theta_1$  então  $\theta_3 + \theta_4 < \pi$  e

$$f(\theta_3) + f(\theta_3 + \theta_4) > 0,$$

Mas,  $\theta_2 \leq \pi/4$  e assim,  $f(\theta_2) + f(\theta_1 + \theta_2) < 0$  contradizendo (2.20).

Suponha agora  $\theta_1 < \theta_4$ .

Utilizando o fato  $f(\theta_4) > f(\theta_1)$  e as equações (2.22), (2.19) e (2.25) teremos

$$\begin{aligned}f(2\theta_1) &> f(\theta_3 + \theta_4) > f(\theta_2 + \theta_3), \\ f(\theta_2) &> f(\theta_1),\end{aligned}$$

e

$$f(\theta_3) > f(\theta_2).$$

Se  $\theta_2 \geq \theta_c$  então  $2\theta_1 < \theta_1 + \theta_4 < \theta_c \leq \theta_2 < \theta_1 + \theta_2$  e  $f(\theta_2) > f(2\theta_1)$ . Assim,  $\theta_1 > \pi/4$ , já que, por (2.19), temos  $f(\theta_1) > f(\theta_2 + \theta_3)$ . Como  $f(\theta_3) > f(\theta_2)$  então  $\theta_2 > \theta_3 > 2\pi/3$ . O que implica em  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 > 3\theta_1 + 2\theta_3 > 3\pi/4 + 4\pi/3 > 2\pi$ . Portanto,

$$\theta_2 < \theta_c.$$

Se  $\theta_4 \geq 2\theta_1$  então  $f(\theta_4) \geq f(2\theta_1)$  e, por (2.22),  $f(\theta_1) \geq f(\theta_3 + \theta_4)$ . Logo  $\theta_1 > \pi/4$  e  $\theta_4 \geq 2\theta_1 > \pi/2$ . Isto resulta na contradição  $\theta_1 + \theta_4 > 3\pi/4 > \theta_c$ . Assim,

$$\theta_4 < 2\theta_1.$$

Afirmamos também que

$$\theta_2 < 2\theta_1.$$

Ora, caso tivéssemos  $\theta_2 \geq 2\theta_1$ , a equação (2.19) nos forneceria  $f(\theta_1) \geq f(\theta_2 + \theta_3)$  e, por conseguinte,  $\theta_1 > \pi/4$  e  $\theta_1 + \theta_2 > 3\pi/4$ . Em razão disso temos  $f(\theta_1 + \theta_2) < f(3\pi/4) = 0,595$ . Porém,  $\theta_1 + \theta_4 > \pi/2$  implica em  $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_4) > f(\pi/2) = 0,646$ .

Temos também que  $\theta_1 < \pi/3$ , pois sabemos que  $\theta_3 > 2\pi/3$  e  $4\theta_1 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 < 4\pi/3$ .

Logo, se  $\theta_1 + \theta_2 \geq 4\pi/5$  então  $\theta_2 \geq 4\pi/5 - \pi/3 = 7\pi/15$  e  $f(\theta_2) \geq f(7\pi/15) = 0.579$ . Como  $\theta_2 < 2\theta_1 < \theta_1 + \theta_4$ , por (2.18),  $f(\theta_2) < f(\theta_1 + \theta_2) \geq f(4\pi/5) = 0,502$ . Assim,

$$\theta_1 + \theta_2 < 4\pi/5.$$

Seja  $0 < \theta^* < \theta_c$  o único ângulo tal que  $f(\theta^*) = f(4\pi/5)$ . Como  $f(7\pi/15) > f(4\pi/5)$  então  $\theta^* < 7\pi/15$ . Pelo Lema 1.3

$$\theta_1 + \theta_4 + \theta_1 + \theta_2 < \theta^* + 4\pi/5 < 7\pi/15 + 4\pi/5 = 19\pi/15 \Rightarrow$$

$$\theta_3 > 2\pi - 19\pi/15 = 11\pi/15.$$

Como  $f(\theta_3) > f(\theta_2)$  e  $f(\theta_3) < f(11\pi/15) < f(\pi/2)$  então  $\theta_2 < \pi/2$ .

Afirmação:  $\theta_1 + \theta_2 < \theta_3$ .

De fato, se  $\theta_1 + \theta_2 \geq \theta_3 > 11\pi/15$ , então

$$f(\theta_1 + \theta_2) < f(11\pi/15). \quad (2.29)$$

Como  $\theta_2 < \pi/2$ , temos que

$$\theta_1 > 11\pi/15 - \pi/2 = 7\pi/30.$$

Além disso,

$$11\pi/15 < \theta_2 + \theta_3 < 2\pi - 2\theta_c + \pi/2 < \theta'_c \Rightarrow$$

$$f(\theta_2 + \theta_3) > f(2\pi - 2\theta_c + \pi/2) = -0,662.$$

Pela equação (2.21) e do fato que  $f(\theta_3) > f(\theta_1 + \theta_2)$ , tem-se

$$\begin{aligned} f(\theta_4) > f(\theta_2 + \theta_3) > f(47\pi/180) = 0,71 \Rightarrow \\ \theta_4 > 47\pi/180. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_4 > 7\pi/30 + 47\pi/180 \Rightarrow \\ f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1 + \theta_4) > f(7\pi/30 + 47\pi/180) > f(11\pi/15) \end{aligned}$$

contradizendo (2.29).

Assim  $\theta_3 > \theta_1 + \theta_2$  e, neste caso,  $f(\theta_3) < f(\theta_1 + \theta_2)$ . Por (2.20) temos

$$f(\theta_3 + \theta_4) > f(\theta_2). \quad (2.30)$$

Se  $\theta_2 \geq 70\pi/180$ , então  $f(\theta_2) > f(70\pi/180) = 0,317$ . Além disso,  $\theta_1 + \theta_4 > 2\theta_1 > \theta_2 \geq 70\pi/180$  e assim,  $\theta_4 \geq 35\pi/180$ . Logo,  $\theta_3 + \theta_4 > 11\pi/15 + 35\pi/180$  e

$$f(\theta_3 + \theta_4) < f(11\pi/15 + 35\pi/180) = 0,196,$$

contradizendo (2.30). Logo

$$\theta_2 < 70\pi/180.$$

Daí, pela equação (2.23), podemos utilizar o Teorema do Valor Médio e dar um argumento análogo ao do terceiro caso da Proposição 2.2 e teremos uma contradição.

■

## Capítulo 3

# Configurações Centrais Empilhadas

Um problema que atualmente tem se mostrado de muito interesse para os pesquisadores da Mecânica Celeste é a determinação das chamadas configurações centrais empilhadas (*stacked central configurations*). Estas são configurações centrais que contém algum subconjunto de massas formando ainda uma configuração central. Podemos pensar numa construção fixando uma configuração central conhecida e adicionando outras massas e determinar quando é possível se obter uma outra configuração central.

Naturalmente, quando a configuração original apresenta alguma simetria a idéia é tentar preservá-la na nova configuração. Visto que as configurações centrais planares de  $1 + n$  corpos provavelmente apresentam pelo menos um eixo de simetria, baseado nos resultados numéricos outrora estabelecidos, é muito razoável analisar o problema de configurações centrais empilhadas neste caso.

Neste capítulo, utilizando essencialmente as propriedades da função  $f$  que descreve o sistema (1.8), conseguimos obter a classificação completa das configurações centrais empilhadas do problema planar de  $1 + n$  corpos na situação onde um ou dois novos satélites são adicionados a uma configuração central pré-existente. Além disso, no caso onde um novo corpo de massa infinitesimal é posto, podemos assumir que os satélites não têm massas necessariamente iguais, pois, como veremos, o efeito desta suposição é insignificante no sistema.

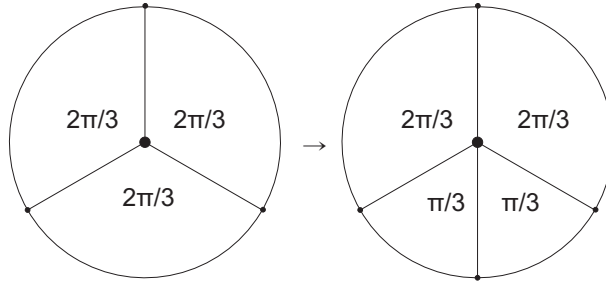


Figura 3.1: Configurações centrais de 1+3 e 1+4 corpos

### 3.1 Adição de um satélite

Nesta seção consideraremos o problema planar de  $1+n$  corpos, onde se tem um corpo de massa grande e os  $n$  satélites possuem massas infinitesimais, porém não necessariamente iguais. Nosso objetivo é responder a seguinte questão: Em que caso é possível a partir de um configuração central planar de  $1+n$  corpos se obter uma outra configuração central planar de  $1+(n+1)$  adicionando um outro satélite ao sistema?

Sabemos que a configuração com os 3 satélites dispostos nos vértices de um triângulo equilátero é central no problema de  $1+3$  corpos, onde os 3 satélites têm a mesma massa. Observe que podemos construir a partir desta uma configuração central de  $1+4$  corpos adicionando um quarto satélite de mesma massa sobre a bissetriz de um dos ângulos desse triângulo formando a configuração  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ , como na Figura 3.1. O teorema seguinte garante que, mesmo se os satélites tenham massas distintas, essa é a única possibilidade de se obter uma resposta afirmativa à pergunta do parágrafo anterior.

**Teorema 3.1** *Seja  $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n)$  uma configuração central planar de  $1+n$  corpos associada aos parâmetros de massas  $\mu_i, i = 1, \dots, n$ . Suponha que adicionamos um outro satélite com massa  $\mu_{n+1}$  formando agora uma configuração central de  $1+N$  corpos, com  $N = n+1$ . Então  $n = 3, \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 2\pi/3$ , o quarto satélite está sobre a bissetriz de um desses ângulos e as massas dos satélites são todas iguais.*

**Demonstração:** Verifiquemos primeiramente a impossibilidade do caso  $n = 2$ . Por hipótese  $(\theta_1, \theta_2)$  é uma configuração central relativa às massas  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Sem perda de generalidade, suponha que o terceiro corpo, de massa  $\mu_3$ , é posto tal que  $(\theta_1, \theta'_2, \theta'_3)$  é uma configuração central de  $1+3$  corpos, onde  $\theta_2 = \theta'_2 + \theta'_3$ . Então são satisfeitas as equações

$$\mu_2 f(\theta_1) = 0$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 f(\theta_2) &= 0 \\
\mu_2 f(\theta_1) + \mu_3 f(\theta_1 + \theta'_2) &= 0 \\
\mu_3 f(\theta'_2) + \mu_1 f(\theta'_2 + \theta'_3) &= 0 \\
\mu_1 f(\theta'_3) + \mu_2 f(\theta'_3 + \theta_1) &= 0
\end{aligned}$$

É fácil verificar que as equações acima implicam em

$$f(\theta_1) = f(\theta_1 + \theta'_2) = f(\theta'_2) = 0.$$

Contudo, as raízes de  $f$  no intervalo  $(0, 2\pi)$  são  $\pi/3, \pi$  e  $5\pi/3$ , o que torna impossível as igualdades acima.

Considere agora  $n = 3$ . Da mesma forma, suponha que o novo corpo, de massa  $\mu_4$ , é posto entre o primeiro e o terceiro corpos formando a configuração central  $(\theta_1, \theta_2, \theta'_3, \theta'_4)$ , com  $\theta_3 = \theta'_3 + \theta'_4$ . São satisfeitas as equações:

$$\begin{aligned}
\mu_2 f(\theta_1) + \mu_3 f(\theta_1 + \theta_2) &= 0, \\
\mu_3 f(\theta_2) + \mu_1 f(\theta_2 + \theta_3) &= 0, \\
\mu_1 f(\theta_3) + \mu_2 f(\theta_1 + \theta_3) &= 0, \\
\mu_2 f(\theta_1) + \mu_3 f(\theta_1 + \theta_2) + \mu_4 f(\theta_1 + \theta_2 + \theta'_3) &= 0, \\
\mu_3 f(\theta_2) + \mu_4 f(\theta_2 + \theta'_3) + \mu_1 f(\theta_2 + \theta'_3 + \theta'_4) &= 0, \\
\mu_4 f(\theta'_3) + \mu_1 f(\theta'_3 + \theta'_4) + \mu_2 f(\theta'_3 + \theta'_4 + \theta_1) &= 0.
\end{aligned}$$

Como  $\theta_3 = \theta'_3 + \theta'_4$  as equações acima resultam em

$$f(\theta'_3) = f(\theta'_3 + \theta_2) = f(\theta'_3 + \theta_2 + \theta_1) = 0.$$

Logo,  $\theta'_3 = \pi/3, \theta'_3 + \theta_2 = \pi$  e  $\theta'_3 + \theta_2 + \theta_1 = 5\pi/3$ . Ou seja,  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 2\pi/3$  e  $\theta'_3 = \theta'_4 = \pi/3$ . Substituindo esses valores nas equações do sistema, vemos que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ , como queríamos mostrar.

Tratemos agora o caso  $n \geq 4$ . Assuma que  $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n)$  e  $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \theta'_n, \theta'_{n+1}), \theta_n = \theta'_n + \theta'_{n+1}$ , são configurações centrais associadas aos parâmetros de massas  $\mu_1, \dots, \mu_n$  e  $\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}$ , respectivamente. Ou seja, estamos supondo que o satélite de massa  $\mu_{n+1}$



foi posicionado entre o primeiro e o  $n$ -ésimo corpos. Não se perde generalidade em supor isto.

As primeiras equações dos sistemas são

$$\mu_2 f(\theta_1) + \mu_3 f(\theta_1 + \theta_2) + \dots + \mu_n f(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) = 0$$

e

$$\mu_2 f(\theta_1) + \mu_3 f(\theta_1 + \theta_2) + \dots + \mu_n f(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) + \mu_{n+1} f(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1} + \theta'_n) = 0.$$

Logo,

$$f(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1} + \theta'_n) = -f(\theta'_{n+1}) = 0.$$

As segundas equações são

$$\mu_3 f(\theta_2) + \dots + \mu_n f(\theta_2 + \dots + \theta_{n-1}) + \mu_1 f(\theta_2 + \dots + \theta_{n-1} + \theta_n) = 0$$

e

$$\mu_3 f(\theta_2) + \dots + \mu_n f(\theta_2 + \dots + \theta_{n-1}) + \mu_{n+1} f(\theta_2 + \dots + \theta_{n-1} + \theta'_n) + \mu_1 f(\theta_2 + \dots + \theta_{n-1} + \theta'_n + \theta'_{n+1}) = 0.$$

Assim,

$$f(\theta_2 + \dots + \theta_{n-1} + \theta'_n) = -f(\theta'_{n+1} + \theta_1) = 0.$$

Procedendo desta maneira, comparando as  $i$ -ésimas equações obteremos

$$f(\theta'_{n+1} + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{i-1}) = 0.$$

Assim, encontramos  $n$  raízes distintas de  $f$  no intervalo  $(0, 2\pi)$  dadas por

$$\theta'_{n+1}, \theta'_{n+1} + \theta_1, \theta'_{n+1} + \theta_1 + \theta_2, \dots, \theta'_{n+1} + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1}.$$

Temos, então, uma contradição para  $n \geq 4$ .

■

## 3.2 Adição de dois satélites

Consideremos agora a situação onde dois novos satélites são adicionados a uma configuração central planar de  $1 + n$  corpos, onde os satélites possuem mesma massa. Os próximos resultados classificam todas as configurações centrais planares de  $1 + (n + 2)$  corpos obtidas desta maneira. Antes apresentaremos um outra consequência imediata do Lema 1.3 a qual será utilizada.

**Lema 3.1** *Seja  $C = \{x_1, \dots, x_m\}$ , com  $x_i > 0$  e  $x_1 + \dots + x_m \leq 2\pi$ . Considere quatro subconjuntos não-vazios de  $C$ ,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  tais que  $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2 = C$  e  $B_1 \subsetneq A_1$ . Suponha que*

$$f\left(\sum_{x_i \in A_1} x_i\right) = f\left(\sum_{x_i \in A_2} x_i\right)$$

e

$$f\left(\sum_{x_i \in B_1} x_i\right) = f\left(\sum_{x_i \in B_2} x_i\right).$$

Então

$$\sum_{x_i \in C} x_i > 2\theta_c > 6\pi/5$$

e deve ocorrer *exatamente uma* das igualdades abaixo:

- $\sum_{x_i \in A_1} x_i = \sum_{x_i \in A_2} x_i$ ;
- $\sum_{x_i \in B_1} x_i = \sum_{x_i \in B_2} x_i$ ;
- $\sum_{x_i \in A_1} x_i = \sum_{x_i \in B_2} x_i$ .

**Demonstração:** Por hipótese, podemos aplicar o Lema 1.3 e observando que

$$\sum_{x_i \in A_1} x_i + \sum_{x_i \in A_2} x_i = \sum_{x_i \in B_1} x_i + \sum_{x_i \in B_2} x_i = \sum_{x_i \in C} x_i$$

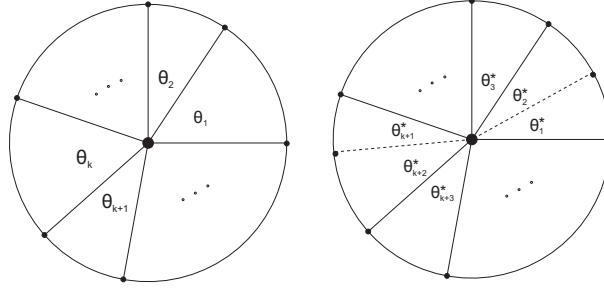


Figura 3.2: Ilustração da situação tratada na Proposição 3.1

devemos ter

$$\sum_{x_i \in A_1} x_i = \sum_{x_i \in A_2} x_i$$

ou

$$\sum_{x_i \in B_1} x_i = \sum_{x_i \in B_2} x_i.$$

Como  $B_1 \subsetneq A_1$  e, conseqüentemente,  $A_2 \subsetneq B_2$  apenas uma das igualdades acima pode ser satisfeita. Desta forma, pelo Corolário 1.1,

$$\sum_{x_i \in C} x_i > 2\theta_c > 6\pi/5.$$

■

A seguir apresentaremos as três proposições que determinam todas as configurações centrais planares empilhadas de  $1 + n$  corpos por adição de dois novos satélites. Observe que dividimos a classificação conforme a posição relativa dos dois novos corpos e os demais ao longo do círculo centrado no corpo maciço.

Suponha que os dois novos satélites são postos separados por pelo menos dois outros como na Figura 3.2. Neste caso devemos ter necessariamente  $n \geq 4$ . O próximo resultado mostra que a nova configuração de  $1 + (n + 2)$  corpos não pode ser central.

**Proposição 3.1** *Considere uma configuração central  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  de  $1 + n$  corpos no plano, com  $n \geq 4$ . Suponha que foram adicionados dois novos satélites separados por pelo menos dois dos satélites originais. Então a nova configuração com  $1 + (n + 2)$  corpos não é uma configuração central.*

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, suponha que os satélites adicionados estão entre o primeiro e o segundo e entre o  $k$ -ésimo e o  $(k+1)$ -ésimo satélites com  $3 \leq k \leq n-1$ , como na figura 3.2. Assim, teremos as configurações

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \dots, \theta_n)$$

e

$$(\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_k^*, \theta_{k+1}^*, \theta_{k+2}^*, \dots, \theta_{n+2}^*)$$

de  $1+n$  e  $1+(n+2)$  corpos, respectivamente, satisfazendo as relações

$$\theta_1 = \theta_1^* + \theta_2^*,$$

$$\theta_k = \theta_{k+1}^* + \theta_{k+2}^*,$$

$$\theta_i = \theta_{i+1}^* \text{ para } 2 \leq i \leq k-1,$$

e

$$\theta_i = \theta_{i+2}^* \text{ para } k+1 \leq i \leq n.$$

Suponha que a configuração nova é central. Os respectivos sistemas são

$$\begin{aligned} f(\theta_1) + f(\theta_1 + \theta_2) + \dots + f(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1}) &= 0, \\ f(\theta_2) + f(\theta_2 + \theta_3) + \dots + f(\theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) &= 0, \\ f(\theta_3) + f(\theta_3 + \theta_4) + \dots + f(\theta_3 + \theta_4 + \dots + \theta_n + \theta_1) &= 0, \\ \dots & \\ f(\theta_{n-1}) + f(\theta_{n-1} + \theta_n) + \dots + f(\theta_{n-1} + \theta_n + \theta_1 + \dots + \theta_{n-3}) &= 0, \\ f(\theta_n) + f(\theta_n + \theta_1) + \dots + f(\theta_n + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-2}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{aligned} f(\theta_1^*) + f(\theta_1^* + \theta_2^*) + \dots + f(\theta_1^* + \theta_2^* + \dots + \theta_{n+1}^*) &= 0, \\ f(\theta_2^*) + f(\theta_2^* + \theta_3^*) + \dots + f(\theta_2^* + \theta_3^* + \dots + \theta_{n+2}^*) &= 0, \\ f(\theta_3^*) + f(\theta_3^* + \theta_4^*) + \dots + f(\theta_3^* + \theta_4^* + \dots + \theta_{n+2}^* + \theta_1^*) &= 0, \\ \dots & \\ f(\theta_{n+1}^*) + f(\theta_{n+1}^* + \theta_{n+2}^*) + \dots + f(\theta_{n+1}^* + \theta_{n+2}^* + \theta_1^* + \dots + \theta_{n-1}^*) &= 0, \\ f(\theta_{n+2}^*) + f(\theta_{n+2}^* + \theta_1^*) + \dots + f(\theta_{n+2}^* + \theta_1^* + \theta_2^* + \dots + \theta_n^*) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

A terceira equação de (3.2) junto com a segunda de (3.1) implicam que

$$f(\theta_2 + \dots + \theta_{k-1} + \theta_{k+1}^*) + f(\theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_1^*) = 0 \Rightarrow f(\theta_2 + \dots + \theta_{k+1}^*) = f(\theta_2^*).$$

A  $(k+1)$ -ésima equação de (3.2) e a  $k$ -ésima de (3.1) implicam que

$$f(\theta_{k+1}^*) + f(\theta_k + \dots + \theta_n + \theta_1^*) = 0 \Rightarrow f(\theta_{k+1}^*) = f(\theta_2^* + \theta_2 + \dots + \theta_{k-1}).$$

Pelo Lema 3.1

$$\theta_2^* + \theta_2 + \dots + \theta_{k-1} + \theta_{k+1}^* > \pi.$$

Comparando agora a  $(k+3)$ -ésima de (3.2) com a  $(k+1)$ -ésima de (3.1) e as primeiras equações de (3.1) e (3.2) teremos, respectivamente

$$\begin{aligned} f(\theta_{k+1} + \dots + \theta_n + \theta_1^*) + f(\theta_{k+1} + \dots + \theta_n + \theta_1 + \dots + \theta_{k-1} + \theta_{k+1}^*) &= 0 \\ \Rightarrow f(\theta_{k+1} + \dots + \theta_n + \theta_1^*) &= f(\theta_{k+2}^*) \end{aligned}$$

e

$$f(\theta_1^*) + f(\theta_1^* + \theta_2 + \dots + \theta_{k-1} + \theta_{k+1}^*) = 0 \Rightarrow f(\theta_1^*) = f(\theta_{k+2}^* + \theta_{k+1} + \dots + \theta_n).$$

Novamente, pelo Lema 3.1

$$\theta_1^* + \theta_{k+2}^* + \theta_{k+1} + \dots + \theta_n > \pi.$$

Assim, temos a contradição

$$\theta_1 + \dots + \theta_n > 2\pi.$$

■

Tratemos agora do caso onde os dois novos corpos de massa infinitesimal são postos separados por um único satélite como na Figura 3.3.

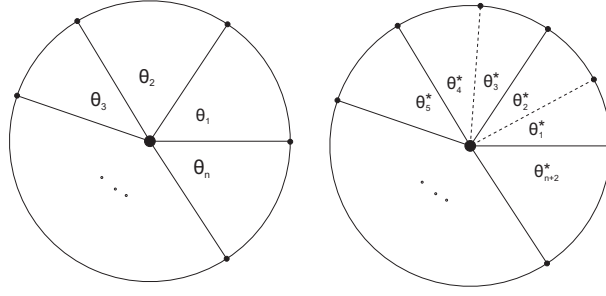


Figura 3.3: Ilustração da situação tratada na Proposição 3.2

**Proposição 3.2** *Considere uma configuração central  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  de  $1+n$  corpos no plano, com  $n \geq 2$ . Suponha que foram adicionados dois novos satélites separados por um dos satélites originais. Então a nova configuração com  $1+(n+2)$  corpos é uma configuração central exatamente nos três seguintes casos (Ver Fig. 3.4):*

$n = 2$  :

*Configuração original: colinear =  $(\pi, \pi)$ .*

*Configurações novas:*

$$\text{quadrado} = \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right),$$

ou

$$\text{pipa} = \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right).$$

$n = 4$  :

*Configuração original: pipa =  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ .*

*Configuração nova: hexágono regular =  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ .*

### Demonstração:

Vejamos o caso  $n = 2$ . Suponha que temos as configurações centrais  $(\theta_1, \theta_2)$  e  $(\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, \theta_4^*)$  de  $1+2$  e  $1+4$  corpos, respectivamente, onde  $\theta_1 = \theta_1^* + \theta_2^*$  e  $\theta_2 = \theta_3^* + \theta_4^*$ .

Temos que

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_4^*), \quad (3.3)$$

$$f(\theta_3^*) = f(\theta_2^*), \quad (3.4)$$

$$f(\theta_2^*) + f(\theta_2^* + \theta_3^*) = f(\theta_1^*). \quad (3.5)$$

As equações (3.3) e (3.4), em vista do Corolário 1.1, implicam em

$$\theta_1^* = \theta_4^* \text{ ou } \theta_3^* = \theta_2^*.$$

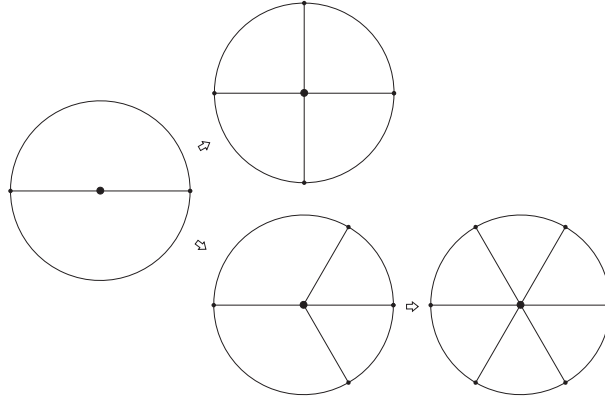


Figura 3.4: Ilustração da situação tratada na Proposição 3.2

Daí, pela Proposição 1.8 devemos ter

$$\theta_1^* = \theta_4^* \text{ e } \theta_3^* = \theta_2^*.$$

Logo,  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ .

A equação (3.5) se torna  $h(\theta_2^*) = 0$ , onde

$$h(x) := f(x) + f(2x) - f(\pi + x), \quad x \in (0, \pi).$$

É fácil ver que  $h'''(x) > 0$ , pois  $f'''(x) > f'''(\pi + x) > 0$ . Assim,  $h$  tem no máximo 3 raízes em  $(0, \pi)$ . Verifica-se de maneira simples que  $h(\pi/2) = h(\pi/3) = h(2\pi/3) = 0$ . Portanto,  $\theta_2^* = \pi/2$ ,  $\theta_2^* = \pi/3$  ou  $\theta_2^* = 2\pi/3$ . A primeira raiz implica na configuração do quadrado e as duas últimas correspondem à mesma configuração, os satélites nos vértices de uma pipa dada pelos ângulos  $(\pi/3, \pi/3, 2\pi/3, 2\pi/3)$ .

Dando prosseguimento aos demais casos, suponha que os dois satélites novos foram postos um entre o primeiro e o segundo e outro entre o segundo e o terceiro satélites, como na Figura 3.3. Teremos então as configurações centrais  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  e  $(\theta_1^*, \dots, \theta_{n+2}^*)$  satisfazendo as relações

$$\theta_1 = \theta_1^* + \theta_2^*,$$

$$\theta_2 = \theta_3^* + \theta_4^*,$$

$$\theta_i = \theta_{i+2}^*, \text{ para } 3 \leq i \leq n.$$

Vejamos o caso  $n = 3$ . As equações se reduzem a

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_3 + \theta_4^*), \quad (3.6)$$

$$f(\theta_3 + \theta_1^*) = f(\theta_4^*), \quad (3.7)$$

$$f(\theta_2^*) = f(\theta_3^*), \quad (3.8)$$

$$f(\theta_2^*) + f(\theta_2^* + \theta_3^*) = f(\theta_3 + \theta_1^*) + f(\theta_1^*). \quad (3.9)$$

Aplicando o Lema 3.1 às equações (3.6) e (3.7) obteremos

$$\theta_1^* + \theta_4^* + \theta_3 > 2\theta_c > 6\pi/5.$$

A partir deste fato e de (3.8) concluímos que  $\theta_2^* = \theta_3^*$ . Pela Proposição 2.3 temos também

$$\theta_1^* = \theta_4^*$$

e conseqüentemente

$$\theta_1 = \theta_2.$$

Assim,

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_3 + \theta_1^*). \quad (3.10)$$

Por  $(\theta_1, \theta_1, \theta_3)$  ser uma configuração central para  $n = 3$  temos que

$$f(\theta_1) + f(2\theta_1) = 0$$

e daí, consideramos as três raízes dessa equação como visto na Seção 1.1.3.

Se  $\theta_1 = 2\pi/3$ , então  $\theta_3 = 2\pi/3$  e, por (3.10) teremos necessariamente

$$\theta_1^* = \pi/3.$$

Porém, é fácil ver que a configuração resultante não satisfaz (3.9).

Considere agora que  $\theta_1$  é a menor solução de  $f(\theta_1) + f(2\theta_1) = 0$ . Sabemos que nesse caso  $\theta_1 < 50^\circ < \theta_c/2$ , logo  $\theta_3 > \theta'_c = 2\pi - \theta_c$ , o segundo ponto crítico de  $f$ . Portanto,  $\theta_3$  está no último intervalo crescente de  $f$ . Desta forma,

$$f(\theta_1^*) < f(\theta_1) = f(\theta_3) < f(\theta_3 + \theta_1^*),$$

contradizendo (3.10).



Seja  $\theta_1$  a maior solução de  $f(\theta_1) + f(2\theta_1)$ . Sabemos da Seção 1.1.3 que, neste caso,  $138^\circ < \theta_1 < 139^\circ$  e daí,

$$\theta_3 > 82^\circ.$$

É fácil ver que, neste caso, devido a (3.10), teremos  $\pi/3 < \theta_1^* < \theta_c < \theta_1^* + \theta_3 < \pi$ .

Se  $\theta_1^* \geq 73^\circ$  teremos  $\theta_1^* + \theta_3 > 155^\circ$  o que acarreta em

$$0,365\dots = f(155^\circ) > f(\theta_1^* + \theta_3) = f(\theta_1^*) > f(73\pi/180) = 0,388\dots$$

Logo,

$$\theta_1^* < 73^\circ$$

e, por conseguinte

$$\theta_2^* = \theta_1 - \theta_1^* > 65^\circ.$$

A função  $f(\theta) + f(2\theta)$  é crescente a partir de 0 até seu primeiro ponto crítico, depois decrescente até seu segundo ponto crítico, maior que  $2\pi/3$ . Como  $f'(65^\circ) + 2f'(130^\circ) > 0$ , então o primeiro ponto crítico é maior que  $65^\circ$ . Logo,

$$f(\theta_2^*) + f(2\theta_2^*) > f(65^\circ) + f(130^\circ) > 0,8.$$

Entretanto,  $2f(\theta_1^*) < 2f(73^\circ) < 2(0,39) < 0,8$  e isso contradiz (3.9).

Considere  $n \geq 5$ . Escrevendo as equações do sistemas para os  $\theta_i^*$ 's e fazendo uso das relações entre os ângulos e das equações do sistema original temos que

$$f(\theta_4^*) = f(\theta_1^* + \theta_3 + \dots + \theta_n), \quad (3.11)$$

$$f(\theta_4^* + \theta_3) = f(\theta_1^* + \theta_4 + \dots + \theta_n), \quad (3.12)$$

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_4^* + \theta_3 + \dots + \theta_n), \quad (3.13)$$

$$f(\theta_1^* + \theta_n) = f(\theta_4^* + \theta_3 + \dots + \theta_{n-1}). \quad (3.14)$$

Aplicando o Lema 3.1 ao par (3.11) e (3.13) temos que acontece exatamente uma das seguintes situações

$$\begin{aligned} \theta_1^* &= \theta_4^*, \\ \theta_1^* &= \theta_4^* + \theta_3 + \dots + \theta_n, \\ \theta_4^* &= \theta_3 + \dots + \theta_n + \theta_1^*. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Fazendo uso do par de equações (3.11) e (3.12) o Lema 3.1 nos fornece uma única possibilidade entre

$$\begin{aligned}\theta_4^* &= \theta_1^* + \theta_4 + \dots + \theta_n, \\ \theta_4^* &= \theta_1^* + \theta_3 + \dots + \theta_n, \\ \theta_4^* + \theta_3 &= \theta_1^* + \theta_4 + \dots + \theta_n\end{aligned}\tag{3.16}$$

e, para o par (3.13) e (3.12), o mesmo Lema implica em exatamente uma das equações abaixo

$$\begin{aligned}\theta_1^* &= \theta_4^* + \theta_3, \\ \theta_1^* &= \theta_4^* + \theta_3 + \dots + \theta_n, \\ \theta_4^* + \theta_3 &= \theta_4 + \dots + \theta_n + \theta_1^*.\end{aligned}\tag{3.17}$$

A única possibilidade para ser satisfeita uma única equação em cada um dos grupos (3.15), (3.16) e (3.17) é termos

$$\theta_1^* = \theta_4^*.$$

Do grupo (3.17) teremos

$$\theta_3 = \theta_4 + \dots + \theta_n.\tag{3.18}$$

Utilizando agora o Lema 3.1 ao par de equações (3.13) e (3.14) e, já que  $\theta_1^* = \theta_4^*$ , teremos

$$\theta_n = \theta_3 + \dots + \theta_{n-1},$$

contradizendo (3.18).

Vejamos por fim o caso  $n = 4$ . As equações serão

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_3 + \theta_4 + \theta_4^*),\tag{3.19}$$

$$f(\theta_2^*) + f(\theta_2^* + \theta_3^*) + f(\theta_2^* + \theta_2) = f(\theta_4 + \theta_1^*) + f(\theta_1^*),\tag{3.20}$$

$$f(\theta_3^*) = f(\theta_2^*),\tag{3.21}$$

$$f(\theta_4^*) = f(\theta_3 + \theta_4 + \theta_1^*),\tag{3.22}$$

$$f(\theta_4 + \theta_1^*) = f(\theta_4^* + \theta_3).\tag{3.23}$$

Podemos repetir o argumento feito acima para  $n \geq 5$  e obteremos com isso

$$\theta_1^* = \theta_4^*$$

e

$$\theta_3 = \theta_4.$$

Além disso, de (3.19) e (3.21), para que a soma dos ângulos não seja maior que  $2\pi$  devemos ter

$$\theta_2^* = \theta_3^*.$$

A configuração original para  $n = 4$ , neste caso, possui um eixo de simetria passando por dois dos satélites e deve ser, portanto, o quadrado  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \pi/2$ , ou a configuração dada por

$$\theta_1 = \theta_2 = \pi/3 \text{ e } \theta_3 = \theta_4 = 2\pi/3$$

ou

$$\theta_1 = \theta_2 = 2\pi/3 \text{ e } \theta_3 = \theta_4 = \pi/3.$$

Se  $\theta_3 = 2\pi/3$ , então de (3.19) temos

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_1^* + 4\pi/3).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \theta_1^* > \pi/4 &\Rightarrow \theta_2^* = \theta_1 - \theta_1^* = \pi/3 - \theta_1^* < \pi/12 \\ &\Rightarrow f(\theta_2^*) < f(\pi/12) < -14. \end{aligned}$$

É fácil ver que esta situação torna impossível a equação (3.20).

Se  $\theta_3 = \pi/3$ , teremos a partir de (3.19)

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_1^* + 2\pi/3).$$

A partir do comportamento de  $f$  devemos ter

$$\begin{aligned} \theta_1^* &= \pi/3 \\ \Rightarrow \theta_2^* &= \pi/3 \end{aligned}$$

e temos assim o hexágono regular.

Resta o caso  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \pi/2$ . Denotando  $x = \theta_1^*$ , podemos observar que as equações neste caso são

$$f(x) = f(\pi + x), \tag{3.24}$$

$$3f(x) = f(\pi/2 - x) + f(\pi - 2x). \tag{3.25}$$

Mostraremos que as raízes das equações acima são distintas. Escreva

$$f(x) = \frac{1}{4} \cos(x/2) \operatorname{sen}^{-2}(x/2) (8 \operatorname{sen}^3(x/2) - 1).$$

É fácil ver que devido a relação (3.24) devemos ter  $0 < x < \pi/3$ . Tomando  $u = \operatorname{sen}(x/2)$  e  $v = \cos(x/2)$  teremos

$$\begin{aligned} 4f(x) &= vu^{-2}(8u^3 - 1), \\ 4f(\pi + x) &= -uv^{-2}(8v^3 - 1), \\ 4f(\pi - 2x) &= -2uv(v^2 - u^2)^{-2}(8(v^2 - u^2)^3 - 1), \\ 4f(\pi/2 - x) &= \sqrt{2}(u + v)(v - u)^{-2}(2\sqrt{2}(v - u)^3 - 1). \end{aligned}$$

Sejam  $P = 4f(x) - 4f(\pi + x)$  e  $Q = 12f(x) - 4f(\pi/2 - x) - 4f(\pi - 2x)$ . As equações são dadas por

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

Denotando por  $p$  e  $q$  os numeradores de  $P$  e  $Q$ , respectivamente, teremos

$$p(u, v) = -u^3 - v^3 + 16u^3v^3$$

e

$$\begin{aligned} q(u, v) &= \sqrt{2}u^5 + 4u^8 - 2u^3v - 3u^4v + 3\sqrt{2}u^4v + 24u^7v - 16u^9v + 3\sqrt{2}u^3v^2 - 12u^6v^2 + 6u^2v^3 + \\ &+ \sqrt{2}u^2v^3 - 48u^5v^3 + 48u^7v^3 + 12u^4v^4 - 3v^5 + 24u^3v^5 - 48u^5v^5 - 4u^2v^6 + 16u^3v^7. \end{aligned}$$

Sejam  $R_1$  e  $R_2$  os resultantes de  $p$  e  $q$  com respeito a  $u$  e  $v$ , respectivamente. Lembrando que  $R_1$  e  $R_2$  são polinômios nas variáveis  $v$  e  $u$ , respectivamente, com a propriedade que, se  $(u_0, v_0)$  é solução de  $p = 0$  e  $q = 0$ , então  $R_1(v_0) = R_2(u_0) = 0$ . Temos que

$$R_1(v) = -2v^{12}r_1(v),$$

onde

$$\begin{aligned} r_1(v) &= -4 + 18v + 18\sqrt{2}v - 135v^2 + 384v^3 - 1800v^4 - 1728\sqrt{2}v^4 + 12240v^5 + \dots \\ &\dots + 231928233984v^{32} - 21474836480v^{33} - 154618822656v^{34} + 34359738368v^{36} \end{aligned}$$

e

$$R_2(u) = 2u^{12}r_2(u),$$

onde

$$r_2(u) = 4 + 18u - 18\sqrt{2}u + 135u^2 - 384u^3 - 1800u^4 + 1728\sqrt{2}u^4 - \dots \\ \dots - 21474836480u^{33} - 154618822656u^{34} + 34359738368u^{36}.$$

As soluções  $u = v = 0$  não nos interessa, então nos concentraremos nos polinômios  $r_1(v)$  e  $r_2(u)$ . Mostremos que  $r_1(v)$  não tem raiz se  $v \in [9/10, 1]$ . Para isto tomamos a substituição racional  $v = \frac{9+s}{10+s}$  que leva  $(0, \infty)$  em  $(9/10, 1)$  e transforma  $r_1(v)$  em uma função racional em  $s$  cujo numerador possui apenas termos negativos, logo não se anula em  $(0, \infty)$ . Tal função é dada<sup>1</sup> por

$$r_1(s) = \frac{1}{(10+s)^{36}} \left( -1008258045536460519041298702036036780097011712 + \dots \right. \\ \left. \dots + 4183796399670\sqrt{2}s^{35} - 21095906033s^{36} + 12595023450\sqrt{2}s^{36} \right).$$

Desta forma, para que se tenha solução simultânea das equações (3.24) e (3.25) devemos ter  $0 < v < 9/10$ . Como  $u^2 + v^2 = 1$ , e  $u = \text{sen}(x/2) \leq 1/2$  então

$$\frac{21}{50} < \frac{\sqrt{19}}{10} = \sqrt{1 - (9/10)^2} < u \leq \frac{1}{2}.$$

Tomando a substituição racional  $u = \frac{21+t}{50+2t}$ ,  $r_2(u)$  é transformado numa função racional que não tem raízes, pois seu numerador é um polinômio de grau 36 em  $t$  com todos os coeficientes negativos. De fato,  $r_2(t)$  é dado<sup>1</sup> por

$$r_2(t) = \frac{1}{16(25+t)^{36}} \left( 39355704304464511525941168410542220606454431557393 - \dots \right. \\ \left. \dots - 57616560\sqrt{2}t^{34} + 168012t^{35} - 152568\sqrt{2}t^{35} + 217t^{36} - 196\sqrt{2}t^{36} \right).$$

Isso mostra que  $r_2(u)$  não tem raízes em  $(\frac{21}{50}, \frac{1}{2})$  e assim, as soluções de (3.24) e (3.25) são distintas. ■

---

<sup>1</sup>A expressão completa encontra-se no Apêndice

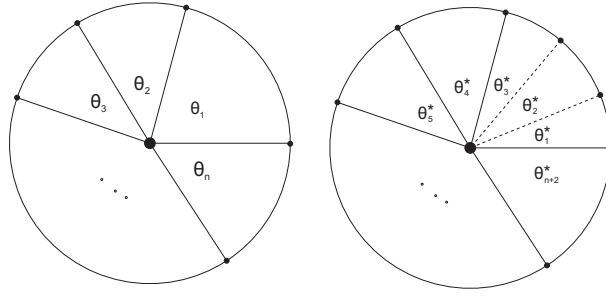


Figura 3.5: Ilustração da situação tratada na Proposição 3.3

Observa-se que o caso onde se tem um quadrado e adicionamos dois satélites como na proposição anterior é tratado de modo diferente dos demais. Isso acontece pois as raízes das equações (3.24) e (3.25) são muito próximas. Este fato é reflexo da existência de uma configuração central de  $1 + 6$  corpos que está próxima de uma configuração empilhada com 4 satélites nos vértices de um quadrado. Numericamente, como vimos na Seção 1.1.3, temos que 4 satélites dessa configuração estão separados pelos ângulos

$$(88.04^\circ, 88.04^\circ, 91.96^\circ, 91.96^\circ)$$

aproximadamente.

O resultado seguinte trata do último caso, onde dois novos corpos de massas infinitesimais iguais são postos entre dois dos satélites originais. Um dos ângulos que determina a configuração ficará dividido em três ângulos menores e os demais serão preservados, como na Figura 3.5.

**Proposição 3.3** *Considere uma configuração central  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  de  $1+n$  corpos no plano, com  $n \geq 2$ . Suponha que foram adicionados dois novos satélites entre dois dos satélites originais e a nova configuração com  $1+(n+2)$  corpos é central. Então  $n = 2$ , os satélites originais formam um triângulo equilátero com o corpo maciço e a configuração nova é a pipa dada por  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ . Ver Fig. 3.6.*

**Demonstração:**

As relações entre os ângulos são dadas por

$$\theta_1 = \theta_1^* + \theta_2^* + \theta_3^*$$

e

$$\theta_i = \theta_{i+2}^*, \quad 2 \leq i \leq n.$$

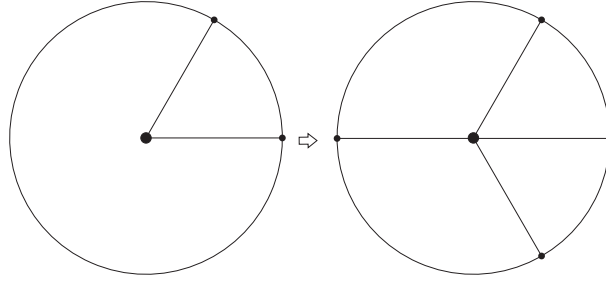


Figura 3.6: Ilustração da situação tratada na Proposição 3.3

Vejamos o caso  $n = 2$ . As equações são

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_2 + \theta_3^*), \quad (3.26)$$

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_2^*) + f(\theta_2^* + \theta_3^*), \quad (3.27)$$

$$f(\theta_2^*) = f(\theta_1^*) + f(\theta_3^*), \quad (3.28)$$

$$f(\theta_3^*) = f(\theta_1^* + \theta_2). \quad (3.29)$$

Como  $(\theta_1, \theta_2)$  é uma configuração central para  $n = 2$  temos  $\theta_2 = \pi, \theta_2 = 5\pi/3$  ou  $\theta_2 = \pi/3$ .

Se  $\theta_2 = \pi$ , então  $\theta_1 = \theta_1^* + \theta_2^* + \theta_3^* = \pi$  e, pelo Lema 3.1, as equações (3.26) e (3.29) serão satisfeitas apenas se  $\theta_1^* = \theta_3^*$ . Assim  $f(\theta_1^*) = f(\pi + \theta_1^*)$  o que implica em  $\theta_1^* < \pi/3$  e daí,  $f(\theta_1) < 0$ . De (3.28) teremos

$$f(\theta_2^*) = 2f(\theta_1^*) < 0 \Rightarrow \theta_2^* < \frac{\pi}{3}.$$

Daí teremos contradição

$$\theta_1^* + \theta_2^* + \theta_3^* < \pi = \theta_1.$$

Se  $\theta_2 = 5\pi/3$  concluímos da mesma forma que  $\theta_1^* = \theta_3^*$  e assim

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_1^* + 5\pi/3).$$

Pelo gráfico de  $f$  essa equação é impossível, pois teríamos  $\theta_1^* > \pi/3$  e a soma dos ângulos seria superior a  $2\pi$ .

Resta o caso  $\theta_2 = \pi/3$ . Em vista das equações (3.26) e (3.29), o Lema 3.1 implica em três possibilidades disjuntas:  $\theta_1^* = \pi/3 + \theta_3^*$ ,  $\theta_3^* = \pi/3 + \theta_1^*$  ou  $\theta_1^* = \theta_3^*$ .

Se  $\theta_1 = \pi/3 + \theta_3^*$  temos de (3.29)

$$f(\theta_3^*) = f(2\pi/3 + \theta_3^*) \Rightarrow \theta_3^* = \pi/3 \Rightarrow f(\theta_3^*) = 0.$$

De (3.27) e (3.28) teremos  $f(\theta_2^* + \pi/3) = 0$ , logo  $\theta_2^* = 2\pi/3$  e teremos a configuração da pipa.

O caso  $\theta_3 = \pi/3 + \theta_1^*$  é análogo e resulta na mesma configuração.

Considere agora  $\theta_1^* = \theta_3^*$ . Assim  $f(\theta_1^*) = f(\pi/3 + \theta_1^*)$  e naturalmente

$$\pi/3 < \theta_1^* < \theta_c < \theta_1^* + \pi/3 < \pi.$$

Pelo Lema 1.3 temos

$$2\theta_1^* + \pi/3 < \pi/3 + \pi \Rightarrow \theta_1^* < \pi/2$$

e

$$2\theta_1^* + \pi/3 > 2\theta_c > 6\pi/5 \Rightarrow \theta_1^* > \frac{13\pi}{30}.$$

De (3.28) temos  $f(\theta_2^*) = 2f(\theta_1^*)$ . Como  $\theta_1^* < \pi/2$ , então  $\theta_2^* = 5\pi/3 - 2\theta_1^* > 2\pi/3$ . Logo

$$2f(\theta_1^*) = f(\theta_2^*) < f(2\pi/3) < 0,7.$$

Contudo, após o cálculo, vemos que isso contradiz o fato de  $\theta_1^* > 13\pi/30$ , pois  $f(13\pi/30) > f(2\pi/5) > 0,36$ .

Considere agora o caso  $n = 3$ . As equações se reduzem a

$$f(\theta_1) = f(\theta_2) = f(\theta_3),$$

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_2 + \theta_3 + \theta_3^*),$$

$$f(\theta_3^*) = f(\theta_2 + \theta_3 + \theta_1^*),$$

$$f(\theta_3 + \theta_1^*) = f(\theta_2 + \theta_3^*).$$

Em vista do Lema 3.1, as três últimas equações implicam em

$$\theta_1^* = \theta_3^*$$

e daí

$$\theta_2 = \theta_3.$$



Temos assim,

$$f(\theta_1^*) = f(2\theta_2 + \theta_1^*), \quad (3.30)$$

$$f(\theta_2) = f(2\theta_1^* + \theta_2^*), \quad (3.31)$$

$$f(\theta_2^*) + f(\theta_1^* + \theta_2^*) = f(\theta_1^* + \theta_2) + f(\theta_1^*). \quad (3.32)$$

O ângulo  $\theta_2$  satisfaz

$$f(\theta_2) + f(2\theta_2) = 0.$$

Na Seção 1.1.3 vimos que a equação acima tem três soluções em  $(0, \pi)$ :  $\theta_2 = 2\pi/3$ ,  $\theta_2 = a$  e  $\theta_2 = b$ , com  $a < 50^\circ$  e  $2\pi/3 < b$ .

Se  $\theta_2 = 2\pi/3$  então  $\theta_1 = 2\pi/3$ . Como  $f$  é injetiva em  $(0, \pi/4)$ , por (3.30) temos  $\theta_1^* > \pi/4$ . Logo  $\theta_2^* = \theta_1 - 2\theta_1^* = 2\pi/3 - 2\theta_1^* < \pi/6$ . Assim

$$f(\theta_2^*) < -3.$$

É fácil ver que neste caso é impossível a equação (3.32) ser satisfeita.

Se  $\theta_2 = a < \theta_c/2$ , então  $\theta_1 > 2\pi - \theta_c$ . Como  $a > \pi/4$  então  $2\theta_2 > \pi/2$ .

A partir do gráfico de  $f$  podemos concluir que  $\pi/3 < \theta_1^* < \theta_c$ . Ainda mais, afirmamos que  $\theta_1^* < 7\pi/18$ . De fato, se  $\theta_1^* > 7\pi/18$  então  $\theta_1^* + 2\theta_2 > 8\pi/9$ . Portanto, teremos a contradição:

$$0.317 < f(7\pi/18) < f(\theta_1^*) = f(\theta_1^* + 2\theta_2) < f(8\pi/9) < 0.298.$$

Assim sendo,

$$\theta_1^* < 7\pi/18 \Rightarrow \theta_2^* > 2\pi/3$$

$$\Rightarrow \theta_2 + \theta_1^* < 2\pi/3 < \theta_2^*$$

$$\Rightarrow f(\theta_2^*) < f(\theta_2 + \theta_1^*)$$

De (3.32) obtemos

$$f(\theta_1^* + \theta_2^*) > f(\theta_1^*) = f(\theta_1^* + 2\theta_2)$$

$$\Rightarrow \theta_1^* + 2\theta_2 > \theta_1^* + \theta_2^*$$

$$\Rightarrow 2\theta_2 > \theta_2^*,$$

Mas, isto é impossível desde que  $\theta_2 < 50^\circ$  e  $\theta_2^* > 120^\circ$ .

Resta o caso  $\theta_1 = b > 138^\circ$ . Mas essa suposição leva a  $\theta_1 < \pi/2$  e a contradição com  $\theta_1^* > \pi/4$  oriunda de (3.30).

Suponha  $n \geq 4$ . Vamos mostrar que ao adicionarmos dois novos satélites a configuração nova não é cental.

A primeira equação da nova configuração, devido ao fato de

$$f(\theta_1) + f(\theta_1 + \theta_2) + \dots + f(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) = 0,$$

se torna

$$f(\theta_1^*) = f(\theta_3^* + \theta_2 + \dots + \theta_n). \quad (3.33)$$

De modo análogo obteremos as relações:

$$f(\theta_3^*) = f(\theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_1^*), \quad (3.34)$$

$$f(\theta_3^* + \theta_2) = f(\theta_3 + \dots + \theta_n + \theta_1^*), \quad (3.35)$$

$$f(\theta_3^* + \theta_2 + \theta_3) = f(\theta_4 + \dots + \theta_n + \theta_1^*). \quad (3.36)$$

Observe que podemos utilizar o Lema 3.1 nas equações (3.33), (3.34), (3.35) e (3.36) escolhidas duas a duas. Assim para as equações (3.33) e (3.34) teremos apenas uma das igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} \theta_1^* &= \theta_3^*, \\ \theta_1^* &= \theta_3^* + \theta_2 + \dots + \theta_n, \\ \theta_3^* &= \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_1^*. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Aplicando o Lema 3.1 às equações (3.33) e (3.35) temos que apenas uma equação abaixo é satisfeita:

$$\begin{aligned} \theta_1^* &= \theta_3^* + \theta_2, \\ \theta_1^* &= \theta_3^* + \theta_2 + \dots + \theta_n, \\ \theta_3^* + \theta_2 &= \theta_3 + \dots + \theta_n + \theta_1^*. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Da mesma forma, o Lema 3.1 aplicado a (3.34) e (3.35) implica que uma única igualdade abaixo é satisfeita:

$$\begin{aligned}\theta_3^* &= \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_1^*, \\ \theta_3^* + \theta_2 &= \theta_1^* + \theta_3 + \dots + \theta_n, \\ \theta_3^* &= \theta_3 + \dots + \theta_n + \theta_1^*.\end{aligned}\tag{3.39}$$

É fácil ver que devido a (3.37), (3.38) e (3.39), temos

$$\begin{aligned}\theta_1^* &= \theta_3^*, \\ \theta_2 &= \theta_3 + \dots + \theta_n.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Utilizando agora o Lema 3.1 para as equações (3.33) e (3.36) e o fato que  $\theta_1^* = \theta_3^*$  teremos

$$\theta_2 + \theta_3 = \theta_4 + \dots + \theta_n.$$

Entretanto, esta relação contradiz (3.40). ■

Podemos observar que a prova da não existência de configurações centrais empilhadas para  $n \geq 4$  nas Proposições 3.1 e 3.3 e para  $n \geq 5$  na Proposição 3.2 pode ser estendida para algo mais geral, onde não se considera a igualdade das massas dos satélites na configuração original, da seguinte forma:

**Teorema 3.2** *Considere uma configuração central planar de  $1 + n$  corpos, associada às massas  $\mu_1, \dots, \mu_n$ . Suponha que foram adicionados a essa configuração dois novos satélites com a mesma massa  $\mu$ . Então, se  $n \geq 5$  a nova configuração não é central. Se os dois novos satélites não estão separados apenas por um satélite original, então o resultado vale para  $n \geq 4$ .*

**Demonstração:** Basta notar que ainda podemos utilizar o Lema 3.1, pois, nesse caso, em todas as equações o parâmetro de massa  $\mu$  aparece multiplicando  $f$  nos dois lados das igualdades e então pode ser cancelado. Isso resulta nas mesmas equações obtidas nas demonstrações das Proposições 3.1 e 3.3 para  $n \geq 4$  e na Proposição 3.2 para  $n \geq 5$ . ■

# Apêndice A

## Polinômios da Proposição 3.2

A seguir escrevemos explicitamente os polinômios que apareceram na Proposição 3.2 na demonstração da inexistência de uma configuração central planar de 1 + 6 corpos que contém quatro corpos nos vértices de um quadrado.

$$\begin{aligned} r_1(v) = & -4 + 18v + 18\sqrt{2}v - 135v^2 + 384v^3 - 1800v^4 - 1728\sqrt{2}v^4 + 12240v^5 + \\ & + 792\sqrt{2}v^5 - 15360v^6 + 75888v^7 + 69552\sqrt{2}v^7 - 474480v^8 - 68544\sqrt{2}v^8 + \\ & + 347648v^9 - 1738944v^{10} - 1497600\sqrt{2}v^{10} + 10262016v^{11} + 2469888\sqrt{2}v^{11} - \\ & - 5376768v^{12} - 124928\sqrt{2}v^{12} + 23030784v^{13} + 17989632\sqrt{2}v^{13} - \\ & - 135475200v^{14} - 47554560\sqrt{2}v^{14} + 68247552v^{15} + 7995392\sqrt{2}v^{15} - \\ & - 166477824v^{16} - 108527616\sqrt{2}v^{16} + 1118601216v^{17} + 516980736\sqrt{2}v^{17} - \\ & - 748748800v^{18} - 200638464\sqrt{2}v^{18} + 414056448v^{19} + 141557760\sqrt{2}v^{19} - \\ & - 5584453632v^{20} - 2980970496\sqrt{2}v^{20} + 6147276800v^{21} + 2466775040\sqrt{2}v^{21} + \\ & + 2500853760v^{22} + 1514668032\sqrt{2}v^{22} + 13721665536v^{23} + 6190792704\sqrt{2}v^{23} - \\ & - 31855738880v^{24} - 14881390592\sqrt{2}v^{24} - 19100860416v^{25} - 4907335680\sqrt{2}v^{25} + \\ & + 9210691584v^{26} + 13589544960\sqrt{2}v^{26} + 92744450048v^{27} + 35030827008\sqrt{2}v^{27} + \\ & + 23555211264v^{28} - 1207959552\sqrt{2}v^{28} - 147371065344v^{29} - \\ & - 48318382080\sqrt{2}v^{29} - 133143986176v^{30} + 6442450944\sqrt{2}v^{30} + \\ & + 77309411328v^{31} + 19327352832\sqrt{2}v^{31} + 231928233984v^{32} - 21474836480v^{33} - \\ & - 154618822656v^{34} + 34359738368v^{36}. \end{aligned}$$

Tomando a substituição racional  $v = \frac{9+s}{10+s}$  teremos

$$\begin{aligned}
 r_1(s) = & \frac{1}{(10+s)^{36}} \left( -1008258045536460519041298702036036780097011712 + \right. \\
 & +703154989278597577665542304052850511052800000\sqrt{2} - \\
 & -3949096211495880237331095634516896268437946368s + \\
 & +2742861266347675898325420697892526489600000000\sqrt{2}s - \\
 & -7518878423926330243988461298303666307880452096s^2 + \\
 & +5200935630541765770532329777904639625134080000\sqrt{2}s^2 - \\
 & -9270913061250621350269482555821000202456662016s^3 + \\
 & +6386584906722206201106211885372257953906688000\sqrt{2}s^3 - \\
 & -8321151828393028144100990155577927748374495232s^4 + \\
 & +5708773474535705267608714712172255072642662400\sqrt{2}s^4 - \\
 & -5793838106323042986525470574410337740409274368s^5 + \\
 & +3958532831624727432453272103083632397886947328\sqrt{2}s^5 - \\
 & -3256690153529996530561761865734096435359514624s^6 + \\
 & +2215889711034543316331096068224856603792244736\sqrt{2}s^6 - \\
 & -1518437018832284414286501771303488924543877120s^7 + \\
 & +1028886518105671962363016241258285970562744320\sqrt{2}s^7 - \\
 & -598825389222522607605263354942195495249903616s^8 + \\
 & +404077798546224905467717422859835842209251328\sqrt{2}s^8 - \\
 & -202679694380108060750333724508299803098087424s^9 + \\
 & +136195924486723249840336706246418944237764608\sqrt{2}s^9 - \\
 & -59534465304894223752777856859120496745119744s^{10} + \\
 & +39838805101281677133727057384030499034365952\sqrt{2}s^{10} - \\
 & -15308913469103098626768313875625205525643264s^{11} + \\
 & +10201427826864972001654013875063806700290048\sqrt{2}s^{11} - \\
 & -3469764901972133050326197984147597473873920s^{12} + \\
 & +2302449086317950012346124384161009110089728\sqrt{2}s^{12} - \\
 & -696895118677925204038096161929681962008576s^{13} + \\
 & +460495419114444571376048012853406407327744\sqrt{2}s^{13} - \\
 & -124557586274295634534791603844472286216192s^{14} + \\
 & +81957811577731112936380858748141808648192\sqrt{2}s^{14} - \\
 & -19875084066397813856097614730145780727808s^{15} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +13022238501720252669435101164534997450752\sqrt{2}s^{15} - \\
& -2838056333329222392315656341802235396096s^{16} + \\
& +1851604597064460460253416062862359134208\sqrt{2}s^{16} - \\
& -363262973411907822335414845380966678528s^{17} + \\
& +235989588389917051542527574224533782528\sqrt{2}s^{17} - \\
& -41718490088039671692684417535850266624s^{18} + \\
& +26985998593131674567201375225167380480\sqrt{2}s^{18} - \\
& -4300135511555473816972724633304907776s^{19} + \\
& +2769643106499712876733748365000736768\sqrt{2}s^{19} - \\
& -397690339650221868664312335157014528s^{20} + \\
& +255042076557287862790804939426062336\sqrt{2}s^{20} - \\
& -32968565486739720280084206039605248s^{21} + \\
& +21051601994461803743077765129891840\sqrt{2}s^{21} - \\
& -2445875464387262192563583530807296s^{22} + \\
& +1555001204942938162004489678512128\sqrt{2}s^{22} - \\
& -161999135960112301294121823108096s^{23} + \\
& +102544686199809834201092885121024\sqrt{2}s^{23} - \\
& -9548529226386512537417057940736s^{24} + \\
& +6017742426749773950225536061952\sqrt{2}s^{24} - \\
& -498751237564870518276518926848s^{25} + \\
& +312946515365623503806883747072\sqrt{2}s^{25} - \\
& -22962822788415694020330817344s^{26} + \\
& +14344736868478106157100433664\sqrt{2}s^{26} - 925550760886855959007501696s^{27} + \\
& +575626363296783505727847168\sqrt{2}s^{27} - 32377352898369593373082704s^{28} + \\
& +20046872266785383404964832\sqrt{2}s^{28} - 972095525513630869394736s^{29} + \\
& +599198325868005673465584\sqrt{2}s^{29} - 24687747010018004161328s^{30} + \\
& +15149237199444465651744\sqrt{2}s^{30} - 520101341969972718720s^{31} + \\
& +317713760793587987064\sqrt{2}s^{31} - 8846007624861998484s^{32} + \\
& +5379290230187718360\sqrt{2}s^{32} - 116722918296921452s^{33} + \\
& +70656819705125064\sqrt{2}s^{33} - 1121207085620727s^{34} + \\
& +675607600791108\sqrt{2}s^{34} - 6975267000684s^{35} + 4183796399670\sqrt{2}s^{35} - \\
& - 21095906033s^{36} + 12595023450\sqrt{2}s^{36} \Big).
\end{aligned}$$

Todos os coeficientes de  $r_1(s)$  são negativos, compostos por um inteiro mais o produto de um inteiro por  $\sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned}
r_2(u) = & 4 + 18u - 18\sqrt{2}u + 135u^2 - 384u^3 - 1800u^4 + 1728\sqrt{2}u^4 - 12240u^5 + \\
& + 792\sqrt{2}u^5 + 15360u^6 + 78480u^7 - 68688\sqrt{2}u^7 + 474480u^8 - 68544\sqrt{2}u^8 - \\
& - 307712u^9 - 1947456u^{10} + 1451520\sqrt{2}u^{10} - 10262016u^{11} + 2469888\sqrt{2}u^{11} + \\
& + 2501376u^{12} + 124928\sqrt{2}u^{12} + 30053376u^{13} - 17399808\sqrt{2}u^{13} + \\
& + 135917568u^{14} - 47407104\sqrt{2}u^{14} + 17031168u^{15} - 7995392\sqrt{2}u^{15} - \\
& - 295944192u^{16} + 117964800\sqrt{2}u^{16} - 1148682240u^{17} + 511672320\sqrt{2}u^{17} - \\
& - 591724544u^{18} + 200638464\sqrt{2}u^{18} + 1853227008u^{19} - 462422016\sqrt{2}u^{19} + \\
& + 6400770048u^{20} - 2983329792\sqrt{2}u^{20} + 5845286912u^{21} - 2466775040\sqrt{2}u^{21} - \\
& - 7464812544u^{22} + 1505230848\sqrt{2}u^{22} - 24933040128u^{23} + 8304721920\sqrt{2}u^{23} - \\
& - 29641146368u^{24} + 14881390592\sqrt{2}u^{24} + 21969764352u^{25} - \\
& - 4756340736\sqrt{2}u^{25} + 72024588288u^{26} - 13589544960\sqrt{2}u^{26} + \\
& + 83080773632u^{27} - 35030827008\sqrt{2}u^{27} - 53754200064u^{28} + \\
& + 1207959552\sqrt{2}u^{28} - 147371065344u^{29} + 48318382080\sqrt{2}u^{29} - \\
& - 107374182400u^{30} - 6442450944\sqrt{2}u^{30} + 77309411328u^{31} - \\
& - 19327352832\sqrt{2}u^{31} + 231928233984u^{32} - 21474836480u^{33} - \\
& - 154618822656u^{34} + 34359738368u^{36}.
\end{aligned}$$

Tomando a substituição

$$u = \frac{21 + t}{50 + 2t},$$

teremos

$$\begin{aligned}
r_2(t) = & \frac{1}{16(25+t)^{36}} \left( 39355704304464511525941168410542220606454431557393 - \right. \\
& -39249115788439924325393189378990445455012929687500\sqrt{2} + \\
& +73046289654945210189544159887221677957510617520188t - \\
& -74838001652734607983002116881065182425553953125000\sqrt{2}t + \\
& +65539147314063670164916870255990220080267392056526t^2 - \\
& -68600585926479178920519078608530488130611378750000\sqrt{2}t^2 + \\
& +37898701125551645315694047661385630249006828970124t^3 - \\
& -40322813081823604965591182582816265358659733275000\sqrt{2}t^3 + \\
& +15884488571306382590188818812829273095654329808625t^4 - \\
& -17101704556180504866625496904676471375836030790500\sqrt{2}t^4 + \\
& +5144426956204012349008185645071563886749985449824t^5 - \\
& -5582694899129537632360889130548725771268588725824\sqrt{2}t^5 + \\
& +1340089154497714897762903554593409759546408163152t^6 - \\
& -1460961901417347822405978463195642618593733570560\sqrt{2}t^6 + \\
& +288555029456946655179859337786959588228771980384t^7 - \\
& -315158333932554187316876081670313241851878648000\sqrt{2}t^7 + \\
& +52378962832015899201021608611808206081982778612t^8 - \\
& -57182511993560501001834049868514195364408016688\sqrt{2}t^8 + \\
& +8133751581108510244277868479821711285236474960t^9 - \\
& -8859354447226524009922914208842386869382751840\sqrt{2}t^9 + \\
& +1092728294627134861061053629520156253452885896t^{10} - \\
& -1185733535804983439957862483110737935757260480\sqrt{2}t^{10} + \\
& +128122026493017284217615597728691625424879760t^{11} - \\
& -138342660971000643077775760280681624846922912\sqrt{2}t^{11} + \\
& +13201294086370972919415134409073776262455972t^{12} - \\
& -14171366845776688260817086195522270916727248\sqrt{2}t^{12} + \\
& +1201841056077003991417513462178257036825632t^{13} - \\
& -1281747463361603566554121885948545099678912\sqrt{2}t^{13} + \\
& +97086899692711453957612146779323420861488t^{14} - \\
& -102813046879225600155860137162539497953536\sqrt{2}t^{14} +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +6981949315858211951158048224000643228704t^{15} - \\
& -7338862751828283306131658518360898082368\sqrt{2}t^{15} + \\
& +448073007083986755109697784329206328334t^{16} - \\
& -467354192497203845100490087901425377768\sqrt{2}t^{16} + \\
& +25704316026471321427867640534302168104t^{17} - \\
& -26599186661090251738629733084507215024\sqrt{2}t^{17} + \\
& +1319411799224589231352882206749721556t^{18} - \\
& -1354435531995835704482688403595023520\sqrt{2}t^{18} + \\
& +60620813948632941525155316586106760t^{19} - \\
& -61729250187474650047049784804510288\sqrt{2}t^{19} + \\
& +2492319407325914096500637366867070t^{20} - \\
& -2517443707332349297963058911032312\sqrt{2}t^{20} + \\
& +91604838072250240455601858068640t^{21} - \\
& -91785277643503926158246890026432\sqrt{2}t^{21} + \\
& +3005121591432719298629367608112t^{22} - \\
& -2987033668802206761001656476160\sqrt{2}t^{22} + \\
& +87782532716113137852156138912t^{23} - \\
& -86565626567657220529905973056\sqrt{2}t^{23} + \\
& +2275970162951873641245635844t^{24} - \\
& -2226939025249043242875201648\sqrt{2}t^{24} + 52158415955846057371974096t^{25} - \\
& -50643491486677074555177312\sqrt{2}t^{25} + 1050897836588323521748104t^{26} - \\
& -1012692140473181180543424\sqrt{2}t^{26} + 18489444049045362500880t^{27} - \\
& -17685821109514093356960\sqrt{2}t^{27} + 281615311631074096404t^{28} - \\
& -267432991228477803024\sqrt{2}t^{28} + 3672212164314768864t^{29} - \\
& -3462762808383200064\sqrt{2}t^{29} + 40404217411543632t^{30} - \\
& -37839280581287168\sqrt{2}t^{30} + 367868304260064t^{31} - 342232160046528\sqrt{2}t^{31} + \\
& +2697453913833t^{32} - 2493401770668\sqrt{2}t^{32} + 15308018556t^{33} - \\
& -14062783752\sqrt{2}t^{33} + 63091278t^{34} - 57616560\sqrt{2}t^{34} + 168012t^{35} - \\
& -152568\sqrt{2}t^{35} + 217t^{36} - 196\sqrt{2}t^{36}.
\end{aligned}$$

Podemos ver também que todos os coeficientes de  $r_2(t)$  são negativos.

# Referências Bibliográficas

- [1] ALBOUY, A., FU, Y.: *Relative equilibria of four identical satellites*, Proc. R. Soc. A 465, 2633-2645, 2009.
- [2] ARNOLD, V. I.: *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [3] CASASAYAS, J., LLIBRE, J. and NUNES, A.: *Central configuration of the planar  $1 + n$ - body problem*, Cel. Mech. Dynam. Astr., 60, 273-288, 1994.
- [4] CORBERA, M., CORS, J. M. and LLIBRE, J.: *On the central configurations of the planar  $1 + 3$  body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 109, 27-43, 2011.
- [5] CORS, J. M., LLIBRE, J. and OLLÉ, M.: *Central configurations of the planar coorbital satellite problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 89, 319-342, 1994.
- [6] HAMPTON, M.: *Stacked central configurations: new examples in the planar five-body problem*, Nonlinearity, 18(5), 2299-2304, 2005.
- [7] HALL, G. R.: *Central configuration in the Planar  $1 + n$  body problem*, preprint, 1988.
- [8] HAGIHARA, Y.: *Celestial Mechanics*, Vol 1, MIT Press, Cambridge, 1970.
- [9] MAXWELL, J. C.: *On the Stability of Motion of Saturn's Rings*, Macmillan & Co., London, 1985.
- [10] MEYER, K., HALL, G., OFFIN, D.: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the  $N$ -Body Problem*, 2nd ed., Applied Mathematical Sciences, New York, Springer, 2009.
- [11] PÓLYA, G., SZEGÖ, G.: *Problems and Theorems in Analysis*, translation C. E. Billigheimer, Springer-Verlag, 1976.

- [12] RENNER, S., SICARDY, B.: *Stationary configurations for co-orbital satellites with small arbitrary masses*, Cel. Mech. Dynam. Asrt., 88,397-414, 2004.
- [13] SALO, H., YODER, C. F.: *The dynamics of coorbital satellite systems*, Astron. Astrophys, 205, 309-327, 1988.